



**TOPOLOJİK FONKSİYON UZAYLARINDA
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serdar MİNAZ

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi İsmail OSMANOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2025

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK FONKSİYON UZAYLARINDA
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Serdar MİNAZ

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi İsmail OSMANOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2025

TEZ ONAY SAYFASI

Serdar MİNAZ tarafından hazırlanan “Topolojik Fonksiyon Uzaylarında İstatistiksel Yakınsaklık” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 12 / 12 / 2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi İsmail OSMANOĞLU

Başkan : Prof. Dr. Uğur ULUSU İmza
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR İmza
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İsmail OSMANOĞLU İmza
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Sandıklı MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... /..... /..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. Bekir YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12 / 12 / 2025

Serdar MINAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Serdar MİNAZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İsmail OSMANOĞLU

Bu tez çalışmasında istatistiksel yakınsaklık kavramı, yarı-düzgün yapılarla donatılmış topolojik fonksiyon uzayları çerçevesinde incelenmiştir. Tarihsel arka plan ve temel kavramlar sunulduktan sonra yarı-düzgün yakınsaklık topolojisi ele alınmış; yarı-düzgün değerli fonksiyon dizileri için yeni istatistiksel yakınsaklık tanımları geliştirilmiştir. Elde edilen topolojik fonksiyon uzaylarında fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklıkları incelenmiş, bu iki kavram arasındaki denklikler araştırılmıştır. Ayrıca yerel-düzgün uzaylarda limit fonksiyonların sürekliliğine ilişkin sonuçlara ulaşılmıştır. Son bölümde ise gelecekte yapılabilecek çalışmalara yönelik değerlendirmelere yer verilmiş ve tez süresince başvuru kaynaklar listelenmiştir.

2025, v + 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon uzayı, İstatistiksel yakınsaklık, Noktasal istatistiksel yakınsaklık, Düzgün istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

STATISTICAL CONVERGENCE IN TOPOLOGICAL FUNCTION SPACES

Serdar MİNAZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. İsmail OSMANOĞLU

In this thesis, the concept of statistical convergence is examined within the framework of topological function spaces equipped with semi-uniform structures. After presenting the historical background and fundamental notions, the semi-uniform convergence topology is investigated, and new definitions of statistical convergence for semi-uniform valued sequences of functions are introduced. The equivalence between pointwise and uniform statistical convergence is studied in the obtained topological function spaces, and results concerning the continuity of limit functions in locally uniform spaces are established. In the final part, possible directions for future research are discussed, and a list of references consulted throughout the study is provided.

2025, v + 35 pages

Keywords: Function space, Statistical convergence, Pointwise statistical convergence, Uniform statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, teorik çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi İsmail OSMANOĞLU'na ve aynı zamanda eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Serdar MİNAZ
Afyonkarahisar 2025

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	4
3. YARI-DÜZGÜN YAKINSAMA TOPOLOJİSİ.....	10
4. FONKSİYON DİZİLERİNİN NOKTASAL ve DÜZGÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	22
4.1 Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık.....	22
4.2 Düzgün İstatistiksel Yakınsaklık	24
5. YARI DÜZGÜN TOPOLOJİYE SAHİP FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	26
6. TARTIŞMA ve SONUÇ	30
7. KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	35

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

(x_n)	Reel sayı dizisi
$\lim x_n$	x_n dizisinin limiti
$x_n \rightarrow M$	x_n dizisinin M'ye yakınsaması
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$V \circ V$	V çevresi üzerinde geçişkenlik
$x_n \xrightarrow{st} x$	x_n dizisinin istatistiksel limiti
$\emptyset$	Boş küme
τ_{sp}	Noktasal yakınsaklık topolojisi
τ_{sk}	Kompakt yakınsaklık topolojisi
τ_{su}	Yarı düzgün yakınsaklık topolojisi
τ_{co}	Kompakt-açık topoloji
$C(X, Y)$	X 'ten Y 'ye tanımlanmış tüm sürekli fonksiyonlar kümesi
Y^X (ya da $F(X, Y)$)	X 'ten Y 'ye tanımlanmış tüm fonksiyonlar kümesi
$X \times Y$	X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı

1. GİRİŞ

Fonksiyon uzaylarının incelenmesi, matematiksel analiz ve topolojide fonksiyonların yakınsama, süreklilik ve genel topolojik davranışlarını anlamak için temel bir çerçeve sunar. Fonksiyonların davranışlarını sistematik bir biçimde ele alma çabası, yalnızca genel topolojinin gelişimine katkıda bulunmakla kalmamış, aynı zamanda fonksiyon uzaylarını bağımsız bir araştırma alanı hâline getirmiştir. Bu uzaylar, bir topolojik uzaydan başka bir topolojik uzaya tanımlı tüm fonksiyonlardan oluşan kümeler olarak ele alınır ve kendi başlarına bir topolojik yapı göstererek fonksiyonları klasik analiz perspektifinden soyutlar.

Fonksiyon uzayları kavramı tarihsel olarak kademeli bir şekilde gelişmiştir. 1800'lerin başında fonksiyon kavramı hâlâ belirsizken, Bolzano (1817) ve Cauchy (1921)'nin çalışmaları sürekli fonksiyon ve yakınsak seri kavramlarını netleştirmiştir. 1826'da Abel, düzgün yakınsak sürekli fonksiyon serilerinin toplamının sürekli olduğunu ortaya koymuştur. 19. yüzyılın sonlarına doğru, Ascoli-Arzelà (1883-1895) ve Hadamard'ın çalışmaları, fonksiyon uzayları üzerine sistematik araştırmaların başlangıcı olarak kabul edilir. Özetle, bir topolojik uzayın noktalarının fonksiyonlar olduğu yapılar fonksiyon uzayları olarak tanımlanır. 20. yüzyılın başlarında Fréchet (1906), düzgün yakınsama kavramını formüle etmiş, Tukey (1940) ise noktasal ve düzgün yakınsama kavramlarını topolojik bir çerçeveye oturtmuştur. 1935'te Tychonoff, fonksiyon uzayları üzerinde çarpım topolojisini tanımlayarak noktasal yakınsaklık topolojisinin temelini atmıştır. Fonksiyon uzaylarının topolojileri, özellikle noktasal yakınsaklık, kompakt-açık, düzgün yakınsaklık, fine ve graph topolojileri, fonksiyon dizilerinin davranışlarını ve fonksiyonlar arasındaki mesafe ilişkilerini anlamada önemli bir rol oynar.

Düzgün uzay kavramı, metrik uzayların bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Cauchy ve Abel'in çalışmalarıyla, düzgün yakınsak fonksiyon serilerinin toplamının sürekli olması fikri gelişmiş ve Cauchy dizileri ile düzgün sürekli fonksiyon kavramları modern düzgün uzay teorisinin temellerini oluşturmuştur. Fréchet, 1906 yılında özel bir metrik uzay türünü tanımlayarak teoriyi sistematik hâle getirmiş, Hausdorff (1914), Banach (1932) ve Bourbaki (1989) gibi matematikçiler bu yapıyı derinleştirmiştir. Düzgün

uzaylar, topolojik yapıyı çevreler veya örtüler üzerinden tanımlayarak fonksiyonların yakınsaklık ve süreklilik özelliklerini incelemek için sağlam bir çerçeve sağlar. Düzgün uzaylarda düzgün yakınsama topolojileri başta Kelley (1975)'in çalışmaları olmak üzere kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve Bourbaki (1989)'nin katkıları fonksiyon uzaylarındaki topolojilerin tanımlanmasında düzgünlüklerin rolünü vurgulamıştır. Yarı-düzgün uzaylar ise düzgün uzayların bazı aksiyomlarını gevşeterek daha genel bir yapı sunar; Hušek tarafından 1964'te tanıtılan bu kavram, Katětov, Frolík ve Čech (1966)'in çalışmaları ile sistematik hâle getirilmiş ve Page'in 1989 yılındaki çalışması hem düzgün hem de yarı-düzgün uzayları kapsamlı bir şekilde ele almıştır.

Düzgün uzay kavramı, metrik uzayların bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Cauchy ve Abel'in çalışmalarıyla, düzgün yakınsak fonksiyon serilerinin toplamının sürekli olması fikri gelişmiş ve Cauchy dizileri ile düzgün sürekli fonksiyon kavramları modern düzgün uzay teorisinin temellerini oluşturmuştur. Fréchet, 1906 yılında özel bir metrik uzay türünü tanımlayarak teoriyi sistematik hâle getirmiş, Hausdorff, Banach ve Bourbaki gibi matematikçiler bu yapıyı derinleştirmiştir. Düzgün uzaylar, topolojik yapıyı çevreler veya örtüler üzerinden tanımlayarak fonksiyonların yakınsaklık ve süreklilik özelliklerini incelemek için sağlam bir çerçeve sağlar. Düzgün uzaylarda düzgün yakınsama topolojileri başta Kelley (1975)'in çalışmaları olmak üzere kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve Bourbaki (1989)'nin katkıları fonksiyon uzaylarındaki topolojilerin tanımlanmasında düzgünlüklerin rolünü vurgulamıştır. Yarı-düzgün uzaylar ise düzgün uzayların bazı aksiyomlarını gevşeterek daha genel bir yapı sunar; Hušek tarafından 1964'te tanıtılan bu kavram, Katětov, Frolík ve Čech'in çalışmaları ile sistematik hâle getirilmiş ve Warren Page (1989)'in çalışması hem düzgün hem de yarı-düzgün uzayları kapsamlı bir şekilde ele almıştır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının temelleri, doğal sayıların alt kümelerinin doğal yoğunluğuna dayanmaktadır ve ilk kez Zygmund (1935) tarafından farklı bir isimle anılmıştır. Modern biçimde geliştirilmesi ve tam anlamıyla tanımlanması ise birbirinden bağımsız olarak Steinhaus (1951) ve Fast (1951) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşım, fonksiyon uzaylarında daha genel ve esnek topolojilerin incelenmesine olanak sağlamak ve yarı-düzgün yakınsama topolojileri, fonksiyon dizilerinin ve reel sayı

dizilerinin istatistiksel yakınsama özelliklerini analiz etmede kullanılabilme potansiyeli doğurur.

Bu çalışmanın temel amacı, yarı-düzgün topolojiler altında fonksiyon uzaylarında istatistiksel yakınsama kavramını ayrıntılı olarak incelemektir. Özellikle, fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsama özellikleri ele alınacak ve bu özelliklerin fonksiyon uzaylarının topolojileriyle ilişkisi tartışılacaktır. Ayrıca, yarı-düzgün yapıların fonksiyon uzayları üzerindeki etkisi ve sağladığı esneklik detaylı biçimde analiz edilecektir.

Çalışma şu yapı çerçevesinde sunulmuştur: Birinci bölümde kavramların tarihsel gelişimi ve literatürdeki yeri ele alınmıştır. İkinci bölümde temel tanım ve teoremlere ilişkin ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölüm, yarı-düzgün topolojiler ve bunların fonksiyon uzaylarındaki rolüne odaklanmaktadır. Dördüncü bölümde fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsama özellikleri tanıtılmıştır. Beşinci bölümde bu kavramların karşılıklı ilişkileri ve yarı-düzgün yapıların fonksiyon uzaylarına etkileri incelenmiştir. Altıncı bölümde tartışma ve sonuçlara yer verilmiş, son bölümde ise çalışmada yararlanılan literatür kaynakları listelenmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak temel tanım ve teoremler kısaca hatırlatılacaktır. Buradaki içeriklerin ayrıntılı açıklamaları ve genişletilmiş biçimleri için ilgili kaynaklara başvurulabilir.

Tanım 2.1 Bir küme Y üzerinde yarı-düzgünlük ya da yarı-düzgün yapı, $Y \times Y$ kümesinin altkümelerinden oluşan $\mathcal{U}$ ailesi olup aşağıdaki koşulları sağlar:

(SU1) Her $U \in \mathcal{U}$ için $\Delta_Y \subseteq U$,

(SU2) $U \in \mathcal{U}$ ise $U^{-1} \in \mathcal{U}$,

(SU3) $U \in \mathcal{U}$ ve $U \subseteq V$ ise $V \in \mathcal{U}$,

(SU4) $U, V \in \mathcal{U}$ ise $U \cap V \in \mathcal{U}$.

Bu durumda $(Y, \mathcal{U})$ çifti yarı-düzgün uzay olarak adlandırılır. Eğer aşağıdaki koşul da sağlanırsa:

(U5) Her $U \in \mathcal{U}$ için, öyle bir $V \in \mathcal{U}$ vardır ki $V^2 \subseteq U$,

Bu durumda $\mathcal{U}$ bir düzgünlük oluşturur ve $(Y, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay olarak adlandırılır.

Burada

$$\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$$

Y 'nin diyagonalini,

$$U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\}$$

U 'nun tersini gösterir. Ayrıca

$$V^2 = V \circ V = \{(x, y) \in Y \times Y : \exists z \in Y \text{ öyle ki } (x, z) \in V, (z, y) \in V\}$$

İfadesi V üzerinde geçişkenlik koşulunu belirtir (Čech 1966).

Yarı-düzgünlüğün elemanlarına $Y \times Y$ 'nin çevreleri (entourage) denir. (SU3) ve (SU4) koşulları ile birlikte $\mathcal{U}$ 'nun boş olmaması, $\mathcal{U}$ 'nun $Y \times Y$ üzerinde bir filtre olduğunu gösterir.

Tanım 2.2 $\mathcal{U}$ bir yarı-düzgünlük ve $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $V \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{V}$ bulunabiliyorsa $\mathcal{V}$ alt koleksiyonuna, $\mathcal{U}$ 'nun bir alt bazı denir (Page 1989).

Her yarı-düzgünlük için simetrik elemanlar ($U = U^{-1}$) yine bir alt baz oluşturur (Page 1989). Bu durum, yarı-düzgün yapıların simetrik çevreler üzerinden incelenmesine olanak tanır.

Önerme 2.1 Herhangi Y kümesi için $V \subseteq Y \times Y$ olsun. Her $y \in Y$ için

$$V[y] = \{z \in Y : (y, z) \in V\}, \quad \text{ve} \quad V[A] = \bigcup_{y \in A} V[y], \quad A \subseteq Y$$

olarak tanımlansın. Eğer $\mathcal{U}$ bir yarı-düzgünlük ise, o zaman $\mathcal{U}[y] = \{V[y] : V \in \mathcal{U}\}$ koleksiyonu her $y \in Y$ için Y üzerinde bir filtre oluşturur.

İspat: Yarı-düzgünlük koşulu (SU1) gereği $\Delta_Y \subseteq V$. Dolayısıyla, her $y \in Y$ için $y \in V[y]$, yani $V[y] \neq \emptyset$.

Eğer $V \subseteq W$ ve $V, W \in \mathcal{U}$ ise, (SU3) koşulundan $W \in \mathcal{U}$ ve $V[y] \subseteq W[y]$ olur. Böylece, filtreye dahil olma koşulu sağlanır.

Eğer $V, W \in \mathcal{U}$ ise (SU4) koşulundan $V \cap W \in \mathcal{U}$. Bu durumda

$$(V \cap W)[y] = V[y] \cap W[y],$$

yani kesişim yine koleksiyonda yer alır. Bu üç koşul, $\{V[y] : V \in \mathcal{U}\}$ koleksiyonunun her $y \in Y$ için bir filtre oluşturduğunu gösterir. $\square$

Teorem 2.1 Bir küme Y üzerinde bir yarı-düzgünlük $\mathcal{U}$ verildiğinde, Y üzerinde $\mathcal{U}$ tarafından belirlenen tek bir topoloji $\tau_{\mathcal{U}}$ vardır. Bu topolojide her $x \in Y$ için $\mathcal{U}[x]$ kümeleri, x noktasının $\tau_{\mathcal{U}}$ -topolojisinde bir çevre bazını oluşturur. Yani

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subseteq Y : \forall y \in O, \exists U \in \mathcal{U} \text{ öyle ki } U[y] \subseteq O\}$$

Bu topoloji, yarı-düzgünlük $\mathcal{U}$ tarafından üretilen topoloji olarak adlandırılır ve $\mathcal{U}$ 'nun çevre yapısını topolojik yapıya dönüştürür.

İspat: Öncelikle $\tau_{\mathcal{U}}$ 'nin bir topoloji olduğunu gösterelim.

(i) Boş küme için koşul boş küme mantığı ile sağlandığından $\emptyset \in \tau_{\mathcal{U}}$. Ayrıca her $y \in Y$ için $\Delta_Y \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan $U[y] \subseteq Y$ ve dolayısıyla $Y \in \tau_{\mathcal{U}}$.

(ii) Her $i \in I$ için $O_i \in \tau_{\mathcal{U}}$ olsun ve $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ alalım. Her $y \in O$ için bazı i_0 ile $y \in O_{i_0}$ bulunur; çünkü $O_{i_0} \in \tau_{\mathcal{U}}$, öyle bir $U \in \mathcal{U}$ vardır ki $U[y] \subseteq O_{i_0} \subseteq O$. Bu nedenle $O \in \tau_{\mathcal{U}}$.

(iii) $O_1, O_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$ olsun ve $O = O_1 \cap O_2$ alalım. Her $y \in O$ için O_1 ve O_2 'den sırasıyla

$U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ öyle ki $U_1[y] \subseteq O_1$ ve $U_2[y] \subseteq O_2$ bulunur. (SU4) koşuluna göre $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ ve $U[y] \subseteq U_1[y] \cap U_2[y] \subseteq O_1 \cap O_2 = O$ elde edilir. Dolayısıyla $O \in \tau_{\mathcal{U}}$.

(i)- (iii) maddelerinden τ_U 'nin bir topoloji olduğu görülür.

Her $U \in \mathcal{U}$ için $\Delta_Y \subseteq U$ olduğundan $y \in U[y]$ 'dir. Ayrıca tanıma göre her $O \in \tau_U$ ve $y \in O$ için bir $U \in \mathcal{U}$ vardır ki $U[y] \subseteq O$. Bu, $\{U[y]: U \in \mathcal{U}\}$ ailesinin y etrafındaki komşulukların bir alt bazı olduğunu gösterir.

Eğer τ' başka bir topoloji olup her $y \in Y$ için $\{U[y]: U \in \mathcal{U}\}$ ailesi τ' -komşuluklarının bir alt bazı ise, her τ' -açık O ve her $y \in O$ için bir $U \in \mathcal{U}$ vardır ki $U[y] \subseteq O$; dolayısıyla $O \in \tau_{\mathcal{U}}$. Ters yönde de tanım gereği her $O \in \tau_{\mathcal{U}}$ için aynı koşul sağlandığından $O \in \tau'$. Böylece $\tau' = \tau_{\mathcal{U}}$ olur.

Sonuç olarak, aranan topoloji hem var hem de tektir. $\square$

Tanım 2.3 Bir Y kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon $d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, d bir yarı-sözdemetrik olarak adlandırılır:

(SYM1) Her $x \in Y$ için $d(x, x) = 0$,

(SYM2) Her $x, y \in Y$ için $d(x, y) = d(y, x)$.

Bu durumda (Y, d) çifti yarı-sözdemetrik uzay olarak adlandırılır (Page 1989).

Önerme 2.2 Y üzerinde bir yarı-sözdemetrik d verilsin. Her $r > 0$ için

$$U_r = \{(x, y) \in Y \times Y: d(x, y) < r\}$$

şeklindeki kümelerin oluşturduğu aile, $Y \times Y$ üzerinde (SU1) ve (SU2) koşullarını sağlayan bir filtre bazıdır. Bu aile, d 'nin ürettiği yarı-düzgünlük $\mathcal{U}_d$ 'nin bir bazını oluşturur.

İspat: Gösterilecektir ki $\mathcal{B} = \{U_r: r > 0\}$ ailesi hem (SU1) hem (SU2) koşullarını sağlar ve $Y \times Y$ üzerinde bir filtre bazıdır. Dolayısıyla $\mathcal{B}$, d tarafından üretilen yarı-düzgünlüğün bir bazını verir.

(i) Her $x \in Y$ için $d(x, x) = 0$ olduğundan, her $r > 0$ için $(x, x) \in U_r$ elde edilir. Bu nedenle $\Delta_Y \subseteq U_r$ ve (SU1) sağlanır.

(ii) d simetrik olduğundan $d(x, y) = d(y, x)$ her $x, y \in Y$ için geçerlidir. Dolayısıyla $(x, y) \in U_r \Leftrightarrow d(x, y) < r \Leftrightarrow d(y, x) < r \Leftrightarrow (y, x) \in U_r$,

yani $U_r^{-1} = U_r$. Böylece (SU2) sağlanır.

(iii) Bir aile $\mathcal{B}$ 'nin filtre bazı olması için: (a) boş olmaması ve (b) her iki elemanın kesişimini içine alan üçüncü bir eleman bulunması gerekir.

(a) $\mathcal{B}$ boş değildir, çünkü her $r > 0$ için $U_r \in \mathcal{B}$.

(b) $r, s > 0$ için $t = \min\{r, s\} > 0$ alındığında

$$d(x, y) < t \Rightarrow d(x, y) < r \text{ ve } d(x, y) < s,$$

yani $U_t \subseteq U_r \cap U_s$. Böylece koşul sağlanır ve $\mathcal{B}$ bir filtre bazıdır.

(iv) $\mathcal{U}_d$ yarı-düzgünlüğünün bazı olması. Filtre bazından türetilen filtre

$$\mathcal{U}_d = \{U \subseteq Y \times Y : \exists r > 0 \text{ öyle ki } U_r \subseteq U\}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathcal{B}$ elemanları (SU1) ve (SU2)'yi sağladığı için, türetilen filtre de yarı-düzgünlük koşullarını sağlar. Böylece $\mathcal{B}$, d tarafından üretilen yarı-düzgünlüğün bazını oluşturur. $\square$

Tanım 2.4 Bir yarı-düzgünlük, eğer bir yarı-sözdemetrik tarafından üretilmişse yarı-sözdemetrike edilebilir olarak adlandırılır (Page 1989).

Teorem 2.2 Bir yarı-düzgünlük, ancak ve ancak sayılabilir bir baza sahipse yarı-sözdemetrike edilebilirdir (Page 1989).

Tanım 2.5 X bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yarı-düzgün uzay olsun. Eğer her $V \in \mathcal{U}$ çevresi için x_0 'ı içeren bir açık küme $O_{x_0} \subseteq X$ bulunur ve her $x \in O_{x_0}$ için

$$(f(x_0), f(x)) \in V$$

sağlanıyorsa $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu, $x_0 \in X$ noktasında sürekli olarak adlandırılır. f , X 'in her noktasında sürekli ise, f 'in X üzerinde sürekli olduğu söylenir.

Tanım 2.6 $(X, \mathcal{U})$ ve $(Y, \mathcal{V})$ düzgün uzaylar olmak üzere, $f_n: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon dizisi ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve her $V \in \mathcal{V}$ için, $n \geq n_0$ olduğunda

$$(f_n(x), f(x)) \in V$$

olacak şekilde x noktasına ve $\mathcal{V}$ çevresine bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyor ise (f_n) fonksiyon dizisi, f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir (Kelley 1975).

Tanım 2.7 $(X, \mathcal{U})$ ve $(Y, \mathcal{V})$ düzgün uzaylar olmak üzere, $f_n: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon dizisi

ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $V \in \mathcal{V}$ için, $n \geq n_0$ ve her $x \in X$ olduğunda

$$(f_n(x), f(x)) \in V$$

olacak şekilde yalnızca $\mathcal{V}$ çevresine bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyor ise (f_n) fonksiyon dizisi, f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir (Kelley 1975).

Düzgün yakınsaklık her zaman noktasal yakınsaklığı gerektirir; ancak noktasal yakınsaklık tek başına düzgün yakınsaklığı garanti etmez (Kelley 1975).

(Y, d) bir metrik uzay olduğunda, $\mathcal{V}$ çevresi metrik topoloji tarafından belirlenir ve yukarıdaki tanımlar aşağıdaki biçime indirgenir:

- Her $x \in X$ için $d(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0$ ise (f_n) , f fonksiyonuna noktasal olarak yakınsaktır.
- $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0$ ise (f_n) , f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsaktır.

Tanım 2.8 $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $A(n)$ kümesi

$$A(n) = \{k \in A: k \leq n\}$$

ile tanımlanır. A kümesinin doğal (veya asimptotik) yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A(n)|}{n}$$

şeklinde tanımlanır (limit mevcutsa). Burada $\delta(A) \in [0,1]$ 'dir. Açıkça sonlu alt kümelerin doğal yoğunluğu sıfırdır. $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\delta(A) = 1$ olması durumunda A kümesine istatistiksel olarak yoğun denir. Ayrıca $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ eşitliği sağlanır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.9 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X topolojik uzayında tanımlı olsun. Eğer x 'in her açık komşuluğu O için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: x_n \notin O\}) = 0$$

oluyorsa bu dizi, $x \in X$ noktasına istatistiksel olarak yakınsaktır denir. (Maio ve Kočinac 2008).

Bu durum

$$x_n \xrightarrow{\text{st}-\tau} x$$

şeklinde gösterilir. Burada τ , X üzerinde verilen topolojiyi ifade eder.

Teorem 2.3 Eğer $X = \mathbb{R}$ ya da X birinci sayılabilir bir topolojik uzay ise, Tanım 2.9'daki istatistiksel yakınsaklık şu şekilde eşdeğer biçimde ifade edilebilir: $\delta(A) = 1$ olacak şekilde bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır ve bu kümenin elemanlarından oluşan $((x_n)_{n \in A})$ alt dizisi x 'e yakınsar. Başka bir ifadeyle, x 'in her açık komşuluğu O için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunur ki, $n \geq n_0$ ve $n \in A$ (burada $\delta(A) = 1$) olduğunda $x_n \in O$ olur (Maio ve Koçinac 2008).



3. YARI-DÜZGÜN YAKINSAMA TOPOLOJİSİ

Bu bölümde, fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanan yeni bir topoloji olan yarı-düzgün yakınsama topolojisi ele alınmaktadır. Bu topoloji, düzgün uzaylarda tanımlı klasik yakınsama topolojilerinin doğal bir genellemesi olup, değer uzayın yalnızca yarı-düzgün olması koşuluyla elde edilir. Öncelikle bu yapının tanımı ve temel özellikleri sunulacak; ardından kompakt-açık topolojiyle olan ilişkisi ile yarı-sözdemetriklik ve tamlık koşulları incelenecektir.

Teorem 3.1 X bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yarı-düzgün uzay olsun. $\mathcal{A}$, X 'in alt kümelerinden oluşan ve X 'i örten bir koleksiyon olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ ve $U \in \mathcal{U}$ için

$$U_A = \{(f, g) \in F(X, Y) \times F(X, Y) : (f(x), g(x)) \in U \text{ tüm } x \in A\}$$

tanımlansın. O hâlde

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{U_A : A \in \mathcal{A}, U \in \mathcal{U}\}$$

koleksiyonu $F(X, Y)$ üzerinde bir yarı-düzgün yapının alt bazını oluşturur. Bu yarı-düzgün yapıya $\mathcal{A}$ 'daki kümeler üzerinde yarı-düzgün yakınsamanın yarı-düzgünlüğü denir.

İspat: Amacımız $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ ailesinin $F(X, Y) \times F(X, Y)$ üzerinde bir yarı-düzgün yapının alt bazı olduğunu göstermektir. Bunun için, $(Y, \mathcal{U})$ 'de verilen (SU1)–(SU4) koşullarının $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ için de geçerli olduğunu göstereceğiz.

$F(X, Y)$ üzerinde diyagonal küme

$$\Delta_F = \{(f, f) : f \in F(X, Y)\}$$

ile gösterilsin. Her $U \in \mathcal{U}$ için (SU1) gereği $\Delta_Y \subseteq U$ olduğundan, her $f \in F(X, Y)$ ve $x \in A$ için $(f(x), f(x)) \in U$ sağlanır. Dolayısıyla $(f, f) \in U_A$ ve böylece $\Delta_F \subseteq U_A$ olur.

$U \in \mathcal{U}$ için (SU2) gereği $U^{-1} \in \mathcal{U}$. Tanım gereği

$$\begin{aligned} (U^{-1})_A &= \{(f, g) : (f(x), g(x)) \in U^{-1} \forall x \in A\} \\ \text{ise} &= \{(f, g) : (g(x), f(x)) \in U \forall x \in A\} \\ \text{ve bundan dolayı} &= (U_A)^{-1} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ ters alma altında kapalıdır.

$U \subseteq V$ ise her $x \in A$ için $(f(x), g(x)) \in U$ iken $(f(x), g(x)) \in V$ de geçerlidir. Bundan $U_A \subseteq V_A$ sonucu çıkar. Dolayısıyla $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ yukarıya kapalıdır.

$U, V \in \mathcal{U}$ için

$$(U \cap V)_A = \{(f, g): (f(x), g(x)) \in U \cap V \forall x \in A\} = U_A \cap V_A.$$

Dolayısıyla $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ kesişim altında da kapalıdır.

Bu dört özellik birlikte $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ ailesinin $F(X, Y) \times F(X, Y)$ üzerinde bir yarı-düzgün yapının alt bazı olduğunu gösterir. Gerçekten de, $\Delta_F \subseteq U_A$, ters alma, yukarıya kapalı olma ve kesişim özellikleri $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ 'nın bir filtre tabanı oluşturduğunu ve dolayısıyla bir yarı-düzgün yapıyı ürettiğini garanti eder.

Eğer $(Y, \mathcal{U})$ düzgün (uniform) bir uzay ise, yani her $U \in \mathcal{U}$ için öyle bir $V \in \mathcal{U}$ varsa ki $V \circ V \subseteq U$, o zaman her $A \in \mathcal{A}$ için

$$(V_A) \circ (V_A) \subseteq U_A$$

eşitliği de sağlanır. Burada

$$(V_A) \circ (V_A) = \{(f, h): \exists g \text{ öyle ki } (f, g) \in V_A, (g, h) \in V_A\}.$$

Dolayısıyla hedef uzay düzgün olduğunda, türetilen yapı da düzgün olur. $\square$

Tanım 3.1 X bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yarı-düzgün uzay olsun. $\mathcal{A}$, X 'in alt kümelerinden oluşan ve X 'i kapsayan bir koleksiyon olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ ve $U \in \mathcal{U}$ için,

$$U_A = \{(f, g) \in F(X, Y) \times F(X, Y): (f(x), g(x)) \in U \text{ tüm } x \in A \text{ için}\}.$$

O hâlde $\{U_A: A \in \mathcal{A}, U \in \mathcal{U}\}$ koleksiyonu, $F(X, Y)$ üzerinde $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ ile gösterilen ve $\mathcal{A}$ 'daki kümeler üzerinde yarı-düzgün yakınsamanın yarı-düzgünlüğü olarak adlandırılan bir yarı-düzgün yapının alt bazını oluşturur. Bu yarı-düzgünlüğün ürettiği topoloji $\tau_{\mathcal{A}}$ ile gösterilir. Bu şekilde elde edilen topolojiye $\mathcal{A}$ üzerinde yarı-düzgün yakınsama topolojisi denir. Bu topolojinin bazını şu kümeler oluşturur:

$$U_A[f] = \{g \in F(X, Y): (g, f) \in U_A\}.$$

- Eğer $\mathcal{A} = F(X) = \{A \subseteq X: A \text{ sonlu}\}$ ise, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ 'ya noktasal yakınsamanın yarı-düzgünlüğü denir ve $\mathcal{U}_p$ ile gösterilir. Bu yarı-düzgünlüğün $F(X, Y)$ üzerinde ürettiği τ_p topolojisine noktasal yakınsama topolojisi denir.
- Eğer $\mathcal{A} = K(X) = \{A \subseteq X: A \text{ kompakt}\}$ ise, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ 'ya kompakt yakınsamanın yarı-düzgünlüğü denir ve $\mathcal{U}_k$ ile gösterilir. Bu yarı-düzgünlüğün $F(X, Y)$ üzerinde ürettiği τ_k topolojisine kompakt yakınsama topolojisi denir.

- Eğer $\mathcal{A} = \{X\}$ ise, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ 'ya yarı-düzgün yakınsamanın yarı-düzgünlüğü denir ve $\mathcal{U}_X$ ile gösterilir. Bu yarı-düzgünlüğün $F(X, Y)$ üzerinde ürettiği $\tau_{\mathcal{U}}$ topolojisine yarı-düzgün yakınsama topolojisi denir.

Lemma 3.1 X bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yarı-düzgün uzay olsun. $A, B \subseteq X$ ve $U, V \in \mathcal{U}$ için $U_A \subseteq V_B$ olsun.

i) Eğer $B \neq \emptyset$ ise, $U \subseteq V$.

ii) Eğer $V \neq Y \times Y$ ise, $B \subseteq \bar{A}$.

İspat: (i) $B \neq \emptyset$ olduğunu, ancak $U \not\subseteq V$ olduğunu varsayalım ve $(a, b) \in U$ ve $(a, b) \notin V$ olsun. X 'teki her x için $f(x) = a$ ve $g(x) = b$ olarak tanımlanan sabit fonksiyonları, $f, g: X \rightarrow Y$ 'i düşünün. O zaman $(f, g) \in U_A$ 'dır, ancak $(f, g) \notin V_B$ 'dir. Gerçekten de, eğer $A = \emptyset$ ise, $(f(A), g(A)) \subseteq U$ olur; eğer $A \neq \emptyset$ ve $x \in A$ ise, $(f(x), g(x)) = (a, b) \in U$ olur. Dolayısıyla, $(f, g) \in U_A$ 'dır. Öte yandan, $B \neq \emptyset$ olduğundan, herhangi bir $x \in B$ için, $(f(x), g(x)) = (a, b) \notin V$ ve dolayısıyla $(f, g) \notin V_B$ olur. Bu, $U_A \subseteq V_B$ varsayımıyla çelişir.

(ii) $B \not\subseteq \bar{A}$ olduğunu varsayalım ve $x_0 \in B \setminus \bar{A}$ olsun. $V \neq Y \times Y$ olduğundan, $(c, d) \notin V$ olacak şekilde $c, d \in Y$ seçin. Bir $(p, q) \in U$ sabitleyin. $f, g: X \rightarrow Y$ fonksiyonlarını

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{eğer } x \in \bar{A}, \\ c & \text{eğer } x \in X \setminus \bar{A}, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} q & \text{eğer } x \in \bar{A}, \\ d & \text{eğer } x \in X \setminus \bar{A}. \end{cases}$$

şeklinde tanımlayın. O zaman $(f, g) \in U_A$ 'dır, ancak $(f, g) \notin V_B$ 'dir. Özel olarak, eğer $A = \emptyset$ ise, $(f(A), g(A)) \subseteq U$ olur; eğer $A \neq \emptyset$ ve $x \in A$ ise, $(f(x), g(x)) = (p, q) \in U$ olur. Dolayısıyla, $(f, g) \in U_A$ 'dır. Öte yandan, $x_0 \in B$ olduğundan ve $(f(x_0), g(x_0)) = (c, d) \notin V$ olduğundan, $(f, g) \notin V_B$ olur. Bu, $U_A \subseteq V_B$ varsayımıyla çelişir. Bu nedenle, $B \subseteq \bar{A}$ 'dır. $\square$

Önerme 3.1 Bir Hausdorff topolojik uzayı X ve bir yarı-düzgün uzay $(Y, \mathcal{U})$ için, aşağıdaki iddialar geçerlidir.

- a) $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_X$.
- b) $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_X$ ancak ve ancak X kompaktır.
- c) $\mathcal{U}_p = \mathcal{U}_k$ ancak ve ancak X 'in her kompakt alt kümesi sonludur.

İspat: (a) Açıkça, $F(X) \subseteq K(X)$ olduğundan $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_X$ 'dir.

(b) $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}_k$ olduğunu varsayalım ve $U \in \mathcal{U}$, $U \neq Y \times Y$ olsun. O zaman, X 'in bir kompakt alt kümesi K ve bir $V \in \mathcal{U}$ vardır, öyle ki $V_K \subseteq U_X$ 'dir. Lemma 3.1 ile, $X \subseteq \overline{K} = K$ (çünkü X Hausdorff'tur). Böylece X kompaktır.

Tersine, X 'in kompakt olduğunu varsayalım. $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}_k$ 'yi göstermek için, keyfi bir $V_X \in \mathcal{U}_X$ alalım. Kompakt olan $K = X$ 'i alarak, $V_K \in \mathcal{U}_k$ 'dir ve $V_X \subseteq V_K$ 'dir. Dolayısıyla $V_X \in \mathcal{U}_k$ 'dir ve bu yüzden $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}_k$ 'dir.

(c) $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_p$ olduğunu varsayalım ve $K \subseteq X$ kompakt bir küme ve $U \in \mathcal{U}$, $U \neq Y \times Y$ olsun. O zaman, X 'in sonlu bir alt kümesi A ve bir $V \in \mathcal{U}$ vardır, öyle ki $V_A \subseteq U_K$ 'dir. Lemma 3.1 ile, $K \subseteq \overline{A} = A$ 'dır; dolayısıyla K sonludur.

Tersine, X 'in her kompakt alt kümesinin sonlu olduğunu varsayalım. $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_p$ 'yi göstermek için, $K \subseteq X$ kompakt bir küme olmak üzere, keyfi bir $U_K \in \mathcal{U}_k$ alalım. O zaman K sonludur. $A = K$ 'i alarak, $V_A \in \mathcal{U}_p$ 'dir ve $U_A \subseteq U_K$ 'dir. Dolayısıyla $U_K \in \mathcal{U}_p$ 'dir ve bu yüzden $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_p$ 'dir.

Özellikle, eğer X ayrık ise, X 'in her kompakt alt kümesi sonludur ve bu yüzden $\mathcal{U}_p = \mathcal{U}_k$ 'dir. $\square$

Birçok uygulamada, dikkati sürekli fonksiyonlarla sınırlamak esastır. Bu bağlamda, şimdi X 'ten Y 'ye sürekli fonksiyonların uzayı olan $\mathcal{C}(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsama topolojisini ve ilgili yapıları ele alıyoruz.

Tanım 3.2 X bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yarı-düzgün uzay olsun. Her kompakt $K \subset X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için

$$W(K, U) = \{(f, g) \in C(X, Y) \times C(X, Y) : g(K) \subset U[f(K)]\}$$

olarak tanımlansın. Burada

$$U[A] = \{y \in Y : \exists a \in A, (y, a) \in U\}.$$

Teorem 3.2

$$\mathcal{W} = \{W(K, U) : K \subset X \text{ kompakt, } U \in \mathcal{U}\}$$

sınıfı $C(X, Y)$ üzerinde bir yarı-düzgünlüğün alt bazını oluşturur. Bu yarı-düzgünlüğün ürettiği topoloji, kompakt-açık topoloji τ_{co} ile aynıdır.

İspat: İspat iki kısımdan oluşur.

(A) $\mathcal{W}$ bir yarı-düzgünlük alt-bazıdır. Bir yarı-düzgünlüğün alt-bazı olması için gerekli görülen özellikler şunlardır (filtre tabanı özellikleri):

(i) Her $f \in C(X, Y)$ için $(f, f) \in W(K, U)$ çünkü $f(K) \subset U[f(K)]$ her $U \in \mathcal{U}$ için açıkça doğrudur; dolayısıyla diyagonal tüm $W(K, U)$ 'lerin içinde yer alır.

(ii) Eğer $W(K, U)$ temel bir çevre ise, tersinin

$$W(K, U)^{-1} = \{(f, g) : (g, f) \in W(K, U)\}$$

yine ailede bir temel olarak karşılaştırılabilir; daha açık şekilde

$$W(K, U)^{-1} = W(K, U^{-1})$$

olduğundan, ters alma altında kapalıdır (çünkü $\mathcal{U}$ ters almaya kapalıdır).

(iii) Eğer $U \subset V$ ise $W(K, U) \subset W(K, V)$ çünkü $g(K) \subset U[f(K)]$ ise aynı zamanda $g(K) \subset V[f(K)]$ olur.

(iv) $W(K, U) \cap W(K, V) = W(K, U \cap V)$ olduğundan aile kesişim altında kapalıdır. Böylece $\mathcal{W}$ bir filtre tabanı/alt baz niteliği taşır ve bu nedenle bir yarı-düzgünlüğü üretir.

(B) Üretilen topolojinin kompakt-açık topoloji ile çakışması. Öncelikle kompakt-açık topolojinin (alt)bazını hatırlayalım.

$$S(K, V) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset V\}.$$

kümesini ve

$$\mathcal{S} = \{S(K, V) : K \subset X \text{ kompakt, } V \subset Y \text{ açık}\}$$

sınıfını tanımlayalım.

Her $U \in \mathcal{U}$ ve her kompakt $K \subset X$ için $U[f(K)]$ açık bir küme olduğundan,

$$W(K, U)[f] = \{g \in C(X, Y) : g(K) \subset U[f(K)]\}$$

ifadesi tanım gereği bir $S(K, U[f(K)])$ biçimindedir. Dolayısıyla her temel çevre $W(K, U)$ 'nin temel etrafı $W(K, U)[f]$ kompakt-açık alt baz elemanıdır. Bu, $\tau_{\mathcal{W}}$ (yani $\mathcal{W}$ tarafından üretilen topoloji) için her f noktasında bir kompakt-açık taban elemanının bulunduğunu gösterir; yani

$$\tau_{\mathcal{W}} \subseteq \tau_{co}.$$

Tersine, her kompakt-açık alt-baz elemanı $S(K, V)$ için, V açık olduğundan V bir $\mathcal{U}$ -komşuluğu biçiminde yazılabilir. Daha kesin olarak, her $y \in f(K)$ için $\mathcal{U}$ bir temel sağladığından bir $U_y \in \mathcal{U}$ seçilip $U_y[y] \subset V$ olacak şekilde alınabilir; kompaktlık sayesinde sonlu bir alt örtü seçilir ve bu seçimler bir $U \in \mathcal{U}$ ile tek bir çevreye indirgenebilir. Açıklamak gerekirse;

$f(K)$ kompakt olduğundan, her $a \in f(K)$ için $U_a \in \mathcal{U}$ öyle ki

$$U_a[a] \subset V$$

olacak şekilde alınabilir. Kompaktlık nedeniyle

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}[a_i]$$

olacak şekilde sonlu alt-küme seçilir.

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i} \in \mathcal{U}$$

alınırsa, her $y \in f(K)$ için $U[y] \subset V$ olacaktır; dolayısıyla

$$U[f(K)] \subset V.$$

Bu durumda

$$S(K, V) \supseteq \{g \in C(X, Y) : g(K) \subset U[f(K)]\} = W(K, U)[f],$$

yani $S(K, V)$ içinde bir $\mathcal{W}$ -temel komşuluk bulunur. Böylece her kompakt-açık alt-baz elemanı $\tau_{\mathcal{W}}$ içinde de açık olur ve

$$\tau_{co} \subseteq \tau_{\mathcal{W}}.$$

İki yönlü kapsama sonucunda $\tau_{\mathcal{W}} = \tau_{co}$ elde edilir. Bu tamamlar. $\square$

$C(X, Y)$ üzerindeki kompakt-açık topoloji, $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsama topolojisi ile mutlaka aynı olmak zorunda değildir. Bunu göstermek için bir karşı-örnek oluşturalım.

Örnek 3.1 $X = [0, 1]$ 'i standart topolojiye sahip kapalı birim aralık ve $Y = \mathbb{R}$ 'yi

standart topolojiye sahip gerçel sayılar olarak alalım. Y üzerinde bir yarı-düzgün yapısı $\mathcal{U}$ 'yu şu şekilde tanımlayalım:

$$\mathcal{U} = \{U_\epsilon : \epsilon > 0\}, \quad U_\epsilon = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y_1 - y_2| < \epsilon + 1\}.$$

Bu, $\mathbb{R}$ üzerindeki standart düzgün yapı değildir, çünkü komşuluk koşulu $+1$ ile gevşetilmiştir. Bu seçim, τ_{co} ve τ_k arasında bir tutarsızlık yaratacaktır. $f(x) = 0$ ve $g(x) = x$ olsun, tüm $x \in X$ için ve X 'te $K = [0,1]$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için, $|f(x) - g(x)| < \epsilon + 1$ olacak şekilde U_ϵ 'yi seçeriz.

$$|f(x) - g(x)| = |x - 0| = x \leq 1 < \epsilon + 1$$

olduğundan, herhangi bir $\epsilon > 0$ için g 'nin f 'in bir τ_{co} komşuluğuna ait olduğunu görürüz, herhangi bir $\epsilon > 0$ için g 'nin f 'in bir τ_k 'ya ait olmak için, tüm $x \in [0,1]$ ve bazı $\epsilon > 0$ için $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ geçerli olmalıdır. Ancak, $|f(x) - g(x)| = x$ 'dir ve $x \rightarrow 1$ iken, $|f(x) - g(x)|$ herhangi sabit bir ϵ 'u aşar, bu da daha katı koşulu ihlal eder. Sonuç olarak, g fonksiyonu f 'in bir τ_{co} -komşuluğunda yer alır, ancak f 'in hiçbir τ_k -komşuluğunda yer almaz. Bu nedenle, $\tau_{co} \neq \tau_k$ 'dir.

Tanım 3.3 $X \times X$ üzerindeki alt kümelerin bir filtresi $\mathcal{U}$, eğer bir yarı-düzgünlük ise ve tüm $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in X$ için, $(V \circ V)[x] \subseteq U[x]$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ varsa, yerel-düzgünlük olarak adlandırılır. O zaman $(X, \mathcal{U})$ çiftine yerel-düzgün uzay denir (Williams 1972).

Lemma 3.2 $(X, \mathcal{U})$ bir yerel-düzgün uzay, K ise X 'in kompakt bir alt kümesi ve $U \in \mathcal{U}$ olsun. Eğer $K \subseteq U$ ise, $V[K] \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

İspat: Her bir $x \in K$ için, $x \in U$ olduğundan, $W_x[x] \subseteq U$ olacak şekilde bir $W_x \in \mathcal{U}$ vardır. $\mathcal{U}$ yerel-düzgünlük olduğundan, $V_x^2[x] \subseteq W_x[x] \subseteq U$ olacak şekilde bir $V_x \in \mathcal{U}$ vardır. K kompakt olduğundan,

$$K \subseteq V_{x_1}[x_1] \cup V_{x_2}[x_2] \dots \cup V_{x_n}[x_n]$$

olduğunu görürüz. $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \dots \cap V_{x_n}$ olarak tanımlayalım. O zaman $V[K] \subseteq U$ olduğu açıktır. $\square$

Kompakt-açık topoloji ile kompakt yakınsama topolojisi arasındaki ilişki hakkında doğal bir soru ortaya çıkar. Bu ilişki, $(Y, \mathcal{U})$ 'nin yerel-düzgün olduğu varsayıldığında

özellikle önemli hale gelir.

Eğer $(Y, \mathcal{U})$ 'yi yerel-düzgün bir uzay olarak alırsak, $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt açık topoloji, $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsama topolojisi ile çakışır. Bu, aşağıdaki teoremden gösterilmiştir. Bu teoremin Eroğlu ve Güner (2019) için farklı koşullar altında da analiz edildiği belirtilmelidir.

Teorem 3.3 X bir topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yerel-düzgün uzay olsun. $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt açık topoloji, $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsama topolojisi ile çakışır.

İspat: Kompakt-açık topolojide bir alt baz açık küme olan $S(K, U)$ ve $f \in S(K, U)$ olsun. O zaman $f(K)$ kompakttır ve Lemma 3.2 den $V[f(K)] \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

$$V_K[f] = \{g: (g(x), h(x)) \in V \text{ tüm } x \in K\}$$

ele alalım. $V_K \in \mathcal{U}_K$ olduğu açıktır. Üstelik, $f \in V_K[f] \subseteq S(K, U)$ 'dir. Dolayısıyla $\tau_{co} \subseteq \tau_K$ 'dir.

Şimdi $G \in \tau_K$ ve $f \in G$ olsun. τ_K 'nin tanımına göre, X 'in kompakt bir alt kümesi K ve bir $U \in \mathcal{U}$ vardır, öyle ki

$$f \in U_K[f] \subseteq G.$$

Bu durumda tüm $x \in K$ için,

$$T_x^3[f(x)] \subseteq U[f(x)]$$

olacak şekilde $Y \times Y$ 'nin kapalı ve simetrik bir alt kümesi T_x vardır. $T = \bigcap_{x \in K} T_x$ olsun. T 'nin kapalı ve simetrik olduğu açıktır. $f(K)$ kompakt olduğundan,

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n T[f(x_i)]$$

geçerlidir. Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$K_i = K \cap f^{-1}(T[f(x_i)])$$

ve G_i de $T^2[f(x_i)]$ 'nin iç kısmının kapanışı olsun. $A = \bigcap_{i=1}^n S(K_i, G_i)$ olsun. O zaman

$$f \in A \subseteq U_K[f]$$

dir. Gerçekten, $g \in A$ olsun. Böylece tüm $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $g(K_i) \subseteq G_i$ 'dir. Dolayısıyla, tüm $a \in K_i$ için

$$(f(x_i), g(a)) \in T^2$$

dir. Ayrıca, tüm $a \in K_i$ için $f(a) \in T[f(x_i)]$ 'dir. Böylece

$$(f(a), g(a)) \in T^3$$

sonucuna varırız.

$$g(a) \in T^3[f(a)]$$

ve

$$g(a) \in U[f(a)]$$

olduğunu çıkarırız. Dolayısıyla, $A \subseteq U_K[f]$ geçerlidir. Bu yüzden $\tau_k \subseteq \tau_{co}$ 'dur. $\square$

Sonuç 3.1 X bir Hausdorff topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ bir yerel-düzgün uzay olsun. O zaman X kompakttır ancak ve ancak $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt açık topoloji, $C(X, Y)$ üzerindeki yerel-düzgün yakınsama topolojisi ile çakışır.

Bu bölümün geri kalan kısmında, kompakt yakınsama topolojisinin yapısal özelliklerine odaklanmaktadır. Özellikle, bu topolojinin yarı-sözdemetrik veya tam hale gelme koşullarını inceliyoruz. Bu sonuçlar, X uzayı (hemikompaktlık gibi) ve Y 'nin yarı-düzgün yapısı hakkında ek varsayımlar gerektirir.

X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir yarı-sözdemetrik uzay olsun. O zaman yarı-düzgün yakınsama topolojisi yarı-sözdemetriktir, çünkü $\mathcal{U}_d$ 'nin yarı-düzgün yakınsama yarı-düzgünlüğü için $\{(U_m)_X : m \in \mathbb{N}\}$ açıkça bir baz oluşturur, burada her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$U_m = \{(x, y) \in Y \times Y : d(x, y) < 1/m\}.$$

Bir X uzayının, her kompakt K için $K \subseteq K_n$ koşulunu sağlayan bir (K_n) kompakt alt kümeler dizisine sahip olması durumunda hemikompakt olduğu hatırlanmalıdır.

Önerme 3.2 X bir hemikompakt uzay ve (Y, d) bir yarı-sözdemetrik uzay olsun. O zaman $\mathcal{U}_d$ 'nin kompakt yakınsama topolojisi yarı-sözdemetriktir.

İspat: X 'in hemikompaktlığını gösteren (K_n) kompakt alt kümeler dizisi ve her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$U_m = \left\{ (x, y) \in Y \times Y : d(x, y) < \frac{1}{m} \right\}$$

olsun. O zaman $\{(U_m)_{K_n} : n, m \in \mathbb{N}\}$ koleksiyonu, kompakt yakınsama yarı-düzgünlüğü için bir baz oluşturur. Gerçekten de, X 'in herhangi bir kompakt alt kümesi $K \subseteq X$ ve $\mathcal{U}_d$ 'deki herhangi bir entouraj U için, $K \subseteq K_n$ ve $U_m \subseteq U$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$

vardır. Bu nedenle, $(U_m)_{K_n} \subseteq U_K$ 'dir, bu da herhangi bir baz entourajı U_K 'nin bu koleksiyondan bazı $(U_m)_{K_n}$ 'leri içerdiğini gösterir. $\square$

Tanım 3.4 X bir topolojik uzay olmak üzere, X 'te farklı x ve y noktaları ve $p(0) = x$ ve $p(1) = y$ olacak şekilde sürekli bir $p: [0,1] \rightarrow X$ fonksiyonu varsa açık olmayan bir yola sahiptir denir (Munkres 2020).

Önerme 3.3 X bir Tychonoff uzayı ve $(Y, \mathcal{U})$ açık olmayan bir yol içeren T_0 yarı-düzgün uzay olsun. $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsama topolojisi, yarı-sözdemetrik ise, o zaman $(Y, \tau_{\mathcal{U}})$ uzayı yarı-sözdemetrik ve X hemikompakttır.

İspat: Kompakt yakınsama topolojisi ile uyumlu olan $C(X, Y)$ üzerinde bir q yarı-sözdemetrik olsun. Her $y \in Y$ için, $f_y: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu $f_y(x) = y$ tüm $x \in X$ için olarak tanımlayalım. O zaman $f_y \in C(X, Y)$ 'dir. Şimdi tüm $y, z \in Y$ için $d(y, z) = q(f_y, f_z)$ koyalım. d 'nin $\tau_{\mathcal{U}}$ ile uyumlu olan Y üzerinde bir yarı-sözdemetrik olduğu kolayca görülür. Öte yandan, $p(0) \neq p(1)$ olacak şekilde sürekli bir $p: [0,1] \rightarrow Y$ fonksiyonu vardır. $(Y, \tau_{\mathcal{U}})$ bir T_0 uzay olduğundan, bazı $U \in \tau_{\mathcal{U}}$ için $p(1) \notin U(p(0))$ olduğunu varsayabiliriz. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu tüm $x \in X$ için $f(x) = p(0)$ olarak tanımlayalım. O zaman $f \in C(X, Y)$ 'dir. q , kompakt yakınsama topolojisi ile uyumlu bir yarı-sözdemetrik olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için, X 'in kompakt bir alt kümesi K_n ve

$$(U_n)_{K_n}[f] = \{g \in C(X, Y): (f(x), g(x)) \in U_n \text{ tüm } x \in K_n\}$$

kümesinin q -topu $B_q(f, 2^{-n})$ içinde yer alacağı bir $U_n \in \mathcal{U}$ çevresi vardır. Bu, kompakt yakınsama yarı-düzgünlüğünün $(U)_K$ formundaki kümeler tarafından üretilmesi ve bu kümelerin topoloji için bir alt baz oluşturması gerçeğinden kaynaklanır. Dolayısıyla, $B_q(f, 2^{-n})$ topu, f 'in bir temel komşuluğunu içermelidir. K , X 'in kompakt bir alt kümesi olsun. O zaman $U_K[f]$ kompakt yakınsama topolojisinde f 'in bir komşuluğudur, dolayısıyla

$$(U_n)_{K_n}[f] \subseteq U_K[f]$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $K \subseteq K_n$ olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım, o zaman $x_0 \in K \setminus K_n$ vardır. Bu nedenle, $\phi(x_0) = 1$ ve $\phi(K_n) = \{0\}$ olacak şekilde sürekli bir $\phi: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu da vardır. Böylece $p \circ \phi \in C(X, Y)$ 'dir. Ayrıca,

$$p \circ \phi \in (U_n)_{K_n}[f] \subseteq U_K[f]$$

dir. Ancak, $(p \circ \phi)(x_0) = p(1)$ 'dir, bu da $p \circ \phi \in U_K[f]$ ile çelişir. Bu nedenle X hemikompakttır. $\square$

Önerme 3.2 ve Önerme 3.3'ü birleştirerek aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4 X bir Tychonoff topolojik uzayı ve $(Y, \mathcal{U})$ açık olmayan bir yol içeren bir T_0 yarı-düzgün uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- $C(X, Y)$ üzerindeki kompakt yakınsama topolojisi τ_k yarı-sözdemetriktir.
- X hemikompakttır ve $(Y, \tau_{\mathcal{U}})$ yarı-sözdemetriktir.

Teorem 3.5 X bir hemikompakt topolojik uzay ve $(Y, \mathcal{U})$ tam bir yerel-düzgün uzay olsun. O zaman, kompakt yakınsamanın yarı-düzgünlüğü $\mathcal{U}_k$ ile donatılmış $F(X, Y)$ fonksiyon uzayı tamdır.

İspat: $F(X, Y)$ 'de bir $\mathcal{U}_k$ -Cauchy ağı $(f_\alpha)_\alpha$ olsun. Tanım gereği, X 'in her kompakt alt kümesi $K \subseteq X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ çevresi ve her $x \in K$ için,

$$(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \in U$$

olacak şekilde bir α_0 indeksi vardır, öyle ki $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ 'dır. Bir $x \in X$ sabitleyelim. $\{x\}$ kompakt olduğundan, $(f_\alpha(x))_\alpha$ ağı Y 'de bir $\mathcal{U}$ -Cauchy ağıdır. $(Y, \mathcal{U})$ tam olduğundan, $\mathcal{U}$ tarafından üretilen topolojide $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ olacak şekilde bir $f(x) \in Y$ noktası vardır.

$f: X \rightarrow Y$ 'yi $f(x) = \lim_\alpha f_\alpha(x)$ olarak tanımlayalım. $f_\alpha \rightarrow f$ 'nin $\mathcal{U}_k$ yarı-düzgünlüğünde olduğunu iddia ediyoruz.

$K \subseteq X$ kompakt ve $U \in \mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U}$ yerel-düzgün olduğundan ve her $x \in K$ için $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ olduğundan, şu şekilde ilerleyebiliriz:

$\mathcal{U}$ 'nun yerel-düzgünlüğü ile, $V \circ V \subseteq U$ ve her $y \in Y$ için

$$(V \circ V)[y] \subseteq U[y].$$

olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathcal{U}$ çevresi vardır. (f_α) bir $\mathcal{U}_k$ -Cauchy ağı olduğundan, $\alpha, \beta \geq \alpha_1$ için tüm $x \in K$ için

$$(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \in V$$

olacak şekilde bir α_1 vardır.

Ayrıca, her $x \in K$ için, $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ olduğundan ve Y yerel-düzgün olduğundan, $\beta \geq \alpha_x$ için $(f_\beta(x), f(x)) \in V$ olacak şekilde bir $\alpha_x \geq \alpha_1$ vardır.

K 'nin kompaktlığı sayesinde, tüm $x \in K$ ve tüm $\beta \geq \alpha_2$ için $(f_\beta(x), f(x)) \in V$ olacak şekilde bir $\alpha_2 \geq \alpha_1$ vardır.

Bir $\alpha \geq \alpha_2$ ve bir $x \in K$ sabitleyelim. O zaman,

$$(f_\alpha(x), f(x)) \in V \circ V \subseteq U.$$

Böylece, tüm $\alpha \geq \alpha_2$ için, $(f_\alpha, f) \in U_K$ olur, dolayısıyla $f_\alpha \rightarrow f$ in $\mathcal{U}_k$ olur.

Bu nedenle, (f_α) ağı kompakt yakınsama yarı-düzgünlüğünde f 'e yakınsar ve $F(X, Y)$, $\mathcal{U}_k$ altında tamdır. $\square$

Bu teorem, fonksiyon uzayları üzerinde kompakt yakınsama yarı-düzgünlüğünün tamamlanması için yeterli koşulları sağlar. Değer uzay $(Y, \mathcal{U})$ 'nin yerel düzgünlüğünü ve tanım kümesi X 'in hemikompaktlığını birleştirerek önceki sonuçları genelleştirir.

4. FONKSİYON DİZİLERİNİN NOKTASAL ve DÜZGÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, fonksiyon uzaylarında istatistiksel yakınsaklık kavramı iki temel biçimiyle (noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık) ele alınacaktır. Klasik yakınsaklık kavramlarının istatistiksel genellemeleri metrik uzaylarda ayrıntılı biçimde incelenmiş olsa da, bu kavramların yarı-düzgün yapılar altında ve fonksiyon uzayları bağlamında nasıl davrandığı araştırılmamıştır. Burada, istatistiksel yakınsaklığın fonksiyon dizilerine uygulanışı, bu iki tür yakınsaklık arasındaki ilişki ve bu yapıların bazı temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklıkla olan bağlantıları ve aralarındaki farklar örneklerle desteklenerek gösterilecektir.

4.1 Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.1 $(Y, \mathcal{U})$ bir yarı-düzgün uzay olsun. Bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisine, eğer her $x \in X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : (f_n(x), f(x)) \notin U\}) = 0$$

ise, f 'e (noktasal) istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{st} f$ ile gösterilir.

Başka bir deyişle, her $x \in X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \notin U[f(x)]\}) = 0$$

şartı sağlanır.

Bu tanımda, tanım kümesinin bir yarı-düzgün uzay olduğu varsayıldığında, noktasal istatistiksel yakınsaklık ile düzgün istatistiksel yakınsaklık arasında doğal bir bağlantı kurulur. Bir sonraki alt bölümde bunu ele alacağız.

Teorem 4.1.1 Bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yakınsak ise, istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $f_n \rightarrow f$ olduğunu varsayalım. Her $x \in X$ ve Y 'deki $f(x)$ 'in her V komşuluğu için, $n > n_0$ olduğunda $f_n(x) \in V$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ tam sayısı vardır.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \notin V\} = \{1, 2, \dots, n_0\}$$

olsun. A sonlu olduğundan, yoğunluğu sıfırdır, yani $\delta(A) = 0$. Bu nedenle, $f_n \xrightarrow{st} f$. $\square$

Teorem 4.1.1'in tersi genel olarak doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1.1 $f_n: \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}$ dizisi,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n \text{ asal ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

biçiminde ele alalım. Bu dizinin yakınsak olmadığı açıktır. Ancak, asal sayıların doğal sayı kümesinde yoğunluğu 0 olduğundan, f_n dizisi istatistiksel olarak sıfır fonksiyonu ($f_0(x) = 0$) f_0 'a yakınsar. Dolayısıyla istatistiksel yakınsak bir fonksiyon dizisi yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 4.1.2 Bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine, eğer her $x \in X$ için $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesi varsa ve

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ (m \in A)}} f_m(x) = f(x)$$

şartı sağlanıyorsa, f 'e st^* -yakınsaktır denir. Bunu $f_n \xrightarrow{st^*} f$ ile gösteririz.

Teorem 4.1.2 Bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $f \in Y^X$ 'e st^* -yakınsak ise, (f_n) f 'e st -yakınsaktır.

İspat: Bir $x \in X$ ve Y 'deki $f(x)$ 'in bir V komşuluğu olsun. (f_n) f 'e st^* -yakınsak olduğundan, $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subset \mathbb{N}$ ve $m > m_0$ ve $m \in A$ olduğunda $f_m(x) \in V$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman,

$$\{m \in \mathbb{N}: f_m(x) \notin V\} \subset \{1, 2, \dots, m_0\} \cup (\mathbb{N} \setminus A)$$

ve

$$\delta(\{1, 2, \dots, m_0\} \cup (\mathbb{N} \setminus A)) = 0$$

oldüğundan, (f_n) f 'e st -yakınsaktır. $\square$

Teorem 4.1.3 Y , yarı-düzgünlüğün ürettiği topolojiye göre birinci sayılabilir bir uzay olsun. Eğer Y^X 'deki bir $(f)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $f \in Y^X$ 'e st -yakınsak ise, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ f 'e st^* -yakınsaktır.

İspat: Eğer Y birinci sayılabilir ise, her noktanın sayılabilir iç içe geçmiş bir yerel bazı vardır. $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ dizisi $f(x)$ 'te sayılabilir iç içe geçmiş bir yerel baz olsun ve her $i \in \mathbb{N}$ için

$$N_i = \{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \in V_i\}$$

kümesini tanımlayalım. O zaman $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $\delta(N_i) = 1$ olur.

Bu şekilde, $k_1 < k_2 < \dots < k_i$ olan ve her $n \geq k_i$ için

$$\frac{|N_i(n)|}{n} > 1 - \frac{1}{i}$$

koşulunu sağlayan bir $k_i \in N_i$ dizisi elde ederiz. Her $k \leq k_1$ için $k \in A$ ve $i \geq 1$ ve $k_i < k \leq k_{i+1}$ ise $k \in N_i$ olması durumunda $k \in A$ olacak şekilde bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi tanımlayalım.

$A = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$, $k_i \leq n \leq k_{i+1}$ ise

$$\frac{|A(n)|}{n} = \frac{|N_i(n)|}{n} > 1 - \frac{1}{i}$$

olur ve dolayısıyla $\delta(A) = 1$ 'dir.

$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in A}} f_n(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x)$ olduğunu kanıtlayabiliriz. Bu nedenle $f_n \xrightarrow{st^*} f$ olur. $\square$

4.2 Düzgün İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.2.1 Bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine, eğer her $U \in \mathcal{U}$ için, $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subset \mathbb{N}$ varsa ve her $x \in X$ ve her $m \in A$ için $(f_m(x), f(x)) \in U$ ise, f 'e düzgün st^* -yakınsaktır denir. Bunu $f_n \xrightarrow{st^*-u} f$ ile gösteririz.

Teorem 4.2.1 Eğer bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi düzgün yakınsak ise, düzgün istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Teorem 4.1.1 ve Tanım 4.2.1 den açıktır

Tanım 4.2.2 Bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine, eğer her $U \in \mathcal{U}$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : (f_n(x), f(x)) \notin U, \forall x \in X\}) = 0$$

ise, f fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{st-u} f$ ile gösterilir.

Başka bir deyişle, her $U \in \mathcal{U}$ için,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \notin U[f(x)], \text{ tüm } x \in X \text{ için}\}) = 0$$

şartı sağlanır.

Teorem 4.2.2 Eğer bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $f \in Y^X$ 'e düzgün istatistiksel yakınsak ise, (f_n) f 'e istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Tanım 4.2.2'yi hatırlayalım: Eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $U \in \mathcal{U}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n(x) \notin U[f(x)], \text{ tüm } x \in X \text{ için}\}) = 0$$

Sağlıyorsa, f_n f 'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır. Buna göre, her $x \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n(x) \notin U[f(x)]\}) \leq \delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n(x) \notin U[f(x)], \forall x \in X\}) = 0.$$

O halde, her $x \in X$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için

$$\delta(\{n: f_n(x) \notin U[f(x)]\}) = 0$$

olur. Bu (f_n) 'nin f 'ye istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 4.2.3 Eğer bir Y^X 'deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $f \in Y^X$ 'e düzgün st^* -yakınsak ise, (f_n) f 'e düzgün istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Tanım 4.2.1 gereği, eğer $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f 'ye düzgün st^* -yakınsak ise, her $U \in \mathcal{U}$ için $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subset \mathbb{N}$ vardır ve her $m \in A$ ve her $x \in X$ için $(f_m(x), f(x)) \in U$ olur. Ancak, $\delta(A) = 1$ ve $A \subset \mathbb{N}$ olduğundan, Tanım 4.2.2 ile düzgün istatistiksel yakınsaklık koşulu doğrudan sağlanır. Yani, her $U \in \mathcal{U}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n(x) \notin U[f(x)], \text{ tüm } x \in X\}) = 0$$

olur. Dolayısıyla (f_n) f 'ye düzgün istatistiksel yakınsaktır. $\square$

5. YARI DÜZGÜN TOPOLOJİYE SAHİP FONKSİYON UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, yarı-düzgün topolojiye sahip fonksiyon uzaylarında istatistiksel yakınsaklık kavramını inceleyeceğiz. Yarı-düzgün yapı, tam düzgün yapıdan daha genel bir çerçeve sunar ve birçok klasik sonucun doğal bir biçimde genelleştirilmesine imkân tanır. Bu bağlamda, çeşitli yarı-düzgün fonksiyon uzayları üzerinde istatistiksel yakınsaklık, tekillik ve süreklilik gibi temel özellikler ele alınacaktır.

Tanım 5.1 (Y^X, τ_U) uzayında $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $A \in \mathcal{A}$ ve her $V \in \mathcal{U}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : (f_n, f) \notin V_A\}) = 0$$

şartını sağlıyorsa, f değerine istatistiksel limit denir. Yani,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : (f_n(x), f(x)) \notin V, \forall x \in A\}) = 0.$$

Tanım 4.1.1, Tanım 4.2.2 ve Tanım 5.1’de verilen kavramlar dikkate alındığında, Önerme 5.1 ve Önerme 5.2 sonuçları doğrudan elde edilir.

Önerme 5.1 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi (Y^X, τ_U) uzayında ve $f \in Y^X$ olmak üzere $\mathcal{A} = F(X)$ ise, (f_n) dizisi (Y^X, τ_{sp}) uzayında istatistiksel olarak f değerine yakınsıyorsa, (f_n) dizisi noktasal olarak istatistiksel yakınsaktır. Yani,

$$f_n \xrightarrow{\text{st}-\tau_{sp}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{st}} f.$$

Önerme 5.2 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi (Y^X, τ_U) uzayında ve $f \in Y^X$ olmak üzere $\mathcal{A} = \{X\}$ ise, (f_n) dizisi (Y^X, τ_{su}) uzayında istatistiksel olarak f değerine yakınsıyorsa, (f_n) dizisi düzgün istatistiksel olarak yakınsaktır. Yani,

$$f_n \xrightarrow{\text{st}-\tau_{su}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{st}-u} f.$$

Teorem 5.1 $(Y, \mathcal{U})$ Hausdorff yarı-düzgün bir uzay olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi (Y^X, τ_U) uzayında istatistiksel olarak yakınsıyorsa, istatistiksel limit tektir.

İspat: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin hem f hem de g değerine istatistiksel olarak yakınsadığını varsayalım:

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n \notin V_A[f]\}) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{U},$$

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n \notin V_A[g]\}) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{U}.$$

Hausdorff uzay özelliğinden, tüm çevrelerin kesişimi köşegen kümesidir:

$$\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \{(y, y) \mid y \in Y\}.$$

Eğer bazı $x \in X$ için $f(x) \neq g(x)$ ise, $(f(x), g(x)) \notin V$ olacak bir $V \in \mathcal{U}$ bulunur.

Böylece A kümesi ve V çevresi için

$$V_A[f] \cap V_A[g] = \emptyset$$

olur. Ancak f_n dizisi her iki değere de istatistiksel olarak yakınsadığından,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n \in V_A[f]\}) = 1, \quad \delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n \in V_A[g]\}) = 1.$$

Bu, f_n dizisinin aynı anda birbirinden ayrık iki kümede bulunduğunu varsayar ki bu çelişkidir. Dolayısıyla $f = g$, istatistiksel limit tektir. $\square$

Teorem 5.2 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(Y^X, \tau_{\mathcal{U}})$ uzayında ve $f \in Y^X$ olmak üzere,

$$f_n \xrightarrow{st-\tau_{su}} f \implies f_n \xrightarrow{st-\tau_{sp}} f.$$

İspat: $f_n \xrightarrow{st-\tau_{su}} f$ varsayalım. Yani, her $V \in \mathcal{U}$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: f_n \notin V_X[f]\}) = 0.$$

$V_X[f]$ tanımından

$$V_X[f] = \{g \in Y^X: (g(x), f(x)) \in V, \forall x \in X\}.$$

Eğer $f_n \in V_X[f]$, her $x \in X$ için $(f_n(x), f(x)) \in V$ olur. Dolayısıyla her sabit x için

$$\{n \in \mathbb{N}: (f_n(x), f(x)) \notin V\} \subseteq \{n \in \mathbb{N}: f_n \notin V_X[f]\}.$$

Sağdaki kümenin yoğunluğu sıfır olduğundan, soldaki kümenin de yoğunluğu sıfırdır.

Yani $f_n \xrightarrow{st-\tau_{sp}} f$. $\square$

Örnek 5.1 Y tam düzgün bir uzay olmak zorunda olmayan bir yarı-düzgün uzay olsun.

(f_n) dizisini $(Y^X, \tau_{\mathcal{U}})$ üzerinde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

$f(x) = 0$ olsun. Bu dizi noktasal olarak istatistiksel olarak f değerine yakınsar, ancak düzgün istatistiksel yakınsama sağlamaz.

Tanım 5.2 $Y \times Y$ üzerindeki $\mathcal{U}$ filtresi, her $V \in \mathcal{U}$ ve $y \in Y$ için $W \in \mathcal{U}$ olacak şekilde $(W \circ W)[y] \subseteq V[y]$ koşulunu sağlıyorsa yerel-düzgünlük olarak adlandırılır. Bu durumda $(Y, \mathcal{U})$ uzayına yerel-düzgün uzay denir (Williams 1972)

Lemma 5.1 $(Y, \mathcal{U})$ yerel-düzgün bir uzay ve $V \in \mathcal{U}$ olsun. O halde

$$W \circ W \circ W \subseteq V$$

olacak şekilde simetrik çevre $W \in \mathcal{U}$ vardır.

İspat: $V \in \mathcal{U}$ verilsin. Yerel-düzgün uzay tanımına göre, her $y \in Y$ için öyle bir $U_y \in \mathcal{U}$ vardır ki

$$(U_y \circ U_y)[y] \subseteq V[y]$$

sağlanır. Y 'nin her sonlu altkümesi $\{y_1, \dots, y_k\}$ için

$$U_{y_1, \dots, y_k} = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_k}$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{U}$ bir filtre olduğundan, her sonlu kesişim $U_{y_1, \dots, y_k}$ de $\mathcal{U}$ 'ya aittir.

Bu tür bir U seçelim. Seçilen sonlu ailedeki her y_i için

$$(U \circ U)[y_i] \subseteq (U_{y_i} \circ U_{y_i})[y_i] \subseteq V[y_i]$$

elde edilir. Dolayısıyla, $U \circ U$ ifadesi Y 'nin ilgili kısmında V 'nin altında yer alır. $\mathcal{U}$ bir yarı-düzgünlük olduğundan, öyle bir $W' \in \mathcal{U}$ vardır ki $W' \circ W' \subseteq U$ olur. Şimdi

$$W = W' \cap (W')^{-1}$$

tanımını yapalım. Böylece $W \in \mathcal{U}$ ve W simetriktir. Son olarak

$$W \circ W \circ W \subseteq W' \circ W' \circ W' \subseteq U \circ W' \subseteq U \circ U \subseteq V$$

elde edilir. Bu durumda, $W \in \mathcal{U}$ olacak şekilde simetrik bir çevre vardır ki

$$W \circ W \circ W \subseteq V$$

olur. $\square$

Teorem 5.3 $(Y, \mathcal{U})$ yerel-düzgün bir uzay ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C(X, Y)$ olsun. Eğer $f_n \xrightarrow{\text{st}-\tau_{\text{su}}} f$, o zaman $f \in C(X, Y)$.

İspat: $x_0 \in X$ sabit alınsın. $V \in \mathcal{U}$ için, yerel-düzgün özellikten simetrik $W \in \mathcal{U}$ seçilir; $W \circ W \circ W \subseteq V$. f_n düzgün istatistiksel olarak f değerine yakınsadığından, uygun $n_0 \in \mathbb{N}$ seçilerek

$$(f_{n_0}(x), f(x)) \in W, \forall x \in X$$

sağlanır. f_{n_0} sürekli; böylece f de x_0 noktasında sürekli. x_0 rasgele seçildiği için $f \in C(X, Y)$. $\square$



6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışması, modern topoloji ve analizde önemli bir yere sahip olan fonksiyon uzayları üzerindeki yakınsama teorisini, yarı-düzgün uzaylar ve istatistiksel yakınsaklık kavramları çerçevesinde yeniden ele almıştır. Çalışmada, $F(X, Y)$ fonksiyon uzayı üzerinde, X 'in alt kümelerinden oluşan bir koleksiyon $\mathcal{A}$ tarafından üretilen $\tau_{\mathcal{A}}$ yarı-düzgün yakınsama topolojileri incelenmiş ve klasik τ_p , τ_k ve τ_u topolojilerinin bu yapı altında birleştiği gösterilmiştir. Ayrıca, $C(X, Y)$ üzerinde kompakt yakınsama topolojisi τ_k ile kompakt-açık topoloji τ_{co} 'nun, hedef uzayın yerel-düzgün olması durumunda eşdeğer olduğu ispatlanmış, böylece bu iki temel topoloji arasındaki ilişki yarı-düzgün uzaylar bağlamında netleştirilmiştir. Bunun yanında, τ_k topolojisinin yarı-sözdemetrik hale gelebilmesi için gerekli koşulların, X 'in hemikompaktlığı ve (Y, τ_u) 'nin yarı-sözdemetrik olmasıyla sağlandığı ortaya konulmuştur.

Tezin ana katkılarından biri, fonksiyon dizileri için noktasal ve düzgün istatistiksel yakınsaklık kavramlarının yarı-düzgün uzaylarda sistematik biçimde incelenmesidir. Bu kapsamda, Hausdorff yarı-düzgün uzaylarda istatistiksel limitin tek olduğu gösterilmiş ve düzgün istatistiksel yakınsak sürekli fonksiyon dizilerinin limit fonksiyonlarının da sürekli olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, $F(X, Y)$ uzayının $\mathcal{U}_k$ yarı-düzgünlüğü altında tam olması için gerekli koşulların X 'in hemikompaktlığı ve $(Y, \mathcal{U})$ 'nin tam yerel-düzgün bir uzay olmasıyla sağlandığı belirlenmiştir. Bu sonuçlar, yarı-düzgün yapılar altında istatistiksel yakınsaklığın sadece bir yakınsama aracı değil, aynı zamanda topolojik özellikleri koruyan güçlü bir araç olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması istatistiksel yakınsaklık teorisini klasik metrik ortamların ötesine taşıyarak yarı-düzgün yapılarla donatılmış daha geniş bir fonksiyonel çerçeveye uygulamış, böylece fonksiyon dizilerinin yakınsama davranışlarını daha esnek ve genellenebilir bir perspektiften değerlendirme imkânı sunmuştur.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda aşağıdaki araştırma konuları ileriye dönük olarak değerlendirilebilir: yarı-düzgün yakınsama topolojileri altında istatistiksel

yakınsaklığın, ideal yakınsaklık gibi diğer genelleştirilmiş yakınsaklık türleri ile ilişkilerinin incelenmesi; yarı-düzgün yakınsama kavramının, daha farklı cebirsel/topolojik yapılara genişletilmesi; yerel-kompaktlık gibi ek topolojik özelliklerin, fonksiyon uzaylarında istatistiksel yakınsaklık ve süreklilik özelliklerine etkisinin araştırılması; düzgün istatistiksel yakınsaklık ile fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanabilen ince topolojiler (fine topologies) arasındaki denklik koşullarının analiz edilmesi.



7. KAYNAKLAR

- Balcerzak M, Dems K, Komisarski A, 2007, Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 328(1), 715-729.
- Bourbaki N, 1989, *General Topology*, Springer, 443p, Berlin.
- Caserta A, Di Maio G, Kočinac D R, 2011, Statistical convergence in function spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 420419, 11 pages.
- Di Maio G, Kocinac , D R, 2008, Statistical convergence in topology, *Topology Appl.*, 156, 28-45.
- E. Čzech, (revised by Frolik Z, Katetov M), 1966, *Topological Spaces*, Academia Publ. House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 893p, Prague.
- Eroglu İ, Güner E, 2019, Some ordered function space topologies and ordered semi-uniformizability, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(4), 1079-1091.
- Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.
- Georgiou D N, Megaritis A C, Ozcag S, (2018), Statistical convergence of sequences of functions with values in semi-uniform spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 59(1), 103-117.
- Husek M, 1964, Generalized proximity and uniform spaces I, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 5, 247-266.
- Husek M, 1965, Generalized proximity and uniform spaces II, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 6, 119-139.
- James R M, 2000, *Topology (2nd Edition)*, Prentice Hall, 537p, Upper Saddle River, Nj.
- Kelley J L, 1975, *General Topology*, Springer, 298p, New York.

- McCoy R A, Kundu S, Jindal V, 2018, Function Spaces with Uniform, Fine and Graph Topologies, Springer, 105p, Cham.
- McCoy R A, Ntantu I, 1988, Topological Properties of Spaces of Continuous Functions, Springer-Verlag, 408p, Berlin.
- Megaritis A C, 2017, Ideal convergence of nets of functions with values in uniform spaces, *Filomat*, 31(20), 6281-6292.
- Niven I, Zuckerman H S, Montgomery H L, 1991, An Introduction to the Theory of Numbers., Fifth Edition, John Wiley and Sons, Inc., 529p, New York.
- Osmanoglu İ, 2025, Statistical and Uniformly Statistical Convergence of Sequences of Functions, *filomat*, 39(30).
- Osmanoglu İ, Minaz S, 2025, Statistical Convergence in Function Spaces with Semi-Uniform Topologies, *Aksaray University Journal of Science and Engineering*, 9(2), 78-83.
- Osmanoglu İ, Minaz S, 2025, Semi-uniform Convergence Topologies on Function space, *Electronic Journal of Mathematics*, Basımda.
- Page W, 1989, Topological Uniform Structures, Dover Publications Inc., 416p, New York.
- Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloq. Math.*, 2, 73-74.
- Tokat D, Osmanoglu İ, 2016, Some properties of the quasicompact-open topology on $C(X)$, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9, 3511-3518.
- Ulus U, Dündar E, 2014, I -lacunary statistical convergence of sequences of sets, *Filomat*, 28(8), 1567-1574.
- Williams J, 1972, Locally Uniform Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 168, 435-469.
- Yegül S, Dündar E, 2017, On statistical convergence of sequences of functions in 2-normed spaces, *Journal of Classical Analysis*, 10(1), 49-57.

Yegül S, DüNDAR E, 2018, Statistical convergence of double sequences of functions and some properties in 2-normed spaces, *Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics*, 33(5), 705-719.

Zygmund A, 1979, *Trigonometric Series*, (second ed.), Cambridge Univ. Press, 718p, Cambridge.

