

TOPOLOJİK DİNAMİKLER VE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

133505

HAKAN EFE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ocak 2003

ANKARA

Hakan EFE tarafından hazırlanan TOPOLOJİK DİNAMİKLER VE DİFERENSİYEL DENKLEMLER adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Aydın TIRYAKI



Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ



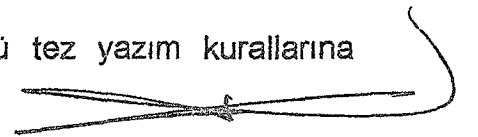
Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN



Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1.Metrik Uzaylar, Kompaktlık ve Düzgün Süreklilik.....	3
2.2.Tam Metrik Uzay.....	10
2.3.Noktasal Yakınsaklık Topolojisi.....	17
2.4.Kompakt Açık Topoloji.....	19
3.DİFERENSİYEL DENKLEMLER.....	22
3.1.Lipschitz Şartı.....	22
3.2.Varlık ve Teklik Teoremleri.....	23
3.3.Diferensiyel Denklem Sistemi	27
4.DİNAMİK SİSTEMLER.....	30
4.1.Temel Kavramlar ve Tanımlar.....	30
4.2.Sürekli Fonksiyonlar Uzayı ve Dinamik Sistem.....	36
5.OTONOM OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE TOPOLOJİK DİNAMİKLER.....	40
5.1.Temel Kuruluş, Kuvvetli Topolojiler ve Topolojik Dinamikler.....	40
5.2.Uyumlu Diferensiyel Denklemler.....	45
5.3. $\mathcal{T}$ Üzerindeki Topolojiler.....	50
5.4. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}^*$ Üzerindeki Topolojik Dinamikler.....	54
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	60

TOPOLOJİK DİNAMİKLER VE DİFERENSİYEL DENKLEMLER
(Yüksek Lisans Tezi)

HAKAN EFE

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2003

ÖZET

Bu tez çalışmasında; dinamik sistem kavramı incelenmiş ve otonom olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerine dinamik sistem gözüyle bakmak için bir yol verilmiştir. Ayrıca bunun için gerekli olan topolojik kavramlardan da bahsedilmiştir.

Bilim Kodu : 403.04.01

Anahtar Kelimeler : Kompakt ve tam metrik uzaylar, sürekli fonksiyonlar uzayı, otonom olmayan diferensiyel denklemler, dinamik sistemler

Sayfa Adedi : 60

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

TOPOLOGICAL DYNAMICS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS
(M.Sc.Thesis)

HAKAN EFE

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 2003

ABSTRACT

In this thesis; we have discussed dynamical system . We have showed that there is a way of wiewing the solutions of a nonautonomous diferential equation as a dynamical system. Furthermore, we have discussed topological concept necessary.

Science Code : 403.04.01

Key Words : Compact and complete metric space, continuous function space, nonautonomous differential equations, dynamical systems.

Page Number : 60

Adviser : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip, beni Topolojik Dinamiklere yönlendiren, fikirleriyle yol gösteren, çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Cemil YILDIZ'a, ayrıca manevi destekleri ile beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşim Fatma ve aileme, yardımları için mesai arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.



1.GİRİŞ

Bu tez çalışmamızın temelini oluşturan konuların tarihi gelişimi şöyle olmuştur. İlk olarak Prof.George Birkhoff dinamik sistemlerin teorisi üzerine çalışmalar yapmıştır. Onun bu çalışmaları yüzyılın ilk yarısında dinamik sistemlerin aksiyomatik yapısı üzerine olmuştur. Bu teoriye otonom olmayan diferensiyel denklemlere önemli bir uygulama olarak bakılmıştır.

Otonom olmayan adi diferensiyel denklemlerin çözümlerine, verilen diferensiyel denklemi daha yüksek boyutlu faz uzayına gömerek ve bağımsız değişkene yeni koordinat gözüyle bakarak, dinamik sistem olarak düşünebiliriz. Bu düşünce geçerlidir fakat diferensiyel denklemin asıl yapısını bozabilir. Örneğin yeni denklem sınırlı bir çözüme, periyodik veya hemen hemen periyodik bir çözüme sahip olmayabilir. Bundan dolayı, topolojik dinamikler teorisinin otonom olmayan diferensiyel denklemlere uygulanması için kuvvetli bir teknik geliştirilememiştir.

Sonraları bazı yazarlar (L.G.Deysach,G.R.Sell,R.K.Miller) bu tekniği geliştirmişlerdir. L.Markus ve Z.Opial topolojik dinamiklerin bazı tekniklerini, denklemlerin çözümlerinin asimtotik davranışları “asimtotik bağımlı” veya “hemen hemen bağımlı” diye tartışmak için kullanmışlardır.J.P.LaSalle ve R.K.Miller periyodik veya hemen hemen periyodik denklemlerin çözümleri için limit kümesi kavramını kullanmışlardır.

Bu çalışmamızda öncelikle metrik uzay, kompaktlık ve süreklilik kavramlarını vereceğiz. Daha sonra tam metrik uzay ve metrik uzayın tamlamasından bahsedeceğiz.

Ayrıca noktasal ve kompakt yakınsaklık topolojisi ile kompakt açık topoloji kavramlarını vereceğiz. Daha sonra diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik teoremlerini vereceğiz.

Son kısımda dinamik sistem kavramını verip otonom olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerine dinamik sistem gözüyle bakmak için bir yol vereceğiz. Bu bakış açısı çok genel olacaktır ve çok zayıf hipotezleri sağlayan bütün diferensiyel denklemler için geçerli olacaktır.



2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Metrik Uzaylar, Kompaktlık ve Düzgün Süreklilik

Tanım 2.1.1: Boş olmayan bir X kümesi ve $X \times X$ den $\mathbb{R}$ nin içine tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, (X,d) ikilisine de metrik uzay denir:

$\forall x,y,z \in X$ için,

$$m_1) d(x,y) \geq 0$$

$$m_2) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$$

$$m_3) d(x,y) = d(y,x)$$

$$m_4) d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \text{ (üçgen eşitsizliği)} [6]$$

Tanım 2.1.2: m_1, m_2, m_4 aksiyomları ile birlikte $(m_2^*) x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ şartını sağlıyorsa d ye metrikimsi, (X,d) ikilisine de metrikimsi uzay denir. Metrik uzaylar için verilecek bir çok sonuç metrikimsi uzaylar için de doğrudur[6].

Örnekler 2.1.3:

a) $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde her $x,y \in \mathbb{R}$ için $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. Bu metriğe reel sayıların (reel doğrunun) mutlak değer veya alışılmış metriği denir.

b) $\mathbb{R}$ nin kendisiyle kartezyen çarpımı olan $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerinde, yani düzlemde $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(x,y) = [(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2]^{1/2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ nin alışılmış metriği veya Öklid metriği denir.

c) Benzer şekilde $\mathbb{R}^n$ üzerinde, her $x=(x_1, \dots, x_n), y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu da $\mathbb{R}^n$ nin alışılmış metriğidir.

d) $\mathbb{R}^n$ üzerinde, her $x=(x_1, \dots, x_n), y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $d(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu da metrik şartlarını sağlar (Taksi-kab metriği).

e) $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \text{ olsun. } d \text{ fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. Bu şekilde}$$

tanımlanan metriğe (ayrık) diskret metrik denir.

Teorem 2.1.4: (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda d metriğinin A ya kısıtlaması olan $d|_A: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A üzerinde bir metriktir. Bu şekilde elde edilen $(A,d|_A)$ uzayına (X,d) uzayının bir alt uzayı denir[6].

Tanım 2.1.5: (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin noktaları arasındaki uzaklıkların oluşturduğu kümenin en küçük üst sınırına (eküs, sup) A nın çapı denir ve $d(A) = \sup\{d(x,y): x,y \in A\}$ şeklinde yazılır.

Çapı sonlu ($d(A) < \infty$) olan kümeye sınırlı küme, çapı sonsuz ($d(A) = \infty$) kümeye sınırsız küme denir[6].

Tanım 2.1.6: (X,d) ve (Y,d') metrik uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'a bağlı pozitif bir δ sayısı varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Yani,
 $f, x_0 \in X$ da sürekli $\Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \ni d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ dur}]$.

Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X uzayında süreklidir denir[6].

Teorem 2.1.7: (X,d) bir metrik uzay ve $\mathcal{f} = \{A_i\}_{i \in I}$ X in açıklar ailesi olsun. Bu durumda $\{A_i\}_{i \in I}$ açıklar ailesi aşağıdaki şartları sağlar:

- (i) $\emptyset$ ve X açık kümelerdir.
- (ii) Sonlu sayıdaki herhangi açık kümelerin arakesiti açık bir kümedir.
- (iii) Keyfi sayıdaki açık kümelerin birleşimi açık bir kümedir[6].

Not: (X,d) metrik uzayında tanımlanan açıklar ailesi topoloji aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla X üzerindeki d metriği tarafından oluşturulan τ_d topolojisine metrik topoloji denir.

Tanım 2.1.8: (X,τ) topolojik uzayının τ topolojisi, X üzerindeki herhangi bir d metriği ile oluşturulan τ_d topolojisi ile aynı ise (X,τ) topolojik uzayına metriklenebilir uzay denir[6].

Tanım 2.1.9: $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde d_1, d_2 ve d_3 üç metrik ve $\lambda > 0, \gamma > 0$ reel sayılar olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için,

$$\lambda d_3(x,y) < d_2(x,y) < \gamma d_1(x,y)$$

bağıntısı varsa, bu metriklere denk metrikler denir[6].

Tanım 2.1.10: $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde d_1 ve d_2 metrikleri verilmiş olsun. X deki d_1 -açık kümeleri d_2 -açık ve d_2 -açık kümeleri d_1 -açık ise, d_1 ve d_2 metriklerine denk ya da eşdeğer metrikler denir[6].

Aynı topolojiyi üreten metriklere denk metrikler denir.

Tanım 2.1.11: (X,d) ve (Y,d') metrik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı var $\ni \forall x, y \in X$ için $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ise, f fonksiyonuna X uzayında düzgün süreklidir denir[6].

Not: Düzgün sürekli bir fonksiyon süreklidir ancak bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 2.1.12: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alışılmış metrikle donatılmış olsun. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ile tanımlı f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir fakat düzgün sürekli değildir.

YATIRIM MENKUL DEĞERLER A.Ş.
YATIRIM MENKUL DEĞERLER A.Ş.
YATIRIM MENKUL DEĞERLER A.Ş.

Tanım 2.1.13: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{f} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilmiş olsun. Eğer X kümesi $\mathcal{f}$ nin elemanlarının birleşimi tarafından kapsanıyorsa, yani

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \in \mathcal{f}$$

ise, $\mathcal{f}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü denir. Eğer örtünün elemanları sonlu ise, örtüye sonlu örtü denir.

Eğer X , $\mathcal{f}$ nin bir Γ alt ailesinin elemanlarının birleşimi tarafından kapsanıyorsa, Γ ya alt örtü denir.

X in metrik uzay olması ve $\mathcal{f}$ örtüsünün bütün elemanlarının açık olması halinde örtüye açık örtü, $\mathcal{f}$ örtüsünün bütün elemanlarının kapalı olması halinde örtüye kapalı örtü denir[6].

Örnek 2.1.14: $(\mathbb{R}, d)$ alışılmış metrik uzay olsun. $\mathcal{f} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{f}$ ailesi, $\mathbb{R}$ nin açık bir örtüsüdür.

Tanım 2.1.15: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın bir örtüsüne ait kümelerin her birisinin çapı bir $\varepsilon > 0$ sayısından küçük ise, bu örtüye A nın ε -örtüsü denir.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için A nın sonlu bir ε -örtüsü var ise, A ya tamamen sınırlı küme denir[6].

Teorem 2.1.16: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ tamamen sınırlı bir küme olsun. Bu durumda A sınırlı bir kümedir. Fakat tersi genelde doğru değildir[6].

Örnek 2.1.17: $d(x, y) = |x - y|$ metriği altında $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi sınırlı veya tamamen sınırlı değildir. $\bar{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ metriği altında $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi sınırlı fakat tamamen sınırlı değildir[3].

Tanım 2.1.18: (X,d) bir metrik uzay olsun. X uzayının her $\mathcal{f} = \{A_i\}_{i \in I}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına kompakt uzay denir.

Teorem 2.1.19: (X,d) bir kompakt metrik uzay, (Y,d') metrik uzay ve $f:X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda X uzayının f altındaki görüntüsü kompakttır.

Teorem 2.1.20: (X,d) bir metrik uzay ve X kompakt olsun. Bu durumda,
 $A \subset X$ kompakttır $\Leftrightarrow A$ kapalıdır.

Teorem 2.1.21: $(\mathbb{R}^n, d)$ metrik uzay olsun. Bu durumda,
 $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakttır $\Leftrightarrow A$ kapalı ve sınırlıdır.

Tanım 2.1.22: (X,d) bir metrik uzay, (x_n) X de bir dizi $x_0 \in X$ olsun. Her $r > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ iken $d(x_n, x_0) < r$ olacak şekilde r ye bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi x_0 a yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ şeklinde yazılır. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ için } \exists n_0(r) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_0) < r \text{ dir [6].}$$

Teorem 2.1.23: (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda,

$a \in \overline{A} \Leftrightarrow A$ nın elemanlarından oluşan ve a noktasına yakınsayan bir (a_n) dizisi vardır.

Teorem 2.1.24: (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda,

A, X de kapalıdır $\Leftrightarrow A$ içindeki her dizinin limiti A dadır.

Tanım 2.1.25: (X,d) metrik uzay olsun. Eğer X in sonsuz her alt kümesinin en az bir limit (yığılma) noktası varsa (X,d) metrik uzayına Bolzano-Weierstrass (B-W) kompakt denir.

Tanım 2.1.26: (X,d) metrik uzay olsun. Eğer X deki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa, X uzayına dizisel kompakt uzay denir.

Tanım 2.1.27: (X,d) metrik uzay olsun. X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X e sayılabilir kompakt uzay denir.

Teorem 2.1.28: (X,d) metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) X kompakttır.
- (ii) X sayılabilir kompakttır.
- (iii) X B-W kompakttır.
- (iv) X dizisel kompakttır.

Tanım 2.1.29: (X,d) metrik uzayının bir $\{A_i\}_{i \in I}$ örtüsü verilsin. Eğer çapı $\delta > 0$ sayısından küçük olan X in her alt kümesi, $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine ait kümelerden biri tarafından kapsanıyorsa, $\delta > 0$ sayısına bu örtü için Lebesgue sayısı denir[3].

Teorem 2.1.30: (X,d) bir kompakt metrik uzay ise, X uzayının her $\{A_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü bir Lebesgue sayısına sahiptir[3].

Teorem 2.1.31: (X,d) bir kompakt metrik uzay, (Y,d') metrik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f düzgün süreklidir[7].

İspat: Her $\varepsilon > 0$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı olan bir $\delta > 0$ sayısının varlığını göstereceğiz. $y \in Y$ merkezli $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ açık yuvarıyla oluşturulan Y uzayının bir açık örtüsünü alalım. f fonksiyonu sürekli olduğundan, Y uzayının bu açık yuvarlarının f altındaki ters görüntülerinden oluşan X uzayının bir $\{A_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü vardır. X kompakt olduğunda $\{A_i\}_{i \in I}$ açık örtüsü bir $\delta > 0$ Lebesgue sayısına sahiptir. Böylece x_1 ve x_2 noktası, $d(x_1, x_2) < \delta$ koşulunu sağlayan X uzayına ait iki nokta ise, $\{x_1, x_2\}$ kümesinin çapı δ dan küçüktür. Dolayısıyla bu

kümenin f altındaki $\{f(x_1), f(x_2)\}$ görüntüsü, en az bir $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ açık yuvarı içindedir. O halde,

$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d'(f(x_1), y) + d'(f(x_2), y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olur. Böylece f düzgün süreklidir.

Teorem 2.1.32: (X, d) ve (Y, d') metrik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. f X de süreklidir $\Leftrightarrow X$ de $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ olmasıdır.

Tanım 2.1.33: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, (Y, d) metrik uzay $f_n: X \rightarrow Y$ olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in X$ için $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ oluyorsa $f: X \rightarrow Y$ olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f ye düzgün(uniform) yakınsıyor denir[3].

Teorem 2.1.34: (düzgün limit teoremi) X bir topolojik uzay, (Y, d) metrik uzay $f_n: X \rightarrow Y$ olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ f ye düzgün yakınsıyorsa, f süreklidir[3].

Örnek 2.1.35:

$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisini $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}, 0 \leq x \leq 1,$

$n \in \mathbb{N}$ ile tanımlayalım.

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, f_2(x) = \frac{2x}{2x+1}, \dots \text{olur.}$$

$x = 0$ için $(f_n(0)) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ olup $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ dir.

$0 < x \leq 1$ için $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx+1} = 1$ dir.

Her $x \in [0, 1]$ için $f_n(x)$ fonksiyonları süreklidir ama $f(x)$ sürekli değildir[2].

Örnek 2.1.36:

$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisini $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}$, $0 \leq x \leq 1$,

$n \in \mathbb{N}$ ile tanımlayalım.

$x = 0$ için $(f_n(0)) = (0,0,\dots,0,\dots)$ olup $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ dır.

$0 < x \leq 1$ için $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{nx+1} = x$ dir.

O halde $0 \leq x \leq 1$ için $f(x) = x$ olup $f(x)$ süreklidir. Çünkü yakınsaklık düzgündür. Şimdi bunu gösterelim: Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^2}{nx+1} - x \right| = \frac{x}{nx+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x} \text{ ve } \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1, 0 < x \leq 1$$

olur. $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ seçilirse $\forall n \geq n_0$ için $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x}$ elde edilir. n_0 sadece ε na bağlı olduğundan yakınsaklık düzgündür[2].

2.2. Tam Metrik Uzay

Tanım 2.2.1: (X,d) metrik uzay, (x_n) X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir[4].

Tanım 2.2.2: (X,d) metrik uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam uzay denir[4].

Teorem 2.2.3: (X,d) metrik uzay olsun. X deki yakınsak her dizi Cauchy dizisidir[4].

Teorem 2.2.4: (X,d) metrik uzay ve $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ sınırlı bir kümedir[4].

Teorem 2.2.5: (X,d) bir tam metrik uzay, $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda (A, d_A) tam metrik uzaydır[4].

İspat: (x_n) A da herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda (x_n) X de bir Cauchy dizisi olup yakınsaktır. A kapalı olduğundan A daki her dizinin limiti yine A dadır. (A, d_A) tam metrik uzaydır.

Teorem 2.2.6: (X, d) bir tam metrik uzay ise $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ olmak üzere (X, d^*) metrik uzayı da tamdır[4].

İspat: Her $x, y \in X$ için $d^*(x, y) \leq d(x, y)$ olmasından açıktır.

Teorem 2.2.7: $(x_n) \subset X$ d^* metriğine göre Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow (x_n)$ d metriğine göre Cauchy dizisidir[4].

Teorem 2.2.8: $(x_n) \subset X$ d^* metriğine göre yakınsaktır $\Leftrightarrow (x_n)$ d metriğine göre yakınsaktır[4].

Teorem 2.2.9: X deki her Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa, (X, d) metrik uzayı tamdır[3].

Örnek 2.2.10: $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $d : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in (-1, 1)$ için $d(x, y) = |x - y|$ ve $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$ dizisi verilsin. (x_n) bir Cauchy dizisi olup $(-1, 1)$ aralığında yakınsak değildir. Bu örnek tamlığın topolojik özellik olmadığını gösterir. Yani tamlık homeomorfizm altında korunmaz. $(-1, 1)$ aralığı $\mathbb{R}$ ye homeomorftur ve $\mathbb{R}$ alışılmış metrikle tamdır[7].

Örnek 2.2.11: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde her $x, y \in \mathbb{Q}$ için, $d(x, y) = |x - y|$ metriği verilmiş olsun. Bu durumda $(\mathbb{Q}, d)$ tam değildir. Çünkü

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, ... dizisi $\mathbb{R}$ de $\sqrt{2}$ ye yakınsar ve $\mathbb{Q}$ da bir Cauchy dizisidir. Fakat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ dur[3].

Teorem 2.2.12: Bir Cauchy dizisinin düzgün sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bir Cauchy dizisidir[7].

İspat: (X,d) ve (Y,d') metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. f düzgün sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı vardır. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan, bulduğumuz $\delta > 0$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall m,n \geq n_0$ için $d(x_m, x_n) < \delta$ olur. O halde her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall m,n \geq n_0$ için $d'(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ olduğundan $(f(x_n)) \subset Y$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Uyarı: Bir Cauchy dizisinin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü bir Cauchy dizisi olmayabilir.

Örnek 2.2.13: $(0,1]$ ve $\mathbb{R}$ metrik uzaylar ve $f : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f süreklidir. $(x_n) = (\frac{1}{n})$ dizisi bir Cauchy dizisidir fakat $(f(\frac{1}{n})) = (n)$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi değildir[7].

Teorem 2.2.14: (X,d) metrik uzay, (Y,d_1) tam metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ve f düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda (X,d) metrik uzayı tamdır[7].

İspat: $(x_n) \subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. f düzgün sürekli olduğundan $(f(x_n)) \subset Y$ bir Cauchy dizisi olur. Y tam olduğundan $(y_n) = (f(x_n))$ dizisi $y_0 \in Y$ noktasına yakınsar. f bire bir ve örten olduğundan $y_0 = f(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. f^{-1} sürekli olduğundan $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$ olur. f bire bir olduğundan $f^{-1}(f(x_n)) = x_n \rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = x_0 \in X$ olur. O halde (X,d) uzayı tamdır.

Tanım 2.2.15: (X,d) ve (Y,d_1) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de düzgün sürekli ise f ye düzgün homeomorfizm denir.

Uyarı: Cauchy dizileri düzgün homeomorfizm altında korunur. Düzgün homeomorfizm altında korunan bir özelliğe düzgün özellik denir. Cauchy dizisi olma, tamlık, düzgün süreklilik, düzgün özelliklerdir. Ancak bu üç özellik topolojik özellik değildir.

Teorem 2.2.16: $\mathbb{R}^k$ uzayı Öklid metriği veya ρ maksimum metriği ile tamdır[3].

İspat: $(\mathbb{R}^k, \rho)$ uzayının tam metrik uzay olduğunu gösterelim. $(x_n) \subset \mathbb{R}^k$ Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$ sınırlı bir kümedir. Her $n, m \geq N$ iken $\rho(x_n, x_m) \leq 1$ olacak şekilde N doğal sayısı vardır.

$M = \max\{\rho(x_1, 0), \dots, \rho(x_{N-1}, 0), \rho(x_N, 0) + 1\}$ sayısı $\rho(x_n, 0)$ için bir üst sınırdır. Böylece (x_n) dizisinin her terimi $[-M, M]^k$ dadır. $[-M, M]^k$ kompakt olduğundan, (x_n) yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^k, \rho)$ tamdır.

Tanım 2.2.17: (Y, d) metrik uzay, her $a, b \in Y$ için $d^*(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$ olsun. J indis kümesi olmak üzere $Y^J = \{f \mid f: J \rightarrow Y \text{ fonksiyon}\}$ olsun. Her $f, g \in Y^J$ için, $\rho^*(f, g) = \sup\{d^*(f(\alpha), g(\alpha)) : \alpha \in J\}$ ile tanımlı ρ^* metriğine Y^J üzerinde düzgün(uniform) metrik denir[3].

Teorem 2.2.18: (Y, d) tam metrik uzay olsun. Bu durumda (Y^J, ρ^*) metrik uzayı tamdır[3].

İspat: (Y, d) tam metrik uzay ise (Y, d^*) uzayı da tamdır.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^J$ de Cauchy dizisi olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in J$ için $d^*(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leq \rho^*(f_n, f_m)$ olduğundan $(f_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ (Y, d^*) uzayında Cauchy dizisi

olur. Ayrıca bu dizi y_α gibi bir noktaya yakınsaktır. $f: J \rightarrow Y$, $f(\alpha) = y_\alpha$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. ρ^* metriğine göre $f_n \rightarrow f$ olduğunu göstermek istiyoruz. Verilen $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ iken $\rho^*(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ olacak şekilde yeterince büyük n_0 sayısı seçebiliriz. Bu durumda $m, n \geq n_0$ ve $\alpha \in J$ için $d^*(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \varepsilon/2$ olur. n ve α sabit tutulsun, m keyfi olsun. Böylece $d^*(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leq \varepsilon/2$ olur. Bu eşitsizlik her $\alpha \in J$ ve $n \geq n_0$ için sağlandığından $\rho^*(f_n, f) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ olur ki bu da ρ^* metriğine göre $f_n \rightarrow f$ olması demektir.

Teorem 2.2.19: X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda $C(X, Y) = \{f \mid f: X \rightarrow Y \text{ sürekli fonksiyon}\} \subset Y^X$ kümesi düzgün metrik altında kapalıdır. Böylece eğer Y tam ise, $C(X, Y)$ düzgün metrikle tamdır[3].

İspat: Öncelikle eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ dizisinin Y^X üzerindeki ρ^* metriğine göre $f \in Y^X$ elemanına yakınsıyorsa, bu dizinin f ye Y üzerindeki d^* metriğine göre düzgün yakınsadığını göstermeliyiz. Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin. $f_n \xrightarrow{\rho^*} f$ olduğundan $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$ için $\rho^*(f, f_n) < \varepsilon$ olur. Ayrıca $\forall x \in X$ ve $\forall n \geq n_0$ için $d^*(f_n(x), f(x)) \leq \rho^*(f_n, f) < \varepsilon$ olup (f_n) f ye düzgün yakınsak olur. Şimdi $C(X, Y)$ nin Y^X de ρ^* metriğine göre kapalı olduğunu gösterelim. $f \in Y^X$ elemanı $C(X, Y)$ nin bir yığılma (limit) noktası olsun. Bu durumda $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ dizisi vardır öyle ki bu dizi ρ^* metriğine göre f ye yakınsar. Buradan f düzgün limit teoremine göre sürekli olup $f \in C(X, Y)$ dir. O halde $C(X, Y)$ kapalıdır. Buradan $(C(X, Y), \rho^*)$ tam metrik uzay olur.

Tanım 2.2.20: (Y, d) metrik uzay, $X \neq \emptyset$ bir küme veya bir topolojik uzay olsun. $F \subset Y^X$ olmak üzere F aşağıdaki özelliği sağlasın:

Her $f, g \in F$ için $\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$ kümesi sınırlı olsun. Her $f, g \in F$ için $\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$ şeklinde tanımlanan ρ fonksiyonuna F üzerinde sup(supremum) metriği denir[3].

Bu metrik daha önce tanımlanan ρ^* düzgün metriği ile nasıl karşılaştırılabilir?

Teorem 2.2.21: Her $f, g \in F$ için $\rho^*(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}$ dir[3].

Bunun anlamı şudur: F üzerinde ρ^* ve ρ tanımlıdır. ρ^* metriği ρ tarafından üretilen standart sınırlı metriktir. İkisi de F üzerinde aynı topolojiyi üretir. F nin ρ metriği ile tam olması için gerek ve yeter şart ρ^* metriği ile tam olmasıdır. Bu metrikler denktir.

Teorem 2.2.22: X bir topolojik uzay olsun. $B(X, R) = \{f \mid f: X \rightarrow R \text{ sınırlı}\}$ kümesi sup metriği ile tamdır[3].

Tanım 2.2.23: (X, d) , (Y, ρ) metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bire bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ oluyorsa f ye izometri denir. f dönüşümü X uzayını Y uzayına gömüyor denir. f örten ise bu iki metrik uzaya izometrik denir. Eğer (X, d) ile $(f(X), \rho)$ izometrik ise X uzayı Y uzayı içine gömülebilir denir ve $f(X)$ alt uzayına da gömü denir.

Homeomorfik olan iki uzay izometrik olmak zorunda değildir. Aynı zamanda her izometri düzgün sürekli bir fonksiyondur[7].

Örnek 2.2.24: $R \times R = R^2$ üzerinde, yani düzlemde $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ için $d(x, y) = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2}$ Öklid metriğinin doğurduğu alışılmış topolojik uzay verilsin. $a \in R$ olmak üzere $\forall (x, y) \in R^2$ için,
 $f(x, y) = (x \cos a + y \sin a, -x \sin a + y \cos a)$ şeklinde tanımlanan $f : R^2 \rightarrow R^2$ dönüşümü bir izometridir[4].

Teorem 2.2.25: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu izometri ise bir homeomorfizmdir[7].

İspat: f bire bir ve örten olduğundan f^{-1} vardır. X ve Y izometrik iken f^{-1} fonksiyonu da izometridir. Çünkü,

$\forall a, b \in Y$ için $d_2(a, b) = d_2(ff^{-1}(a), ff^{-1}(b)) = d_1(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ dir. Şimdi f nin sürekli olduğunu gösterelim. $x \in X$ noktası ve $f(x) = a$ noktasının herhangi bir $B(f(x), r)$ komşuluğunu alalım. Bu durumda,
 $B(x, r) = \{ y \in X : d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)) < r \}$ kümesi, x noktasının bir açık komşuluğudur ve $f(B(x, r)) \subset B(f(x), r)$ olur. O halde f sürekli dir. Benzer şekilde f^{-1} fonksiyonunun sürekli olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.2.26: (X, d) , (Y, ρ) metrik uzaylar , $f : X \rightarrow Y$ izometri ve $\overline{f(X)} = Y$ ise Y uzayına X uzayının tamlaması denir[7].

Teorem 2.2.27: Her metrik uzay tamlanabilir. Bir metrik uzayın tamlanışları birbirine izometriktir[7].

Teorem 2.2.28: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda X in bir tam metrik uzaya izometrik gömmesi vardır[7].

Teorem 2.2.29: (X, d) metrik uzay olsun. X uzayı kompakttır $\Leftrightarrow X$ tam ve tamamen sınırlıdır[7].

Tanım 2.2.30: (Y, d) metrik uzay , $F \subset C(X, Y)$ ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists U \in \mathcal{N}(x_0)$ var $\ni \forall x \in U$ ve $\forall f \in F$ için $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ oluyorsa F kümesine x_0 noktasında eş sürekli dir denir.

Eğer F kümesi her $x_0 \in X$ noktasında eş sürekli ise F ye X de eş sürekli dir denir[3].

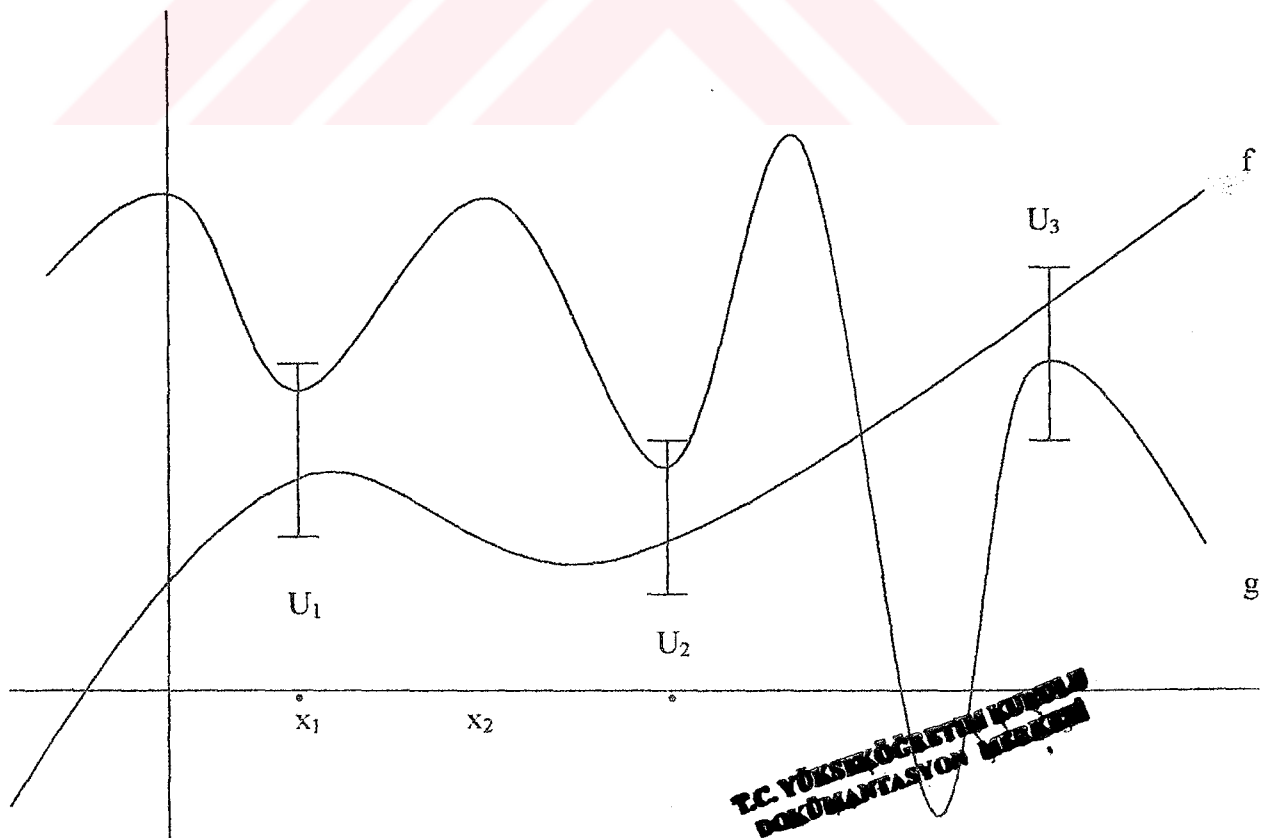
Teorem 2.2.31: X kompakt uzay, (Y, d) kompakt metrik uzay ve $F \subset C(X, Y)$ olsun. Bu durumda F nin eş sürekli olması için gerek ve yeter şart F nin ρ sup metriğine göre tamamen sınırlı olmasıdır[3].

Teorem (Ascoli) 2.2.32: X kompakt uzay ve $(C(X, \mathbb{R}^n), \rho)$ metrik uzay olsun. Bu durumda $F \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ nin kompakt olması için gerek ve yeter şart F nin kapalı, sınırlı ve eş sürekli olmasıdır[3].

2.3. Noktasal Yakınsaklık Topolojisi

Tanım 2.3.1: $X \neq \emptyset$ bir küme ve Y topolojik uzay olsun. $x \in X$ ve $U \subset Y$ açık olsun. $S(x, U) = \{f \mid f \in Y^X \text{ ve } f(x) \in U\}$ kümesini tanımlayalım. $S(x, U)$ kümelerini alt taban kabul eden Y^X üzerindeki topolojiye noktasal yakınsaklık topolojisi (veya nokta açık topoloji) denir.

Bu topolojinin taban elemanları $S(x, U)$ kümelerinin sonlu arakesitlerinden oluşur. f yi içeren taban elemanları f ye sonlu sayıda noktada yakın olan g fonksiyonlarından oluşur (Bakınız Şekil 2.3.1).



Şekil 2.1 (Noktasal Yakınsaklık Topolojisi)

Y^X üzerindeki noktasal yakınsaklık topolojisi yeni değildir. X yerine J , $\alpha \in J$ olmak üzere, $S(\alpha, U) = \{x \mid x : J \rightarrow Y, x(\alpha) \in U\} \subset \pi_\alpha^{-1}(U) \subset Y^J$ olup standart kartezyen çarpım uzayının alt taban elemanıdır.

Teorem 2.3.2: Noktasal yakınsaklık topolojisine göre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $f_n(x)$ in $f(x)$ e yakınsamasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $f_n \rightarrow f$ olsun. Keyfi $x \in X$ verilsin. $U \subset Y$ açık, $f(x) \in U$, $S(x, U)$ f nin komşuluğu olsun.

$f_n \rightarrow f$ olduğundan $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq n_0$ için $f_n \in S(x, U)$ olur. Dolayısıyla $\forall n \geq n_0$ için $f_n(x) \in U$ olur ki bu da $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olması demektir.

$(\Leftarrow)$: Her $x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olsun. Bu durumda $U \subset Y$ açık, $f(x) \in U$ olmak üzere $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall n \geq n_0$ iken $f_n(x) \in U$ olur. Dolayısıyla $\forall n \geq n_0$ için $f_n \in S(x, U)$ olur.

Örnek 2.3.3: $R^I = \{f \mid f : I = [0, 1] \rightarrow R \text{ fonksiyon}\}$ ve $f_n(x) = x^n$ sürekli fonksiyonların dizisi olsun. Bu durumda $f_n(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} .$$

ile tanımlı $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar ve f sürekli değildir. Bu bize $C(I, R)$ sürekli fonksiyonlar uzayının noktasal yakınsaklık topolojisine göre kapalı olmadığını verir.

Tanım 2.3.4: (Y, d) metrik uzay ve X bir topolojik uzay olsun. $f, g \in Y^X$, $K \subset X$ kompakt olmak üzere $\varepsilon > 0$ için $B_K(f, \varepsilon) = \{ \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in K\} < \varepsilon \}$ kümesini tanımlayalım.

$B_K(f, \varepsilon)$ kümeleri Y^X üzerinde bir topoloji için tabandır. Buna kompakt yakınsaklık topolojisi (ya da kompakt kümeler üzerindeki düzgün yakınsaklık topolojisi) denir.

Bu topoloji noktasal yakınsaklık topolojisi ile şu noktada ayrılır: f yi içeren bir taban elemanı f ye kompakt bir kümenin her noktasında yakın olan g fonksiyonlarından oluşur.

Eğer $g \in B_K(f, \varepsilon)$ ise,

$$\delta = \varepsilon - \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in K\}$$

olarak $B_K(g, \delta) \subset B_K(f, \varepsilon)$ elde ederiz.

Teorem 2.3.5: $f_n : X \rightarrow Y$ olmak üzere kompakt yakınsaklık topolojisine göre $f_n \rightarrow f$ olması için gerek ve yeter şart her $K \subset X$ kompakt alt kümesi için $f_n|_K \rightarrow f|_K$ yakınsamasının düzgün olmasıdır.

Teorem 2.3.6: X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. Y^X fonksiyon uzayı üzerindeki topolojiler arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$(\text{düzgün}) \supset (\text{kompakt yakınsaklık}) \supset (\text{noktasal yakınsaklık})$$

$$\text{Eğer } X \text{ kompakt ise } (\text{düzgün}) \equiv (\text{kompakt yakınsaklık})$$

$$\text{Eğer } X \text{ ayırık ise } (\text{kompakt yakınsaklık}) \equiv (\text{noktasal yakınsaklık})$$

2.4. Kompakt-Açık Topoloji

Tanım 2.4.1: X ve Y iki topolojik uzay olsun. $K \subset X$ kompakt ve $U \subset Y$ açık olsun. $S(K, U) = \{f \mid f \in C(X, Y) \text{ ve } f(K) \subset U\}$ kümesini tanımlayalım. $S(K, U)$ kümelerini alt taban olarak kabul eden $C(X, Y)$ üzerindeki topolojiye kompakt-açık topoloji denir. Bu topolojinin tabanı,

$$\beta = \left\{ \bigcap_{i=1}^k S(K_i, U_i) : K_i \subset X \text{ kompakt ve } U_i \subset Y \text{ açık} \right\} \text{ dir.}$$

Teorem 2.4.2: X bir topolojik uzay ve (Y,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda $C(X,Y)$ üzerinde kompakt-açık topoloji ile kompakt yakınsaklık topolojisi çakışır.

İspat: $A \subset Y$ ve $\varepsilon > 0$ için, $U(A,\varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a,\varepsilon)$ kümesine A nın ε -komşuluğu denir. Eğer $A \subset V$ kompakt ve V açık ise $\exists \varepsilon > 0$ var $\ni U(A,\varepsilon) \subset V$ olduğunu gösterelim. Her $a \in A$ için $B_d(a,\delta(a)) \subset V$ olacak şekilde $\delta(a) > 0$ seçebiliriz. A kompakt olduğundan sonlu

$B_d(a_1, \frac{1}{2} \delta(a_1)), \dots, B_d(a_n, \frac{1}{2} \delta(a_n))$ açık kümeleri tarafından örtülür.

$\varepsilon = \min \{ \frac{1}{2} \delta(a_i) : i = 1, 2, \dots, n \}$ olsun. Bu durumda eğer $a \in A$ ise

$\exists B_d(a_i, \frac{1}{2} \delta(a_i))$ için $a \in B_d(a_i, \frac{1}{2} \delta(a_i))$ ve üçgen eşitsizliğinden

$$B_d(a,\varepsilon) \subset B_d(a_i, \delta(a_i))$$

olur. Bu $\forall a \in A$ için sağlandığından $U(A,\varepsilon) \subset V$ olur.

Şimdi kompakt yakınsaklık topolojisinin, kompakt-açık topolojiden daha ince olduğunu gösterelim. $S(K,U)$, $C(X,Y)$ üzerindeki kompakt-açık topolojinin keyfi bir taban elemanı ve $f \in S(K,U)$ olsun.

f sürekli olduğundan $K \subset X$ kompakt iken $f(K) \subset U$ kompakt olur. Bu durumda U nun içinde kalacak şekilde $f(K)$ nın ε -komşuluğunu seçebiliriz. Dolayısıyla $B_K(f,\varepsilon) \subset S(K,U)$ olur. Bu da kompakt yakınsaklık topolojisinin, kompakt açık topolojiden daha ince olması demektir.

Şimdi kompakt açık-topolojinin, kompakt yakınsaklık topolojisinden daha ince olduğunu gösterelim. Kompakt yakınsaklık topolojisine göre f için verilen her açık küme $B_K(f,\varepsilon)$ taban elemanını kapsar. Biz $B_K(f,\varepsilon)$ tarafından kapsanacak ve f yi içerecek şekilde kompakt açık-topolojinin bir taban elemanını bulacağız.

Her $x \in X$ için bir V_x komşuluğu var $\ni f(\overline{V_x}) \subset U_x \subset Y$ ve U_x in çapı ε dan küçüktür [örneğin, V_x i $f(V_x)$, $f(x)$ in $\varepsilon/4$ - komşuluğu içinde kalacak şekilde seçebiliriz. Böylece $f(\overline{V_x})$, $f(x)$ in $\varepsilon/3$ - komşuluğu içinde kalır]. K kompakt kümesi sonlu tane V_x tarafından kapsanır ($x = x_1, \dots, x_n$).
 $K_x = \overline{V_x} \cap K$ olsun. Bu durumda K_x kompakttır. Taban elemanı $S(K_{x_1}, U_{x_1}) \cap \dots \cap S(K_{x_n}, U_{x_n})$ olup f yi içerir ve $B_K(f, \varepsilon)$ tarafından kapsanır.

Teorem 2.4.3: X bir topolojik uzay ve (Y, d) metrik uzay olsun. Bu durumda $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsaklık topolojisi Y üzerindeki d metriğine bağlı değildir.

3.DİFERENSİYEL DENKLEMLER

3.1.Lipschitz Şartı

Tanım 3.1.1: (X,d) ve (Y,d^*) metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için $\exists k \geq 0$ var $\ni d^*(f(x),f(y)) \leq k.d(x,y)$ oluyorsa f ye Lipschitz dönüşüm denir.

Teorem 3.1.2: Her Lipschitz dönüşüm düzgün süreklidir ancak tersi doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.3: (X,d) ayrık metrik uzay, (Y,d^*) herhangi bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f düzgün süreklidir. Her $\epsilon > 0$ için $\delta = 1$ seçilmesi yeterlidir. $d(x,y) < \delta = 1$ iken $d^*(f(x),f(y)) = 0 < \epsilon$ olur. Fakat f Lipschitz şartını sağlamaz.

Tanım 3.1.4: $D \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, D açık ve bağlantılı ise D ye bölge denir. Eğer D sınır noktalarını içeriyorsa D ye kapalı bölge denir.

Tanım 3.1.5: $D \subset \mathbb{R}^2$ kapalı veya açık bir bölge ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D$ için $\exists k > 0$ var $\ni |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$ oluyorsa f fonksiyonu y ye göre Lipschitz şartını sağlıyor denir. k sayısına Lipschitz sabiti denir.

Teorem 3.1.6: $D \subset \mathbb{R}^2$ kapalı veya açık bir bölge ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $(x,y) \in D$ için $\partial f / \partial y$ var ve sınırlı olsun. Bu durumda,

$$k = \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \text{ dir.}$$

Örnek 3.1.7: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, |y| \leq b, a,b \in \mathbb{R} \}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2$ olsun.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y \text{ var ve } \forall (x,y) \in D \text{ için sınırlıdır.}$$

$$k = \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| = \sup_{(x,y) \in D} |2y| = 2b \text{ olur. Ya da } \forall (x,y_1), (x,y_2) \in D \text{ için;}$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 - y_2| |y_1 + y_2| \leq 2b |y_1 - y_2|$$

olup $k = 2b$ olarak bulunur.

Örnek 3.1.8: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, |y| \leq b, a,b \in \mathbb{R} \}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x|y|$ olsun. $\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D$ için,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| = |x| |y_1 - y_2| \leq a |y_1 - y_2| \text{ olup } k = a$$

dır. Diğer taraftan $x \neq 0$ olmak üzere $(x,0) \in D$ noktasında $\partial f / \partial y$ yoktur.

3.2.Varlık ve Teklik Teoremleri

Tanım 3.2.1: $D \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge, $(x_0, y_0) \in D$ bir iç nokta olsun. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \dots (*)$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Aşağıdaki ifadeler varsa ;

- 1) $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in (\alpha, \beta)$ olsun,
- 2) $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) $(x, \phi(x)) \in D$ ve $\forall x \in [\alpha, \beta]$ için $f(x, \phi(x))$ tanımlı ,

(ii) $\frac{d\phi(x)}{dx} = f(x, \phi(x))$ yani $\forall x \in [\alpha, \beta]$ için ϕ , (*) denklemini sağlasın,

(iii) $\phi(x_0) = y_0$ olsun,

O halde bu probleme başlangıç değer problemi denir ve

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

ile ifade edilir. ϕ ye bu denklemin çözümü denir.

(ii) seçeneği ϕ nin sürekli ve ϕ türevine sahip olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2: $D \subset \mathbb{R}^2$ kapalı veya açık bir bölge ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ için $(x, \phi(x)) \in D$ ve $x_0 \in (\alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda $\phi, [\alpha, \beta]$ aralığında $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denkleminin $\phi(x_0) = y_0$ şartını

sağlayan çözümdür $\Leftrightarrow \forall x \in [\alpha, \beta]$ için $\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \phi(t)] dt \dots (**)$

olmasıdır.

$$\text{İspat:} (\Rightarrow): \frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow \frac{d\phi(x)}{dx} = f(x, \phi(x)), \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$$\Rightarrow d\phi(x) = f(x, \phi(x)) dx, \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \int_{x_0}^x f[t, \phi(t)] dt + c$$

$$\phi(x_0) = y_0 \Rightarrow c = y_0 \text{ elde edilir.}$$

$$(\Leftarrow): \phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \phi(t)] dt \Rightarrow \frac{d\phi(x)}{dx} = f(x, \phi(x)) \text{ olur. Böylece } \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ için}$$

$\phi, \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemini sağlar. Ayrıca $(**)$ denkleminde $\phi(x_0) = y_0$ elde edilir.

Teorem 3.2.3: (temel varlık ve teklik teoremi)

$D \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $(x, y) \in D$ için f ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ sürekli

olsun. Bu durumda $(x_0, y_0) \in D$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı $\phi(x_0) = y_0$ şartını sağlayan bir tek ϕ çözümü vardır.

Teorem 3.2.4: (varlık ve teklik teoremi)

Hipotez:

1) $D \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki iki şartı sağlasın:

(i) f , D bölgesinde sürekli,

(ii) f , y ye göre Lipschitz şartını D bölgesinde sağlasın. Yani,

$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$ için $\exists k > 0$ var $\ni |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$ olsun.

2) $(x_0, y_0) \in D$ ve $B = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \} \subset D$ olsun. Her $(x, y) \in D$ için $M = \max |f(x, y)|$ ve $h = \min(a, b/M)$ olsun.

İddia:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ denkleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı bir tek

çözümü var öyle ki;

(i) Her $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ için $\frac{d\phi(x)}{dx} = f(x, \phi(x))$ ve

(ii) $\phi(x_0) = y_0$ dir.

Uyarı 1: $B \subset D$ olduğundan f (i) ve (ii) şartlarını sağlar. B kapalı olduğundan M sabiti gerçekten vardır.

Eğer $a > b/M$ ise $h = a$ olur ve ϕ çözümü $|x - x_0| \leq a$ için tanımlıdır.

Eğer $a < b/M$ ise $h = b/M$ olur ve ϕ çözümü $|x - x_0| \leq h < a$ için tanımlıdır.

Uyarı 2: Bu teorem bize şunu söyler:

Eğer, f sürekli ve B de y ye göre Lipschitz şartını sağlarsa

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denkleminin $|x - x_0| \leq h$ üzerinde tanımlı $\phi(x_0) = y_0$ şartını

sağlayan bir tek ϕ çözümü vardır.

Örnek 3.2.5: $\frac{dy}{dx} = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ başlangıç değer problemini ele alalım.

$f(x, y) = y^{1/3}$, $B = \{ (x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b, a, b \in \mathbb{R} \}$ bölgesinde süreklidir.

$y(0) = 0$ olacak şekilde $|x| \leq h$ aralığında bu problemin bir çözümü vardır.

Eğer f Lipschitz şartını sağlarsa bir tek çözümü vardır.

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| = \left| \frac{y_1^{1/3} - y_2^{1/3}}{y_1 - y_2} \right|$$

Eğer $y_1 = \delta > 0$ ve $y_2 = -\delta$ seçilirse;

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| = 1 / \delta^{2/3} \text{ olur.}$$

$y = 0$ da Lipschitz şartı sağlanmaz. Böylece yukarıdaki teorem uygulanamaz.

Aslında tek çözüm yoksa iki çözüm vardır. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\phi_1(x) = 0 \text{ ve } \phi_2(x) = \begin{cases} (\frac{2}{3}x)^{3/2}; x \geq 0 \\ 0; x \leq 0 \end{cases} \text{ verilen denklemin çözümleridir.}$$

Örnek 3.2.6: $\frac{dy}{dx} = y^2$, $y(1) = -1$ başlangıç değer problemini ele alalım. Bu durumda

$$f(x, y) = y^2 \text{ ve } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y \text{ her } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için sürekli.}$$

$B = \{ (x, y) : |x - 1| \leq a, |y + 1| \leq b, a, b \in \mathbb{R} \}$ bölgesinde f teoremin şartlarını sağlar. Her $(x, y) \in B$ için $M = \max|f(x, y)|$ ve $h = \min(a, b/M)$ olsun. O halde bu problemin $|x - 1| \leq h$ aralığında tanımlı bir tek çözümü vardır.

$$1 - a \leq x \leq 1 + a ; -b - 1 \leq y \leq b - 1$$

$$M = (-1 - b)^2 = (b + 1)^2 \text{ ve } h = \min[a, b / (b + 1)^2] \text{ olur.}$$

$$F(b) = b / (b + 1)^2 \Rightarrow F'(b) = (1 - b) / (b + 1)^3$$

$$b = 1 \text{ de } b > 0 \text{ için } F(b) \text{ maksimum değerini alarak } F(1) = 1/4 \text{ olur.}$$

Böylece eğer $a \geq 1/4$ ise,

$$b / (b + 1)^2 \leq a \Rightarrow h = b / (b + 1)^2 \leq 1/4 \text{ olur.}$$

Eğer $a < 1/4$ ise $h < 1/4$ dür.

$$b = 1, a \geq 1/4 \text{ için } h = \min[a, b / (b + 1)^2] = \min(a, 1/4) = 1/4 \text{ bulunur.}$$

$$h = 1/4 \text{ ise } |x - 1| \leq h \Rightarrow |x - 1| \leq 1/4 \\ \Rightarrow 3/4 \leq x \leq 5/4 \text{ elde edilir.}$$

Böylece teoremin şartları sağlanmış olur ve problemin çözümü $|x - 1| \leq 1/4$ aralığındadır.

Problem çözülürse $y = 1/x$ olup bu çözüm $0 < x < \infty$ aralığında tanımlıdır ve sürekli türevelidir.

Teorem 3.2.7: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, -\infty < y < \infty, a,b \in \mathbb{R} \}$ olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve D de y ye göre Lipschitz şartını sağlasın. Yani, $\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D$ için $\exists k > 0$ var $\ni |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$ olsun. Bu durumda, $(x_0,y_0) \in D$ olmak üzere $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ denkleminin $\phi(x_0) = y_0$ şartını sağlayan ϕ çözümü $a < x < b$ aralığında tanımlıdır. Ayrıca eğer $a = -\infty$ ve $b = \infty$ ise $\phi, \forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.

3.3.Diferensiyel Denklem Sistemi

Tanım 3.3.1: $y_1, y_2, \dots, y_n$ n-tane bilinmeyen, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bir bölge ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

.

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

denklemler sistemini alalım.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ n -tane reel değerli fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için tanımlı olsun. Bu durumda $[x, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)] \in D$ ve

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} = f_1[x, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]$$

$$\frac{d\phi_2(x)}{dx} = f_2[x, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]$$

.

.

.

$$\frac{d\phi_n(x)}{dx} = f_n[x, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]$$

oluyorsa $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ sıralı n -lisine (*) denkleminin çözümü denir[2].

Tanım 3.3.2: $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ açık bölge, $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $1 \leq i \leq n$ için f_i B de tanımlı fonksiyonlar ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyen fonksiyonlar olsun.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

.

.

.

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

denklemler sistemini alalım.

$I = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b, a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ fonksiyonlarına yukarıda verilen diferensiyel denklemler sisteminin I aralığında çözümüdür denir:

$\forall t \in I$ için,

(i) $\phi_1'(t), \phi_2'(t), \dots, \phi_n'(t)$ var,

$$(ii) (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t), t) \in B$$

$$(iii) \phi'(t) = f_i(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t), t), i = 1, 2, \dots, n$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ve $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_n(x, t))$ olmak üzere denklem sistemi,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

formunda yazılabilir. Bu denklem sistemine otonom olmayan diferensiyel denklem sistemi denir. Bu durumda $\forall t \in I$ için,

$$(\phi(t), t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t), t) \in B \text{ ve } \phi'(t) = f(\phi(t), t)$$

olur.

Eğer $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ise otonom diferensiyel denklem sistemi olur[10].

4.DİNAMİK SİSTEMLER

4.1.Temel Kavramlar ve Tanımlar

Tanım 4.1.1: (X, d) bir metrik uzay ve T bir topolojik grup olsun. $\pi: X \times T \rightarrow X$ dönüşümü, aşağıdaki şartları sağlarsa π ye X üzerinde bir dinamik sistem (flow) denir :

- (i) $\forall x \in X$ için $\pi(x, 0) = x$
- (ii) $\forall x \in X$ ve $\forall t, s \in T$ için, $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$
- (iii) π süreklidir.

Burada $\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{Z}$ tamsayılar grubu ve $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojileri ile birlikte ele alacağız. $T = \mathbb{R}$ iken π sürekli dinamik sistem ve $T = \mathbb{Z}$ iken ayrık dinamik sistem elde edilir.

Tanım 4.1.2: $\mathbb{R}^+ = \{ t \in \mathbb{R} : t \geq 0 \}$ olmak üzere $\pi: X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ dönüşümü yukarıdaki üç şartı sağlarsa X üzerinde yarı dinamik sistem (semiflow) olarak adlandırılır. Çünkü $\mathbb{R}^+$ bir yarı gruptur.

Teorem 4.1.3: π , X üzerinde bir dinamik sistem ve $\pi_t(x) = \pi(x, t)$ ile tanımlansın. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{R}$ için π_t dönüşümü X den X e bir homeomorfizmdir.

İspat: π_t birebir midir?

$x_1, x_2 \in X$ ve $\pi_t(x_1) = \pi_t(x_2)$ olsun.

(i) ve (ii) den $x_1 = \pi(\pi(x_1, t), -t)$ yazılabilir. $\pi_t(x_1) = \pi_t(x_2)$ olduğundan

$x_1 = \pi(\pi(x_2, t), -t) \Rightarrow x_1 = x_2$ olur.

O halde π_t birebirdir.

π_t örten midir?

$\forall y \in X$ için $x = \pi(y, -t)$ alınırsa $\pi(x, t) = \pi(\pi(y, -t), t) = y$ elde edilir.

$\therefore \pi_t$ örtendir. Dolayısıyla π_t^{-1} tersi vardır.

π_t nin sürekli olduğunu biliyoruz. π_t^{-1} sürekli midir?

(ii) den $\pi_s(\pi_t) = \pi_{s+t} \Rightarrow \pi_s = \pi_{s+t}(\pi_t^{-1})$ yazılabilir. $\pi_s = \pi_s$ olduğundan $\pi_t^{-1} = \pi_{-t}$ olmalıdır. $\forall t \in \mathbb{R}$ için π_t sürekli olduğundan $\pi_t^{-1} = \pi_{-t}$ de sürekli dir.

$\therefore \pi_t$ homeomorfizm olur.

Örnek 4.1.4: $dx/dt = f(x)$ diferensiyel denklemini ele alalım. $X = \mathbb{R}^n$ Öklid uzayı ve $f \in C^1$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için bu diferensiyel denklemin $\phi(x, 0) = x$ şartını sağlayan bir tek $\phi(x, t)$ çözümü olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir dinamik sistem $\pi(x, t) = \phi(x, t)$ yazılarak elde edilebilir. Buradaki her $\phi(x, t)$ çözümü $\forall t \in \mathbb{R}$ için sürekli dir.

Tanım 4.1.5: (X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall x \in X$ noktası için $\mathbb{R}$ de sıfırı kapsayan açık aralıklar $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ olsun. I_x aralıklarının aşağıdaki süreklilik özelliğini sağladığını kabul edelim: Eğer X de $x_n \rightarrow x$ ise $I_x \subset \liminf I_{x_n}$ dir. $D \subset X \times \mathbb{R}$, $D = \{ (x, t) \in X \times \mathbb{R} : t \in I_x \}$ olarak tanımlansın. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa $\pi : D \rightarrow X$ fonksiyonuna X üzerinde (lokal) dinamik sistem denir:

(i) $\forall x \in X$ için $\pi(x, 0) = x$ (birim özelliği)

(ii) Eğer $t \in I_x$ ve $s \in I_{\pi(x, t)}$ ise $(t+s) \in I_x$ ve $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$

dir.

(iii) π sürekli dir.

(iv) Her I_x aralığı $I_x = \mathbb{R}$ anlamında maksimaldir.

(v) $x_n \rightarrow x$ ise $I_x \subset \liminf I_{x_n} = \sup(\inf x_n)$ dir.

Not:(i) $E \subset D$ ve $\pi : E \rightarrow X$ lokal dinamik sistem ise maksimallik özelliğinden $E = D$ olur.

(ii) Her $x \in X$ için $I_x = \mathbb{R}$ ise bu durumda π global dinamik sistem olur.

Tanım 4.1.6: π , X üzerinde bir lokal dinamik sistem ve $x \in X$ sabit tutulsun. t nin fonksiyonu olan $\pi(x, t)$ ye x boyunca hareket denir. $\gamma(x) = \{ \pi(x, t) : t \in I_x \}$ kümesine de x boyunca yörünge (orbit) denir.

$$\gamma^+(x) = \{ \pi(x, t) : 0 \leq t < \beta_x \} \quad (\text{pozitif yarı yörünge})$$

$$\gamma^-(x) = \{ \pi(x, t) : \alpha_x < t \leq 0 \} \quad (\text{negatif yarı yörünge})$$

Tanım 4.1.7: $x \in X$ noktasının kabuğu $H(x) = \overline{\gamma(x)}$ ile tanımlanır.

$$H^+(x) = \overline{\gamma^+(x)} \quad (\text{pozitif kabuk}),$$

$$H^-(x) = \overline{\gamma^-(x)} \quad (\text{negatif kabuk})$$

Teorem 4.1.8: π , X üzerinde bir dinamik sistem olsun. Eğer $\{x_n\} \subset X$ ağı için $x_n \rightarrow x$ ise $\{\pi(x_n, t)\}$ fonksiyonlar ağı $\pi(x, t)$ ye yakınsar ve yakınsaklık I_x deki kompakt kümeler üzerinde düzgündür.

Tanım 4.1.9: $E \subset X$ bir küme ve $x \in E$ iken $\gamma(x) \subset E$ ise E kümesine invaryanttır denir.

$\gamma^+(x) \subset E$ ise E pozitif invaryanttır. $\gamma^-(x) \subset E$ ise E negatif invaryanttır.

Teorem 4.1.10: $E \subset X$ invaryanttır $\Leftrightarrow E$ bütün yörüngelerin birleşimine eşittir.

Teorem 4.1.11: İnvaryant bir kümenin kapanışı invaryanttır.

İspat: $E \subset X$ invaryant ve $y \in \bar{E}$ olsun. $\gamma(y) \subset \bar{E}$ olduğunu yani, $\forall t \in I_y$ için $\pi(y, t) \in \bar{E}$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in \bar{E}$ olduğundan bir $\{y_n\} \subset E$ ağı var $\ni y_n \rightarrow y$ dir. Eğer $t \in I_y$ ise, I_x aralıklarının sürekliliğinden bir m sayısı var $\ni n \geq m$ için $t \in I_{y_n}$ dir. π nin sürekliliğinden $\pi(y_n, t) \rightarrow \pi(y, t)$ dir.

E invaryant olduğundan $\{\pi(y_n, t) : n \geq m\}$ alt ağı E dedir. Böylece $\pi(y, t) \in \bar{E}$ olur. Benzer şekilde pozitif invaryant bir kümenin kapanışının pozitif invaryant, negatif invaryant bir kümenin kapanışının negatif invaryant olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.1.12: π, X üzerinde bir dinamik sistem olsun. $LB^+ = \{x \in X : \beta_x = \infty\}$, $LB^- = \{x \in X : \alpha_x = -\infty\}$, $LB = LB^- \cap LB^+$ kümelerini tanımlayalım. Eğer LB boştan farklı ise $LB \times \mathbb{R} \subset D$ olur. Ayrıca $LB \times \mathbb{R}, \pi$ nin tanım kümesi olur ve $\pi : LB \times \mathbb{R} \rightarrow LB$ olmak üzere π, LB üzerinde global dinamik sistem olur.

Tanım 4.1.13: Eğer $x \in LB^+$ ise ω -limit kümesi $\Omega_x = \bigcap_{t \geq 0} H^+(\pi(x, t))$ ile tanımlanır.

Tanım 4.1.14: Eğer $x \in LB^-$ ise α -limit kümesi $A_x = \bigcap_{t \leq 0} H^-(\pi(x, t))$ ile tanımlanır.

Teorem 4.1.15: Limit kümeleri aşağıdaki eşitliklerle de verilebilir:

$$\Omega_x = \{y \in X : y = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x, t_n), \{t_n\} \text{ bir dizi ve } t_n \rightarrow \infty\}$$

$$A_x = \{y \in X : y = \lim_{n \rightarrow -\infty} \pi(x, t_n), \{t_n\} \text{ bir dizi ve } t_n \rightarrow -\infty\}$$

Teorem 4.1.16: α ve ω -limit kümeleri kapalı ve invaryanttır.

İspat: Ω_x , ω -limit kümesini ele alalım. Ω_x kapalı kümelerin bir ailesinin arakesiti olarak tanımlandığından kapalıdır.

Eğer $y \in \Omega_x$ ise bir $\{t_n\}$ dizisi $t_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde vardır. $x_n = \pi(x, t_n) \rightarrow y$ dir. $\forall t \in I_y$ için π sürekli olduğundan $\pi(x_n, y) \rightarrow \pi(y, t)$ olur. $\pi(x_n, t) = \pi(x, t + t_n)$ dir. $t + t_n \rightarrow \infty$ olduğundan $\pi(y, t) \in \Omega_x$ dir. O halde Ω_x invaryanttır.

Tanım 4.1.17: $\gamma(x)$ yörüngesi kompakt bir kümenin altkümesi ise yani $H(x)$ kompakt ise $\pi(x,t)$ hareketi kompaktır denir. $H^+(x)$ kompakt ise $\pi(x,t)$ ye pozitif kompakt ve $H^-(x)$ kompakt ise $\pi(x,t)$ ye negatif kompaktır denir.

Teorem 4.1.18: $\pi(x,t)$ pozitif kompakt olsun. ω -limit kümesi olan Ω_x boştan farklıdır, kompaktır ve invaryanttır. Böylece $\forall y \in \Omega_x$ için $I_y = \mathbb{R}$ dir. Ayrıca Ω_x bağlantılıdır.

İspat: Ω_x in invaryant olduğunu biliyoruz. Eğer $\pi(x,t)$ pozitif kompakt ise $H(x) \subset X$ kompaktır. $r \geq 0$ için $H^+(\pi(x, r)) \subset H^+(x)$ olduğundan $H^+(\pi(x, r)) \subset X$ kompaktır. $\{H^+(x, r)\}$ kümeler ailesi azalan ve boştan farklı azalan kompakt ailenin arakesiti boştan farklı ve kompakt olduğundan, Ω_x boştan farklıdır ve kompaktır. Eğer $y \in \Omega_x$ ise $\forall t \in I_y$ için $\pi(y, t) \subset \Omega_x$ dir. Böylece I_y nin maksimalliğinden $I_y = \mathbb{R}$ olur.

Şimdi Ω_x bağlantılı olmasın. Bu durumda boştan farklı, ayrık ve açık A ve B kümeleri vardır $\ni \Omega_x \subset A \cup B$ olur. Ayrıca $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ ağları bulabiliriz öyle ki;

$$0 < s_1 < t_1 < \dots < s_n < t_n < s_{n+1} < \dots, s_n \rightarrow \infty, t_n \rightarrow \infty$$

$\pi(x, s_n) \in A$ ve $\pi(x, t_n) \in B$ olur. $\pi(x, [s_n, t_n])$ bağlantılı olduğundan bir $t_n^* \in [s_n, t_n]$ vardır $\ni \pi(x, t_n^*) \notin A \cup B$ olur. $\pi(x, t)$ nin kompaktlığından $\{\pi(x, t_n^*)\}$ ağı $\pi(x, t_n^*) \rightarrow y$ olacak şekilde yakınsak bir alt ağ vardır. Limit noktası olan y , $X \setminus (A \cup B)$ kapalı kümesinde bulunur ve $t_n^* \rightarrow \infty$ için $y \in \Omega_x$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde Ω_x bağlantılıdır.

Teorem 4.1.19: π , X üzerinde bir dinamik sistem olsun. π pozitif kompakt ise LB boştan farklıdır.

Tanım 4.1.20: $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\pi(x, t) = x$ ise $x \in X$ noktasına kararsızlık (rest, equilibrium point) noktası denir.

Tanım 4.1.21: $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için $\pi(x, t+s) = \pi(x, t)$ ise x noktasına periyodik nokta denir. Ayrıca π ye periyodik hareket ve $s \in \mathbb{R}$ ye de periyot denir.

Eğer bazı $r > 0$ için $\pi(x, r) = x$ ve $\forall t \in (t, r)$ için $\pi(x, t) \neq x$ ise $\{ \pi(x, t) : 0 \leq t \leq r \}$ hareketine periyodik yörünge denir.

Teorem 4.1.22: (X, d) metrik uzay ve $x \in X$ olsun. Aşağıdakiler vardır:

(i) Eğer her $\delta > 0$ için $\gamma^+(x) \subset B(y, \delta)$ olacak şekilde $x \in B(y, \delta)$ varsa $y \in X$ kararsızlık noktasıdır.

(ii) Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(x, t) = y$ ise $y \in X$ kararsızlık noktasıdır[12].

4.2.Sürekli Fonksiyonlar Uzayı ve Dinamik Sistem

$C = C(R, R^n)$ R den R^n ye tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olsun. C , kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisine sahip olsun. Yani her $K \subset R$ kompakt olmak üzere $\{f_k\}_K$ kısıtlamalar dizisi $f|_K$ ya düzgün yakınsıyorken C deki $\{f_k\}$ dizisi f ye yakınsasın.

Şimdi bu topolojinin metriklenebilir olduğunu gösterelim. $I_n = [-n, n]$ ve R^n üzerindeki norm $|\cdot|$ ile gösterilsin. $f, g \in C$ iken;

$$\sigma_n(f, g) = \sup\{ |f(\theta) - g(\theta)| : \theta \in I_n \}$$

$$\rho_n(f, g) = \min\{1, \sigma_n(f, g)\}$$

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f, g)$$

şeklinde tanımlayalım. İddia ediyoruz ki ρ C üzerinde bir metriktir ve $\rho(f_k, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{f_k\} \rightarrow f$ dir. Önce σ_n in yarı metrik olduğunu gösterelim. $\forall f, g, h \in C$ için,

$$(i) \sigma_n(f, g) = \sigma_n(g, f)$$

$$(ii) \sigma_n(f, f) = 0$$

$$(iii) \sigma_n(f, g) \leq \sigma_n(f, h) + \sigma_n(h, g)$$

olur. Benzer şekilde ρ_n aynı şartları sağlar. Ayrıca σ_n ve ρ_n denktirler. Bu durumda C deki her $\{f_k\}$ dizisi ve f fonksiyonu için,

$$\rho_n(f_k, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sigma_n(f_k, f) \rightarrow 0$$

olur. $|\rho_n(f, g)| \leq 1$ olduğundan $\forall f, g \in C$ için ρ nun tanımında bulunan seri mutlak yakınsaktır. Yukarıdaki üç şartı ρ nun sağladığını görmek kolaydır. $\rho(f, g) = 0$ ise $f = g$ olduğunu gösterelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow \rho_n(f, g) = 0$ olmasıdır. Böylece her I_n aralığı için $f(\theta) = g(\theta)$ olur. $\bigcup_n I_n = R$ olduğundan $f = g$ olur. Dolayısıyla ρ , C

üzerinde bir metrik olur. Şimdi ρ tarafından üretilen topolojinin, kompakt kümeler üzerindeki düzgün yakınsaklık topolojisi ile aynı olduğunu

gösterelim. $K \subset \mathbb{R}$ kompakt olsun. Dolayısıyla bazı n doğal sayıları için $K \subset I_n$ olur. Eğer $\rho(f_k, f) \rightarrow 0$ ise $\rho_n(f_k, f) \rightarrow 0$ dır. Yani $\sigma_n(f_k, f) \rightarrow 0$ dır. Böylece $f_k \rightarrow f$ yakınsaklığı I_n ve K kümeleri üzerinde düzgündür.

Diğer taraftan kompakt kümeler üzerinde $\{f_k\}$, f ye düzgün yakınsak olsun.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 seçelim. $\{f_k\}$ kompakt kümeler üzerinde düzgün olarak f ye yakınsadığından, I_{n_0} üzerinde de düzgün yakınsar. Böylece, $k \geq k_0$ olduğunda, $\sigma_1(f_k, f), \dots, \sigma_{n_0}(f_k, f)$ yarı

metrikleri küçük olacak şekilde bir k_0 sayısı bulunabilir. $\sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \rho_n(f_k, f) \leq \varepsilon$

olacak şekilde k_0 sayısını seçelim. $k \geq k_0$ iken,

$$\rho(f_k, f) \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \rho_n(f_k, f) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} \leq 2\varepsilon \quad \text{olur.}$$

Şimdi $\pi : C \times \mathbb{R} \rightarrow C$ dönüşümünü, $\pi(f, t) = f_t$ ve $f_t(\theta) = f(t+\theta)$ olacak şekilde tanımlayalım.

Teorem 4.2.1: $\pi(f, t) = f_t$ dönüşümü $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ üzerinde sürekli bir dinamik sistem (flow) tanımlar.

İspat: (i) $\forall f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ için $\pi(f, 0) = f$ olur.

(ii) $\forall f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \forall t, s \in \mathbb{R}$ için ;

$$\pi(\pi(f, t), s) = \pi(f_t, s) = f_{t+s} = \pi(f, t+s)$$

olur.

(iii) Şimdi π nin sürekli olduğunu gösterelim. $\{f^{(k)}\}$, limiti f olan C de bir dizi ve $\{\alpha_k\}$ limiti 0 olan $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için, $\pi(f^{(k)}, t + \alpha_k) \rightarrow \pi(f, t)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $|\alpha_k| \leq 1$ kabulü genelliği bozmaz. $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ve $K_1 = \{\theta + \alpha : \theta \in K, |\alpha| \leq 1\}$ kompakt olsun. $t \in \mathbb{R}$ sabit tutulsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. N_1 indeksini, $\theta' \in K_1, k \geq N_1$ iken

$|f_t^{(k)}(\theta') - f_t(\theta')| \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçelim. $\delta > 0$ sayısını, f_t nin K da düzgün yakınsamasını kullanarak, $\theta \in K$, $|\alpha| \leq \delta$ iken $|f_t(\theta + \alpha) - f_t(\theta)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçelim. N_2 indisini $k \geq N_2$ iken $|\alpha_k| \leq \delta$ olacak şekilde seçelim. $N \geq N_1$ ve $N \geq N_2$ olacak şekilde bir N indisi seçelim. Dolayısıyla, $k \geq N$ ve $\theta \in K$ için; $|f_t^{(k)}(\theta + \alpha_k) - f_t(\theta)| \leq |f_t^{(k)}(\theta + \alpha_k) - f_t(\theta + \alpha_k)| + |f_t(\theta + \alpha_k) - f_t(\theta)| \leq 2\varepsilon$ olur. O halde π süreklidir. Yukarıdaki şekilde tanımlanan dinamik sistem Bebutov dinamik sistemi olarak da bilinir.

Teorem 4.2.2: Bebutov dinamik sisteminde f_t kompakt $\Leftrightarrow f$ fonksiyonu sınırlıdır ve R de düzgün süreklidir.

İspat: Bu teoremin ispatı için Ascoli teoreminden faydalanalım:

$A \subset C$ şartlı kompakt $\Leftrightarrow$

- (i) A sınırlıdır yani her bir $\theta \in R$ bir $K \subset R^n$ kompakt alt kümesi var $\ni \forall f \in A$ için $f(\theta) \in K$
- (ii) A eş süreklidir yani $\forall \theta \in R$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon, \theta)$ vardır $\ni \forall f \in A$ için $|\theta - \theta'| \leq \delta$ iken $|f(\theta) - f(\theta')| \leq \varepsilon$ dur.

Şimdi teoremi ispat edelim. f_t nin kompakt olması için gerek ve yeter şart, $\gamma(f)$ nin şartlı kompakt olmasıdır. Kabul edelim ki f_t kompakt olsun. Dolayısıyla $\gamma(f)$ sınırlıdır yani $\theta = 0$ için bir B sayısı vardır $\ni \forall t \in R$ için $|f_t(0)| = |f(t)| \leq B$ olur. Böylece f sınırlıdır. $\theta_0 = 0$ için $\gamma(f)$ eş sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır $\ni \forall t \in R$ için $|\theta| \leq \delta$ iken $|f_t(0) - f_t(\theta)| = |f(t) - f(t+\theta)| \leq \varepsilon$ olur. Böylece f düzgün süreklidir.

Kabul edelim ki f sınırlı ve düzgün sürekli olsun. $\gamma(f)$ nin sınırlı olduğu açıktır. Eğer $\delta(\varepsilon)$, f nin sürekliliği için gerekli ise $\forall t \in R$ için $|\theta - \theta'| \leq \delta$ iken; $|f_t(\theta) - f_t(\theta')| = |f(t+\theta) - f(t+\theta')| \leq \varepsilon$ olur. Yani $\gamma(f)$ eş süreklidir.

Teorem 4.2.3: f_t pozitif kompakttır $\Leftrightarrow f$ sınırlıdır ve $\mathbb{R}^+$ üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 4.2.4: $f(\theta) = e^{-\theta}$ olsun. f_t pozitif kompakttır ve $\Omega_f = \{0\}$ olup 0 sıfır fonksiyonunu göstermektedir.

Örnek 4.2.4: $f(\theta) = e^{-\theta^2}$ olsun. Bu durumda f_t kompakt ve $\Omega_f = A_f = \{0\}$ olur.

Örnek 4.2.5: $f(\theta) = \sin \theta$ olsun. Yine f_t kompakt ve $\Omega_f = A_f = \{f_s : 0 \leq s < 2\pi\}$ olur.

Örnek 4.2.6: $f(\theta) = \sin \theta^2$ olsun. Bu durumda f sınırlıdır fakat düzgün sürekli değildir. Ayrıca Ω_f ve A_f boş kümedir.

5. OTONOM OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE TOPOLOJİK DİNAMİKLER

5.1. Temel Kuruluş, Kuvvetli Topolojiler ve Topolojik Dinamikler

A. Temel Kuruluş

Tanım 5.1.1: $\mathbb{R}^n$ Öklidyen n -uzay, $W \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki norm $|x|$ ile gösterilsin. $f : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa uyumlu (admissible) fonksiyon olarak adlandırılır:

(i) f sürekli ve

(ii) $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ diferensiyel denkleminin çözümleri biriciktir.

Uyarı: (ii) şartından verilen herhangi $(x_0, t_0) \in W \times \mathbb{R}$ noktası için $\phi(t_0) = x_0$ şartını sağlayan kesinlikle bir çözüm vardır.

Tanım 5.1.2: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme, $f : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ diferensiyel denkleminin çözümleri $\forall t \in \mathbb{R}$ için sürekli ise f ye global varlık özelliğini sağlıyor denir.

Bu bölümde global varlık özelliğini sağlayan uyumlu f fonksiyonları ile ilgileneceğiz.

Tanım 5.1.3: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme, $f : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. f nin ötelemeler uzayı $\mathfrak{F} = \{ f_r : f_r(x, t) = f(x, r+t), r \in \mathbb{R} \}$ ile tanımlanır.

Teorem 5.1.4: $C = C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \{ f \mid f : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ sürekli} \}$ olmak üzere $f \in C$ uyumlu ise $\forall r \in \mathbb{R}$ için $f_r(x, t) = f(x, r+t)$ fonksiyonları da uyumlu olur.

Ayrıca f global varlık özelliğini sağlıyorsa $\forall t \in \mathbb{R}$ için f_t fonksiyonları da global varlık özelliğini sağlar.

Teorem 5.1.5: $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ olsun. $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{S}, t \rightarrow f_t$ dönüşümü $\mathfrak{S}$ üzerindeki kompakt açık topolojiye göre süreklidir.

İspat: $\mathfrak{S} = \{ f_s : s \in \mathbb{R} \}$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{S} \subset C$ dir. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bir dizi ve $s_n \rightarrow s$ olsun. Her $(x, t) \in W \times \mathbb{R}$ için f sürekli olduğundan,

$$f_{s_n}(x, t) = f(x, s_n + t) \rightarrow f(x, s + t) = f_s(x, t)$$

olur. f , $W \times \mathbb{R}$ de sürekli olduğundan bu süreklilik $W \times \mathbb{R}$ deki kompakt kümelerde düzgündür. Dolayısıyla yukarıdaki yakınsaklık $W \times \mathbb{R}$ deki kompakt kümelerde düzgündür. Yani (f_{s_n}) dizisi C üzerindeki kompakt açık topolojiye göre f ye yakınsar. O halde $t \rightarrow f_t$ dönüşümü süreklidir.

Tanım 5.1.6: $C = C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ üzerindeki kompakt-açık topolojiyi üreten ρ metriğine C veya $\mathfrak{S}$ üzerinde temel(basic) metrik denir.

Teorem 5.1.7: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme, $f : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. $\pi^* : C \times \mathbb{R} \rightarrow C$, $\pi^*(f, s) = f_s$ ile tanımlı π^* dönüşümü $C = C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlar. Burada C üzerinde kompakt-açık topoloji vardır. Her bir $\mathfrak{S} = \{ f_s : s \in \mathbb{R} \}$, π^* in yörüngesidir.

Teorem 5.1.8: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme, $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ global varlık özelliğini sağlayan uyumlu fonksiyon ve ρ $\mathfrak{S}$ üzerindeki temel metrik olsun. Bu durumda $X = W \times \mathfrak{S}$ olmak üzere,

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

$$(x, f; s) \rightarrow \pi(x, f; s) = (\phi(x, f; s), f_s) \quad \dots (1)$$

ile tanımlanan π dönüşümü $X = W \times \mathfrak{S}$ üzerinde bir dinamik sistemdir. Burada $\phi(x, f; s)$, $x' = f(x, t)$ diferensiyel denkleminin $\phi(x, f; 0) = x$ şartını sağlayan çözümüdür.

İspat: $f \in C(W \times R, R^n)$ global varlık özelliğini sağlayan uyumlu fonksiyon olsun. $\rho, \mathfrak{Z}$ üzerindeki temel metrik olmak üzere,

$$d : X \times X \rightarrow R, d((x, f), (x^*, f^*)) = |x - x^*| + \rho(f, f^*) \text{ metriğini tanımlayalım.}$$

Gerçekten (X, d) metrik uzaydır. Şimdi π nin X üzerinde bir dinamik sistem olduğunu gösterelim.

$$(i) \pi(x, f, 0) = (\phi(x, f, 0), f_0) = (x, f)$$

$$(ii) (x, f) \in X \text{ ve } s, r \in R \text{ olsun. } \phi(t) = \phi(x, f, t) \text{ ve } \psi(t) = \phi(\phi(s), f_s, t)$$

olsun. Burada $\phi(t), x' = f(x, t)$ denkleminin $\phi(0) = x$ şartını sağlayan çözümüdür.

$$\psi(0) = \phi(\phi(s), f_s, 0) = \phi(s) = \phi(x, f, s) \text{ olup } \psi(t),$$

$$x' = f_s(x, t) = f(x, s+t) \dots (2)$$

denkleminin çözümüdür.

$$\text{Ayrıca } \xi(t) = \phi(t+s), (2) \text{ denkleminin çözümü olup,}$$

$$\xi(0) = \phi(s) = \phi(x, f, s) \text{ dir.}$$

Çözümlerin tekliğinden $\forall t \in R$ için $\psi(t) = \phi(t+s)$ sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \pi(\pi(x, f, s); r) &= \pi(\phi(s), f_s; r) \\ &= (\phi(\phi(s), f_s; r), f_{s+r}) \\ &= (\psi(r), f_{s+r}) \\ &= (\phi(r+s), f_{s+r}) \\ &= \pi(x, f; s+r) \end{aligned}$$

elde edilir.

π nin sürekliliğini göstermek için Kamke'nin teoremini kullanacağız.

Teorem 5.1.9(Kamke):

(i) $\{g_n\}_{n \in N} \subset C(W \times R, R^n)$ bir dizi, $g_n \rightarrow g$ ve bu yakınsaklık C üzerindeki kompakt-açık topolojiye olsun. $n \in N$ için $\phi_n, x' = g_n(x, t)$ denkleminin çözümü ve $\phi_n(0) \rightarrow x_0 \in W$ olsun. Bu durumda $\{\phi_n\}_{n \in N}$ dizisinin $x' = g(x, t)$ denkleminin ϕ çözümüne yakınsayan bir alt dizisi vardır.

$\phi(0) = x_0$ olup yakınsaklık ϕ nin tanım aralığındaki kompakt kümelerde düzgündür.

(ii) Ayrıca eğer $x' = g(x,t)$ denkleminin çözümleri biricik ise $\phi_n \rightarrow \phi$ dir. Yakınsaklık ϕ nin tanım aralığındaki kompakt kümelerde düzgündür.

Şimdi π nin sürekli olduğunu gösterelim: $\{(x_n, f_{s_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X = W \times \mathfrak{I}$ bir dizi ve $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(x_n, f_{s_n}) \rightarrow (x, f_s)$ ve $t_n \rightarrow t$ olsun. $\phi_n(t) = \phi(x_n, f_{s_n}; t)$ ve $\phi(t) = \phi(x, f_s; t)$ olsun.

Kompakt-açık topolojiye göre $f_{s_n} \rightarrow f_s$, $x' = f_s(x,t)$ nin çözümleri biricik ve $\phi_n(0) = x_n \rightarrow x = \phi(0)$ olduğundan $\phi_n \rightarrow \phi$ olur (yakınsaklık $\mathbb{R}$ deki kompakt kümelerde düzgündür). Ayrıca $t_n \rightarrow t$ olduğundan $\phi_n(t_n) \rightarrow \phi(t)$ olur. Bu durumda;

$$\pi(x_n, f_{s_n}; t_n) = (\phi_n(t_n), f_{s_n+t_n}) \rightarrow (\phi(t), f_{s+t}) = \pi(x, f_s; t)$$

olup π sürekli (metrik uzaylarda dizisel süreklilik $\equiv$ süreklilik).

B. Kuvvetli Topolojiler

C üzerindeki, genel olarak C nin alt kümeleri üzerindeki kompakt-açık topolojiden daha kuvvetli olan topolojilerle ilgileneceğiz.

Tanım 5.1.10: $C' \subset C$ olsun. Eğer her $\{f_n\} \subset C'$ ve $f \in C'$ için $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ olması, kompakt-açık topolojiye göre $f_n \rightarrow f$ olmasına denk ise C' üzerindeki ρ metriği, temel metrikten daha kuvvetlidir denir.

Teorem 5.1.11: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık alt küme, $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ global varlık özelliğini sağlayan uyumlu bir fonksiyon ve ρ^* , $\mathfrak{I}$ üzerinde temel metrikten daha kuvvetli bir metrik olsun. Eğer,

$$\mathfrak{I} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{I}, (f, t) \rightarrow f_t$$

dönüşümü ρ^* metriğine göre sürekli ise $X = W \times R$ olmak üzere, (1) ile tanımlanan π dönüşümü,

$$d^* : X \times X \rightarrow R, d^*((x,f),(x^*,f^*)) = |x - x^*| + \rho^*(f,f^*)$$

iken X üzerinde bir dinamik sistem tanımlar.

C. f nin Kabuğu

π dönüşümünün topolojik dinamik özelliklerini kullanarak $x' = f(x,t)$ denkleminin çözümleri hakkında bilgi elde etmek istiyoruz. Fakat bu noktada teorik olarak hala bir kusur vardır. Topolojik dinamiklerin bir çok sonucu, taban uzayı olan X in tam veya bir tam metrik uzaya homeomorfik olmasına dayanır. Genel olarak $(\mathfrak{I}, \rho)$ fonksiyon uzayı için bu doğru değildir ve dolayısıyla (X, d) için de doğru değildir.

Kompakt açık topolojide $\mathfrak{I}$ uzayı $C = C(W \times R, R^n)$ üzerindeki $\pi^*(f,t) = f_t$ dinamik sisteminin invaryant kümesidir. (C, ρ) tam metrik uzay iken C üzerindeki kompakt-açık topoloji ρ metriği ile üretilir. Bu topolojiye göre $\mathfrak{I}_{\infty}^* = \overline{\mathfrak{I}}$ alınırsa $\mathfrak{I}_{\infty}^*$, ρ metriğine göre tamdır. $\mathfrak{I}_{\infty}^*$ kümesine f nin kabuğu denir.

Doğal olarak $W \times \mathfrak{I}$ üzerindeki π dinamik sistemi $W \times \mathfrak{I}_{\infty}^*$ üzerine genişletilebilir mi, sorusu sorulabilir. Bunu yapabilmek için ele alacağımız denklem üzerinde bir takım kabüller yapmalıyız.

Bunu yapmadan önce $x' = f(x,t)$ denkleminin davranışları üzerinde çalışacağız. f uyumlu fakat global varlık özelliğini sağlamayan bir fonksiyon olsun. Öncelikle lokal dinamik sistem kavramını vereceğiz. Genişleme üzerinde daha sonra duracağız.

5.2.Uyumlu Diferensiyel Denklemler

A. Lokal Dinamik Sistem

Lokal dinamik sistem kavramı, dinamik sistemden $\pi(x,t)$ hareketinin her $t \in \mathbb{R}$ için tanımlı olmaması ile ayrılır. Daha önce bu kavramı vermiştik.

$f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ uyumlu fonksiyon ve $\mathfrak{I}$, f nin ötelemeler uzayı olsun.

$p = (x,g) \in X = W \times \mathfrak{I}$ ve $I_p = I_{(x,g)}$, $x' = g(x,t)$ denkleminin $\phi(x,g,0) = x$ şartını sağlayan $\phi(x,g,t)$ çözümünün en geniş tanım aralığı olsun. $I_p = \mathbb{R}$ veya $t \rightarrow \partial I_p$ iken $\phi(x,g,t) \rightarrow \omega$ olsun. $F = \{ (x,g;t) = (p;t) \in X \times \mathbb{R} : t \in I_p \}$ olsun.

$$\pi : F \rightarrow X$$

$$(x,g;t) \rightarrow \pi(x,g;t) = (\phi(x,g,s), g_s) \dots (3)$$

olarak tanımlansın.

Tanım 5.2.1: (X,d) bir metrik uzay ve $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ olsun. $\phi : I \rightarrow X$,

“ $t \rightarrow \partial I$ iken $\phi(t) \rightarrow \omega$ ” ifadesi şöyle tanımlanır :

(i) $I \neq \mathbb{R}$ yani $\alpha \neq -\infty$ veya $\beta \neq \infty$ dur.

(ii) Eğer $\alpha \neq -\infty$ (veya $\beta \neq \infty$) ise $\forall K \subset X$ kompakt kümesi için bir $T \in \mathbb{R}$ var, $\alpha < T < \beta$ $\ni$ $\alpha < t \leq T$ için $\phi(t) \in X \setminus K$ (veya $T \leq t < \beta$) olur.

Teorem 5.2.2: $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ve $(\mathfrak{I}, \rho)$ metrik uzay olsun. Bu durumda (3) ile tanımlanan π dönüşümü $X = W \times \mathfrak{I}$ üzerinde bir lokal dinamik sistem tanımlar.

Teorem 5.2.3: $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ uyumlu fonksiyon ve $\rho, \mathfrak{I}$ üzerinde uyumlu metrik olsun. Bu durumda (3) ile tanımlanan π dönüşümü $X = W \times \mathfrak{I}$ üzerinde bir lokal dinamik sistem tanımlar. Burada $X = W \times \mathfrak{I}$ üzerindeki d metriği,

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d((x,f), (x^*, f^*)) = |x - x^*| + \rho(f, f^*)$$

ile tanımlanır.

B.Kabuk

Daha önce $W \times \mathfrak{I}$ üzerindeki dinamik sistemin $W \times \mathfrak{I}_{co}^*$ üzerine genişlemesi üzerinde durmuştuk. Bu durumun lokal dinamik sistem için sorulması doğaldır.

$f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ uyumlu fonksiyon olsun. $\mathfrak{I}$ ötelemeler uzayını üzerindeki kompakt-açık topolojiyle birlikte düşünelim. $\mathfrak{I}_{co}^* = \overline{\mathfrak{I}}$, f nin kabuğu olsun (kapanış işlemi kompakt-açık topolojiye göredir). (*) ile tanımlanan $W \times \mathfrak{I}$ üzerindeki π lokal dinamik sisteminin $W \times \mathfrak{I}_{co}^*$ üzerine lokal dinamik sistem olarak genişletilebilmesi için f üzerindeki şartları arayacağız. İlk önce π nin $\mathfrak{I}$ üzerine projeksiyonuna bakacağız. Bunu konunun başında yapmıştık.

Teorem 5.2.4: $f \in C$ ve $\mathfrak{I}_{co}^*$, f nin kompakt-açık topolojiye kabuğu olsun. $\pi^*(f^*, t) = f_t^*$ dönüşümü $\mathfrak{I}_{co}^*$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlar ve bu $\mathfrak{I}$ üzerindeki dinamik sistemin genişlemesidir. Böylece $\mathfrak{I}_{co}^*$ bir tam metrik uzaya homeomorftur.

İspat: $\pi^*(f^*, t) = f_t^*$ dönüşümünün $\mathfrak{I}_{co}^*$ üzerinde bir dinamik sistem olduğu daha öncekine benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca invaryant bir kümenin kapanışı da invaryanttır. C nin $C^\wedge$ tam metrik uzayına homeomorf olduğunu biliyoruz. $C^\wedge$ uzayının kapalı her alt uzayı da tam olduğundan $\mathfrak{I}_{co}^*$ da tam metrik uzaya homeomorftur.

$\mathfrak{I}$ üzerindeki ρ uyumlu metriği temel metrikten daha kuvvetli ise durum basit değildir. Bu güçlüğü bir örnekle göstermeye çalışalım.

Örnek 5.2.5:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & ; 4k \leq t < 4k+2, k=0,1,\dots \\ (k+1)^{-1} \sin^2 \pi(k+1)t & ; 4k+2 < t < 4k+4, k=0,1,\dots \end{cases}$$

olmak üzere $x' = f(t)$ diferansiyel denklemini ele alalım. $f \in C^1$ ve $\mathcal{I} \subset C^1$ dir.

C^1 üzerinde, $\rho: C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ üzerinde temel metrik olmak üzere;

$$d(f, g) = \rho(f, g) + \sup\{ |f'(t) - g'(t)| : 0 \leq t \leq 1 \}$$

metriğini tanımlayalım. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir :

- (i) $t \rightarrow f_t$ dönüşümü d metriğine göre sürekli.
- (ii) Eğer $g = 0$ ise $k \rightarrow \infty$ iken $d(f_{4k}, g) \rightarrow 0$ dir.
- (iii) $d(f_{4k+3}, g_3) = \rho(f_{4k+3}, g_3) + 2\pi \rightarrow 2\pi$ ($k \rightarrow \infty$).

Diğer bir deyişle, $\pi^*(f', t) = f'_t$ dönüşümü C^1 üzerinde sürekli değilse, verilen metriğe göre, özellikle $\mathcal{I}$ üzerinde sürekli değildir. Kapanış işlemi C^1 üzerinde d tarafından üretilmiş topolojiye göredir.

Tanım 5.2.6: $\mathcal{R} \subset C$ ve $\mathcal{R}$ öteleme invaryant yani $g \in \mathcal{R}$ ise $\forall s \in \mathbb{R}$ için $g_s \in \mathcal{R}$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa ρ metriğine $\mathcal{R}$ ye uyumludur denir:

- (i) ρ , temel metrikten daha kuvvetlidir.
- (ii) $\pi^*(g, t) = g_t$ dönüşümü $\mathcal{R}$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlar.

Eğer $f \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ olup ρ $\mathcal{I}$ de uyumludur. Bu durumda $(\mathcal{R}, \rho)$ ya göre f nin kabuğu $\mathcal{I}$ nin kapanışına eşittir. Bunu $\mathcal{I}^*$ ile göstereceğiz. Fakat ρ temel metrik ise $\mathcal{R} = C$ olur ve kabuk $\mathcal{I}_{\infty}^*$ ile gösterilir. Eğer uyumlu metrik temel metrikten daha kuvvetli ise $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}_{\infty}^*$ olur.

Teorem 5.2.7: $f \in C$ ve $\mathcal{I}^*$ f nin $(\mathcal{R}, \rho)$ ya göre kabuğu olsun. Bu durumda $\pi^*(f', t) = f'_t$ dönüşümü $\mathcal{I}^*$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlar. Ayrıca $(\mathcal{R}, \rho)$ tam metrik uzay ise $(\mathcal{I}^*, \rho)$ uzayı da tamdır.

Teorem 5.2.8: $f \in C(W \times R, R^n)$ uyumlu fonksiyon, $\mathfrak{I}$ f nin ötelemeler uzayı ve ρ $\mathfrak{I}$ üzerindeki temel metrik olsun. $\mathfrak{I}_{\infty}^*$, f nin kompakt açık topolojiye göre kabuğu olsun. Kabuğun her f^* elemanı uyumlu ise (3) ile tanımlanan $W \times \mathfrak{I}$ üzerindeki π lokal dinamik sistemi $W \times \mathfrak{I}_{\infty}^*$ uzayına genişletilebilir. Bu genişleme (3) ile verilir.

İspat: Teorem 5.1.8 ve Teorem 5.1.9 yardımıyla ispat yapılır. Eğer kabuktaki her f^* uyumlu ise π genişlemesi (3) ile verilir. π dönüşümü lokal dinamik sistem şartlarını sağlar. π nin sürekliliği için Kamke'nin lemması kullanılır.

Teorem 5.2.9: $\mathfrak{R} \subset C(W \times R, R^n)$, $\mathfrak{R}$ öteleme invaryant küme ve ρ $\mathfrak{R}$ üzerindeki uyumlu metrik olsun. $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{I}^*$ sırasıyla $(\mathfrak{R}, \rho)$ ya göre f nin ötelemeler uzayı ve kabuğu olsun. Eğer her f^* uyumlu ise $W \times \mathfrak{I}$ üzerindeki (3) ile tanımlanan π lokal dinamik sistemi, $W \times \mathfrak{I}^*$ üzerine genişletilebilir. Bu genişleme (3) ile verilir.

Tanım 5.2.10: $f \in C(W \times R, R^n)$ uyumlu fonksiyon ve $\mathfrak{I}_{\infty}^*$ f nin kompakt açık topolojiye göre kabuğu olsun. Eğer $\forall f^* \in \mathfrak{I}_{\infty}^*$ uyumlu ise f ye regülerdir (veya $\mathfrak{I}_{\infty}^*$ -regülerdir) denir. Benzer şekilde $\mathfrak{I}^*$ daki her fonksiyon uyumlu ise f ye $\mathfrak{I}^*$ -regülerdir denir.

Teorem 5.2.11: $f \in C(W \times R, R^n)$ ve f $\mathfrak{I}_{\infty}^*$ -regüler olsun. Bu durumda eğer $\mathfrak{I}^*$ f nin herhangi bir kabuğu ise f $\mathfrak{I}^*$ -regülerdir.

İspat: $\mathfrak{I}^* \subset \mathfrak{I}_{\infty}^*$ olmasından açıktır.

Teorem 5.2.10-5.2.11 aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

Teorem 5.2.12: $f \in C(W \times R, R^n)$, $\mathcal{I}^*$ f nin herhangi bir kabuğu ve f $\mathcal{I}^*$ -regüler olsun. $W \times \mathcal{I}$ üzerindeki (*) ile tanımlanan π lokal dinamik sistemi, $W \times \mathcal{I}^*$ üzerine genişletilebilir. Bu genişleme (3) ile verilir.

Eğer $f \in C(W \times R, R^n)$ ve $\mathcal{I}^*$ f nin herhangi bir kabuğu ise $\mathcal{I}^*$ daki her fonksiyon süreklidir. Böylece f $\mathcal{I}^*$ -regülerdir $\Leftrightarrow$ Kabuktaki diferensiyel denklem teklik şartını sağlar. Bu denklem $f^* \in \mathcal{I}^*$ olmak üzere $x' = f^*(x, t)$ biçimindedir.

Teorem 5.2.13: $f \in C(W \times R, R^n)$ ve f x 'e göre lokal Lipschitz şartını sağlasın. Lipschitz sabiti t den bağımsız olsun. Bu durumda f regülerdir.

Not: $K \subset W$ kompakt, $k \in R^+$ $\ni x, y \in K, t \in R$ için

$|f(x, t) - f(y, t)| \leq k |x - y|$ oluyorsa f Lipschitz şartını sağlıyor denir.

İspat: ρ , $C = C(W \times R, R^n)$ üzerindeki temel metrik olsun. $\mathcal{I}$ f nin ötelemeler uzayı, $\mathcal{I}_{\infty}^*$ f nin C üzerindeki kompakt açık topolojiye göre kabuğu olsun. $\mathcal{I}_{\infty}^*$ daki her f^* fonksiyonunun f gibi Lipschitz şartını sağladığını göstereceğiz. Bu $x' = f^*(x, t)$ denkleminin çözümlerinin biricik, dolayısıyla f nin regüler olduğunu verecektir.

$K \subset W$ kompakt, $s \in R$ olmak üzere f_s f nin herhangi bir ötelemesi olsun. Bu durumda $\forall x, y \in K$ ve $\forall t \in R$ için $\exists k \in R^+$ var $\ni$

$|f_s(x, t) - f_s(y, t)| = |f(x, t+s) - f(y, t+s)| \leq k |x - y|$ dir. Diğer bir deyişle f nin her ötelemesi Lipschitz şartını sağlar.

$f^* \in \mathcal{I}_{\infty}^*$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için bir f_s ötelemesi var $\ni \rho(f^*, f_s) < \varepsilon$ olur.

$I \subset R$ kompakt olsun. Dolayısıyla $M = K \times I \subset W \times R$ kompakt olur. ρ metriği kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisini ürettiğinden (bu topoloji C üzerindeki kompakt açık topoloji ile aynıdır) negatif olmayan $l(M; \varepsilon)$ fonksiyonu var $\ni \varepsilon \rightarrow 0$ iken $l(M; \varepsilon) \rightarrow 0$ olur. Ayrıca $g^* \in C$ ve $\rho(f^*, g^*) < \varepsilon$

iken $\sup\{ |f^*(x,s) - g^*(x,s)| : (x,s) \in M \} \leq l(M;\varepsilon)$ olur (l fonksiyonu f^* 'a bağlıdır). $(x,t),(y,t) \in M$ için eğer $\rho(f^*,f_s) < \varepsilon$ ise ,

$$\begin{aligned} |f^*(x,t) - f^*(y,t)| &\leq |f^*(x,t) - f_s(x,t)| + |f_s(x,t) - f_s(y,t)| + |f_s(y,t) - f^*(y,t)| \\ &\leq 2 l(M;\varepsilon) + k |x - y| \end{aligned}$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken

$$|f^*(x,t) - f^*(y,t)| \leq k |x - y|$$

elde edilir. $I \subset \mathbb{R}$ keyfi olduğundan bu durum $\forall t \in \mathbb{R}$ için doğrudur.

Teorem 5.2.11 ve Teorem 5.2.12 nin sonucu olarak şu teorem elde edilir:

Teorem 5.2.14: $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ve f x e göre lokal Lipschitz şartını sağlasın ve Lipschitz sabiti t den bağımsız olsun. Eğer $\mathfrak{F}^*$ f nin herhangi bir kabuğu ise f $\mathfrak{F}^*$ -regülerdir.

Örnek 5.2.15: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,t) = \begin{cases} |x|^{1/2} & , |x| \geq e^{-2t} \\ e^{-t} & , |x| < e^{-2t} \end{cases}$

olmak üzere $x' = f(x,t)$ denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümleri biriciktir fakat $f^*(x,t) = |x|^{1/2} \in \mathfrak{F}_{\infty}^*$ uyumlu değildir.

Örnek 5.2.16: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,t) = \begin{cases} x^2 & , |x| \leq e^t \\ e^{2t} & , |x| > e^t \end{cases}$

diferensiyel denklemini alalım. Bu denklemin çözümleri biriciktir. $|f(x,t)| \leq e^t|x| + e^{2t}$ olduğundan f global varlık özelliğini sağlar. Fakat, $f^*(x,t) = x^2$ fonksiyonu $\mathfrak{F}_{\infty}^*$ da olup global varlık özelliğini sağlamaz.

5.3. $\mathfrak{F}$ Üzerindeki Topolojiler

Bu kısımda $C = C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ veya C nin alt kümeleri üzerindeki topolojileri tartışacağız. Birincisi kompakt-açık topolojidir. Burada bu topoloji için nasıl bir metrik kuracağımızı vereceğiz. İkincisi Bohr metrik tarafından üretilen Bohr

topolojidir. Bu topoloji adi diferensiyel denklemlerin teorisi için çok önemlidir. Bu topolojiye göre uygunluk ve regülerliği tartışacağız. Son olarak düzgün topolojiyi ve C^1 -topolojiyi vereceğiz.

A. Kompakt-Açık Topoloji :

$C(W \times R, R^n)$ üzerindeki kompakt-açık topoloji için bir metrik şöyle kurulur:

$\{ K_n \} \subset W \times R$ kompakt kümelerin bir dizisi öyle ki $W \times R = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ olsun. Her

bir n için $C(W \times R, R^n)$ üzerinde bir yarı metrik şöyle kurulur:

$$\| f - g \|_n = \sup \{ | f(x,t) - g(x,t) | : (x,t) \in K_n \}$$

$$\rho_n(f,g) = \frac{\| f - g \|_n}{1 + \| f - g \|_n}$$

$$\rho(f,g) = \sum_{k=1}^n 2^{-k} \rho_k(f,g) \quad \dots \quad (4)$$

ρ metriği $\{ K_n \}$ dizisinin seçimine bağlı olup bununla birlikte kompakt kümelerin herhangi bir dizisi denk metriği üretir.

Eğer $K_n \subset K_{n+1}$, $n=1,2,\dots$ ise $C(W \times R, R^n)$ uzayı (4) ile verilen metriğe göre tamdır.

B. Bohr Topoloji :

Sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını $B = B(W \times R, R^n)$ ile gösterelim. Yani, $B(W \times R, R^n) = \{ f \mid f : W \times R \rightarrow R^n, \forall M \subset W \text{ kompakt kümesi için } \exists k \geq 0 \text{ var } \ni x \in M, t \in R \text{ iken } | f(x,t) | \leq k \}$ dir. Şimdi $B(W \times R, R^n)$ üzerinde Bohr metriğini tanımlayacağız. $\{ M_n \} \subset W$ kompakt kümeler dizisi $\ni W = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ olsun. Her

bir n için $B(W \times R, R^n)$ üzerinde bir yarı metriği şöyle kurabiliriz:

$$\|f - g\|_{n,\infty} = \sup\{ |f(x,t) - g(x,t)| : x \in M_n, t \in \mathbb{R} \}$$

$$b_n(f,g) = \frac{\|f - g\|_{n,\infty}}{1 + \|f - g\|_{n,\infty}}$$

$$b(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} b_k(f,g) \quad \dots \quad (5) \text{ ile tanımlanan metriğe Bohr metriği denir.}$$

Ayrıca bu metriğe denk olan herhangi bir metrik de Bohr metriği olarak adlandırılır.

Eğer $M_n \subset M_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ ise $B(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (5) ile verilen metriğe göre tamdır. Bohr metriği tarafından üretilen topolojiye Bohr topoloji denir.

Şimdi aşağıdaki soruyu göz önünde bulunduralım: $f \in B(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{I} \subset B(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ötelemeler uzayı olsun. Acaba b metriği $\mathfrak{I}$ ile uyumlu mudur? Ya da denk olarak $(f,t) \rightarrow f_t$ dönüşümü Bohr metriğine göre sürekli midir? Cevabımız $f(x,t)$ nin düzgün sürekli olması halinde olumludur.

Teorem 5.3.1: $f \in B(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ olsun. b Bohr metriği $\mathfrak{I}$ ötelemeler uzayına uyumludur $\Leftrightarrow f$ aşağıdaki şartı sağlarsa:

(U) $\forall M \subset W$ kompakt kümesi ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var $\ni |s| < \delta$ iken $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$ olmak üzere $|f(x,t) - f(x,t+s)| \leq \varepsilon$ dur.

İspat: $\{f^{(n)}\} \subset B(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ olsun. $M \subset W$ kompakt olmak üzere

$f^{(n)} \rightarrow f \Leftrightarrow f^{(n)}(x,t) \rightarrow f(x,t)$ ye $M \times \mathbb{R}$ de düzgün yakınsamasıdır.

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $b(f_t, g_t) = b(f, g)$ olduğundan (5) ile verilen b metriği öteleme invarianttır. Böylece b $\mathfrak{I}$ ile uyumludur $\Leftrightarrow t = 0$ noktasında $t \rightarrow f_t$ dönüşümü b ye göre sürekli dir. (U) şartı şuna denktir: $\{s_n\} \subset \mathbb{R}$, $s_n \rightarrow 0$ ise $f_{s_n}(x,t)$, $f(x,t)$ ye her $M \times \mathbb{R}$ kümesimde düzgün yakınsaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not: (U) özelliği şunu gösterir: $\forall x \in M$ için $f(x,t)$ t ye göre düzgün süreklidir. Bunun tersinin doğru olmadığına dair örnek verilebilir. Fakat her iki durumda da düzgün süreklilik (U) şartını gösterir.

Teorem 5.3.2: $f \in B(W \times R, R^n)$ ve $M \subset W$ kompakt olmak üzere $f(x,t)$ her $M \times R$ kümesinde düzgün sürekli olsun. Bu durumda b Bohr metriği ötelemeler uzayı ile uyumludur.

Teorem 5.3.3: $B_U = \{ f \in B(W \times R, R^n) : f, (U) \text{ şartını sağlasın} \}$ olsun. Bu durumda $\pi^*(f,t) = f_t$ dönüşümü $B_U(W \times R, R^n)$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlar.

İspat: B_U öteleme invaryant olduğundan sadece π^* dönüşümünün $B_U \times R$ üzerinde sürekli olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\{ f^{(n)} \} \subset B_U$, $\{ s_n \} \subset R$, $f^{(n)} \rightarrow f$ ve $s_n \rightarrow s$ olsun. (5) ile verilen Bohr metriği öteleme invaryanttır. Dolayısıyla,

$$b(f_{s_n}^{(n)}, f_s) = b(f^{(n)}, f_{s-s_n}) \leq b(f^{(n)}, f) + b(f, f_{s-s_n})$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Şimdi B_U daki uyumlu fonksiyonlar için regülerlik durumuna bakalım. $f \in B_U$ ise f nin Bohr-kabuğu, $\mathfrak{I}$ nin Bohr topolojiye göre kapanışıdır. Bunu $\mathfrak{I}_b^*$ ile göstereceğiz. $\mathfrak{I}_b^* \subset \mathfrak{I}_{co}^*$ dir. f , $\mathfrak{I}_b^*$ -regüler ise f ye Bohr-regülerler denir. f nin $\mathfrak{I}_b^*$ -regüler olması $\mathfrak{I}_b^*$ daki her fonksiyonun uyumlu olması demektir.

C. Düzgün(Uniform) Topoloji:

$BC(W \times R, R^n) = \{ f \mid f : W \times R \rightarrow R^n \text{ sınırlı ve sürekli} \}$ olsun. $\forall f, g \in BC$ için, $\rho(f, g) = \| f - g \|_\infty = \sup \{ | f(x,t) - g(x,t) | : (x,t) \in W \times R \}$ metriğini tanımlayalım. Bu durumda $\pi^*(f,t) = f_t$ dönüşümü $B_U \cap BC$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlar. Eğer $W = R^n$ ise $f \in BC(R^n \times R, R^n)$ olmak üzere her $x' = f(x,t)$

diferensiyel denklemi global varlık özelliğini sağlar. Böylece eğer, $f \in BC(W \times R, R^n)$ uyumlu ise (5) ile verilen lokal dinamik sistem, dinamik sistem olur.

D. C^1 -Topoloji:

$C^1 = C^1(W \times R, R^n) = \{ f \mid f, \frac{\partial f}{\partial x_i} : W \times R \rightarrow R^n \text{ sürekli} \}$ olsun. ρ C üzerindeki

temel metrik olmak üzere, C^1 üzerindeki metriği $\forall f, g \in C^1$ için,

$\hat{\rho}(f, g) = \rho(f, g) + \rho(D_{x_1}f, D_{x_1}g) + \dots + \rho(D_{x_n}f, D_{x_n}g) \dots$ (6) ile tanımlayalım.

Burada, $D_{x_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dir.

Teorem 5.3.4: $\pi^*(f, t) = f_t$ ile tanımlanan dönüşüm C^1 üzerinde bir dinamik sistemdir. Burada C^1 üzerindeki topoloji (6) ile tanımlanan $\hat{\rho}$ metriği tarafından üretilen topolojidir. Eğer (C, ρ) tam ise $(C^1, \hat{\rho})$ da tamdır. Böylece $\forall f \in C^1$ uyumludur. Dolayısıyla eğer $(C^1, \hat{\rho})$ ya göre f nin kabuğu $\mathfrak{I}_{c-1}^*$ ile gösterilirse f , $\mathfrak{I}_{c-1}^*$ -regülerdir.

5.4.3 ve $\mathfrak{I}^*$ Üzerindeki Topolojik Dinamikler

$x' = f(x, t)$ denkleminin topolojik dinamik davranışlarını incelemeden önce $\mathfrak{I}$ veya $\mathfrak{I}^*$ üzerindeki davranışlarını göz önünde bulunduracağız. Öncelikle $\mathfrak{I}$ üzerindeki kompakt-açık topoloji ile ilgileneceğiz. Bununla birlikte Bohr topoloji ve C^1 -topoloji arasındaki bağlantıya da bakacağız.

$\emptyset \neq \wp \subset C(W \times R, R^n)$ öteleme invariant alt küme ve ρ uyumlu metrik yani $\pi^*(f, t) = f_t$ dönüşümü $(\wp, \rho)$ üzerinde bir dinamik sistem tanımlasın.

Teorem 5.4.1:

- (i) $f \in \rho$ π^* için bir sabit noktadır $\Leftrightarrow f$ otonom fonksiyondur.
(ii) $\pi^*(f, t)$ hareketi periyodiktir $\Leftrightarrow f(x, t)$ t ye göre periyodiktir.

$\rho = C$ ve ρ temel metrik olsun. Bu durumda $\pi^*(f, t)$ ne zaman pozitif kompakttır veya kompakttır sorusunu sorarız. Yani ne zaman $\gamma^+(f)$ veya $\gamma(f)$ C de relatif kompakttır.

Teorem 5.4.2:

- (i) $\pi^*(f, t)$ hareketi kompakt (C üzerindeki kompakt-açık topolojiye göre) $\Leftrightarrow f$ sınırlı ve $M \subset W$ kompakt olmak üzere her $M \times R$ için düzgün süreklidir.
(ii) $\pi^*(f, t)$ hareketi kompakt (C üzerindeki kompakt-açık topolojiye göre) $\Leftrightarrow f$ sınırlı ve $M \subset W$ kompakt olmak üzere her $M \times R^+$ için düzgün süreklidir.

İspat: X ve Y ayrılabilir iki metrik uzay olsun. Ascoli teoremine göre;
 $C' \subset C(X, Y) = \{ f \mid f : X \rightarrow Y \text{ sürekli} \}$ olmak üzere C' kompakt-açık topolojiye göre relatif kompakttır $\Leftrightarrow$ (a) $\{ f(x) : f \in C' \} \subset Y \quad \forall x \in X$ için relatif kompakttır, (b) C' eş süreklidir.

(i) $\pi^*(f, t)$ hareketi kompakt $\Leftrightarrow \gamma(f) = \mathfrak{I} = \{ f_s : s \in R \}$ yörüngesi relatif kompakttır. $\{ f_s(x, t) : s \in R \} \subset R^n$ kümesi relatif kompakttır $\Leftrightarrow \forall t \in R$ için $f(x, t)$ sınırlıdır. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0, t_0) > 0$ var $\ni |x - x_0| < \delta$ ve $|t - t_0| < \delta$ iken $|f_s(x, t) - f_s(x_0, t_0)| = |f(x, s+t) - f(x_0, s+t_0)| < \varepsilon \dots (7)$ oluyorsa $\{ f_s : s \in R \}$, (x_0, t_0) noktasında eş süreklidir. Bu bize δ nın t_0 dan bağımsız olarak seçilebileceğini verir. (7) bize $M \subset W$ kompakt olmak üzere f nin $M \times R$ de düzgün sürekli olduğunu verir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.4.3: Eğer $\pi^*(f, t)$ hareketi kompakt ise (kompakt-açık topolojiye göre) $f \in B_U$ olur. Diğer bir deyişle $t \rightarrow f_t$ dönüşümü Bohr topolojiye göre süreklidir.

Tanım 5.4.4: $f \in C(W \times R, R^n)$ olsun. Her $M \subset W$ kompakt ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\{s : |f(x, t) - f(x, s+t)| \leq \varepsilon, \forall x \in M, \forall t \in R\}$ kümesi R de relatif yoğun ise f ye $(t$ ye göre) Bohr hemen hemen periyodiktir denir.

Bu tanım $f \in C(W \times R, R^m)$ için de geçerlidir.

Teorem 5.4.5: Kabul edelim ki $f \in C(W \times R, R^n)$ Bohr hemen hemen periyodik olsun. Bu durumda $f(x, t)$, $M \subset W$ olmak üzere her $M \times R$ kümesinde sınırlıdır ve düzgün süreklidir. Yani $f \in B_U$ olur.

Teorem 5.4.6: $f \in B_U$ olsun. Bu durumda $\pi^*(f, t) = f_t$ hareketi Bohr topolojiye göre kompakttır $\Leftrightarrow f$ Bohr hemen hemen periyodiktir.

Daha sonra şunu göreceğiz: f Bohr hemen hemen periyodiktir $\Leftrightarrow f_t, \mathfrak{I}$ üzerindeki Bohr topolojiye göre hemen hemen periyodiktir.

$W \times R$ üzerinde tanımlı f Bohr hemen hemen periyodik fonksiyon kavramı yeniden formüle edilebilir. $f^t(x, t) = f(x, t)$ olarak tanımlanırsa her t için $f^t \in C(W, R^n)$ yani $f^t : W \rightarrow R^n$ süreklidir. f^t nin tanım kümesini $M \subset W$ alt kümesine kısıtlarsak, $\forall M \subset W$ için $f^t \in C(M, R^n)$ elde ederiz. Böylece f^t ye $C(M, R^n)$ de bir hareket gözöyle bakabiliriz. Eğer $M \subset W$ kompakt ise $C(M, R^n)$, $\| \cdot \|_\infty$ normuyla Banach uzayı olur ve f^t hareketi bu norma göre sürekli olur.

Bu tanımların sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.4.7: $f \in C(W \times R, R^n)$ Bohr hemen hemen periyodiktir $\Leftrightarrow \forall M \subset W$ kompakt kümesi için $R \rightarrow (C(M, R^n), \| \cdot \|_\infty)$, $t \rightarrow f_t$ dönüşümü hemen hemen periyodiktir.

Teorem 5.4.8: $f \in C^1(W \times R, R^n)$ olsun. Bu durumda $\pi^*(f, t) = f_t$ hareketi C^1 -topolojiye göre kompakttır (yani $\mathfrak{I}_{C^1}^*$ kabuğu kompakttır) $\Leftrightarrow f, D_x f, \dots,$

$D_{x_n} f \in B_U$ olmasıdır. Özellikle $M \subset W$ olmak üzere, eğer $f, D_{x_1} f, \dots, D_{x_n} f$ her $M \times \mathbb{R}$ kümesinde düzgün sürekli ise $\pi^*(f, t) = f_t$ kompakttır.

Teorem 5.4.9: X kompakt metrik uzay ve $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ dönüşümü X üzerinde bir dinamik sistem olsun. X minimal küme olsun. Bu durumda X hemen hemen periyodik minimaldir $\Leftrightarrow \exists x \in X$ var $\ni \psi : X \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ herhangi bir sürekli fonksiyon ise (M kompakt metrik uzay), $\psi_x : \mathbb{R} \rightarrow C(M, \mathbb{R}^n)$ dönüşümü $C(M, \mathbb{R}^n)$ üzerindeki düzgün metriğe göre hemen hemen periyodiktir. Burada $\psi_x(t) = \psi(\pi(x, t))$ dir.

Teorem 5.4.10: $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (a) f Bohr hemen hemen periyodiktir.
- (b) f_t hareketi ρ temel metriğine göre hemen hemen periyodiktir.
- (c) f_t hareketi b Bohr metriğine göre hemen hemen periyodiktir.
- (d) f_t hareketi Bohr topolojiye göre tekrarlıdır.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (d): $\{M_n\} \subset W$ kompakt kümelerin bir dizisi, $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ olsun. $n=1, 2, \dots$

için $b_n(f, g) \leq 1$ dir. Eğer $\varepsilon > 0$ verilirse N yi $1/2^N < \varepsilon$ olacak şekilde seçebiliriz.

$T(\varepsilon) = \{s : |f(x, t) - f(x, s+t)| \leq \varepsilon, x \in M_n, t \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots, N\}$ olarak tanımlayalım. f Bohr hemen hemen periyodik olduğundan $T(\varepsilon)$ $\mathbb{R}$ de relatif yoğundur. $s \in T(\varepsilon)$ için,

$$b_n(f, f_s) \leq \|f - f_s\|_{n, \infty} \leq \varepsilon, n = 1, 2, \dots, N$$

$$b_n(f, f_s) \leq 1, n = N+1, \dots$$

olur. Böylece $s \in T(\varepsilon)$ için $b(f, f_s) < 2\varepsilon$ olur ki bu da f_t nin Bohr topolojiye göre tekrarlı olması demektir.

(c) $\Rightarrow$ (b): f_t hareketi b Bohr metriğine göre hemen hemen periyodik olsun. $\{K_n\}$ kompakt kümelerin dizisi, $K_n = M_n \times I_n$, $\{I_n\} \subset \mathbb{R}$ kompakt kümelerin bir

dizisi , $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, olmak üzere ρ temel metriğini kurabiliriz. $B(W \times R, R^n)$ üzerinde $\rho(f, g) \leq b(f, g)$ olduğundan f_t ρ ya göre de hemen hemen periyodiktir.

(b) $\Rightarrow$ (a): f_t hareketi ρ temel metriğine göre hemen hemen periyodik ise $\mathfrak{I}_{\infty}^*$ hemen hemen periyodik minimal kümedir. $M \subset W$ kompakt ve $\psi : \mathfrak{I}_{\infty}^* \rightarrow C(M, R^n)$, $(\psi f)(x) = f(x, 0)$ ile tanımlansın. ψ süreklidir ve Teorem 5.4.9 dan $(\psi f_t)(x) = (\psi(f_t))(x) = f(x, t) = f^t(x)$ düzgün norma göre hemen hemen periyodiktir. M keyfi olduğundan Teorem 5.4.7 den f Bohr hemen hemen periyodiktir.

KAYNAKLAR

1. George R.Sell.,1971,Topological Dynamics And Ordinary Differential Equations, **Van Nostrand Reinhold Company**, London
2. Shepley L. Ross.,1974, Differential Equations Second Edition, **John Wiley and Sons,Inc.**,New York,London,Sidney,Toronto
3. James R. Munkres, 1975, Topology A First Course, **PrenticeHall, Inc.**Englewood Cliffs
4. Engelking-Sieklucki,1992, Topology A Geometric Approach, Volume 4, **Helderman Verlag**, Berlin
5. Ryszard Engelking, 1988, General Topology, **Helderman Verlag**, Berlin
6. Yıldız,C.,2002, Genel Topoloji, 2.Baskı, **Kalkan Matbaacılık**, Ankara
7. Yüksel Ş.,1998, Genel Topoloji Ders Kitabı,Selçuk Üniversitesi Basımevi,Konya
8. George R.Sell;Nonautonomous differential equations and topological dynamics1,The basic theory,Trans.Amer.Math.Soc.127(1967),241-262.
9. George R.Sell;Nonautonomous differential equations and topological dynamics2,Limiting equations,Trans.Amer.Math.Soc.127(1967),263-283
10. M.Rama Mohano Rao, 1979, Ordinary Differential Equations, Theory And Applications, **Indian Institute Of Technology**, Kanpur
11. George R.Sell;Nonautonomous differential equations and dynamical systems,School of Mathematics,Institute of Technology Universty of Minnesota,Minneapolis,Minnesota
12. Sze-Bi Hsu;1998, Ordinary Differential Equations, , **Helderman Verlag**, Berlin

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında BURSA 'nın İnegöl ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İnegöl 'de tamamladı. 1991 yılında Gazi Üni. Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitime başladı. 1995 yılında eğitimini tamamladıktan sonra 1996 yılında Gazi Üni. Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Arş.Gör. olarak çalışmaya başladı. Halen Gazi Üni. Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde görevine devam etmektedir.

