



TOPOLOJİK GRUPLARDA YEREL KOMPAKTLIK

Gökçe EFEOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gökçe EFEOĞLU

04/06/2021

TOPOLOJİK GRUPLARDA YEREL KOMPAKTLIK
(Yüksek Lisans Tezi)

Gökçe EFEOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2021

ÖZET

Bu çalışmada topolojik gruplar, sağ(sol) topolojik gruplar, paratopolojik gruplar ve quasi-topolojik gruplar incelenmiştir. Sağ(sol) topolojik grupların homojen bir uzay ve sağ(sol) öteleme dönüşümlerinin homeomorfizma olmasından faydalanılarak topolojik grupların bazı özellikleri ele alınmıştır. Topolojik bölüm gruplarının bazı özellikleri incelenmiştir. G bir topolojik grup olmak üzere H kümesinin G nin yerel kompakt bir altgrubu olması durumunda G/H bölüm grubunun sağladığı özellikler incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20405

Anahtar Kelimeler : Topolojik grup, sağ topolojik grup, sol topolojik grup
quasi-topolojik grup, paratopolojik grup, yerel kompakt

Sayfa Adedi : 109

Danışman : Prof. Dr. Çetin VURAL

LOCALLY COMPACTNESS IN TOPOLOGICAL GROUPS
(M. Sc. Thesis)

Gökçe EFEOĞLU

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2021

ABSTRACT

In this study, topological groups, right(left) topological groups, paratopological groups and quasi-topological groups were examined and relevant examples were given. Some properties of topological groups are discussed by making use of the fact that right(left) topological groups are homogeneous spaces and right(left) translational transformations are homeomorphism. Some features of the quotients of topological groups were observed. In case G is a topological group and H is a locally compact subgroup of G , the properties provided by G/H are examined.

Science Code : 20405

Key Words : Topological group, right topological group, left topological group, quasi-topological group, paratopological group, locally compactness

Page Number : 109

Supervisor : Prof. Dr. Çetin VURAL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren, büyük bir özveriyle değerli zamanını ayırarak hiçbir sorumu cevapsız bırakmayıp, yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlanma fırsatı veren kıymetli hocam Prof. Dr. Çetin VURAL'a, maddi ve manevi beni destekleyen başta annem Sevilay EFEOĞLU olmak üzere aileme teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Topolojik Uzaylarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler	3
2.2. Cebirsel Bazı Tanım ve Teoremler	7
2.3. Topolojik Gruplarla İlgili Bazı Tanım, Teorem ve Örnekler	8
3. TOPOLOJİK GRUPLARDA BİRİMİN KOMŞULUKLARI ve GRUP ÜZERİNDE TOPOLOJİ İNŞAASI	23
3.1. Topolojik Gruplarda Birimin Komşulukları ve Grup Üzerinde Topoloji İnşaası	23
4. TOPOLOJİK GRUPLARIN BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ	37
4.1. Topolojik Grupların Bazı Topolojik Özellikleri	37
5. TOPOLOJİK BÖLÜM GRUPLARI	59
5.1. Topolojik Bölüm Grupları	59
6. YEREL KOMPAKT TOPOLOJİK GRUPLAR	79
6.1. Yerel Kompakt Topolojik Gruplar	79
6.2. Yerel Kompakt Bölüm Grupları	98
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	105
KAYNAKLAR	107

ÖZGEÇMİŞ	109
--------------------	-----



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

(x, τ)

Topolojik Uzay

$\overline{A}$

A kümesinin kapanışı

A°

A kümesinin içi

$\omega = \aleph_0$

ilk sayılabilir sonsuz kardinal veya ordinal

$\chi(x, X)$

x noktasının X uzayındaki karakteri

$\ker(f)$

f nin çekirdeği

1. GİRİŞ

Topolojik gruplar matematiğin iki önemli alanı olan cebir ve topolojinin ortak bir çalışmasıdır. Topolojik grupların genel kavramının arkasında S Lie'nin çalışmaları vardır. 20. yy başlarında D. Hilbert ve L. Brouwer Lie gruplarından daha genel topolojik gruplarla ilgilenmiştir. Özellikle L. Brouwer Cantor kümelerinin dağal bir şekilde Abelyan topolojik grup yapıldığını göstermiştir [1]. Topolojik grupların genel notasyonu F. Leja [2] ve O. Schreier [3] tarafından tanıtılmıştır. Her topolojik grubun regüler uzay olduğu A. N. Kolmogorov tarafından gösterilmiştir. ve L. S. Pontryagin tarafından [4] yorumlanmıştır. L. S. Pontryagin daha sonra her topolojik grubun Tychonoff uzay olduğunu ispatlamıştır. H. Freudenthal [5] ve A. A. Markov [6] topolojik grupların bölüm gruplarının ve altgruplarının teorisine büyük bir katkıda bulunmuştur.

Bu çalışmada [7] deki ilgili bölümler incelenmiş ve oradaki kavram ve ispatların lisans seviyesinde anlaşılabilir biçimde açılarak daha sarıh hale getirilmesi amaçlanmıştır.

Topojik gruplar, üzerindeki topolojiyle, grubun ikili işleminin ve her elemanı tersine eşleyen dönüşümün sürekli olduğu gruplardır. Fakat topolojik gruplar için her zaman işlemin sürekliliği ile çalışmak yerine nispeten daha kolay olarak nitelendirilebilecek sağ ve sol ötelemelerin sürekliliğine dayanan sağ topolojik grup ve sol topolojik grup ile çalışabiliriz. Böylece sağ veya sol topolojik gruplar için geçerli olan bir ifade bu çalışmada görüleceği üzere topolojik gruplar için de geçerli olacaktır. Aynı zamanda sağ ve sol topolojik gruplar, ileride görüleceği üzere, homojen uzaylar olduğundan her noktada bu uzayların davranışını görmek yerine sadece birim eleman için görmek yeterli olacaktır.

Bu çalışmanın ilk bölümü giriş kısmına ayrılmıştır.

Üç alt başlıktan oluşan ikinci bölümde okunabilirliği kolaylaştırmak için ilk iki alt başlıkta topolojik uzaylar ve grup teorisinin bazı önemli ifadelerine yer verilmiştir. Üçüncü alt başlıkta ise topolojik grup, sağ(sol) topolojik grup, yarı-topolojik grup, paratopolojik grup, quasi-topolojik grup ile ilgili bazı tanım ve teoremler ifade edilip bazı örneklerle bunların birbirleriyle ilişkisi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde her sağ(sol) topolojik grubun açık altgruplarının aynı zamanda kapalı altgrup olduğu ve Abelyan bir grubun, üzerindeki bir topolojiyle, nasıl topolojik grup olduğu görülmüştür. İlâveten topolojik grupların birim elemanının açık komşuluklar tabanının sağladığı bazı özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde sağ(sol) topolojik grupların homojen bir uzay olduğu görülmüş ve topolojik grupların bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde topolojik grupların bölüm grupları ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölüm iki alt başlıktan oluşmuş olup, bu çalışmanın temel konusu olan topolojik gruplarda yerel kompaktlık ele alınmıştır.

Yedinci bölüm sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Aksi belirtilmedikçe bu çalışmadaki tüm teorem, önerme, lemma ve örnekler [7] de bulunabilir.

Bu çalışmada tüm topolojik uzayların T_1 ayırma aksiyomunu sağladığı kabul edilecektir.

2. BAZI TANIM VE TEOREMLER

Üç alt başlıktan oluşan bu bölümde sonraki bölümlerde okunabilirliği kolaylaştırmak adına ihtiyaç duyulabilecek bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Bu bölümün ilk kısmında topolojik uzayların bazı temel tanım ve teoremleri verilecektir [8, 9].

İkinci kısımda cebirin temel konularından olan grup teorisi ile ilgili bazı temel tanımlara yer verilecektir [10].

Üçüncü kısımda ise bu çalışmanın temel konusu olan topolojik grup, sağ(sol) topolojik grup, quasi-topolojik grup ve paratopolojik grup ile ilgili tanım, teorem ve bazı örnekler verilecek, birbiriyle ilişkileri görülecektir [7].

2.1. Topolojik Uzaylarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

2.1.1. Tanım

X bir küme olmak üzere X in altkümelerinin bir τ ailesi eğer

T1) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$

T2) τ ailesinin elemanlarının sonlu arakesitleri de τ nun elemanı

T3) τ ailesinin elemanlarının herhangi keyfi birleşimleri de τ nun bir elemanı

koşullarını sağlıyorsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

2.1.2. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere,

i) τ nun elemanlarına X in açık altkümeleri,

ii) $X \setminus F = F^C$ açık ise F kümesine X in kapalı altkümesi denir.

2.1.3. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A kümesini kapsayan X in bütün

kapalı kümelerinin arakesatine A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

2.1.4. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A altkümesinin kapsadığı tüm açık alt kümelerin birleşimine A nın içi denir ve A° ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olmak üzere, X in $x \in A^\circ$ olacak biçimdeki her A altkümesine x noktasının bir komşuluğu denir.

2.1.6. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $\mathcal{U}(x)$ ailesi x in komşuluklarının ailesi olsun. $\sigma(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ olmak üzere, eğer her $U \in \mathcal{U}(x)$ için $B \subseteq U$ olacak biçimde en az bir $B \in \sigma(x)$ varsa $\sigma(x)$ ailesine x noktasının bir komşuluklar tabanı denir.

2.1.7 Teorem

(X, τ) bir topolojik uzay ve $V \subseteq X$ olmak üzere, V nin açık olması için gerek ve yeter koşul her $x \in V$ için $x \in U_x \subseteq V$ olacak biçimde X uzayında bir U_x açığının var olmasıdır.

2.1.8. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğu A kümesinde x den farklı en az bir eleman içeriyorsa x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. A kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir.

2.1.9. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. Eğer X in boştan farklı her açık altkümesi $\mathcal{B}$ deki bazı elemanların birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ailesine (X, τ) uzayı için bir taban denir.

2.1.10. Önerme

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olmak üzere, $\mathcal{B}$ ailesinin τ için bir taban olması için gerek ve yeter koşul her $G \subseteq X$ açık ve her $p \in G$ için $p \in B \subseteq G$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ olmasıdır.

2.1.11. Önerme

X bir küme ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olmak üzere $\mathcal{B}$ ailesinin X üzerindeki bir topoloji için bir taban olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki $B1$ ve $B2$ koşullarının sağlanmasıdır.

(B1) $X = \bigcup \mathcal{B}$

(B2) Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak biçimde bir B_3 elemanının var olmasıdır.

2.1.12. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subseteq \tau$ olmak üzere, eğer $\mathcal{S}$ ailesinin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathcal{B}$ ailesi τ için bir taban oluşturuyorsa $\mathcal{S}$ ailesine τ için bir alt taban denir.

2.1.13. Tanım

X topolojik uzayının sayılabilir çoklukta açığının arakesiti olarak yazılabilen her altkümeye bir G_δ -küme denir.

2.1.14. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olmak üzere, $\tau_Y = \{T \cap Y : T \in \tau\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye Y üzerindeki altuzay topolojisi denir.

2.1.15. Tanım

X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $x_0 \in X$ olmak üzere, eğer $f(x_0)$ ın her V komşuluğu için x_0 ın $f(U) \subseteq V$ olacak biçimde bir U komşuluğu bulunabiliyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Her $x \in X$ için x noktasında sürekli olan fonksiyonlara sürekli fonksiyonlar denir.

2.1.16 Teorem

X, Y topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdakiler denktir.

- i) f süreklidir.
- ii) Y uzayının her U açık altkümesi için $f^{-1}(U)$ kümesi X uzayında açıktır.
- iii) Y uzayının her F kapalı altkümesi için $f^{-1}(F)$ kümesi X uzayında kapalıdır.
- iv) Her $A \subseteq X$ için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ dır.

2.1.17 Teorem

X, Y, Z topolojik uzaylar olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ sürekli fonksiyonlar ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da süreklidir.

2.1.18 Teorem

X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, f sürekli ise her $A \subseteq X$ için, $f|_A : A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu süreklidir.

2.1.19. Tanım

X, Y topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu bire bir, örten, sürekli ve f nin tersi f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna bir homeomorfizma denir.

2.1.20. Tanım

X, Y, Z , topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \times Y \rightarrow Z$ fonksiyonu için eğer;
 $\forall x_0 \in X$ için

$$\begin{aligned} f|_{\{x_0\} \times Y} : \{x_0\} \times Y &\rightarrow Z \\ (x_0, y) &\rightarrow f|_{\{x_0\} \times Y}(x_0, y) = f(x_0, y) \end{aligned}$$

ve

$\forall y_0 \in Y$ için

$$\begin{aligned} f|_{X \times \{y_0\}} : X \times \{y_0\} &\rightarrow Z \\ (x, y_0) &\rightarrow f|_{X \times \{y_0\}}(x, y_0) = f(x, y_0) \end{aligned}$$

kısıtlanmış fonksiyonları sürekli ise f fonksiyonuna ayrı ayrı sürekli (separately continuous) denir.

2.1.21. Tanım

X, Y, Z birer topolojik uzay olmak üzere $X \times Y$ üzerinde çarpım topolojisi varken $f : X \times Y \rightarrow Z$ fonksiyonu sürekli ise f fonksiyonuna birlikte sürekli (jointly continuous) denir.

2.1.22. Tanım

X bir topolojik uzay ve E X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. E nin bütün denklik sınıflarının kümesi X/E ile gösterilsin. $q : X \rightarrow X/E$ X in her bir x elemanını x in $[x]$ denklik sınıfına eşleyen dönüşüm olsun. X/E kümesi üzerinde q dönüşümünü sürekli kılan en ince topoloji $\tau_q = \{U \subseteq X/E : q^{-1}(U) \subseteq X \text{ açık}\}$ dır. Bu topolojiye X/E üzerindeki bölüm topolojisi denir. Bu topoloji ile X/E uzayına da bölüm uzayı denir.

2.1.23. Tanım

X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer X üzerinde, $q : X \rightarrow X/E$ doğal dönüşüm olmak üzere, $f = h \circ q$ olacak biçimde bir E denklik bağıntısı ve bir $h : X/E \rightarrow Y$ homeomorfizması varsa f dönüşümüne bir bölüm dönüşümü denir.

2.2. Cebirsel Bazı Tanım ve Teoremler

2.2.1. Tanım

$G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere G üzerinde $*$: $G \times G \rightarrow G$ ikili işlemi, her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ birleşme özelliğini sağlıyorsa $(G, *)$ ikilisine bir yarıgrup denir.

2.2.2. Tanım

$(G, *)$ bir yarı-grup olmak üzere, eğer G nin bir birim elemanı varsa $(G, *)$ ikilisine bir monoid denir.

2.2.3. Tanım

$(G, *)$ bir monoid olmak üzere G nin her elemanının ters elemanı varsa $(G, *)$ ikilisine bir grup denir.

Şimdi ispatı [7] de bulunabilecek cebirsel ağırlıklı aşağıdaki önerme ileride kullanılmak amacıyla verilecektir.

2.2.4. Önerme

G bir Abelyan grup ve $e \in G$ birim eleman, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ olmak üzere, G nin $e \neq a$ olan her a elemanı için $g(a) \neq 1$ olacak şekilde bir $g : G \rightarrow \mathbb{T}$ homomorfizması vardır.

2.3. Topolojik Gruplarla İlgili Bazı Tanım, Teorem ve Örnekler

2.3.1. Tanım

$(S, \cdot)$ bir yarıgrup(grup, monoid), (S, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her $a \in S$ için

$$\begin{aligned} r_a : S &\longrightarrow S \\ x &\longrightarrow r_a(x) = x \cdot a \end{aligned}$$

sağ öteleme dönüşümü sürekli ise $(S, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir sağ topolojik yarıgrup(grup, monoid) denir.

2.3.2. Tanım

$(S, \cdot)$ bir yarıgrup(grup, monoid), (S, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her $a \in S$ için

$$\begin{aligned} \lambda_a : S &\longrightarrow S \\ x &\longrightarrow \lambda_a(x) = a \cdot x \end{aligned}$$

sol öteleme dönüşümü sürekli ise $(S, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir sol topolojik yarıgrup(grup, monoid) denir.

2.3.3. Tanım

$(S, \cdot)$ bir yarıgrup(grup, monoid), (S, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her $a \in S$ için hem $r_a : S \longrightarrow S$ sağ öteleme dönüşümü hem de $\lambda_a : S \longrightarrow S$ sol öteleme dönüşümü sürekli ise $(S, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir yarı-topolojik yarıgrup(grup, monoid) denir.

2.3.4. Tanım

$(S, \cdot)$ bir yarıgrup ve (S, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer

$$h : S \times S \longrightarrow S$$

$$(x, y) \longrightarrow h((x, y)) = x \cdot y$$

dönüşümü sürekli (birlikte sürekli) ise $(S, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir topolojik yarıgrup denir.

2.3.5. Tanım

$(G, \cdot)$ bir grup ve (G, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, eğer

$$h : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longrightarrow h((x, y)) = x \cdot y$$

dönüşümü sürekli (birlikte sürekli) ise $(G, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir paratopolojik grup denir.

2.3.6. Tanım

$(G, \cdot, \tau)$ bir yarı-topolojik grup olmak üzere, eğer G nin her elemanını tersine eşleyen

$$f : G \longrightarrow G$$

$$x \longrightarrow f(x) = x^{-1}$$

dönüşümü sürekli ise $(G, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir quasi-topolojik grup denir.

2.3.7. Tanım

$(G, \cdot, \tau)$ bir paratopolojik grup olmak üzere, eğer G nin her elemanını tersine eşleyen

$$f : G \longrightarrow G$$

$$x \longrightarrow f(x) = x^{-1}$$

dönüşümü sürekli ise $(G, \cdot, \tau)$ üçlüsüne bir topolojik grup denir.

Her topolojik grubun bir topolojik yarıgrup, her topolojik yarıgrupun bir yarı-topolojik yarıgrup ve her yarı-topolojik yarıgrupun hem bir sol topolojik yarıgrup hem de bir sağ topolojik yarıgrup olduğu açıktır. Aşağıdaki ilk örnekte her paratopolojik grubun topolojik grup olmak zorunda olmadığını, ikinci örnekte ise her yarı-topolojik yarıgrupun topolojik yarıgrup olmak zorunda olmadığını göreceğiz.

Aksi belirtilmedikçe bir G kümesinin üzerindeki herhangi bir $\star$ ikili işlemi için; $x, y \in G$ olmak üzere $x \star y = xy$ biçiminde ifade edilecektir.

Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde, tabanı $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ olan topoloji Sorgenfrey doğrusu olarak adlandırılır. Bu topoloji ve alışılmış toplama işlemiyle $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir paratopolojik gruptur. Şöyleki; bunun için her $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için $f((x, y)) = x + y = z$ biçiminde tanımlı $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $f((x, y)) = x + y = z \in W$ olacak biçimde $\mathbb{R}$ uzayında bir W açığını alalım. $\mathcal{B}$ taban olduğundan $[z, b) \subseteq W$ olacak biçimde bir $b \in \mathbb{R}$ vardır. $[x, b/2) \times [y, b/2) = U$ diyelim. $(p, q) \in U$ olsun. $x \leq p < b/2$ ve $y \leq q < b/2$ olduğundan $x + y \leq p + q < b$ olup $f((p, q)) = p + q \in [x + y, b)$ elde edilir. O halde $(x, y) \in U$ ve $f(U) \subseteq W$ olup f süreklidir. Böylece $(\mathbb{R}, +)$ bir paratopolojik gruptur. Fakat $(\mathbb{R}, +)$ bu topoloji ile bir topolojik grup değildir. Çünkü $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \rightarrow f(x) = -x$ dönüşümü sürekli değildir. Çünkü; $[0, 1)$ aralığı açık olmasına rağmen $f^{-1}([0, 1)) = (-1, 0]$ açık değildir.

İkinci örneği vermeden önce oradaki kavramları hatırlamak için aşağıdaki tanım ve sonrasındaki iki teoremi verelim.

2.3.8. Tanım

(X, τ) , yerel kompakt bir Hausdorff uzay olsun. $\alpha \notin X$ olmak üzere $Y = X \cup \{\alpha\}$ olsun. $\mathcal{S} = \tau \cup \{\{\alpha\} \cup (X \setminus F) : F \subseteq X \text{ kompakt}\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir ve bu topoloji ile Y uzayı kompakt, Hausdorff bir uzaydır. $(Y, \mathcal{S})$ uzayına (X, τ) uzayının tek nokta (ya da Alexandroff) kompaktlaştırması denir.

Yukarıdaki tanımda verilen $\mathcal{S}$ ailesinin Y üzerinde bir topoloji olduğu açıktır. Şimdi Y uzayının kompakt ve Hausdorff bir uzay olduğunu görelim.

2.3.9 Teorem

Tanım 2.3.8 de ifade edilen $(Y, \mathcal{S})$ uzayı kompakt ve Hausdorff bir topolojik uzaydır.

İspat

$\mathcal{O}$ ailesi Y nin bir açık örtüsü olsun. $\alpha \in Y$ olduğundan $\alpha \in O_0$ olacak biçimde bir $O_0 \in \mathcal{O}$ vardır. $O_0 \in \mathcal{S}$ ve $\alpha \in Y \setminus X$ olduğundan $O_0 = \{\alpha\} \cup (X \setminus F_0)$ olacak biçimde kompakt bir $F_0 \subseteq X$ vardır. $\mathcal{O}$ ailesi Y nin bir açık örtüsü ve $F_0 \subseteq X \subseteq Y$ olduğundan $\mathcal{O}$ ailesi F_0 için bir açık örtüdür. F_0 kompakt olduğundan $\mathcal{O}$ nun $F_0 \subseteq \bigcup \{O : O \in \mathcal{O}_0\}$ olacak biçimde sonlu bir $\mathcal{O}_0$ alt ailesi vardır. O halde $\mathcal{O}_0 \cup \{O_0\}$ ailesi $\mathcal{O}$ nun Y yi örten sonlu bir altailesi olup Y uzayı kompakttır.

Şimdi Y nin Hausdorff olduğunu görelim. $x, y \in Y$ olmak üzere $x \neq y$ olsun. Eğer $x, y \in X$ ise; (X, τ) uzayı Hausdorff olduğundan $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U, V \in \tau$ vardır. $\tau \subseteq \mathcal{S}$ olduğundan $U, V \in \mathcal{S}$ dir. Eğer x ya da y den biri α ise; $y = \alpha$ olsun. $x \in X$ ve (X, τ) uzayı yerel kompakt olduğundan $x \in U$ ve $\bar{U}$ kompakt olacak biçimde bir $U \in \tau$ vardır. O halde $V = \{\alpha\} \cup (X \setminus \bar{U}) \in \mathcal{S}$ dir. Böylece $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ ve $U, V \in \mathcal{S}$ dir. $\square$

Şimdi yukarıdaki $\mathcal{S}$ ailesi ile ilgili başka bir teorem verilecek.

2.3.10 Teorem

$\{\alpha\} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X$ kompakttır.

İspat

$(\Rightarrow)$: $\{\alpha\} \in \mathcal{S}$ ise bu durumda X uzayında $X \setminus F = \emptyset$ olacak biçimde kompakt bir F altkümesi var olup $F = X$ olacağından X kompakttır.

$(\Leftarrow)$ X kompakt olsun. Bu durumda $\{\alpha\} \cup X \setminus X \in \mathcal{S} = \{\alpha\}$ olduğundan $\{\alpha\} \in \mathcal{S}$ dir. $\square$

Örnek

$\alpha \notin \mathbb{R}$ olmak üzere $S = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ kümesinin

$$x \cdot y = \begin{cases} x + y & , \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \\ \alpha & , \quad x = \alpha \vee y = \alpha. \end{cases}$$

işlemiyle bir yarı-grup olduğu aşıkardır. S kümesi, üzerindeki, tek nokta kompaktlaştırmasıyla bir yarı-topolojik yarıgruptur. Fakat bir topolojik yarıgrup değildir. Şöyleki;

S nin yarı-topolojik yarıgrup olduğunu görmek için her $a \in S$ için $r_a : S \rightarrow S$ sağ öteleme dönüşümünün ve $\lambda_a : S \rightarrow S$ sol öteleme dönüşümünün sürekli olduğunu görmeliyiz. Öncelikle $a \in S$ olmak üzere r_a sağ öteleme dönüşümünü ele alalım. $x \in S$ olsun. $r_a(x) \in W$ olacak biçimde bir $W \subseteq S$ açığını alalım. x in $r_a(U) \subseteq W$ olacak biçimde bir U komşuluğunu bulmalıyız.

1. Durum: $a = \alpha$ ise; bu durumda her $A \subseteq S$ için $r_a(S) = \{\alpha\}$ olup $U = W$ alınabilir.

2. Durum: $a \neq \alpha$ ise; bu durumda aşağıdaki durumlar söz konusudur.

i) $x = \alpha$ ise; bu durumda $r_a(x) = \alpha \in W$ olup W açık olduğundan $W = \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F)$ olacak biçimde, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir F altkümeleri vardır. $\mathbb{R}$ nin kompakt altkümeleri sınırlı olduğundan $F \subseteq [p, q]$ olacak biçimde $p, q \in \mathbb{R}$ vardır.

Öyleyse $U = \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [p - a, q - a])$ alınabilir.

ii) $x \neq \alpha$ ise; bu durumda $r_a(x) = x + a \in \mathbb{R}$ olup $r_a(x) \in W \setminus \{\alpha\}$ dir. $S \setminus \{\alpha\} = \mathbb{R}$ olduğundan $W \setminus \{\alpha\}$ açıktır. O halde $(x + a - r, x + a + r) \subseteq W \setminus \{\alpha\}$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı vardır. O halde x in aradığımız komşuluğu $(x - r, x + r)$ açık aralığıdır. Böylece r_a süreklidir.

Benzer biçimde λ_a sol öteleme dönüşümü de süreklidir. O halde S bir yarı-topolojik yarıgrupdur.

Şimdi S nin bir topolojik yarıgrup olmadığını görelim. Bunun için $f((x, y)) = x \cdot y$ biçiminde tanımlı $f : S \times S \rightarrow S$ çarpım fonksiyonunun (α, α) noktasında sürekli olmadığını göreceğiz. Şöyleki;

$f((\alpha, \alpha)) = \alpha$ dır. Şimdi α nın $V = \{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus [0, 1])$ komşuluğunu alalım. Eğer f dönüşümü sürekliyse $f([\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F_1)] \times [\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F_2)]) \subseteq V$ olacak biçimde $\mathbb{R}$ uzayında F_1, F_2 kompakt altkümeleri vardır. F_1, F_2 $\mathbb{R}$ de kompakt olduğundan sınırlıdır. O halde $F_1 \subseteq [a, b]$, $F_2 \subseteq [c, d]$ olacak biçimde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vardır. $f((\mathbb{R} \setminus [a, b]), (\mathbb{R} \setminus [a, b])) \not\subseteq V$ olduğunu görelim. maks $\{|a|, |b|, |c|, |d|\} + 1 = x$ diyelim.

$|a| < x$ olduğundan $-x < a < x$ olup $-x - 1 < a$ olur. Böylece $-x - 1 \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \subseteq \mathbb{R} \setminus F_1$ elde edilir. $|d| < x$ olduğundan $-x < d < x$ olup $d < x + 1$ olur. Böylece $x + 1 \in \mathbb{R} \setminus [c, d] \subseteq \mathbb{R} \setminus F_2$ elde edilir. O halde $(-x - 1, x + 1) \in (\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F_1)) \times (\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F_2))$ olup $f((-x - 1, x + 1)) = 0 \in f((\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F_1)) \times (\{\alpha\} \cup (\mathbb{R} \setminus F_2))) \subseteq V$ olur ki $V = \{\alpha\} \cup \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde f dönüşümü sürekli olmayıp S topolojik yarıgrup değildir.

Şimdi bir X kümesinden kendisine tanımlanan fonksiyonların kümesi olan $S(X, X)$ üzerindeki bir topoloji verilecektir.

2.3.11. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $S(X, X) = \{f \mid f : X \rightarrow X \text{ bir fonksiyon}\}$ kümesinin " $\circ$ " bileşke işlemi ile bir yarıgrup olduğu aşıkardır. $S(X, X)$ üzerinde noktasal yakınsaklık topolojisi varken, bu uzay $S_p(X, X)$ ile gösterilsin. Bu durumda, $x \in X$ ve $U \subseteq X$ iken $[x, U] = \{f \in S(X, X) : f(x) \in U\}$ olmak üzere

$$\sigma = \{[x, U] : x \in X, U \in \tau\}$$

ailesi $S_p(X, X)$ için bir alttaban ve böylece

$$\beta = \left\{ \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i] \quad : \quad n \in \mathbb{N}, x_i \in X, U_i \in \tau \right\}$$

ailesi de $S_p(X, X)$ için bir tabandır.

Şimdi $S(X, X)$ in üzerindeki noktasal yakınsaklık topolojisi ile, bir sağ topolojik grup olduğunu fakat bir sol topolojik grup olmayabileceğini görelim.

2.3.12 Teorem

X bir topolojik uzay olmak üzere

- i) $S_p(X, X)$ bir sağ topolojik yarıgruptur.
- ii) $f \in S(X, X)$ olmak üzere $\lambda_f(g) = f \circ g$ biçiminde tanımlı $\lambda_f : S(X, X) \rightarrow S(X, X)$ sol öteleme dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeter koşul f nin sürekli olmasıdır.

İspat

i) $f \in S(X, X)$ olsun. $r_f(g) = g \circ f$ biçiminde tanımlı $r_f : S(X, X) \rightarrow S(X, X)$ sağ öteleme dönüşümünün sürekli olduğunu görmeliyiz. $S_p(X, X)$ in alt tabanı $\sigma = \{[x, V] \quad : \quad x \in X, \quad V \subseteq X \text{ açık}\}$ idi. Alt tabanın elemanlarının r_f altındaki ters görüntülerinin açık olduğunu görmek yeterlidir. Her $[x, V] \in \sigma$ için $r_f^{-1}([x, V]) = [f(x), V] \in \sigma$ olduğundan r_f sağ öteleme dönüşümü süreklidir.

ii) $(\Leftarrow) : f \in S(X, X)$ sürekli olsun. Her $[x, V] \in \sigma$ için $\lambda_f^{-1}([x, V]) = [x, f^{-1}(V)]$ olduğu kolayca görülebilir. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ açıktır ve $[x, f^{-1}(V)] \in \sigma$ dir. Böylece λ_f sol öteleme dönüşümü süreklidir.

$(\Rightarrow) : f \in S(X, X)$ olmak üzere λ_f sol öteleme dönüşümü sürekli olsun. Kabul edelimki f dönüşümü $a \in X$ noktasında sürekli olmasın. O zaman X uzayında öyle bir V_0 açığı vardır ki $f(a) \in V_0$ ve $a \in U$ olacak biçimdeki her $U \subseteq X$ açığı için $f(U) \not\subseteq V_0$ dir. $I : X \rightarrow X$ birim dönüşümü olmak üzere; $\lambda_f(I) = f \circ I = f$ ve $f(a) \in V_0$ olduğundan $\lambda_f(I) \in [a, V_0]$ dir. λ_f sürekli ve $[a, V_0] \subseteq S_p(X, X)$ açık olduğundan $I \in T$ ve $\lambda_f(T) \subseteq [a, V_0]$ olacak biçimde bir $T \subseteq S_p(X, X)$ açığı vardır. Öyleyse $I \in \bigcap_{i=1}^n [p_i, U_i] \subseteq T$ olacak biçimde $p_1, p_2, \dots, p_n \in X$ ve X uzayında $U_1, U_2, \dots, U_n$ açıkları vardır. Öyleyse $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $I(p_i) = p_i \in U_i$ dir. Kabulümüzden dolayı iddia ediyoruz ki $\lambda_f(\bigcap_{i=1}^n [p_i, U_i]) \not\subseteq [a, V_0]$ dir.

Şöyleki; $a \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ veya $a \notin \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dir.

1. Durum: $a \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ise; bu durumda $1 \leq i_0 \leq n$ olacak biçimde öyle bir i_0 vardır ki $a = p_{i_0}$ dır. $U_{i_0} \setminus \{p_1, \dots, p_{i_0-1}, p_{i_0+1}, \dots, p_n\} = W$ denilirse W kümesi X uzayında a noktasının açık bir komşuluğudur. $a \in U$ biçimindeki X in her U açığı için $f(U) \not\subseteq V_0$ olduğundan $f(W) \not\subseteq V_0$ dır. Öyleyse $f(y_0) \notin V_0$ olacak biçimde bir $y_0 \in W$ vardır. $g : X \rightarrow X$;

$$g(z) = \begin{cases} y_0 & ; \quad z = p_{i_0} \\ z & ; \quad z \neq p_{i_0} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu için $g \in \bigcap_{i=1}^n [p_i, U_i]$ dir.

Öte yandan $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(g(p_{i_0})) = f(y_0) \notin V_0$ olup $\lambda_f(g) \notin [a, V_0]$ dır.

2. Durum: $a \notin \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ise; $X \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\} = W$ denilirse W kümesi X uzayında açık olup $a \in W$ dur. Öyleyse $f(W) \not\subseteq V_0$ dır. O halde $f(z_0) \notin V_0$ olacak biçimde bir $z_0 \in W$ vardır. $h : X \rightarrow X$;

$$h(z) = \begin{cases} z_0 & ; \quad z = a \\ z & ; \quad z \neq a \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonu için $h \in \bigcap_{i=1}^n [p_i, U_i]$ dir.

Öte yandan $\lambda_f(h)(a) = (f \circ h)(a) = f(h(a)) = f(z_0) \notin V_0$ olup $\lambda_f(h) \notin [a, V_0]$ dır.

Böylece her iki durum için iddia doğru olup $\lambda_f(T) \not\subseteq [a, V_0]$ dır. Bu $\lambda_f(T) \subseteq [a, V_0]$ olması ile çelişir. Bu durumda kabulümüz yanlış olup f fonksiyonu süreklidir. $\square$

2.3.13. Lemma

X bir T_1 -uzay olmak üzere, eğer her $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu sürekli ise X ayrık uzaydır.

İspat

$A \subsetneq X$ olsun. O halde $y \notin A$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır.

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in A \\ y & ; \quad x \notin A \end{cases} \quad \text{biçiminde tanımlı } f : X \rightarrow X \text{ fonksiyonunu alalım.}$$

A nın açık olduğunu görelim. $p \in A$ olsun. $f(p) = p \in \{y\}^c$ açık ve f sürekli olduğundan $p \in U$ ve $f(U) \subseteq \{y\}^c$ olacak biçimde bir $U \subseteq X$ vardır. O halde $f(U) \cap \{y\} = \emptyset$ olup $p \in U \subseteq A$ dır. Böylece $p \in A^\circ$ olup A açıktır. $\square$

Şimdi $S_p(X, X)$ ile ilgili bir sonuç verilecektir.

2.3.14. Sonuç

X bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- i) $S_p(X, X)$ bir topolojik yarıgruptur.
- ii) $S_p(X, X)$ bir yarı-topolojik yarıgruptur.
- iii) X ayrık uzaydır.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii)

Her topolojik yarıgrup bir yarı-topolojik yarıgrup olduğundan $S_p(X, X)$ bir yarı-topolojik yarıgruptur.

ii) $\Rightarrow$ iii)

$S_p(X, X)$ bir yarı-topolojik yarıgrup olsun. Bu durumda her $f \in S(X, X)$ için λ_f sol öteleme dönüşümü sürekli. O halde Teorem 2.3.12 ii) den her $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu sürekli ve X T_1 -uzay olduğundan Lemma 2.3.13 den X ayrık uzaydır.

iii) $\Rightarrow$ i)

X bir ayrık uzay olsun. X in topolojik yarıgrup olması için $h(f, g) = f \circ g$ biçiminde tanımlı $h : S_p(X, X) \times S_p(X, X) \rightarrow S_p(X, X)$ dönüşümünün sürekli olduğu görülmelidir.

$f, g \in S_p(X, X)$ olsun. $f \circ g \in W$ olacak biçimde $S_p(X, X)$ uzayında bir W açığı alalım. $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $f \circ g \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, V_i] \subseteq W$ olacak biçimde $x_i \in X$ elemanları ve $V_i \subseteq X$ açıkları vardır. Bu durumda $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $(f \circ g)(x_i) = f(g(x_i)) \in V_i$ olur. X ayrık uzay olduğundan $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her $x_i \in X$ için $\{g(x_i)\}$ ve $\{f(g(x_i))\}$ kümeleri X uzayında açıktır. $\bigcap_{i=1}^n [x_i, \{g(x_i)\}] = U$ ve $\bigcap_{i=1}^n [g(x_i), \{f(g(x_i))\}] = T$ diyelim. $h(T, U) \subseteq W$ olduğunu görelim. $\varphi \in T$ ve $\psi \in U$ alalım. $\psi \in U$ olduğundan $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $\psi(x_i) \in \{g(x_i)\}$ dir. Öyleyse $\psi(x_i) = g(x_i)$ olup $\varphi(\psi(x_i)) = \varphi(g(x_i))$ dir. $\varphi \in T$ olduğundan $\varphi(\psi(x_i)) = \varphi(g(x_i)) \in \{f(g(x_i))\}$ olur. Böylece $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $\varphi(\psi(x_i)) = \{f(g(x_i))\} \subseteq V_i \subseteq W$ olur. O halde $h(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi = \bigcap_{i=1}^n [x_i, V_i] \subseteq W$ olup h dönüşümü sürekli. O halde X bir topolojik yarıgruptur. $\square$

Şimdi topolojik gruplarla ilgili bazı örnekler verilecektir.

Örnek

Bir grup, üzerindeki ayrık topolojiyle her zaman bir topolojik gruptur. Böyle gruplara ayrık grup denir.

2.3.15. Lemma

X sonsuz bir küme ve $\tau_S = \{A^c \mid A \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere; boştan farklı her her U, V açığı için $U \cap V \neq \emptyset$ dir.

İspat

Kabul edelimki $U_0 \cap V_0 = \emptyset$ olacak biçimde bir $U_0, V_0 \in \tau_S$ var olsun. $V_0, U_0 \in \tau_S$ olduğundan V_0^c, U_0^c sonludur. $U_0 \cap V_0 = \emptyset$ olduğundan $U_0^c \cup V_0^c = X$ dir. U_0^c ve V_0^c sonlu olduğundan X de sonludur. Bu da X in sonsuz olmasıyla çelişir O halde kabulümüz yanlış olup her $U, V \in \tau_S$ için $U \cap V \neq \emptyset$ dir.

Örnek

Sonsuz bir G grubu, üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisi τ_S ile bir yarı-topolojik grup ve quasi-topolojik gruptur. Fakat bir paratopolojik grup değildir. Şimdi sırasıyla bunları görelim.

İlk olarak G nin yarı-topolojik grup olduğunu, yani her $x_0 \in G$ için λ_{x_0} sol öteleme dönüşümünün ve r_{x_0} sağ öteleme dönüşümünün sürekli olduğunu, görelim. $V \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $V \in \tau_S$ alalım. $\lambda_{x_0}^{-1}(V)$ nin açık olduğunu görelim. $x \in \lambda_{x_0}^{-1}(V)$ alınırsa $\lambda_{x_0}(x) \in V$ olup $x_0 x \in V$ dir. Buradan $x \in x_0^{-1}V = \lambda_{x_0}^{-1}(V)$ dir ve $|V^c| = |(x_0^{-1}V)^c|$ olup $(x_0^{-1}V)^c$ sonludur. O halde $x_0^{-1}V = \lambda_{x_0}^{-1}(V) \in \tau_S$ dir. Böylece λ_{x_0} sol öteleme dönüşümü süreklidir. Benzer biçimde r_{x_0} sağ öteleme dönüşümü de süreklidir. O halde G bir yarı-topolojik gruptur.

Şimdi de G nin bir quasi-topolojik grup olduğunu görelim. Bunun için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $V \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $V \in \tau_S$ alalım. $f^{-1}(V) = V^{-1}$ dir ve $|V^c| = |(V^{-1})^c|$ dir. Öyleyse $(V^{-1})^c$ sonlu olup $f^{-1}(V) = V^{-1} \in \tau_S$ dir. O halde f dönüşümü süreklidir. G bir yarı-topolojik grup ve f dönüşümü sürekli olduğundan G bir quasi-topolojik gruptur.

Şimdi G nin bir paratopolojik grup olmadığını görelim. Bunun için $h((x, y)) = xy$ biçiminde tanımlı $h : (G \times G, \tau_{\text{çarpım}}) \rightarrow (G, \tau_S)$ dönüşümünün sürekli olmadığı görülmelidir. O halde aksini kabul edelim. h sürekli olsun. $x \neq e$ olacak biçimde bir $x \in G$ alalım. $e \in G \setminus \{x\}$ olup $G \setminus \{x\} = U$ denilirse $U^c = \{x\}$ sonlu olduğundan $U \in \tau_S$ dir ve $h((e, e)) = ee = e \in U$ dur. h dönüşümü sürekli olduğundan $(e, e) \in T$ ve $h(T) \subseteq U$ olacak biçimde bir $G \times G$ uzayında bir T açığı vardır. Öyleyse $(e, e) \in V \times W \subseteq T$ olacak biçimde G uzayında V ve W açıkları vardır. $V \cap W = N$ denilirse $N \in \tau_S$ ve $(e, e) \in N \times N \subseteq T$ olur. $N \in \tau_S$ ve yukarıdan G bir quasi-topolojik grup olduğundan $N^{-1} \in \tau_S$ olur. O halde Lemma 2.3.15 den $xN^{-1} \cap N \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $y \in xN^{-1} \cap N$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır. $y \in xN^{-1}$ olduğundan $y = xn^{-1}$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır. Öyleyse $x^{-1}y = n^{-1}$

olup $x^{-1} = n^{-1}y^{-1}$ dir. Böylece $x = yn$ olup $y \in N$ olduğundan $x \in yN \subseteq NN \subseteq T$ dir. Bu durumda $x \in T$ ve $x = ex \in T$ olur. O halde $x = h(e, x) \in h(T) \subseteq U$ olur. Bu da $x \notin U$ olması ile çelişir. Öyleyse kabulümüz yanlış olup h dönüşümü sürekli değildir. Dolayısıyla G bir paratopolojik grup değildir.

Örnek

G ve H sağ topolojik yarıgruplar olmak üzere her $x \in G$ için $\{x\} \times H$ kümesine $G \times H$ ın bir dikey fiberi ve her $y \in H$ için $G \times \{y\}$ kümesine $G \times H$ ın bir yatay fiberi denir. Her dikey fiber H sağ topolojik yarıgrubuna ve her yatay fiber G sağ topolojik yarıgrubuna homeomorftur. $G \times H$ üzerindeki $\tau = \{W \in G \times G : \forall (x, y) \in W \text{ için } \exists U \in N_x, \exists V \in N_y : (\{x\} \times V) \cup (U \times \{y\}) \subseteq W\}$ topolojisine Cross Topoloji denir. $G \times H$ kümesinin koordinatsal çarpım ve üzerindeki bu τ topolojisiyle bir sağ topolojik yarıgrup olduğu basitçe görülebilir.

Örnek

X bir topolojik uzay, $C(X, X) = \{f \mid f : X \rightarrow X \text{ sürekli fonksiyon}\}$ kümesi bileşke işlemi altında bir yarıgruptur. $C(X, X)$ kümesi üzerindeki noktasal yakınsaklık topolojisi ile $C_p(X, X)$ biçiminde gösterilsin. Bu durumda $C_p(X, X)$ bir yarı-topolojik yarıgruptur. Şöyleki; Teorem 2.3.12 i) den $S_p(X, X)$ bir sağ topolojik yarıgruptur. Dolayısıyla her sağ öteleme dönüşümü süreklidir. $C(X, X)$ in $S(X, X)$ in bir alt yarıgrubu olduğu aşıkardır. Dolayısıyla $S_p(X, X)$ üzerindeki sağ öteleme dönüşümün $C_p(X, X)$ üzerine kısıtlanması da sürekli olup $C_p(X, X)$ bir sağ topolojik yarıgruptur. Diğer yandan her $f \in C(X, X)$ için f dönüşümü sürekli olduğundan Teorem 2.3.12 ii) den λ_f sol öteleme dönüşümü de sürekli olup $C_p(X, X)$ bir sol topolojik yarıgruptur. Öyleyse $C_p(X, X)$ hem bir sağ topolojik yarıgrup hem de bir sol topolojik yarıgrup olduğundan $C_p(X, X)$ bir yarı-topolojik yarıgruptur.

Örnek

X bir topolojik uzay, G bir topolojik grup olsun $C(X, G) = \{f \mid f : X \rightarrow G \text{ sürekli fonksiyon}\}$ kümesi $G^{|X|}$ çarpım grubunun bir altgrubu ve üzerindeki noktasal yakınsaklık topolojisiyle, $C_p(X, G)$ bir topolojik gruptur. G nin üzerindeki işlem $\diamond$ olmak üzere $C(X, G)$ nin üzerindeki işlem koordinatsal çarpım yani, her $f, g \in C(X, G)$ ve her $x \in G$ için

$(f * g)(x) = f(x) \diamond g(x)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} * : C(X, G) \times C(X, G) &\rightarrow C(X, G) \\ (f, g) &\rightarrow f * g \end{aligned}$$

dir. $C(X, G)$ nin birim elemanı

$$\begin{aligned} I : X &\rightarrow G \\ x &\rightarrow I(x) = e \end{aligned}$$

sabit fonksiyonudur. $C(X, G)$ nin her f elemanının tersi

$$\begin{aligned} f^* : X &\rightarrow G \\ x &\rightarrow f^*(x) = (f(x))^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümüdür. O halde $C(X, G)$ nin bir grup olduğu aşıkardır. Şimdi $C_p(X, G)$ nin bir topolojik grup olduğunu görelim. Öyleyse ilk olarak $\varphi(f, g) = f * g$ biçiminde tanımlı $\varphi : C_p(X, G) \times C_p(X, G) \rightarrow C_p(X, G)$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $f, g \in C(X, G)$ olmak üzere $\varphi(f, g) = f * g \in W$ olacak biçimde $C_p(X, G)$ uzayında bir W açığı alalım. Bu durumda $f * g \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i] \subseteq W$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $x_i \in X$ ve $U_i \subseteq G$ açığı vardır. O halde $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $f * g \in [x_i, U_i]$ dir. Öyleyse $(f * g)(x_i) = f(x_i) \diamond g(x_i) \in U_i$ dir. G bir topolojik grup olduğundan $\diamond : G \times G \rightarrow G$ işlemi sürekli olup her i için $f(x_i)$ ve $g(x_i)$ nin $\diamond(V_i, T_i) = V_i \diamond T_i \subseteq U_i$ olacak biçimde V_i ve T_i açık komşulukları vardır. O halde $1 \leq i \leq n$ olacak biçimdeki her i için $f \in [x_i, V_i]$ ve $g \in [x_i, T_i]$ olup $f \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, V_i]$ ve $g \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, T_i]$ olur. $\bigcap_{i=1}^n [x_i, V_i] = H_1$ ve $g \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, T_i] = H_2$ olsun. Şimdi $\varphi(H_1, H_2) \subseteq W$ olduğunu görelim. $h_1 \in H_1$ ve $h_2 \in H_2$ olmak üzere $\varphi(h_1, h_2)(x_i) = (h_1 * h_2)(x_i) = h_1(x_i) \diamond h_2(x_i) \in V_i \diamond T_i \subseteq U_i$ olduğundan $\varphi(h_1, h_2) \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i] \subseteq W$ olur. O halde h dönüşümü sürekli dir. Şimdi de her elemanı tersine eşleyen dönüşümün sürekli olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \sigma : C_p(X, G) &\rightarrow C_p(X, G) \\ f &\rightarrow \sigma(f) = f^* : X \rightarrow G \\ x &\rightarrow f^*(x) = (f(x))^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $f \in C(X, G)$ olmak üzere $\sigma(f) = f^* \in W$ olacak biçimde $C_p(X, G)$ uzayında bir W açığı alalım. Öyleyse $f^* \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i] \subseteq W$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $x_i \in X$ ve $U_i \subseteq G$ açığı vardır. O halde her i için $f^*(x_i) \in U_i$ olup $f^*(x_i) = (f(x_i))^{-1}$ olduğundan $(f(x_i))^{-1} \in U_i$ olup $f(x) \in U_i^{-1}$ dir. U_i^{-1} , G uzayında açık ve $f \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i^{-1}]$

dir. Şimdi $\sigma(\bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i^{-1}]) \subseteq W$ olduğunu görelim. $h \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i^{-1}]$ alalım. Öyleyse her i için $(h(x_i))^{-1} \in U_i$ dir. O halde $\sigma(h)(x_i) = h^*(x_i) = (h(x_i))^{-1} \in U_i$ dir. Böylece $\sigma(h) = h^* \in \bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i] \subseteq W$ olur. Dolayısıyla $\sigma(\bigcap_{i=1}^n [x_i, U_i^{-1}]) \subseteq W$ olup σ dönüşümü sürekli dir. φ ve σ dönüşümleri sürekli olduğundan $C_p(X, G)$ bir topolojik gruptur.

Örnek

X bir topolojik uzay ve $Homeo(X) = \{f|f : X \rightarrow X \text{ homeomorfizma}\}$ kümesi bileşke işlemi altında bir gruptur ve üzerindeki noktasal yakınsaklık topolojisiyle

- i) Her X uzayı için $Homeo_p(X)$ bir yarı-topolojik gruptur.
- ii) $Homeo_p(X)$ in topolojik grup olması gerekmez
- iii) Eğer X ayrık uzay ise $Homeo_p(X)$ bir topolojik gruptur.

Şöyleki;

i) Teorem 2.3.12 den $Homeo_p(X)$ in bir yarı-topolojik grup olduğu aşıkardır.

ii) $X = \mathbb{R}^2$ için $Homeo_p(X)$ bir topolojik grup değildir.

iii) X bir ayrık topolojik uzay olsun. $Homeo_p(X)$ in bir topolojik grup olduğunu görmek için $\varphi((f, g)) = f \circ g$ biçiminde tanımlı $\varphi : Homeo_p(X) \times Homeo_p(X) \rightarrow Homeo_p(X)$ dönüşümünün ve $\sigma(g) = g^{-1}$ biçiminde tanımlı $\sigma : Homeo_p(X) \rightarrow Homeo_p(X)$ dönüşümünün sürekli olduğu görülmelidir. Her grup bir yarıgrup olduğundan Sonuç 2.3.14 iii) $\Rightarrow$ i) gerektirmesinden φ dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Öyleyse şimdi σ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $g \in Homeo_p(X), x \in X$ ve $V \subseteq X$ açık olmak üzere $\sigma(g) = g^{-1} \in [x, V]$ olsun. X uzayı ayrık olduğundan $\{x\} \subseteq X$ açık olup $[g^{-1}(x), \{x\}]$ kümesi $Homeo_p(X)$ uzayında g nin bir açık komşuluğudur. $\sigma([g^{-1}(x), \{x\}]) \subseteq [x, V]$ dir. Böylece σ sürekli dir. Dolayısıyla $Homeo_p(X)$ bir topolojik gruptur.

2.3.16. Tanım

(M, ρ) bir metrik uzay ve τ bu metrik tarafından üretilen topoloji olsun. Her $x, y \in M$ için $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y))$ olacak biçimdeki uzaklığı koruyan $f : (M, \rho) \rightarrow (M, \rho)$ fonksiyonuna M nin bir izometrisi denir. İki izometrinin bileşkesi de bir izometridir. M nin izometrilerinin kümesi bileşke işlemiyle bir gruptur. M nin izometrilerinin grubunu $Is(M)$ ile gösterelim. $Is(M)$ üzerine noktasal yakınsaklık topolojisi konulduğunda bu uzay $Is_p(M)$ ile gösterilir.

$f \in Is(M), x \in M, \epsilon > 0$ olmak üzere $B(x, f, \epsilon) = \{g \in Is(M) \mid \rho(g(x), f(x)) < \epsilon\}$ olsun. $\mathcal{S} = \{B(x, f, \epsilon) : x \in M, f \in Is(M), \epsilon > 0\}$ ailesi $Is(M)$ üzerindeki noktasal yakınsaklık topolojisinin bir alt tabanıdır.

Şimdi bu tanım doğrultusunda bir örnek verilecektir.

Örnek

(X, ρ) bir metrik uzay ve $Is(X) = \{g \mid g : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho) \text{ izometri} \}$ olsun. $Is_p(X)$ bir topolojik gruptur. Şöyleki;

İlk olarak $\phi(g, f) = g \circ f$ biçiminde tanımlı $\phi : Is_p(X) \times Is_p(X) \rightarrow Is_p(X)$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $\phi(g, f) = g \circ f \in U$ olacak biçimde $Is_p(X)$ uzayında bir U açığı alalım. $x \in X, \epsilon > 0$ olmak üzere $U = B(x, g \circ f, \epsilon)$ biçiminde olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. $W = B(f(x), g, \epsilon/2)$ ve $V = B(x, f, \epsilon/2)$ alınrsa $g \in W$ ve $f \in V$ olur. Şimdi $\phi(W, V) \subseteq U$ olduğunu görelim. Bunun için $g_1 \in W$ ve $f_1 \in V$ alınrsa $\rho(g_1(f(x)), g(f(x))) < \epsilon/2$ ve $\rho(f_1(x), f(x)) < \epsilon/2$ olur. O halde

$\rho(g_1(f(x)), g(f(x))) < \rho(g_1(f_1(x)), g_1(f(x))) + \rho(g_1(f(x)), g(f(x)))$ elde edilir. g_1 dönüşümü bir izometri olduğundan $\rho(g_1(f_1(x)), g_1(f(x))) = \rho(f_1(x), f(x))$ olup $\rho(g_1(f_1(x)), g_1(f(x))) + \rho(g_1(f(x)), g(f(x))) < \rho(f_1(x), f(x)) + \rho(g_1(f(x)), g(f(x)))$ dir.

Böylece $\rho(f_1(x), f(x)) + \rho(g_1(f(x)), g(f(x))) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ elde edilir. O halde $\rho(g_1(f(x)), g(f(x))) < \epsilon$ olup $g_1 \circ f_1 \in B(x, gf, \epsilon) \subseteq U$ olur. Dolayısıyla $\phi(W, V) \subseteq U$ olup ϕ dönüşümü sürekli dir.

Şimdi $\psi(f) = f^{-1}$ biçiminde tanımlı $\psi : Is_p(X) \rightarrow Is_p(X)$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. Bunun için alt tabanın elemanlarının ψ altındaki ters resminin açık olduğunu görmek yeterlidir. $\psi^{-1}(B(x, f, \epsilon)) = B(f(x), f^{-1}, \epsilon)$ dur. Şöyleki; $g \in \psi^{-1}(B(x, f, \epsilon))$ alalım. $\psi(g) = g^{-1} \in B(x, f, \epsilon)$ dir. O halde $\rho(g^{-1}(x), f(x)) < \epsilon$ ve g izometri olduğundan $\rho(g(g^{-1}(x)), g(f(x))) = \rho(x, g(f(x))) < \epsilon$ olup $\rho(f^{-1}(f(x)), g(f(x))) < \epsilon$ dir. Böylece $g \in B(f(x), f^{-1}, \epsilon)$ olur. Diğer yandan $h \in B(f(x), f^{-1}, \epsilon)$ alınrsa benzer şekilde $h \in \psi^{-1}(B(x, f, \epsilon))$ dir. Öyleyse ψ dönüşümü sürekli dir. O halde ϕ ve ψ sürekli olduğundan $Is_p(X)$ bir topolojik gruptur.

2.3.17 Teorem

$\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ topolojik grupların bir ailesi olmak üzere $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ kümesi çarpım topolojisiyle bir topolojik gruptur.

İspat

Her $\alpha \in I$ için $x_\alpha \in G_\alpha$ ve $y_\alpha \in G_\alpha$ olmak üzere $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha)$ ve $z = xy^{-1}$ olsun. Her $\alpha \in I$ için $x_\alpha y_\alpha^{-1} = z_\alpha$ olmak üzere $(z_\alpha) = z$ dir. G de $z \in O$ olacak biçimde bir O açığı alalım. G üzerinde çarpım topolojisi olduğundan $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ için $W_\alpha = W_{\alpha_k}$ açık ve $\alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ için $W_\alpha = G_\alpha$ olmak üzere $W = \prod_{\alpha \in I} W_\alpha \subseteq O$ olacak biçimde W_α açıkları vardır. Her $\alpha_k \in I$ için G_{α_k} bir topolojik grup olduğundan $U_{\alpha_k} V_{\alpha_k}^{-1} \subseteq W_k$ olacak biçimde $x_{\alpha_k}, y_{\alpha_k}$ nin sırasıyla $U_{\alpha_k}, V_{\alpha_k}$ açık komşulukları vardır. $\alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ için $U_\alpha = V_\alpha = G_\alpha$ olmak üzere $U = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ ve $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ x ve y nin açık komşuluklarıdır. O halde $UV^{-1} \subseteq W \subseteq O$ olup G bir topolojik gruptur.

□





3. TOPOLOJİK GRUPLARDA BİRİMİN KOMŞULUKLARI ve GRUP ÜZERİNDE TOPOLOJİ İNŞAASI

3.1. Topolojik Gruplarda Birimin Komşulukları ve Grup Üzerinde Topoloji İnşası

Bu bölümde sağ(sol) topolojik gruplarda sağ(sol) öteleme dönüşümlerinin bir homeomorfizma olduğu ve her sağ(sol)topolojik grubun homojen bir uzay olduğu görülecektir [7]. İlaveten topolojik grupların açık altgruplarının aynı zamanda kapalı altgrup olduğu verilecektir. Bir monoid üzerine bazı koşullar altında ayrık topoloji dışında bir topoloji kondurularak topolojik monoid inşaa edilecektir. Daha sonra topolojik gruplarda birimin açık komşuluklarının sağladığı bazı özellikler incelenecektir.

3.1.1. Önerme

G bir sağ(sol) topolojik grup ve $a \in G$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- i) G üzerindeki her r_a sağ öteleme dönüşümü(λ_a sol öteleme dönüşümü) bir homeomorfizmadır.
- ii) e, G nin birim elemanı olmak üzere $\mathcal{B}_e$ ailesi e noktasının bir komşuluklar tabanı ise $\mathcal{B}_a = \{Ua : U \in \mathcal{B}_e\}$ ailesi a noktasının bir komşuluklar tabanıdır.

İspat

i) $a \in G$ olmak üzere her $x \in G$ için $r_a(x) = xa$ biçiminde tanımlı $r_a : G \rightarrow G$ sağ öteleme dönüşümünün bir homeomorfizma olduğunu görelim. G bir sağ topolojik grup olduğundan r_a sağ öteleme dönüşümü süreklidir. $a \in G$ ve G bir grup olduğundan $a^{-1} \in G$ dir. $r_a^{-1} = r_{a^{-1}}$ olduğundan r_a^{-1} ters dönüşümü de süreklidir. r_a sağ öteleme dönüşümünün birebir ve örten olduğu aşıkardır. O halde r_a sağ öteleme dönüşümü bir homeomorfizmadır.

ii) $a \in V$ olacak biçimde bir V açığını alalım. $a \in V$ olduğundan $e \in Va^{-1}$ olur. Her sağ öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan açıkların sağ öteleme dönüşümü altındaki görüntüleri de açıktır. Öyleyse her $U \in \mathcal{B}_e$ için Ua kümesi a nın bir komşuluğudur ve $r_{a^{-1}}(V) = Va^{-1}$ olup Va^{-1} açıktır. $\mathcal{B}_e$ ailesi e nin bir komşuluklar tabanı olduğundan $e \in U \subseteq Va^{-1}$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $a \in Ua \subseteq V$ olur. O halde $\mathcal{B}_a$ ailesi a noktasının bir komşuluklar tabanı olur. G nin bir sol topolojik grup olması durumunda sol öteleme dönüşümlerinin homeomorfizma olduğu ve (ii) benzer biçimde görülebilir. $\square$

O halde aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

3.1.2. Sonuç

Her yarı-topolojik grup için sağ ve sol öteleme dönüşümleri birer homeomorfizmadır.

3.1.3. Sonuç

G bir sağ(sol)topolojik grup olmak üzere, H kümesi G nin bir altgrubu olsun. Eğer H altgrubu G nin boştan farklı bir açık altkümesini içerirse H altgrubu G uzayında açıktır.

İspat

$U_0 \neq \emptyset$ kümesi $U_0 \subseteq H$ olacak biçimde G uzayında bir açık olsun. G bir sağ topolojik grup olduğundan Önerme 3.1.1 den her sağ öteleme dönüşümü bir homeomorfizmadır. O halde her $x \in H$ için $r_x(U_0) = U_0x$ de G uzayında açıktır. $U_0 \neq \emptyset$ ve $U_0 \subseteq H$ olduğundan $H = \bigcup_{x \in H} U_0x$ olduğu açıktır. Öyleyse her $x \in H$ için U_0x açık olduğundan H altgrubu G uzayında açıktır. G nin bir sol topolojik grup olması durumunda ispat benzerdir. $\square$

3.1.4. Sonuç

G ve H sol(sağ) topolojik gruplar ve $f : G \rightarrow H$ bir homomorfizma olmak üzere, eğer f dönüşümü G nin birimi olan e_G noktasında sürekli ise her yerde süreklidir.

İspat

$x \neq e_G$ olacak biçimde bir $x \in G$ alalım. $y = f(x) \in O$ ve $O \subseteq H$ açık olsun. H bir sol topolojik grup olduğundan $\lambda_y : H \rightarrow H$ sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizmadır. H nin birimi e_H olsun. $\lambda_y(e_H) \in O$ ve λ_y sürekli olduğundan H uzayında $e_H \in V$ olacak biçimde öyle bir V açığı vardır ki $\lambda_y(V) \subseteq O$ dur. Bu durumda $yV \subseteq O$ elde edilir. f bir homomorfizma olduğundan $f(e_G) = e_H$ dir. $e_H \in V$ olduğundan $f(e_G) \in V$ olur. f dönüşümü e_G noktasında sürekli olduğundan G uzayında $e_G \in U$ olacak biçimde öyle bir U açığı vardır ki $f(U) \subseteq V$ olur. Öte yandan G bir sol topolojik grup olduğundan $\lambda_x : G \rightarrow G$ sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup $\lambda_x(U) = xU$ kümesi G uzayında açıktır. $e_G \in U$ olduğundan $x \in xU$ olup $xU = W$ denilirse W x in bir açık komşuluğudur ve f bir homomorfizma olduğundan $f(W) = f(xU) = f(x)f(U) = yf(U)$ olup $yf(U) \subseteq yV \subseteq O$ olur. Böylece $f(W) \subseteq O$ olup f dönüşümü süreklidir.

Benzer şekilde sağ öteleme dönüşümü için de görülebilir. $\square$

Şimdi bir sonraki teoremden kullanılmak üzere aşağıdaki lemma verilecektir.

3.1.5. Lemma

X bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{O} = \{O_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsü olsun. Eğer her $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için $O_{\lambda_1} \cap O_{\lambda_2} = \emptyset$ ise her $\lambda \in I$ için O_λ kapalıdır.

İspat

$\mu \in I$ olsun. $X = \bigcup_{\lambda \in I} O_\lambda$ ve $\lambda \neq \mu$ biçimindeki her $\lambda \in I$ için $O_\lambda \cap O_\mu = \emptyset$ olduğundan $O_\mu = (\bigcup_{\lambda \in I \setminus \{\mu\}} O_\lambda)^c$ olup, O_μ kapalıdır. $\square$

3.1.6 Teorem

Bir sağ(sol) topolojik grubun her açık altgrubu aynı zamanda kapalıdır.

İspat

G bir sağ topolojik grup ve H kümesi G nin bir açık altgrubu olsun. Önerme 3.1.1 den her $a \in G$ için $r_a : G \rightarrow G$ sağ öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup $H \subseteq G$ açık olduğundan $r_a(H) = Ha$ açıktır. Aynı zamanda H kümesi G nin bir altgrubu olduğundan G nin ayrık kosetlerinin $\mathcal{A} = \{Ha : a \in G\}$ ailesi G uzayının bir açık örtüsüdür. Lemma 3.1.5 den her $a \in G$ için Ha kapalı olup $H = He$ olduğundan H kapalıdır. $\square$

Şimdi sıklıkla kullanılacak olan bir tanım verilecektir.

3.1.7. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için $h_{x,y}(x) = y$ olacak biçimde bir $h_{x,y} : X \rightarrow X$ homeomorfizması varsa X uzayına homojen uzay denir.

3.1.8. Sonuç

Her sağ(sol) topolojik grup bir homojen uzaydır. Dolayısıyla her yarı-topolojik grup bir homojen uzaydır.

İspat

G bir sağ topolojik grup olsun. G bir grup olduğundan $x, y \in G$ için $x^{-1}y \in G$ dir. $z = x^{-1}y$ diyelim. Her sağ öteleme dönüşümü Önerme 3.1.1 den bir homeomorfizmadır. $r_z(x) = xz = xx^{-1}y = y$ olduğundan aradığımız homeomorfizma $h = r_{x^{-1}y}$ dir. O halde sağ topolojik gruplar homojen uzaydır. Benzer biçimde sol topolojik grupların da homojen uzay olduğu görülebilir. Dolayısıyla yarı-topolojik gruplar da bir homojen uzaydır. $\square$

Şimdi topolojik yarıgrupların birime sahip ve Abelyan olsa bile homojen bir uzay olmamasıyla ilgili bir örnek verilecektir.

Örnek

$I = [0, 1]$ kapalı aralık ve her $x, y \in I$ için $xy = \max\{x, y\}$ olsun. I kapalı birim aralığı $\mathbb{R}$ den indirgenen alışılmış topoloji ve çarpım işlemiyle bir Abelyan topolojik yarıgruptur. Fakat I homojen bir uzay değildir. Şöyleki; kabul edelimki $h(0) = 1/2$ olacak biçimde bir $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ homeomorfizması var olsun. $h|_{[0,1] \setminus \{0\}} : (0, 1] \rightarrow [0, 1] \setminus \{1/2\}$ olup $h|_{(0,1]} : (0, 1] \rightarrow [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ kısıtlanmış dönüşümü de bir homeomorfizmadır. $(0, 1]$ aralığı ayrık açıkların birleşimi olarak yazılamadığından bağlantılı bir uzaydır. Fakat $[0, 1] \setminus \{1/2\} = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ olup $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ kümesi ayrık açıkların birleşimi olarak yazılabildiğinden $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ kümesi bağlantısızdır. Bu durum h ın homeomorfizma olmasıyla çelişir. O halde I homojen bir uzay değildir.

Öyleyse bir grubu sağ topolojik grup yapmak için Sonuç 3.1.8 den homojen uzaylar kullanılabilir. Çünkü homojen uzayların ana özelliklerinden biri onların her noktada aynı davranışı göstermesidir. Dolayısıyla bir sağ topolojik grubun birim elemanının davranışları bilinirse bu topolojinin her noktadaki davranışı bilinir. O halde birim elemanın komşuluklar ailesi yardımıyla öteleme dönüşümleri kullanılarak grup üzerinde bir topoloji üretilebilir. İlerleyen kısımda bir prefiltre yardımıyla bir Abelyan grubun bir yarı-topolojik gruba ve quasi-topolojik gruba nasıl dönüştürülebileceği görülecektir. Bunun için şimdi ilk olarak prefiltre tanımı verilecektir

3.1.9. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, X in boştan farklı altkümelerinin bir ailesi $\mathcal{P}$ olsun. Eğer $\mathcal{P}$ ailesi

- i) $X \in \mathcal{P}$,
- ii) $\mathcal{P}$ ailesinin her sonlu $\mathcal{A}$ altailesi için $B \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{P}$

vardır,

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{P}$ ailesine X üzerinde bir prefiltre denir.

3.1.10. Önerme

S bir monoid ve e elemanı S monoidinin birim elemanı olmak üzere; eğer $\mathcal{F}_e$ ailesi S üzerinde $e \in \bigcap \mathcal{F}_e$ olacak biçimde bir prefiltre ise her $a \in S$ için $\mathcal{F}_a = \{Pa : P \in \mathcal{F}_e\}$ ailesi de $a \in \bigcap \mathcal{F}_a$ olacak biçimde Sa üzerinde bir prefiltredir.

İspat

$a \in S$ olsun. İlk olarak $\mathcal{F}_a$ ailesinin Sa üzerinde bir prefiltre olduğunu görelim. $\mathcal{F}_e$ S üzerinde bir prefiltre olduğundan $S \in \mathcal{F}_e$ dir. $\mathcal{F}_a$ ailesinin tanımından, $Sa \in \mathcal{F}_a$ dır. Şimdi $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}_a$ olsun. $\mathcal{F}_a$ ailesinin tanımından $F_1 = P_1a, F_2 = P_2a, \dots, F_n = P_na$ olacak biçimde $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{F}_e$ vardır. $\mathcal{F}_e$ bir prefiltre olduğundan $P_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^n P_i$ olacak biçimde bir $P_0 \in \mathcal{F}_e$ vardır. O halde $P_0a \subseteq \bigcap_{i=1}^n P_ia = \bigcap_{i=1}^n F_i$ olup $P_0a = F_0$ denilirse $F_0 \in \mathcal{F}_a$ ve $F_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^n F_i$ dir. Dolayısıyla Tanım 3.1.9 koşulları sağlanır. Böylece $\mathcal{F}_a$ ailesi Sa üzerinde bir prefiltre olur. Şimdi de $a \in \bigcap \mathcal{F}_a$ yani $a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_a} F$ olduğunu görelim. $e \in \bigcap \mathcal{F}_e$ olduğundan her $P \in \mathcal{F}_e$ için $e \in P$ olup, $ea = a \in Pa$ dır. O halde $a \in \bigcap \mathcal{F}_a$ dır. $\square$

Şimdi Önerme 3.1.10 dan hareketle bir monoid üzerine prefiltre yardımıyla bir topoloji kondurularak bu monoidin bir sağ topolojik monoid olduğu görülecektir

3.1.11. Sonuç

S bir monoid, e elemanı S nin birim elemanı olmak üzere $\mathcal{F}_e$ ailesi S üzerinde $e \in \bigcap \mathcal{F}_e$ olacak biçimde bir prefiltre ve $\mathcal{F}_a = \{Pa : P \in \mathcal{F}_e\}$ olsun.

$\tau = \{U \subseteq S : \forall a \in U \text{ için } \exists F \in \mathcal{F}_a : F \subseteq U\}$ ailesi S üzerinde bir topoloji olur ve S bu topoloji ile bir sağ topolojik monoiddir.

İspat

İlk olarak $\tau = \{U \subseteq S : \forall a \in U \text{ için } \exists F \in \mathcal{F}_a : F \subseteq U\}$ ailesinin S üzerinde bir topoloji olduğunu görelim.

i) $S, \emptyset \in \tau$ olduğunu görelim. $\mathcal{F}_e$ bir prefiltre olduğundan $S \in \mathcal{F}_e$ dir. Her $a \in S$ için $Sa \in \mathcal{F}_a$ olup $Sa \subseteq S$ dir. O halde τ ailesinin tanımından $S \in \tau$ dur. $\emptyset \in \tau$ olduğu

açıktır.

ii) $U_1, U_2 \in \tau$ için $U_1 \cap U_2 \in \tau$ olduğunu görelim. $a \in U_1 \cap U_2$ alalım. $a \in U_1$ ve $U_1 \in \tau$ olduğundan $F_1 \subseteq U_1$ olacak biçimde bir $F_1 \in \mathcal{F}_a$ ve $a \in U_2$ ve $U_2 \in \tau$ olduğundan $F_2 \subseteq U_2$ olacak biçimde bir $F_2 \in \mathcal{F}_a$ vardır. $\mathcal{F}_a$ bir prefiltre olduğundan $F \subseteq F_1 \cap F_2$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_a$ vardır. Öyleyse $F \subseteq F_1 \cap F_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ olup $F \subseteq U_1 \cap U_2$ dir. O halde τ ailesinin tanımından $U_1 \cap U_2 \in \tau$ dur.

iii) Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ olmak üzere $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ olduğunu görelim. $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$ alalım. Bu durumda $a \in U_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. $U_{i_0} \in \tau$ olduğundan $F \subseteq U_{i_0}$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_a$ vardır. O halde $F \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ olup τ ailesinin tanımından $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ olur.

O halde τ ailesi S monoidi üzerinde bir topolojidir.

Şimdi S monoidinin, üzerindeki bu τ topolojisiyle, bir sağ topolojik monoid olduğunu yani her $a \in S$ için $r_a : S \rightarrow S$ sağ öteleme dönüşümünün sürekli olduğu görelim. $V \in \tau$ olmak üzere $V \neq \emptyset$ olsun. $b \in r_a^{-1}(V)$ alalım. Öyleyse $r_a(b) \in V$ olup $ba \in V$ dir. $V \in \tau$ olduğundan $F \subseteq V$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_{ba}$ ve $F = Pba$ olacak biçimde bir $P \in \mathcal{F}_e$ vardır. $F \subseteq V$ olduğundan $Pba \subseteq V$ olur. Bu durumda $r_a(Pb) \subseteq V$ olup $Pb \subseteq r_a^{-1}(V)$ elde edilir. $Pb \in \mathcal{F}_b$ olduğundan τ ailesinin tanımından $r_a^{-1}(V) \in \tau$ olur. O halde r_a sağ öteleme dönüşümü süreklidir. Böylece S monoidi, üzerindeki τ topolojisiyle, bir sağ topolojik monoiddir. $\square$

Şimdi $\mathcal{F}_e$ ailesinin üzerinde tanımlanacak bir koşulla $\mathcal{F}_e$ ailesinin elemanlarının, üzerinde tanımlanan topolojiye ait olduğu, yani açık küme olduğu görülecektir.

3.1.12. Önerme

S bir monoid ve $\mathcal{F}_e$ ailesi S üzerinde $(t):$ " Her $U \in \mathcal{F}_e$ ve $x \in U$ için $Vx \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{F}_e$ vardır", koşulunu sağlayan ve $e \in \bigcap \mathcal{F}_e$ olacak biçimde bir prefiltre olmak üzere, S üzerinde Sonuç 3.1.11 de tanımlanan τ topolojisi var olsun.

Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i) Her $U \in \mathcal{F}_e$ ve her $a \in S$ için $Ua \in \tau$ dur.
- ii) $a \in S$ için $\mathcal{F}_a = \{Ua : U \in \mathcal{F}_e\}$ ailesi a noktası için bir komşuluklar tabanıdır.
- iii) S üzerindeki her sağ öteleme dönüşümü bir açık dönüşümdür.

İspat

i) $U \in \mathcal{F}_e$ ve $a \in S$ olmak üzere $x \in Ua$ alalım. Öyleyse $x = ua$ olacak biçimde bir $u \in U$ vardır. (t) şartından $Vu \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{F}_e$ vardır. Bu durumda $Vua \subseteq Ua$ olup $x = ua$ olduğundan $Vx \subseteq Ua$ olur. $Vx \in \mathcal{F}_x$ olduğundan τ ailesinin tanımından $Ua \in \tau$ dur.

ii) $a \in S$ olmak üzere $a \in T$ ve $T \in \tau$ olsun. $T \in \tau$ olduğundan τ ailesinin tanımından $F \subseteq T$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_a$ ve $F = Pa$ olacak biçimde bir $P \in \mathcal{F}_e$ vardır. i) den $\mathcal{F}_a \subseteq \tau$ dur. Dolayısıyla $Pa \subseteq T$ olup $\mathcal{F}_a$ ailesi a noktasının bir komşuluklar tabanıdır.

iii) Her $a \in S$ için $r_a : S \rightarrow S$ sağ öteleme dönüşümünün bir açık dönüşüm olduğunu görelim. $a \in S$ olsun ve her $T \in \tau$ için $r_a(T) = Ta \in \tau$ olduğunu görelim. $T \in \tau$ ve $x \in Ta$ olsun. Öyleyse $x = ta$ olacak biçimde bir $t \in T$ vardır. $t \in T$ ve T açık olduğundan $P \subseteq T$ olacak biçimde bir $P \in \mathcal{F}_t$ ve $P = Ft$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_e$ vardır. Bu durumda $Fx \in \mathcal{F}_x$ olup $Pa = Fta = Fx$ dir. Diğer yandan $P \subseteq T$ olduğundan $Pa \subseteq Ta$ olur. Dolayısıyla $Fx \subseteq Ta$ dır. O halde τ ailesinin tanımından $Ta \in \tau$ olup r_a açık bir dönüşümdür. $\square$

3.1.13. Lemma

S monoidi, herhangi bir $\mathcal{O}$ topolojisiyle bir sağ topolojik monoid ve $\mathcal{F}_e$ ailesi e noktasının komşuluklar tabanı ise Önerme 3.1.12 de tanımlanan (t) koşulu sağlanır.

İspat

$S \in \mathcal{F}_e$ kabul etmek genelliği bozmaz. Bu nedenle $\mathcal{F}_e$ bir prefiltredir. $U \in \mathcal{F}_e$ ve $x \in U$ olsun. $x = ex = r_x(e)$ olduğundan $r_x(e) \in U$ dur. İlaveten S bir sağ topolojik monoid olduğundan r_x sağ öteleme dönüşümü süreklidir. Öyleyse $r_x(W) \subseteq U$ olacak biçimde S uzayında e nin açık bir W komşuluğu vardır. $\mathcal{F}_e$ ailesi e noktasının komşuluklar tabanı olduğundan $V \subseteq W$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{F}_e$ vardır. $V \subseteq W$ olduğundan $Vx \subseteq Wx$ olup $r_x(V) \subseteq r_x(W) \subseteq U$ olur. Dolayısıyla $Vx \subseteq U$ dur. $\square$

3.1.14. Sonuç

S herhangi bir $\mathcal{O}$ topolojisiyle bir sağ topolojik monoid ve $\mathcal{F}_e$ ailesi e nin bir komşuluklar tabanı ise S üzerindeki, Sonuç 3.1.11 de tanımlanan, τ topolojisi $\mathcal{O}$ dan daha incedir.

İspat

$\mathcal{O}$ nun boş olmayan herhangi bir O elemanını alalım. $x \in O$ olsun. S bir sağ topolojik monoid ve $x = ex = r_x(e) \in O$ olduğundan e nin $r_x(U) \subseteq O$ olacak biçimde bir U açık komşuluğu vardır. İlâveten $\mathcal{F}_e$ ailesi e noktasının bir komşuluklar tabanı olduğundan $F \subseteq U$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_e$ vardır. Dolayısıyla $r_x(F) = r_x(U) \subseteq O$ olup $Fx \subseteq O$ dur. Bu durumda τ ailesinin tanımından $O \in \tau$ olur. O halde $\mathcal{O} \subseteq \tau$ olup τ ailesi $\mathcal{O}$ ailesinden daha incedir. $\square$

Şimdi $\mathcal{F}_e$ üzerinde bazı kısıtlamalarla bir Abelyan gruptan quasi-topolojik grup ve paratopolojik grup elde edilecektir.

3.1.15 Teorem

G bir Abelyan grup ve G nin birimi e olmak üzere $\mathcal{F}_e$ ailesi $e \in \bigcap \mathcal{F}_e$ olacak biçimde G üzerinde bir prefiltre ve $\mathcal{F}_e$ ailesinin her elemanı simetrik olsun. Bu durumda G Abelyan grubu $\mathcal{F}_e$ prefiltresi tarafından üretilen Sonuç 3.1.11 deki τ topolojiyle bir quasi-topolojik gruptur.

İspat

Her grup bir monoid olduğundan Sonuç 3.1.11 den her $a \in G$ için $r_a : G \rightarrow G$ sağ öteleme dönüşümü süreklidir. Dolayısıyla G bir sağ topolojik gruptur. Diğer yandan G bir Abelyan grup olduğundan her sol öteleme dönüşümü bir sağ öteleme dönüşümü olup her λ_a sol öteleme dönüşümü de süreklidir. Dolayısıyla G bir sol topolojik gruptur. Böylece G bir yarı-topolojik yarıgruptur. Şimdi G nin her elemanını tersine eşleyen $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $U \subseteq G$ açık olmak üzere $f(x) = x^{-1} \in U$ olsun. $U \in \tau$ olduğundan $D \subseteq U$ olacak biçimde bir $D \in \mathcal{F}_{x^{-1}}$ ve $D = Px^{-1}$ olacak biçimde bir $P \in \mathcal{F}_e$ vardır. $\mathcal{F}_e$ ailesinin her elemanı simetrik olduğundan $P = P^{-1}$ dir. Dolayısıyla $D = Px^{-1} = P^{-1}x^{-1}$ olup G bir Abelyan grup olduğundan $P^{-1}x^{-1} = x^{-1}P^{-1} = (Px)^{-1}$ dir. O halde $D = (Px)^{-1}$ olup $D^{-1} = Px$ dir. $D \subseteq U$ olduğundan $D^{-1} \subseteq U^{-1}$ elde edilir. $D^{-1} = Px$, $Px \in \mathcal{F}_x$, $D^{-1} \subseteq U^{-1}$ olduğundan $U^{-1} \in \tau$ dur. Dolayısıyla f dönüşümü süreklidir. O halde G bir quasi-topolojik gruptur. $\square$

3.1.16 Teorem

G bir Abelyan grup ve G nin birimi e olmak üzere $\mathcal{F}_e$ ailesi $e \in \bigcap \mathcal{F}_e$ olacak biçimde G üzerinde bir prefiltre olsun. İlâveten hem Önerme 3.1.12 deki (t) koşulu sağlansın

hem de her $U \in \mathcal{F}_e$ için $V^2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{F}_e$ var olsun. Bu durumda G Abelyan grubu $\mathcal{F}_e$ prefiltresi tarafından üretilen Sonuç 3.1.11 deki τ topolojiyle bir paratopolojik gruptur.

İspat

G Abelyan grubunun üzerindeki τ topolojisiyle bir paratopolojik grup olduğunu görmek için $h((x, y)) = xy$ biçiminde tanımlı $h : G \times G \rightarrow G$ dönüşümünün sürekli olduğu görülmelidir. G nin herhangi iki x, y elemanlarını alalım. $xy = z$ olsun. G uzayında $h((x, y)) = z \in O$ olacak biçimde bir O açığı alalım. $z \in O$ ve O açık olduğundan $F \subseteq O$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_z$ ve $F = Uz$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{F}_e$ vardır. $U \in \mathcal{F}_e$ olduğundan hipotezden $V^2 = VV \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{F}_e$ vardır. Teorem 3.1.15 den her $a \in G$ için G Abelyan grubu üzerindeki her r_a sağ öteleme dönüşümü sürekli ve (t) şartı sağlandığından Önerme 3.1.12 den bu dönüşüm açık bir dönüşümdür. Dolayısıyla $x, y \in G$ ve V açığı için $r_x(V) = Vx$ ve $r_y(V) = Vy$ olup Vx, Vy kümeleri G uzayında $x \in Vx$ ve $y \in Vy$ olacak biçimde birer açıktır. O halde $h((Vx, Vy)) = VxVy$ olup G Abelyan olduğundan $VxVy = VVxy$ dir. $V^2 = VV \subseteq U$ olduğundan $VxVx = VVxy = VVz \subseteq Uz \subseteq O$ olur. $Vx \times Vy = W$ denilirse $h(W) \subseteq O$ olup h dönüşümü sürekli. Böylece G bir paratopolojik gruptur. $\square$

Şimdi bir topolojik grubun birim elemanının açık komşuluklar tabanının sahip olduğu bazı özelliklerle ilgili, sıklıkla kullanılacak, bir teorem verilecek.

3.1.17 Teorem

G bir topolojik grup ve G nin birimi e olsun. $\mathcal{U}$ e nin açık komşuluklar tabanı ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) Her $U \in \mathcal{U}$ için $V^2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.
- ii) Her $U \in \mathcal{U}$ için $V^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.
- iii) Her $U \in \mathcal{U}$ ve her $x \in U$ için $Vx \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.
- iv) Her $U \in \mathcal{U}$ ve her $x \in G$ için $xVx^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.
- v) Her $U, V \in \mathcal{U}$ için $W \subseteq U \cap V$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır.
- vi) $\{e\} = \bigcap \mathcal{U}$

İspat

G bir topolojik grup olduğundan $h((x, y)) = xy$ biçiminde tanımlı $h : G \times G \rightarrow G$ ve $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümleri sürekli.

i) $U \in \mathcal{U}$ olsun. $e = ee \in U$ olduğundan $e = h((e, e)) \in U$ olur. h dönüşümü sürekli olduğundan $G \times G$ uzayında $h(W) \subseteq U$ olacak biçimde (e, e) noktasının bir W açık komşuluğu vardır. Bu durumda $T \times H \subseteq W$ olacak biçimde bir $T \in \mathcal{U}$ ve $H \in \mathcal{U}$ vardır. Dolayısıyla $h(T \times H) = TH \subseteq h(W)$ elde edilir. $T \cap H = V$ denilirse $V \in \mathcal{U}$ ve $VV \subseteq TH \subseteq h(W) \subseteq U$ olup $V^2 \subseteq U$ elde edilir.

ii) $U \in \mathcal{U}$ olsun. $e = e^{-1} = f(e) \in U$ ve f sürekli olduğundan $f(V) \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ açığı vardır. O halde $f(V) = V^{-1} \subseteq U$ elde edilir.

iii) G bir topolojik grup olduğundan her $x \in G$ için r_x sağ öteleme dönüşümü süreklidir. $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in U$ olsun. $r_x(e) = ex = x$ ve $x \in U$ olduğundan $r_x(e) \in U$ olur. r_x sağ öteleme dönüşümü sürekli olduğundan $r_x(V) \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. O halde $r_x(V) = Vx \subseteq U$ elde edilir.

iv) G bir topolojik grup olduğundan her $a \in G$ için λ_a sol ve $r_{a^{-1}}$ sağ öteleme dönüşümleri süreklidir. $g = r_{a^{-1}} \circ \lambda_a$ olsun. g bileşke dönüşümü de sürekli olur. $U \in \mathcal{U}$ olsun. $g(e) = (r_{a^{-1}} \circ \lambda_a)(e) = r_{a^{-1}}(ea) = a^{-1}ea = e$ olduğundan $g(e) \in U$ dur. g sürekli olduğundan $g(V) \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ açığı vardır. Öyleyse $g(V) = (r_{a^{-1}} \circ \lambda_a)(V) = r_{a^{-1}}(aV) = aVa^{-1}$ olur. O halde $aVa^{-1} \subseteq U$ elde edilir.

v) $U, V \in \mathcal{U}$ olsun. $e \in U \cap V$ ve $U \cap V$ açıktır. $\mathcal{U}$ ailesi e nin bir açık komşuluklar tabanı olduğundan $e \in W \subseteq U \cap V$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır.

vi) $\mathcal{U}$ e nin açık komşuluklar tabanı ve G bir T_1 -uzay olduğundan $\{e\} = \bigcap \mathcal{U}$ dur. $\square$

3.1.18 Teorem

G bir grup, $\mathcal{U}$ ailesi G nin altkümelerinin bir ailesi olmak üzere Teorem 3.1.17 deki altı koşulu sağlasın ve $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ olsun. Öyleyse aşağıdakiler sağlanır.

i) $\tau = \{W \subseteq G \mid \forall x \in W \text{ için } \exists U \in \mathcal{U} : Ux \subseteq W\}$ ailesi G üzerinde bir topolojidir.

ii) Her $x \in G$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $Ux \in \tau$

iii) $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ ailesi τ ailesi için bir tabandır.

iv) Her $b \in G$ ve her $V \in \mathcal{U}$ için $bV \in \tau$ dur.

v) Her $x \in G$ ve her $T \in \tau$ için $xT \in \tau$ dur.

vi) G , üzerindeki τ topolojisiyle bir topolojik gruptur.

vii) τ topolojisi T_1 -uzaydır.

İspat

i) $U \in \mathcal{U}$ olmak üzere her $x \in G$ için $Ux \subseteq G$ olduğundan $G \in \tau$ dur. $\emptyset \in \tau$ olduğu aşikardır.

Şimdi $W_1, W_2 \in \tau$ için $W_1 \cap W_2 \in \tau$ olduğunu görelim. $x \in W_1 \cap W_2$ alalım. Öyleyse $x \in W_1$ ve $W_1 \in \tau$ olduğundan $U_1x \subseteq W_1$ olacak biçimde bir $U_1 \in \mathcal{U}$ ve $x \in W_2$ ve $W_2 \in \tau$ olduğundan $U_2x \subseteq W_2$ olacak biçimde bir $U_2 \in \mathcal{U}$ vardır. İlâveten $U_1, U_2 \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan Teorem 3.1.17 v) koşulundan $U \subseteq U_1 \cap U_2$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda $Ux \subseteq U_1x \cap U_2x \subseteq W_1 \cap W_2$ olduğundan $W_1 \cap W_2 \in \tau$ dur.

Şimdi her $i \in I$ için $W_i \in \tau$ olsun. $\bigcup_{i \in I} W_i \in \tau$ olduğunu görelim. $x \in \bigcup_{i \in I} W_i$ alalım. Öyleyse $x \in W_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır ve $W_{i_0} \in \tau$ olduğundan $Ux \subseteq W_{i_0}$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. O halde $Ux \subseteq W_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} W_i \in \tau$ dur.

Böylece τ ailesi G üzerinde bir topolojidir.

ii) $x \in G, U \in \mathcal{U}$ ve $y \in Ux$ olsun. G bir grup olduğundan $yx^{-1} \in U$ dur. Teorem 3.1.17

iii) koşulundan $Vyx^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Dolayısıyla $Vy \subseteq Ux$ olup τ ailesinin tanımından $Ux \in \tau$ elde edilir.

iii) $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ olsun. O halde $B = Ua$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ ve bir $a \in G$ vardır. ii) den $Ua \in \tau$ olup $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \subseteq \tau$ elde edilir.

Şimdi $x \in G$ ve $x \in W$ olacak biçimde bir $W \in \tau$ alalım. τ ailesinin tanımından $Ux \subseteq W$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. $Ux = B$ denilirse $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ olduğu aşikardır. O halde $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ ailesi τ için bir tabandır.

iv) $b \in G$ ve $V \in \mathcal{U}$ olsun. $y \in bV$ alalım. $b^{-1}y \in V$ olup Teorem 3.1.17 iii) den $Wb^{-1}y \subseteq V$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda Teorem 3.1.17 iv) den $b^{-1}Ub \subseteq W$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ var olup $b^{-1}Ubb^{-1}y \subseteq Wb^{-1}y \subseteq V$ dir. O halde $Uy \subseteq bV$ olup $bV \in \tau$ dur.

v) $x \in G$ ve $T \in \tau$ olsun. $y \in xT$ alalım. $x^{-1}y \in T$ olup $T \in \tau$ olduğundan $Ux^{-1}y \subseteq T$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Teorem 3.1.17 iv) den $x^{-1}Wx \subseteq U$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır. Dolayısıyla $x^{-1}Wxx^{-1}y \subseteq Ux^{-1}y$ olup $x^{-1}Wy \subseteq T$ dir. O halde $Wy \subseteq xT$ olup τ ailesinin tanımından $xT \in \tau$ dur.

vi) İlk olarak $h((x, y)) = xy$ biçiminde tanımlı $h : G \times G \rightarrow G$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $h((x, y)) = xy \in W$ ve $W \subseteq G$ açık olsun. $xy \in W$ ve $W \in \tau$ olduğundan 3.1.17 iii) den $Vxy \subseteq W$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. İlâveten Teorem 3.1.17 i) den $H^2 \subseteq V$ olacak biçimde bir $H \in \mathcal{U}$ ve (v) den $xTx^{-1} \subseteq H$ olacak biçimde bir $T \in \mathcal{U}$ vardır. Dolayısıyla $H(xTx^{-1}) \subseteq H^2 \subseteq V$ olup $H(xTx^{-1})x \subseteq Vx$

dir. O halde $HxT \subseteq Vx$ olur. Dolayısıyla $HxTy \subseteq Vxy \subseteq W$ elde edilir. Öte yandan ii) den $Hx, Hy \in \tau$ dur. O halde $h(Hx \times Ty) \subseteq W$ olup h dönüşümü süreklidir.

Şimdi de $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. Her $a \in G$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için ii) den $Ua \in \tau$ dur. $f^{-1}(Ua) = a^{-1}U^{-1}$ dur. Eğer $U^{-1} \in \tau$ ise v) den $a^{-1}U^{-1} \in \tau$ olup G uzayında $a^{-1}U^{-1}$ açıktır. Öyleyse şimdi $U^{-1} \in \tau$ olduğunu görelim. $x \in U^{-1}$ alınrsa $x^{-1} \in U$ dur. Teorem 3.1.17 de (iii) den $Vx^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ ve Teorem 3.1.17 ii) den $W^{-1} \subseteq V$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{U}$ vardır. Dolayısıyla $W^{-1}x^{-1} \subseteq Vx^{-1} \subseteq U$ olup $W^{-1}x^{-1} \subseteq U$ elde edilir. Öyleyse $(W^{-1}x^{-1})^{-1} \subseteq U^{-1}$ olup $xW \subseteq U^{-1}$ dir. iv) den $xW \in \tau$ ve τ ailesinin tanımından $Tx \subseteq xW$ olacak biçimde $T \in \mathcal{U}$ vardır. $Tx \subseteq xW \subseteq U^{-1}$ olup τ ailesinin tanımından U^{-1} açıktır. Öyleyse f dönüşümü sürekli olur. O halde (G, τ) bir topolojik gruptur.

vii) Teorem 3.1.17 de (vi) den ve G homojen bir uzay olduğundan kolaylıkla görülebilir.

□

3.1.19 Teorem

Her G topolojik grubu için, birim elemanın simetrik açık komşuluklardan oluşan bir komşuluklar tabanı vardır.

İspat

$\mathcal{V} = \{V \subseteq G \mid \exists U \subseteq G \text{ açık ve } e \in U : V = U \cap U^{-1}\}$ ailesi e birim elemanın simetrik komşuluklardan oluşan bir komşuluklar tabanıdır. □

3.1.20 Teorem

Her topolojik grup regüler uzaydır.

İspat

G bir topolojik grup olsun. Her $x \in G$ ve $x \in U$ olacak biçimdeki her U açık komşuluğu için x in $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ olacak biçimde bir V açık komşuluğunun var olduğunu görmeliyiz. Topolojik gruplar homojen uzay olduklarından $x = e$ için görmemiz yeterlidir. Öyleyse $U \subseteq G$ açık olmak üzere $e \in U$ olsun. $e = ee \in U$ ve G üzerinde tanımlı işlem sürekli olduğundan e nin $WT \subseteq U$ olacak biçimde W ve T açık komşulukları vardır. $W \cap T \cap W^{-1} \cap T^{-1} = V$ denilirse V e nin $V \subseteq U$ olacak biçimde simetrik bir açık komşuluğu olup $V^2 \subseteq U$ olur. Şimdi $\bar{V} \subseteq U$ olduğunu görelim. $x \in \bar{V}$

olsun. $e \in V$ olduğundan $x \in Vx$ dir. V açık ve r_x sağ öteleme dönüşümü açık olduğundan $Vx \subseteq G$ açıktır. Öyleyse $V \cap Vx \neq \emptyset$ olmak zorundadır. $z \in V \cap Vx$ alalım. $z \in V$ ve $z = vx$ olacak biçimde bir $v \in V$ vardır. Bu durumda $x = v^{-1}z \in V^{-1}V = VV \subseteq U$ olup $x \in U$ dur. O halde $\bar{V} \subseteq U$ dur ve böylece $e \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ olur. $\square$

Nispeten yeni bir sonuç sayılabilecek olan aşağıdaki teoremin ispatı bu tezin konusu dışında farklı yöntemler içerdiği için, ispatsız olarak verilecektir.

3.1.21 Teorem

Her regüler paratopolojik grup tamamen regülerdir [11].



4. TOPOLOJİK GRUPLARIN BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde topolojik grupların, sağ(sol) topolojik grupların, yarı-topolojik grupların, quasi-topolojik grupların bazı topolojik özellikleri incelenecek olup cebirsel bazı özellikleri ele alınacaktır. Aksi belirtilmedikçe bu bölümdekilerin tamamı [7] de bulunabilir.

4.1. Topolojik Grupların Bazı Topolojik Özellikleri

4.1.1. Önerme

G bir sol (sağ) topolojik grup, U kümesi G nin açık bir altkümesi ve A kümesi de G nin herhangi bir altkümesi olsun. Bu durumda $AU(UA)$ kümeleri G de açıktır.

İspat

G bir sol topolojik grup olsun. Her sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan her $a \in G$ ve $U \subseteq G$ açığı için $aU = \lambda_a(U)$ açıktır. Aynı zamanda $AU = \bigcup_{a \in A} \lambda_a(U)$ olup AU kümesi G de açıktır. G bir sağ topolojik grup iken benzer biçimde UA kümesinin G de açık olduğu görülebilir. $\square$

4.1.2. Sonuç

G bir yarı-topolojik grup ise G nin her U açığı ve G nin herhangi bir A altkümesi için AU ve UA kümeleri G de açıktır.

Şimdi bir örnekle topolojik yarıgruplarda bu durumun Önerme 4.1.1 ve Sonuç 4.1.2 den farklı olduğu görülecektir. Bunun için öncelikle Vietoris topolojinin tanımı verilecektir.

4.1.3. Tanım

X bir topolojik uzay, $Exp(X) = \{K \subseteq X \mid K \neq \emptyset \text{ kapalı}\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için V_i , U kümeleri X in boştan farklı açık altkümeleri olmak üzere;

$$\langle U, V_1, V_2, \dots, V_n \rangle = \{F \in Exp(X) : F \subseteq U \text{ ve her } i \text{ için } F \cap V_i \neq \emptyset\}$$

olsun. $Exp(X)$ üzerinde

$$\mathcal{B} = \{ \langle U, V_1, V_2, \dots, V_n \rangle : n \in \mathbb{N}, U \subseteq X \text{ açık}, V_1, V_2, \dots, V_n \subseteq X \text{ açık} \}$$

ailesini taban kabul eden topoloji Vietoris topoloji olarak adlandırılır. Bu topoloji için $\mathcal{B}$ ailesi aşağıdaki gibi de tanımlanabilir. $U \subseteq X$ ve $V \subseteq X$ açık olmak üzere

$$[U, V] = \{ F \in Exp(X) : F \subseteq U \text{ ve } F \cap V \neq \emptyset \}$$

denilirse

$$\bigcap_{i=1}^n [U, V_i] = \langle U, V_1, V_2, \dots, V_n \rangle \text{ olduğu kolaylıkla görülebilir.}$$

Böylece

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n [U, V_i] : n \in \mathbb{N}, U \subseteq X \text{ açık ve her } i \text{ için } V_i \subseteq X \text{ açık} \right\}$$

ailesi $Exp(X)$ üzerinde Vietoris topoloji olarak adlandırılan topolojiyi üretir. Yani $\mathcal{B}$ ailesi Önerme 2.1.11 de ki B_1, B_2 şartlarını sağlar. Şöyleki;

(B1) $Exp(X) = \bigcup \mathcal{B}$ olduğunu görelim. Bunun için $F \in Exp(X)$ alalım. $Exp(X)$ tanımı gereği $F \neq \emptyset$ ve $F \subseteq X$ dir. $F \in [X, X]$ olup $[X, X] \in \mathcal{B}$ olduğundan $F \in \bigcup \mathcal{B}$ olur. Böylece $Exp(X) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ sağlanır. $\bigcup \mathcal{B} \subseteq Exp(X)$ olduğu açıktır. Bu durumda istenen eşitlik sağlanır.

(B2) $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ olmak üzere $F \in A_1 \cap A_2$ olsun. $A_1 \in \mathcal{B}$ olduğundan $A_1 = \bigcap_{i=1}^n [U_1, V_i]$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ ve X uzayında $U_1, V_1, V_2, \dots, V_n$ açıkları vardır. $A_2 \in \mathcal{B}$ olduğundan $A_2 = \bigcap_{i=1}^m [U_2, W_i]$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ ve X uzayında $U_2, W_1, W_2, \dots, W_m$ açıkları vardır.

$$U = U_1 \cap U_2 \quad \text{ve} \quad T_i = \begin{cases} V_i & ; \quad 1 \leq i \leq n \\ W_i & ; \quad n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

olmak üzere

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcap_{i=1}^n [U, V_i] \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m [U, W_i] \right) = \bigcap_{i=1}^{n+m} [U, T_i]$$

olup $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{B}$ dir. O halde $\mathcal{B}$ ailesi B_2 şartını sağlar ve böylece $Exp(X)$ üzerinde bir topoloji üretir.

4.1.4. Teorem

X bir T_1 -uzay ise üzerindeki Vietoris topoloji ile $Exp(X)$ uzayı da T_1 -uzaydır.

İspat

$F, K \in Exp(X)$ olmak üzere $F \neq K$ olsun. $Exp(X)$ tanımından $F \neq \emptyset$ ve $K \neq \emptyset$ dir. $F \neq K$ olduğundan ya $F \setminus K$ ya da $K \setminus F \neq \emptyset$ dir.

1. Durum: $F \setminus K \neq \emptyset$ ise; bu durumda bir $x \in F \setminus K$ vardır. $x \notin K$ olduğundan $K \subseteq \{x\}^c$ ve $K \cap \{x\}^c = K \neq \emptyset$ dir. X T_1 -uzay olduğundan $\{x\}^c \subseteq X$ açık olup $[\{x\}^c, \{x\}^c] \subseteq Exp(X)$ açıktır ve $K \in [\{x\}^c, \{x\}^c]$ dir. $x \in F$ olduğundan $F \notin [\{x\}^c, \{x\}^c]$ dir. Öte yandan $F \in [X, K^c]$ ve $K \notin [X, K^c]$ dir.

2. Durum: $K \setminus F \neq \emptyset$ ise; bu durumda bir $y \in K \setminus F$ vardır. $F \in [\{y\}^c, \{y\}^c]$ olup $K \notin [\{y\}^c, \{y\}^c]$ dir ve $K \in [X, F^c]$ olup $F \notin [X, F^c]$ dir. O halde $Exp(X)$ uzayı T_1 -uzaydır. $\square$

Örnek

$Exp(\mathbb{R})$ kümesi üzerinde τ_{Vietoris} Vietoris topoloji varken kümelerin birleşme işlemi ile $Exp(\mathbb{R})$ bir topolojik yarıgruptur.

$Exp(\mathbb{R})$ kümesinin birleşme işlemi altında bir yarıgrup olduğu açıktır. Şimdi $Exp(\mathbb{R})$ nin bir topolojik yarıgrup olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} h : Exp(\mathbb{R}) \times Exp(\mathbb{R}) &\longrightarrow Exp(\mathbb{R}) \\ (K, M) &\longrightarrow h((K, M)) = K \cup M \end{aligned}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $Exp(\mathbb{R})$ nin herhangi iki K ve M elemanlarını ve $Exp(\mathbb{R})$ uzayında $h(K, M) \in T$ olacak biçimde bir T açığını alalım. Tanım 4.1.3 deki $\mathcal{B}$ ailesi taban olduğundan $h(K, M) \in \bigcap_{i=1}^n [U, V_i] \subseteq T$ olacak biçimde bir $B = \bigcap_{i=1}^n [U, V_i] \in \mathcal{B}$ vardır. Bu durumda $K \cup M \in \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]$ olup $K \subseteq U$, $M \subseteq U$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $(K \cup M) \cap V_i \neq \emptyset$ olur.

$I = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : M \cap V_i \neq \emptyset\}$ ve $J = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : K \cap V_i \neq \emptyset\}$ denilirse $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$ olup aşağıdaki üç durum oluşur.

1. Durum: $I \neq \emptyset$ ve $J = \emptyset$ ise; bu durumda $(K, M) \in [U, \mathbb{R}] \times \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]$ olup $h([U, \mathbb{R}] \times \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]) \subseteq \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

2. Durum: $I = \emptyset$ ve $J \neq \emptyset$ ise; bu durumda $(K, M) \in \bigcap_{i=1}^n [U, V_i] \times [U, \mathbb{R}]$ olup $h(\bigcap_{i=1}^n [U, V_i] \times [U, \mathbb{R}]) \subseteq \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

3. Durum: $I \neq \emptyset$ ve $J \neq \emptyset$ ise; bu durumda $M \in \bigcap_{i \in I} [U, V_i]$, $K \in \bigcap_{i \in J} [U, V_i]$ olup $(K, M) \in \bigcap_{i \in J} [U, V_i] \times \bigcap_{i \in I} [U, V_i]$ için $h(\bigcap_{i \in J} [U, V_i] \times \bigcap_{i \in I} [U, V_i]) \subseteq \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]$ olduğunu görelim. $C \in h(\bigcap_{i \in J} [U, V_i] \times \bigcap_{i \in I} [U, V_i])$ alalım. $C = h(S)$ olacak biçimde bir $S \in \bigcap_{i \in J} [U, V_i] \times \bigcap_{i \in I} [U, V_i]$ ve $S = S_1 \times S_2$ olacak biçimde bir $S_1 \in \bigcap_{i \in J} [U, V_i]$, $S_2 \in \bigcap_{i \in I} [U, V_i]$ vardır. Böylece $h(S) = h(S_1 \times S_2) = S_1 \cup S_2$ olur. $S_1 \in \bigcap_{i \in J} [U, V_i]$ olduğundan $S_1 \subseteq U$ ve her $i \in J$ için $S_1 \cap V_i \neq \emptyset$ olur. Aynı zamanda $S_2 \in \bigcap_{i \in I} [U, V_i]$ olduğundan $S_2 \subseteq U$ ve her $i \in I$ için $S_2 \cap V_i \neq \emptyset$ olur. Böylece $S_1 \cup S_2 \subseteq U$ ve her $i \in I \cup J$ için $(S_1 \cup S_2) \cap V_i \neq \emptyset$ elde edilir. Dolayısıyla $S_1 \cup S_2 \in \bigcap_{i=1}^n [U, V_i]$ dir.

O halde h dönüşümü sürekli olup $Exp(\mathbb{R})$ bir topolojik yarıgruptur.

$F = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ kapalı kümesi, $U = (1, \infty)$ açığı ve $W = \{K \in Exp(\mathbb{R}) : K \subseteq U\}$ kümesini alalım. $W = [U, \mathbb{R}]$ olduğundan W kümesi $Exp(\mathbb{R})$ de açıktır. Fakat FW kümesi $Exp(\mathbb{R})$ de açık değildir.

Böylece 4.1.1 ve 4.1.2 ifadelerinin topolojik yarıgruplar için geçerli olmadığı görülür.

4.1.5. Önerme

G bir sol topolojik grup olmak üzere, her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli ise her $A \subseteq G$ ve e birim elemanının her U açık komşuluğu için $\bar{A} \subseteq AU$ olur.

İspat

$U \subseteq G$ açık olmak üzere $e \in U$ ve $A \subseteq G$ olsun. $f(e) = e^{-1} = e \in U$ ve f sürekli olduğundan $f(V) = V^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde e noktasının bir V açık komşuluğu vardır. Şimdi $x \in \bar{A}$ alalım. $e \in V$ olduğundan $x \in xV$ dir. G bir sol topolojik grup olduğundan her sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup xV açıktır. $x \in \bar{A}$ olduğundan $A \cap xV \neq \emptyset$ olur. $a \in A \cap xV$ alınırsa $a = xb$ olacak biçimde bir $b \in V$ vardır. Öyleyse $x = ab^{-1} \in AV^{-1} \subseteq AU$ olur. Böylece $\bar{A} \subseteq AU$ elde edilir. $\square$

Şimdi bir sonraki teoremdede kullanılacak ispatı rutin olan bir önerme verilecektir.

4.1.6. Önerme

G bir grup olsun. $A, B, C \subseteq G$ olmak üzere $AB \cap C = \emptyset \Leftrightarrow A \cap CB^{-1} = \emptyset$ dir.

4.1.7 Teorem

G bir sol topolojik grup olmak üzere her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli ve $\mathcal{B}_e$ ailesi e noktasının bir komşuluklar tabanı ise her $A \subseteq G$ için

$$\overline{A} = \bigcap \{AU : U \in \mathcal{B}_e\} \text{ dir.}$$

İspat

$A \subseteq G$ olsun. Önerme 4.1.5 den her $U \in \mathcal{B}_e$ için $\overline{A} \subseteq AU$ olduğundan $\overline{A} \subseteq \bigcap \{AU : U \in \mathcal{B}_e\}$ sağlanır. Şimdi $\bigcap \{AU : U \in \mathcal{B}_e\} \subseteq \overline{A}$ olduğunu görelim. $x \notin \overline{A}$ olsun. Bu durumda $T \cap A = \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir T açık komşuluğu vardır. $x \in T$ olduğundan $e \in x^{-1}T$ dir ve $x^{-1}T$ açıktır. $\mathcal{B}_e$ ailesi e noktasının bir komşuluklar tabanı olduğundan $W \subseteq x^{-1}T$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{B}_e$ vardır. f dönüşümü sürekli olduğundan $U_0^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde bir $U_0 \in \mathcal{B}_e$ vardır. O halde $xU_0^{-1} \subseteq xW$ olup $W \subseteq x^{-1}T$ olduğundan $xU_0^{-1} \subseteq xW \subseteq T$ olur. $T \cap A = \emptyset$ olduğundan $xU_0^{-1} \cap A = \emptyset$ olur. Önerme 4.1.6 den $\{x\} \cap AU_0 = \emptyset$ elde edilir. Böylece $x \notin AU_0$ olup $AU_0 \subseteq \overline{A}$ olur. Öyleyse $\bigcap \{AU : U \in \mathcal{B}_e\} \subseteq AU_0 \subseteq \overline{A}$ olup $\overline{A} = \bigcap \{AU : U \in \mathcal{B}_e\}$ eşitliği sağlanır. $\square$

4.1.8. Önerme

G bir yarı-topolojik grup olmak üzere, e birim elemanının her U açık komşuluğu için $V^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde e nin bir V açık komşuluğu varsa her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli ve böylece G bir quasi-topolojik gruptur.

İspat

$x \in G$ olmak üzere $f(x) = x^{-1} \in W$ ve $W \subseteq G$ açık olsun. O halde $\lambda_{x^{-1}}(e) = x^{-1} \in W$ dir. W açık ve $\lambda_{x^{-1}}$ dönüşümü sürekli olduğundan $\lambda_{x^{-1}}(U) \subseteq W$ olacak biçimde e birim elemanının bir U açık komşuluğu vardır ve $x^{-1}U \subseteq W$ olur. O halde hipotezden $V^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde e nin bir V açık komşuluğu vardır ve

$x^{-1}V^{-1} \subseteq x^{-1}U$ olur. G yarı-topolojik grup olduğundan Sonuç 3.1.2 den her sağ öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup Vx kümesi açıktır ve $f(Vx) = (Vx)^{-1} = x^{-1}V^{-1} \subseteq x^{-1}U \subseteq W$ dir. Böylece f dönüşümü süreklidir. G bir yarı-topolojik grup ve f sürekli olduğundan G bir quasi-topolojik gruptur. $\square$

4.1.9. Önerme

G bir yarı-topolojik grup olmak üzere her $A \subseteq G$ kapalı ve her $x \in G \setminus A$ için $x \notin AV$ olacak biçimde e birim elemanının bir V açık komşuluğu varsa her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü süreklidir ve böylece G bir quasi-topolojik gruptur.

İspat

Önerme 4.1.8 den e nin her U açık komşuluğu için, e nin, $V^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde bir V açık komşuluğunun var olduğunu görmek yeterlidir. U e nin herhangi bir açık komşuluğu olsun. $A = G \setminus U$ diyelim. Bu durumda $e \notin A$ olup $e \in G \setminus A$ dir. Hipotezden $e \notin AV$ olacak biçimde e nin bir V açık komşuluğu vardır. Öyleyse $AV \cap \{e\} = \emptyset$ olup Önerme 4.1.5 den $A \cap \{e\}V^{-1} = \emptyset$ olur. Böylece $A \cap V^{-1} = \emptyset$ olup $V^{-1} \subseteq G \setminus A$ dir. $G \setminus A = U$ olduğundan $V^{-1} \subseteq U$ elde edilir. $\square$

4.1.10. Önerme

G bir sol topolojik grup olmak üzere her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli ise G bir yarı-topolojik gruptur. Dolayısıyla G bir quasi-topolojik gruptur.

İspat

Her $a \in G$ için $r_a = f \circ \lambda_{a^{-1}} \circ f$ olduğundan ispat açıktır. $\square$

4.1.11. Lemma

G bir yarı-topolojik yarıgrup olmak üzere, H kümesi G nin bir alt yarıgrubu ise $x \in H$ ve $y \in \overline{H}$ için $xy \in \overline{H}$ dir.

İspat

H kümesi G nin bir alt yarıgrubu olsun. $x \in H$ ve $y \in \overline{H}$ alalım. $xy \in x\overline{H}$ olduğundan $\lambda_x(y) \in \lambda_x(\overline{H})$ dır. λ_x dönüşümü sürekli olduğundan $\lambda_x(\overline{H}) \subseteq \overline{\lambda_x(H)}$ olup $xy \in \overline{xH} = \overline{H}$ olur. O halde $x \in H$ ve $y \in \overline{H}$ için $xy \in \overline{H}$ dır. $\square$

4.1.12. Önerme

G bir yarı-topolojik yarıgrup olmak üzere, H kümesi G nin bir alt yarıgrubu ise $\overline{H}$ kümesi de G nin bir alt yarıgrubudur.

İspat

H kümesi G nin bir alt yarıgrubu olsun. $\overline{H}$ in bir alt yarıgrup olduğunu görmek için her $x, y \in \overline{H}$ için $xy \in \overline{H}$ olduğunu görmek yeterlidir. $x, y \in \overline{H}$ olsun. G uzayında $xy \in W$ olacak biçimde bir W açığı alalım. $xy = r_y(x) \in W$ ve r_y sürekli olduğundan $r_y(V) \subseteq W$ olacak biçimde x noktasının bir V açık komşuluğu vardır ve $Vy \subseteq W$ dir. $x \in \overline{H}$, $x \in V$ ve V açık olduğundan $H \cap V \neq \emptyset$ dir. $z \in H \cap V$ alalım. Bu durumda $zy \in Vy \subseteq W$ olur. $z \in H$ ve $y \in \overline{H}$ olduğundan Lemma 4.1.11 den $zy \in \overline{H}$ dır. $zy \in \overline{H}$, $zy \in W$ ve W açık olduğundan $W \cap H \neq \emptyset$ dir. Böylece $xy \in \overline{H}$ olup $\overline{H}$ bir alt yarıgruptur. $\square$

Şimdi Önerme 4.1.12 nin sağ topolojik yarıgruplar için geçerli olmadığını bir örnekle görelim.

Örnek

$Z = \alpha\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\alpha\}$ doğal sayıların ayırık uzayının tek nokta kompaktlaştırması olsun. $S_p(Z, Z) = Z^Z$ sağ topolojik yarıgruptur. Z kompakt olduğundan Z^Z de kompakttır. $B = \{f : f \in S(Z, Z) \text{ bire-bir}\}$ kümesini alalım. $\overline{B} = C$ diyelim. B kümesi Z^Z nin bir alt yarıgrubudur, fakat C alt yarıgrubu değildir. Şöyleki; her $k \in \mathbb{N}$ için

$$f_k(x) = \begin{cases} x + k & ; \quad x \in \mathbb{N} \\ \alpha & ; \quad x = \alpha \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f_k : Z \rightarrow Z$ dönüşümünü alalım.

$g(x) = \alpha$ biçiminde tanımlı $g : Z \rightarrow Z$ dönüşümünü sabitleyelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ olup her $x \in Z$ için $(f_k(x))$ dizisi $g(x)$ e yakınsaktır. Bu durumda (f_k)

fonksiyon dizisi g ye yakınsar. $g \in \overline{\{f_k : k \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{B} = C$ dir, fakat $g \notin B$ dir. Şimdi

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \quad x \in \mathbb{N} \\ 1 & ; \quad x = \alpha \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $h \in Z^Z$ dönüşümünü tanımlayalım. h bire-bir olduğundan $h \in B \subseteq C$ dir. $g, h \in \overline{B} = C$ dir, fakat $h \circ g \notin \overline{B}$ dir. Çünkü $x \in Z$ için $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\alpha) = 1$ dir. $V = \{f \in Z^Z : f(1) = 1 \text{ ve } f(3) = 1\}$ açık olup $h \circ g \in V$ dir. Eğer $h \circ g \in \overline{B}$ olsaydı $B \cap V \neq \emptyset$ olurdu ki bu da B nin bire-bir olması ile çelişirdi.

4.1.13. Önerme

G bir grup olmak üzere (G, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli ise G nin simetrik her A altkümesi için $\overline{A}$ kümesi de simetriktir.

İspat

$A \subseteq G$ simetrik olsun. O halde $A = A^{-1}$ olup $f(\overline{A}) = \overline{f(A^{-1})}$ dir. Aynı zamanda $f \circ f = I$ olup $f = f^{-1}$ olduğundan f bir homeomorfizmadır. O halde $f(\overline{A^{-1}}) = \overline{f(A^{-1})}$ dir. Bu durumda $f(\overline{A}) = \overline{f(A^{-1})}$ olup $(\overline{A})^{-1} = \overline{A}$ olur. O halde $\overline{A}$ simetriktir. $\square$

4.1.14. Önerme

G bir quasi-topolojik grup olmak üzere, H kümesi G nin bir altgrubu ise $\overline{H}$ kümesi de G nin bir altgrubudur.

İspat

H kümesi G nin bir altgrubu olsun. Önerme 4.1.12 den $\overline{H}$ G nin bir alt yarıgrubudur. Aynı zamanda H simetrik olduğundan Önerme 4.1.13 den $\overline{H}$ kümesi de simetriktir. Öyleyse her $x \in \overline{H}$ için $x^{-1} \in (\overline{H})^{-1} = \overline{H}$ olup $\overline{H}$ bir altgruptur. $\square$

4.1.15. Sonuç

G bir topolojik grup olmak üzere H kümesi G nin bir altgrubu ise $\overline{H}$ kümesi de G nin bir altgrubudur.

İspat

Her topolojik grup bir quasi-topolojik grup olduğundan Önerme 4.1.14 den $\overline{H}$ kümesinin G nin bir altgrubu olduğu aşıkardır. $\square$

4.1.16. Lemma

X bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olmak üzere, $\overline{Y} = X$ olsun. Bu durumda X in her V açık altkütmesi için $\overline{V \cap Y} = \overline{V}$ dir.

İspat

X in herhangi bir V açık altkütmesini alalım. $V \cap Y \subseteq V$ olduğundan $\overline{V \cap Y} \subseteq \overline{V}$ dir. $p \in \overline{V}$ alalım. $T \subseteq X$ açık ve $p \in T$ olsun. O halde $T \cap V \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $T \cap V$ kümesi X in boştan farklı bir açık altkütmesi olup $\overline{Y} = X$ olduğundan $T \cap (V \cap Y) \neq \emptyset$ dir. Böylece $p \in \overline{V \cap Y}$ olup $\overline{V} \subseteq \overline{V \cap Y}$ dir. O halde $\overline{V \cap Y} = \overline{V}$ dir. $\square$

4.1.17. Lemma

X regüler bir uzay olmak üzere, Y kümesi X in yoğun bir alt kümesi ise her $y \in Y$ için $\chi(y, Y) = \chi(y, X)$ olur.

İspat

$y \in Y$ ve $\chi(y, X) = |\mathcal{B}|$ olsun. $\mathcal{B}$ ailesi y noktasının X uzayındaki komşuluklar tabanı olduğundan $\mathcal{A} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ ailesi y noktasının Y uzayındaki komşuluklar tabanıdır. Öyleyse $\chi(y, Y) \leq |\mathcal{A}|$ dir. Öte yandan $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ olduğundan $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$ olup $\chi(y, Y) \leq \chi(y, X)$ dir. Şimdi de $\chi(y, X) \leq \chi(y, Y)$ olduğunu görelim. $\chi(y, Y) = |\mathcal{D}|$ olsun. Her $D \in \mathcal{D}$ için $V_D \cap Y = D$ olacak biçimde bir $V_D \subseteq X$ açığı vardır.

$\sigma = \{V_D : D \in \mathcal{D}\}$ olsun. $|\sigma| \leq |\mathcal{D}|$ olduğu aşıkardır. Şimdi σ ailesinin y noktasının X uzayındaki bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. $O \subseteq X$ açık olmak üzere $y \in O$ olsun. X uzayı düzenli olduğundan $y \in W \subseteq \overline{W} \subseteq O$ olacak biçimde bir $W \subseteq X$ açığı vardır. $y \in W$, $W \subseteq X$ açık ve $\mathcal{D}$ ailesi y noktasının Y uzayındaki komşuluklar tabanı olduğundan $y \in D \subseteq W \cap Y$ olacak biçimde bir $D \in \mathcal{D}$ vardır. Lemma 4.1.16 den $\overline{D} = \overline{V_D}$ dir.

O halde $y \in V_D \subseteq \overline{V_D} = \overline{D} \subseteq \overline{W \cap Y} \subseteq \overline{W} \subseteq O$ olup $y \in V_D \subseteq O$ olur. Öyleyse σ ailesi y noktasının X uzayı içinde bir komşuluklar tabanı olup $\chi(y, X) \leq |\sigma| \leq |\mathcal{D}| = \chi(y, Y)$ elde edilir. Böylece hem $\chi(y, Y) \leq \chi(y, X)$ hem de $\chi(y, X) \leq \chi(y, Y)$ olduğundan $\chi(y, Y) = \chi(y, X)$ elde edilir. $\square$

4.1.18. Önerme

G bir topolojik grup olmak üzere, H kümesi G nin birinci sayılabilir bir altgrubu ise $\overline{H}$ kümesi de birinci sayılabilir.

İspat

H kümesi G nin birinci sayılabilir bir altgrubu olsun. $\overline{H} = K$ diyelim. Sonuç 4.1.15 den topolojik grupların altgruplarının kapanışı da altgrup olduğundan K kümesi G nin bir altgrubu olup G uzayından indirgenen topolojiyle bir topolojik gruptur. H altgrubu birinci sayılabilir olduğundan e birim elemanı için $\chi(e, H) \leq \aleph_0$ dir. Teorem 3.1.20 den topolojik gruplar regüler olduğundan K regüler bir uzaydır. İlaveten $\overline{H} = K$ olduğundan H kümesi K nın yoğun bir altkümesi olup Lemma 4.1.17 den $\chi(e, K) = \chi(e, H)$ olur. $\chi(e, H) \leq \aleph_0$ olduğundan $\chi(e, K) \leq \aleph_0$ dir. O halde K uzayının e birim elemanının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. K topolojik grup olduğundan homojen bir uzaydır. Dolayısıyla K nın her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. Böylece $\overline{H}$ birinci sayılabilir. $\square$

Şimdi bir sonraki sonuç için topolojik uzaylarla ilgili iki lemma verilecektir.

4.1.19. Lemma

(X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olmak üzere, $U \subseteq X$ açık ise $\overline{U \cap Y} \cap U = U \cap \overline{Y}$ dir.

İspat

$U \subseteq X$ açık olsun. $U \cap Y \subseteq Y$ olduğundan $\overline{U \cap Y} \subseteq \overline{Y}$ olup $\overline{U \cap Y} \cap U \subseteq \overline{Y} \cap U$ dur. Şimdi $U \cap \overline{Y} \subseteq \overline{U \cap Y} \cap U$ olduğunu görelim. $x \in U \cap \overline{Y}$, $T \subseteq X$ ve $x \in T$ açık olsun. Bu durumda $x \in U \cap T$ ve $U \cap T \subseteq X$ açık olur. O halde $x \in \overline{Y}$, $x \in U \cap T$ açık olduğundan $U \cap T \cap Y = T \cap (U \cap Y) \neq \emptyset$ olup $x \in \overline{U \cap Y}$ dir. O halde $x \in \overline{U \cap Y} \cap U$ olup $U \cap \overline{Y} \subseteq \overline{U \cap Y} \cap U$ elde edilir. Böylece $\overline{U \cap Y} \cap U = U \cap \overline{Y}$ eşitliği sağlanmış olur. $\square$

4.1.20. Lemma

(X, τ) bir T_1 -uzay ve Y X in bir altuzayı olmak üzere, Y ayrık bir altuzay ise Y kümesi $\overline{Y}$ içinde açıktır.

İspat

Burada okunabilirlik açısından Y nin $\bar{Y}$ uzayındaki içi $\text{int}_{\bar{Y}}(Y)$ ile gösterilecektir. Y altuzayı ayrık olsun. $y \in Y$ alalım. Y ayrık uzay olduğundan $\{y\}$ tek nokta kümesi Y uzayında açıktır. O halde $\{y\} = U \cap Y$ olacak biçimde X uzayında y noktasının bir U açık komşuluğu vardır. X T_1 -uzay olduğundan U altuzayı da T_1 -uzaydır. O halde $\{y\}$ kümesi U altuzayı içinde kapalıdır. Yani $\{y\} = \overline{\{y\}}^U$ dir. $\{y\} = U \cap Y$ olduğundan $\overline{\{y\}}^U = \overline{U \cap Y}^U = \overline{U} \cap \bar{Y} \cap U$ olur. Lemma 4.1.19 den $\overline{U} \cap \bar{Y} \cap U = U \cap \bar{Y}$ olduğundan $\{y\} = U \cap Y = U \cap \bar{Y}$ olur. U kümesi X uzayında bir açık olduğundan $U \cap \bar{Y}$ kümesi de $\bar{Y}$ uzayında bir açık olup $y \in U \cap \bar{Y} \subseteq \bar{Y}$ olduğundan $y \in \text{int}_{\bar{Y}}(Y)$ dir ve $Y \subseteq \text{int}_{\bar{Y}}(Y)$ olur. Her zaman $\text{int}_{\bar{Y}}(Y) \subseteq Y$ olduğundan $Y = \text{int}_{\bar{Y}}(Y)$ dir. O halde Y kümesi $\bar{Y}$ içinde açıktır. $\square$

4.1.21. Sonuç

G bir quasi-topolojik grup olmak üzere H kümesi G nin ayrık bir altgrubu ise H kümesi G uzayında kapalıdır.

İspat

H kümesi G nin ayrık bir altgrubu olsun. Önerme 4.1.14 den $\bar{H}$ kümesi de G nin altgrubudur. Dolayısıyla $\bar{H}$ altgrubu G uzayından indirgenen topolojiyle bir quasi-topolojik gruptur. H altuzayı ayrık olduğundan Lemma 4.1.20 den H kümesi $\bar{H}$ uzayında açıktır. $\bar{H}$ bir quasi-topolojik grup ve H kümesi $\bar{H}$ ın açık altgrubu olduğundan Teorem 3.1.6 dan H kümesi $\bar{H}$ içinde kapalıdır. Böylece H kümesi G uzayında kapalıdır. $\square$

Şimdi Sonuç 4.1.21 yerel kapalı uzaylar için ifade edilecektir. Bunun için öncelikle yerel kapalı uzay tanımı ve bir teorem verilecektir.

4.1.22. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olmak üzere, her $y \in Y$ için y noktasının, $U \cap Y$ kümesi U içinde kapalı olacak biçimde açık bir U komşuluğu varsa Y ye bir yerel kapalı uzay denir.

4.1.23 Teorem

(X, τ) bir topolojik uzay $Y \subseteq X$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- 1) Y yerel kapalıdır.
- 2) Y kümesi $\bar{Y}$ içinde açıktır.
- 3) $Y = U \cap F$ olacak biçimde X uzayının açık bir U altkümesi ve kapalı bir F altkümesi vardır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2)

Y yerel kapalı bir uzay olsun. O halde her $y \in Y$ için X uzayında y noktasının bir U açık komşuluğu vardır ve $U \cap Y$ kümesi U içinde kapalıdır. $U \cap Y = \overline{U \cap Y}^U = \overline{U \cap Y} \cap U$ olur. Lemma 4.1.19 den $\overline{U \cap Y} \cap U = U \cap \bar{Y}$ olup $U \cap Y = U \cap \bar{Y}$ elde edilir. $U \cap Y \subseteq Y$ olduğundan $y \in U \cap \bar{Y} \subseteq Y$ olup Y kümesi $\bar{Y}$ içinde açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Y kümesi $\bar{Y}$ da açık olduğundan $Y = V \cap \bar{Y}$ olacak biçimde bir $V \subseteq X$ açığı vardır. İlaveten $\bar{Y}$ X uzayında kapalıdır. O halde Y kümesi X uzayında bir açıkla bir kapalının arakesiti olarak yazılabilir.

(3) $\Rightarrow$ (1)

$Y = U \cap F$ olacak biçimde X uzayında bir U açığı ve F kapalı alalım. F kapalı olduğundan $\bar{F} \cap U = F \cap U \subseteq Y \cap U$ olur. U açık olduğundan Lemma 4.1.19 den $\bar{F} \cap U = \bar{F} \cap \bar{U} \cap U$ dur. O halde $\bar{F} \cap \bar{U} \cap U \subseteq Y \cap U$ elde edilir. $F \cap U = Y$ olduğundan $\bar{Y} \cap U \subseteq Y \cap U$ olur. U açık olduğundan Lemma 4.1.19 den $\bar{Y} \cap U = \bar{Y} \cap \bar{U} \cap U$ olup $\bar{Y} \cap \bar{U} \cap U \subseteq Y \cap U$ olur. Bu durumda $\bar{Y} \cap \bar{U}^U \subseteq Y \cap U$ olup $Y \cap U$ kümesi U içinde kapalıdır. O halde Y yerel kapalıdır. $\square$

4.1.24. Sonuç

G bir quasi-topolojik grup olmak üzere H kümesi G uzayının yerel kapalı bir altgrubu ise H kümesi G uzayında kapalıdır.

İspat

H kümesi G nin yerel kapalı bir altgrubu olsun. Önerme 4.1.14 den $\bar{H}$ kümesi de G nin bir altgrubudur. Dolayısıyla $\bar{H}$ altgrubu G uzayından indirgenen topolojiyle bir quasi-topolojik gruptur. H yerel kapalı olduğundan Teorem 4.1.23 den H kümesi $\bar{H}$ içinde açıktır. $\bar{H}$ bir quasi-topolojik grup ve H kümesi $\bar{H}$ ın açık bir altgrubu olduğundan Teorem 3.1.6 dan H kümesi $\bar{H}$ da kapalı olup H kümesi G uzayında kapalıdır. $\square$

4.1.25. Önerme

Topolojik grupların yerel kompakt altgrupları kapalıdır.

İspat

G bir topolojik grup olmak üzere H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu olsun. $\overline{H} = K$ olsun. Sonuç 4.1.15 den K kümesi G nin bir alt grubudur. O halde K altuzayı G uzayından indirgenen topolojiyle bir topolojik gruptur. H kümesi K uzayının yerel kompakt yoğun bir altuzayı olduğundan H kümesi K altuzayında açıktır ([8], 3.3.9). Teorem 3.1.6 den topolojik grupların açık altgrupları aynı zamanda kapalı olduğundan H kümesi K altuzayında kapalıdır. Dolayısıyla H kümesi G uzayında kapalıdır. $\square$

4.1.26. Önerme

Sayılabılır kompakt quasi-topolojik grupların ayrık her altgrubu sonludur.

İspat

G sayılabılır kompakt bir quasi topolojik grup ve H kümesi de G nin ayrık bir altgrubu olsun. Sonuç 4.1.21 den H altgrubu G uzayında kapalıdır. Sayılabılır kompakt uzayların kapalı altuzayları sayılabılır kompakt olduğundan H sayılabılır kompaktır. O halde H altgrubu ayrık ve sayılabılır kompakt olduğundan H sonludur. $\square$

4.1.27. Sonuç

Lindelöf quasi-topolojik grupların ayrık her altgrubu sayılabılırdır.

İspat

G bir Lindelöf quasi-topolojik grup ve H kümesi G nin ayrık bir altgrubu olsun. H ayrık olduğundan Sonuç 4.1.21 den H altgrubu G uzayında kapalıdır. Lindelöf uzayların kapalı altuzayları da Lindelöf olduğundan H Lindelöf bir uzaydır. Dolayısıyla H altgrubu sayılabılırdır. $\square$

4.1.28. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{P}(X)$ X in kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun.

Her $x \in X$ için x noktasının $|\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}| \leq 1$ olacak biçimde bir U açık komşuluğu var ise $\mathcal{A}$ ailesine ayrık bir aile denir [12].

4.1.29. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{P}(X)$ X in kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için x noktasının $|\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}| < \aleph_0$ olacak biçimde bir U açık komşuluğu var ise $\mathcal{A}$ ailesine yerel sonlu bir aile denir [12].

4.1.30. Lemma

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ X in boş olmayan alt kümelerinin yerel sonlu bir ailesi olmak üzere her $A \in \mathcal{A}$ için bir $x_A \in A$ seçilerek oluşturulan $D = \{x_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ kümesi kapalı ve ayrıktır.

İspat

D kümesinin kapalı ve ayrık olduğunu görmek için D nin hiç yığılma noktasına sahip olmadığını görmek yeterlidir. Kabul edelim ki $\tilde{D} \neq \emptyset$ olsun. O halde $x \in \tilde{D}$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. Dolayısıyla x noktasının her U açık komşuluğu için $(U \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset$ dir. Şimdi bunu iki durumda inceleyelim.

1. Durum: $x \in D$ ise $x = x_{A_0}$ olacak biçimde bir $A_0 \in \mathcal{A}$ vardır. $\mathcal{A}$ yerel sonlu olduğundan $x \in U_0$ olacak biçimde X uzayında bir U_0 açığı var ve $\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap U_0 \neq \emptyset\}$ sonludur. $\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap U_0 \neq \emptyset\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ olsun. $x \in \tilde{D}$ olduğundan $(U_0 \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset$ olur. O halde $x \in U_0 \cap A_0$ olup $A_0 \cap U_0 \neq \emptyset$ dir ve $A_0 \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ olur. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $1 \leq k \leq n$ olacak biçimde öyle bir k vardır ki $A_0 = A_k$ olur. $U_0 \setminus \{x_{A_0}, \dots, x_{A_{k-1}}, x_{A_{k+1}}, \dots, x_{A_n}\}$ açıktır. $x = x_{A_k}$ olduğundan $x \in U_0 \setminus \{x_{A_0}, \dots, x_{A_{k-1}}, x_{A_{k+1}}, \dots, x_{A_n}\}$ olup $x \in \tilde{D}$ olduğundan $(U_0 \setminus \{x_{A_0}, \dots, x_{A_{k-1}}, x_{A_{k+1}}, \dots, x_{A_n}\} \setminus \{x\}) \cap D = (U_0 \setminus \{x_{A_0}, \dots, x_{A_n}\}) \cap D \neq \emptyset$ dir. O halde $x_{A_l} \in U_0 \setminus \{x_{A_0}, \dots, x_{A_n}\}$ olacak biçimde bir $x_{A_l} \in D$ vardır. Bu da $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U_0 \neq \emptyset\} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ olması ile çelişir.

2. Durum: $x \notin D$ ise $\mathcal{A}$ yerel sonlu olduğundan x noktasının bir V açık komşuluğu var ve $\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V \neq \emptyset\}$ sonludur.

$\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V \neq \emptyset\} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ olsun. $V \setminus \{x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_m}\}$ açık olup $T = V \setminus \{x_{A_1}, x_{A_2}, \dots, x_{A_m}\}$ denilirse $x \in T$ olur. T açık ve $x \in \tilde{D}$ olduğundan $(T \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset$ dir. O halde $z \in D$ olacak biçimde bir $z \in T \setminus \{x\}$ vardır. $z \in D$ olduğundan $z = x_B$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{A}$ vardır. O halde $x_B \in T$ olup $B \cap V \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $1 \leq j \leq m$ olmak üzere $B = A_j$ olacak biçimde bir j vardır. $B = A_j$ olduğundan $x_B = x_{A_j}$ olur ki bu da $x_B \in T$ olması ile çelişir.

Her iki durumda da çelişki elde edildiğinden kabulümüz yanlış olup $\tilde{D} = \emptyset$ dir .

Dolayısıyla D kümesi kapalı ve ayrıktır. $\square$

4.1.31. Tanım

G bir topolojik grup, $e \in G$ birim, U kümesi e noktasının bir komşuluğu ve $A \subseteq G$ olsun. $a \neq b$ olacak biçimdeki $a, b \in A$ için $b \notin aU$ ise A kümesine U ayrıktır denir.

Şimdi bir sonraki teoremden kullanılmak üzere iki lemma verilecektir.

4.1.32. Lemma

G bir topolojik grup ve U, V e birim elemanının $V^4 \subseteq U$ ve $V^{-1} = V$ olacak biçimde açık komşulukları olmak üzere $A \subseteq G$ olsun. Eğer A kümesi U ayrık ise $\{aV : a \in A\}$ açık kümelerinin ailesi ayrıktır.

İspat

$A \subseteq G$ bir U ayrık küme olsun. $e \in V$ olduğundan her $x \in G$ için $x \in xV$ dir ve xV açıktır. Kabul edelimki $x \in xV$ açık komşuluğunun $\{aV : a \in A\}$ ailesinin elemanlarından en az iki tanesiyle arakesiti boştan farklı olsun. Öyleyse $a \neq b$ olmak üzere $a, b \in A$ için $aV \cap xV \neq \emptyset$ ve $bV \cap xV \neq \emptyset$ dir. O halde $p \in aV \cap xV$ alalım. Bu durumda $p = av_1 = xv_2$ olacak biçimde bir $v_1, v_2 \in V$ vardır ve $x^{-1}a = v_2v_1^{-1} \in V^2$ elde edilir. Benzer biçimde $b^{-1}x \in V^2$ olur. Böylece $b^{-1}a = (b^{-1}x)(x^{-1}a) \in V^4$ olup $V^4 \subseteq U$ olduğundan $b^{-1}a \in U$ elde edilir. Bu durumda $a \in bU$ olur. Bu da A kümesinin U ayrık olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $|\{a \in A : aV \cap xV \neq \emptyset\}| \leq 1$ olur. O halde $\{aV : a \in A\}$ ailesi ayrıktır. $\square$

4.1.33. Lemma

(X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{A}$ ailesi X in boş olmayan altkümelerin ayrık bir ailesi olmak üzere her $A \in \mathcal{A}$ için bir $x_A \in A$ seçilerek oluşturulan $D = \{x_A : A \in \mathcal{A}\}$ kümesi X uzayı içinde kapalı ve ayrıktır.

İspat

Ayrık her aile yerel sonlu olduğundan Lemma 4.1.30 den D kümesi kapalı ve ayrıktır.

$\square$

Şimdi sözde kompakt uzayların tanımını verelim.

4.1.34. Tanım

X bir Tychonoff uzay olmak üzere, X uzayından $\mathbb{R}$ ye giden sürekli her dönüşüm sınırlı ise X e sözde kompakt bir uzay denir.

Şimdi ispatı ([8], 3.10.22) de bulunabilecek teorem ispatsız olarak verilecektir.

4.1.35 Teorem

X Tychonoff bir uzay olmak üzere, X uzayının sözde kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul X in boş olmayan açık altkümelerinden oluşan yerel sonlu her ailenin sonlu olmasıdır.

4.1.36 Teorem

Sözde kompakt bir topolojik grubun ayrık her altgrubu sonludur.

İspat

G sözde kompakt bir topolojik grup ve H G nin ayrık bir altgrubu olsun. Her topolojik grup bir quasi-topolojik grup olduğundan Sonuç 4.1.21 den H altgrubu G uzayında kapalıdır. H , G nin bir altgrubu olduğundan $e \in H$ dir ve H ayrık altuzay olduğundan $\{e\} \subseteq H$ açıktır. O halde $U \cap H = \{e\}$ olacak biçimde G uzayında e noktasının bir U açık komşuluğu vardır. G topolojik grup olduğundan e noktasının $V = V^{-1}$ ve $V^4 \subseteq U$ olacak biçimde bir V açık komşuluğu vardır. $U \cap H = \{e\}$ ve H bir altgrup olduğundan H bir U ayrık kümedir. O halde Lemma 4.1.32 den $\mathcal{S} = \{hV : h \in H\}$ ailesi G uzayında ayrıktır. $\mathcal{S}$ ailesi G sözde kompakt uzayının boştan farklı açık altkümelerinin ayrık bir ailesidir ve ayrık her aile yerel sonlu olduğundan $\mathcal{S}$ ailesi Teorem 4.1.35 den sonludur. Bu da H altgrubunun sonlu olmasını gerektirir. $\square$

Şimdi bu teoremle ilgili bir sonuç verilecektir.

4.1.37. Sonuç

Her sonsuz sözde kompakt topolojik grup kapalı olmayan sayılabilir bir altküme içerir.

İspat

G sonsuz sözde kompakt bir topolojik grup ve A kümesi G nin sayılabilir sonsuz bir altkümesi olsun. G nin A kümesi tarafından cebirsel olarak üretilen altgrubunu H ile gösterelim. Bu durumda H altkümesi de sayılabilir sonsuzdur. Dolayısıyla Teorem 4.1.36 dan H altgrubu ayrık olamaz. $e \in G$ birim olmak üzere $B = H \setminus \{e\}$ denilirse H altkümesi ayrık olmadığından B kümesi H altuzayında kapalı olamaz. O halde B kümesi G uzayında kapalı değildir. Üstelik H sayılabilir olduğundan B kümesi de sayılabilir. Böylece B kümesi G uzayında kapalı olmayan sayılabilir bir altkümedir.

□

Bu sonuç sonsuz sözde kompakt topolojik uzaylara genişletilemez, fakat aşıkarak sonsuz kardinalitedeki sayılabilir kompakt her topolojik uzay için doğrudur.

Şimdi A. Kertész ve T. Szele tarafından verilen bir teoremle sonsuz Abelyan gruplar üzerine Tychonoff topolojisi kondurulacak ve bu topolojiyle bir topolojik grup olduğu görülecektir.

4.1.38 Teorem

Her G sonsuz Abelyan grubunun üzerine G bir topolojik grup olacak biçimde ayrık topoloji dışında bir Tychonoff topolojisi kondurulabilir.

İspat

$a \neq e$ olacak biçimdeki her $a \in G$ için Önerme 2.2.4 den $f_a(a) \neq 1$ olacak biçimde bir $f_a : G \rightarrow \mathbb{T}$ homomorfizması vardır. $\{f_a : a \in G, a \neq e\}$ ailesinin köşegen çarpımı f olsun. O halde

$$\begin{aligned} \nabla_{a \in G \setminus \{e\}} f_a &= f : G \longrightarrow \mathbb{T}^G \\ x &\longrightarrow f(x) : G \longrightarrow \mathbb{T} \\ a &\longrightarrow f(x)(a) = f_a(x) \text{ dir.} \end{aligned}$$

f dönüşümünün bire-bir ve bir homomorfizma olduğu kolayca görülebilir. O halde G , $\mathbb{T}^G$ grubunun $f(G) = H$ altgrubuna izomorftur. İlâveten $\mathbb{T}$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır. Kompakt uzayların keyfi çoklukta çarpımları da kompakt olduğundan $\mathbb{T}^G$ kompakttır. Kompakt uzaylar normal bir uzay ve normal uzaylar da bir Tychonoff uzay olduğundan $\mathbb{T}^G$ bir Tychonoff uzaydır. Tychonoff uzayların altuzayları da Tychonoff olduğundan H altuzayı Tychonoff uzaydır. $G \cong H$

olduğundan H kümesi $\mathbb{T}^G$ uzayının sonsuz bir altgrubudur. Öyleyse Önerme 4.1.26 den H altgrubu ayrık olamaz. $\mathbb{T}^G$ çarpım uzayından H üzerine indirgenen topoloji $\mathcal{P}$ olsun. $f : G \rightarrow H$ dönüşümünü sürekli kılan $\tau = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{P}\}$ topolojisini alalım. Şimdi G üzerindeki τ topolojisinin Tychonoff topolojisi olduğunu görelim. $x \in G$ olmak üzere $x \notin F$ olacak biçimde G uzayının kapalı bir altkümelerini alalım. Bu durumda $x \in F^c$ olup $F^c \in \tau$ dur. O halde $F^c = f^{-1}(V)$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{P}$ vardır. $x \in f^{-1}(V)$ olduğundan $f(x) \in V$ olup $y = f(x)$ denilirse $y \notin V^c$ dir. Bu durumda $y \in V^c \subseteq H$ kapalı ve H Tychonoff uzay olduğundan $g(y) = 0$ ve $g(V^c) \subseteq \{1\}$ olacak biçimde sürekli bir $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü vardır. $h = g \circ f : G \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. g ve f dönüşümleri sürekli olduğundan h dönüşümü de süreklidir. Her $x \in G$ için $h(x) = g(f(x)) = g(y) = 0$ olur. İlaveten $p \in F$ alalım. Bu durumda $p \notin F^c$ olup $F^c = f^{-1}(V)$ olduğundan $p \in f^{-1}(V^c)$ olur. Böylece $f(p) \in V^c$ olup $g(f(p)) \in g(V^c) \subseteq \{1\}$ olur. O halde $h(F) \subseteq \{1\}$ olur. O halde (G, τ) bir Tychonoff uzaydır. G uzayının bu Tychonoff τ topolojisi ile bir topolojik grup olduğu kolayca görülebilir. $\square$

4.1.39. Tanım

G bir topolojik grup olmak üzere G nin e birim elemanını içeren tüm bağlantılı altkümelerinin birleşimine G nin bileşeni veya bağlantılı bileşeni denir.

Verilen bir noktayı içeren bağlantılı altuzayların herhangi bir ailesinin birleşimi bağlantılı olduğundan G nin bağlantılı bileşeni G nin birimini içeren en büyük bağlantılı altuzayıdır.

4.1.40. Önerme

Topolojik grupların bağlantılı bileşenleri kapalı bir normal altgruptur.

İspat

G bir topolojik grup olmak üzere H kümesi G nin bağlantılı bir bileşeni olsun. Önce H kümesinin G nin bir altgrubu olduğunu görelim. Her $h \in H$ için $hH \subseteq H$ dir. Şöyleki; $h \in H$ olsun. G bir topolojik grup olduğundan $\lambda_h : G \rightarrow G$ sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup H bağlantılı olduğundan $\lambda_h(H) = hH$ kümesi de bağlantılıdır. H bağlantılı bileşen olduğundan $e \in H$ olup $he = h$ eşitliğinden $hH \cap H \neq \emptyset$ dir. Böylece $hH \cup H$ kümesi e yi içeren bağlantılı bir küme olup $hH \cup H \subseteq H$ olur ki bu da $hH \subseteq H$ oluşunu verir. O halde her $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 h_2 \in h_1 H \subseteq H$ olup $h_1 h_2 \in H$ dir. Şimdi de her $h \in H$ için $h^{-1} \in H$ olduğunu görelim. Her $x \in G$ için $\Phi(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $\Phi : G \rightarrow G$ fonksiyonu homeomorfizma olduğundan $\Phi(H)$ kümesi bağlantılıdır.

$\Phi(e) = e^{-1} = e$ olduğundan $e \in \Phi(H)$ dır. H kümesi e yi içeren en büyük bağlantılı küme olduğundan $\Phi(H) \subseteq H$ dır. O halde her $h \in H$ için $\Phi(h) = h^{-1} \in \Phi(H) \subseteq H$ olup $h^{-1} \in H$ dır. Böylece H kümesinin G nin bir altgrubu olduğu görülmüş olur. Şimdi de H nin normal altgrup olduğunu görelim. Bu amaçla her $a \in G$ için $aHa^{-1} = H$ olduğunu göreceğiz. $a \in G$ olsun. $e \in H$ olduğundan $e \in aHa^{-1}$ dir. Öte yandan $r_{a^{-1}} : G \rightarrow G$ sağ öteleme ve $\lambda_a : G \rightarrow G$ sol öteleme dönüşümleri homeomorfizma olduklarından aHa^{-1} kümesi bağlantılıdır. H nin bağlantılı bileşen oluşu $aHa^{-1} \subseteq H$ oluşunu verir. r_a sağ öteleme ve $\lambda_{a^{-1}}$ sol öteleme dönüşümleri homeomorfizma olduklarından benzer biçimde $a^{-1}Ha \subseteq H$ olup $H \subseteq aHa^{-1}$ elde edilir. O halde $H = aHa^{-1}$ olup H G nin bir normal altgrubudur. Öte yandan H kümesi bağlantılı olduğundan $\overline{H}$ de bağlantılıdır. H kümesi, G nin, birimi içeren en büyük bağlantılı altkütmesi olduğundan $\overline{H} \subseteq H$ olup H kümesi kapalıdır. Böylece H kümesi G nin kapalı bir normal altgrubu olur. $\square$

Bir sonraki teoremden bağlantılı topolojik grupların ayrık normal altgruplarının grubun merkezi olduğu görülecektir. Şimdi bu teoremden kullanılacak olan aşağıdaki lemma verilecektir.

4.1.41. Lemma

G bağlantılı bir topolojik grup olmak üzere U kümesi G nin e birim elemanının açık bir komşuluğu ise $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ olur.

İspat

U kümesi e nin açık bir komşuluğu olsun. G bir topolojik grup olduğundan $V \subseteq U$ olacak biçimde e nin simetrik bir V açık komşuluğu vardır. $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ olsun. H kümesinin G nin açık bir altgrubu olduğu basitçe görülebilir. Teorem 3.1.6 dan topolojik grupların açık altgrupları aynı zamanda kapalı olduğundan H altgrubu kapalıdır. G bağlantılı olduğundan $H = G$ olmak zorundadır. O halde $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ olup $V \subseteq U$ olduğundan $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ elde edilir. $\square$

4.1.42 Teorem

G bağlantılı bir topolojik grup olmak üzere, eğer K kümesi G nin ayrık normal bir altgrubu ise her $a \in K$ ve her $b \in G$ için $ab = ba$ olur. Yani K G nin merkezidir.

İspat

K kümesi G nin ayrık normal bir altgrubu olsun. $K = \{e\}$ ise teoremin ispatı aşıkardır.

O halde $x \neq e$ olmak üzere $x \in K$ alalım. K ayrık uzay olduğundan $U \cap K = \{x\}$ olacak biçimde G uzayında x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. $exe = x$ olup G bir topolojik grup olduğundan $VxV \subseteq U$ olacak biçimde G uzayında e nin simetrik bir V açık komşuluğu vardır. Şöyleki;

$e(xe) = x \in U$ ve G topolojik grup olduğundan $TW \subseteq U$ olacak biçimde G uzayında $e \in T$ ve $xe \in W$ açıkları vardır. $xe \in W$ olduğundan $e \in x^{-1}W$ olur. Böylece $e \in T \cap x^{-1}W$ olup $T \cap x^{-1}W$ açık olup $V \subseteq T \cap x^{-1}W$ olacak biçimde e nin simetrik bir V açık komşuluğu vardır. Şimdi bir $p \in VxV$ alalım. O halde $p = zxv$ olacak biçimde $z, v \in V$ vardır. $z \in V$ olduğundan $z \in T$ dir ve $v \in V$ olduğundan $v \in x^{-1}W$ olup $xv \in W$ elde edilir. Bu durumda $zxv \in TW \subseteq U$ olup $VxV \subseteq U$ elde edilir.

Şimdi x in V nin her elemanı ile değişmeli olduğunu görelim. $y \in V$ olsun. K kümesi G nin normal bir altgrubu olduğundan $xyx^{-1} \in K$ olup V simetrik olduğundan $xyx^{-1} \in VxV^{-1} = VxV \subseteq U$ olur. O halde $xyx^{-1} \in U \cap K = \{x\}$ elde edilir. Bu durumda $xyx^{-1} = x$ olup her $y \in V$ için $yx = xy$ eşitliği sağlanır. Öte yandan Lemma 4.1.41 den $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n = G$ olup her $g \in G$ için $g = y_1 y_2 \cdots y_{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $y_1, y_2, \dots, y_{n_0} \in V$ vardır. x elemanı V nin her elemanı ile değişmeli olduğundan

$$gx = y_1 y_2 \cdots y_{n_0} x = y_1 y_2 \cdots x y_{n_0} = y_1 x y_2 \cdots y_{n_0} = x y_1 y_2 \cdots y_{n_0} = xg$$

olur. Dolayısıyla K ayrık normal altgrubu G nin merkezidir. $\square$

Şimdi topolojik ve paratopolojik gruplarda kapalı kümelerden kompakt altkümelerin ayrılışıyla ilgili bir kaç önemli özellik verilecektir.

4.1.43 Teorem

G bir paratopolojik grup, $F \subseteq G$ kompakt ve $P \subseteq G$ kapalı olmak üzere, eğer $F \cap P = \emptyset$ ise $FV \cap P = \emptyset$ ve $VF \cap P = \emptyset$ olacak biçimde e birim elemanının açık bir V komşuluğu vardır.

İspat

$F \cap P = \emptyset$ olduğundan her $x \in F$ için $x \in P^c$ olup P^c açıktır. O halde $\lambda_x(e) = x \in P^c$ olup λ_x sürekli olduğundan $\lambda_x(V_x) \subseteq P^c$ olacak biçimde e noktasının bir V_x açık komşuluğu vardır. Bu durumda $xV_x \subseteq P^c$ olup $xV_x \cap P = \emptyset$ olur. G paratopolojik grup olduğundan $h((x, y)) = xy$ biçiminde tanımlı $h : G \times G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli olup her $x \in F$ için $W_x^2 \subseteq V_x$ olacak biçimde e noktasının bir W_x açık komşuluğu vardır. O halde her $x \in F$ için $x \in xW_x$ olup $F \subseteq \bigcup_{x \in F} xW_x$ olur. Böylece $\{xW_x : x \in F\}$ ailesi F için bir açık örtü olur. F kompakt olduğundan $F \subseteq \bigcup_{x \in S} xW_x$ olacak biçimde sonlu

bir $S \subseteq F$ vardır. $V_1 = \bigcap_{x \in S} W_x$ denilirse $FV_1 \cap P = \emptyset$ dir. Şöyleki; her $y \in F$ için $y \in xW_x$ olacak biçimde bir $x \in S$ vardır. Bu durumda

$$yV_1 \subseteq xW_xV_1 \subseteq xW_xW_x \subseteq xV_x \subseteq P^c$$

olup her $y \in F$ için $yV_1 \cap P = \emptyset$ ve böylece $FV_1 \cap P = \emptyset$ olur. Benzer biçimde sağ öteleme dönüşümünün sürekliliğinden $V_2F \cap P = \emptyset$ olacak biçimde bir V_2 açığı vardır. $V = V_1 \cap V_2$ denilirse hem $FV \cap P = \emptyset$ hem de $VF \cap P = \emptyset$ sağlanır. $\square$

4.1.44 Teorem

G bir topolojik grup olmak üzere $F \subseteq G$ kompakt ve $P \subseteq G$ kapalı ise FP ve PF kümeleri G uzayında kapalıdır.

İspat

$F \subseteq G$ kompakt ve $P \subseteq G$ kapalı olsun. $a \notin FP$ alalım. Bu durumda $F^{-1}a \cap P = \emptyset$ olur. Şöyleki; kabul edelimki $F^{-1}a \cap P \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse bir $b \in F^{-1}a \cap P$ alalım. Bu durumda $b = y^{-1}a$ olacak biçimde bir $y \in F$ vardır. $b = y^{-1}a$ olduğundan $a = yb \in FP$ olur. Bu da $a \notin FP$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $F^{-1}a \cap P = \emptyset$ eşitliği sağlanır.

G bir topolojik grup olduğundan her $x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $f : G \rightarrow G$ dönüşümü ve r_a sağ öteleme dönüşümü sürekli olduğundan $(r_a \circ f)(F) = F^{-1}a$ kümesi kompakttır. Teorem 4.1.43 den $F^{-1}aU \cap P = \emptyset$ olacak biçimde e noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Önerme 4.1.6 den $aU \cap FP = \emptyset$ olup aU açık olduğundan $a \notin \overline{FP}$ olur. Böylece $a \notin FP$ için $a \notin \overline{FP}$ olduğundan $\overline{FP} \subseteq FP$ olup FP kümesi G uzayında kapalıdır. PF kümesinin G uzayında kapalı olduğu benzer biçimde görülebilir. $\square$

Şimdi kolayca görülebilecek bir önerme verilecektir.

4.1.45. Önerme

G bir paratopolojik grup olmak üzere $E, F \subseteq G$ kompakt ise $EF \subseteq G$ çarpım kümesi de kompakttır.

4.1.46. Önerme

G bir topolojik grup olmak üzere $B \subseteq G$ kompakt ise e birim elemanın her U

komşuluğu için e nin öyle bir V komşuluğu vardır ki her $b \in B$ için $bVb^{-1} \subseteq U$ olur.

İspat

$B \subseteq G$ kompakt ve U kümesi e birim elemanın bir komşuluğu olsun. G bir topolojik grup olduğundan $W^3 \subseteq U$ olacak biçimde e nin simetrik bir W açık komşuluğu vardır. $e \in W$ olduğundan her $b \in B$ için $b \in Wb$ olup $B \subseteq \bigcup_{b \in B} Wb$ olur. O halde $\{Wb : b \in B\}$ ailesi B için bir açık örtüdür. B kompakt bir küme olduğundan $B \subseteq \bigcup_{b \in F} Wb$ olacak biçimde sonlu bir $F \subseteq B$ vardır. Bu durumda $B \subseteq \bigcup_{b \in F} Wb \subseteq WF$ elde edilir. $V = \bigcap_{x \in F} x^{-1}Wx$ denilirse $x^{-1}Wx$ açık ve F sonlu olduğundan V açık olur. $B \subseteq WF$ olduğundan her $b \in B$ için $b = wx$ olacak biçimde bir $x \in F, w \in W$ vardır. O halde $bVb^{-1} = wxVx^{-1}w^{-1} \subseteq wWw^{-1} \subseteq W^3 \subseteq U$ elde edilir. Böylece $bVb^{-1} \subseteq U$ olur. $\square$

5. TOPOLOJİK BÖLÜM GRUPLARI

5.1. Topolojik Bölüm Grupları

Topolojik gruplar üzerinde temel çalışmalardan biri bölüm grupları üzerinedir.

G bir topolojik grup ve H de G nin kapalı bir altgrubu ise G/H topolojik bölüm grubundan bahsedebileceğiz. Eğer G bir sol(sağ) topolojik grup ve H de G nin kapalı bir normal altgrubu veya G bir topolojik grup ve H de G nin kapalı bir altgrubu ise $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü açık bir dönüşümdür.

Burada G/H ın T_1 -uzay olması için ileride görüleceği üzere H kapalı olmalıdır. Aynı zamanda G bir topolojik grup iken G/H ın da bir topolojik grup olması için kapalı H kümesinin bir normal altgrup olması gerektiğini göreceğiz. Bu kısımda topolojik bölüm gruplarının bazı temel özellikleri incelenecektir [7].

Aksi belirtilmedikçe $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümdür. İlaveten G topolojik grubunun birimi e olup, eğer birden fazla topolojik grup varsa karışıklık olmaması için G grubunun birimi e_G olarak alınacaktır.

5.1.1. Lemma

G bir sol topolojik grup, H G nin kapalı bir altgrubu olmak üzere, her $a \in G$ ve her $xH \in G/H$ için $h_a(xH) = axH$ biçiminde tanımlı $h_a : G/H \rightarrow G/H$ sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizmadır.

İspat

$a \in G$ olsun. h_a nın sürekli olduğunu görelim. $\emptyset \neq W \subseteq G/H$ açık olsun. $h_a^{-1}(W) = a^{-1}W$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Öyleyse $a^{-1}W$ kümesinin G/H uzayında açık olduğunu görelim. $W \subseteq G/H$ açık ve G/H üzerindeki topoloji bölüm topolojisi olduğundan $\pi^{-1}(W) \subseteq G$ açıktır. G sol topolojik grup olduğundan $\lambda_{a^{-1}}$ sol öteleme dönüşümü homeomorfizma olup $a^{-1}\pi^{-1}(W)$ kümesi G uzayında açıktır. Öte yandan $a^{-1}\pi^{-1}(W) = \pi^{-1}(a^{-1}W)$ olduğu kolayca görülebilir. O halde $\pi^{-1}(a^{-1}W)$ kümesi G uzayında açık olduğundan $a^{-1}W$ kümesi G/H bölüm uzayında açıktır. Böylece $h_a^{-1}(W) \subseteq G/H$ açık olup h_a dönüşümü süreklidir. Şimdi de h_a nın açık bir dönüşüm olduğunu görelim. Bunun için G/H uzayında bir W açığı alalım ve $h_a(W) = aW$ kümesinin açık olduğunu görelim. W , G/H uzayında açık ve G/H üzerindeki topoloji bölüm topolojisi olduğundan $\pi^{-1}(W)$ de G uzayında açık olup

$a\pi^{-1}(W)$ kümesi G uzayında açıktır. İlaveten $\pi^{-1}(aW) = a\pi^{-1}(W)$ olduğundan $\pi^{-1}(aW)$ kümesi açık olup $h_a(W) = aW$ açıktır. Dolayısıyla h_a açık bir dönüşümdür. Her $a \in G$ için h_a nın bire bir ve örten olduğu basitçe görülebilir. O halde her $a \in G$ için h_a bir homeomorfizmadır. $\square$

5.1.2 Teorem

G , üzerindeki τ topolojisiyle bir yarı-topolojik grup, H kümesi G nin kapalı bir altgrubu olmak üzere, H nin tüm sol kosetlerinin G/H kümesi üzerinde bölüm topolojisi var olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanır

- i) Her $x \in G$ için $\mathcal{S} = \{\pi(xU) : U \in \tau, e \in U\}$ ailesi G/H uzayında xH noktasının bir komşuluklar tabanıdır.
- ii) $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü açık bir dönüşümdür.
- iii) G/H homojen bir uzaydır.
- iv) G/H bir T_1 -uzaydır.

İspat

i) $x \in G$ ve U birim eleman e nin açık bir komşuluğu olmak üzere $xH = xeH \in xUH = \pi(xU)$ dur. $\pi^{-1}(\pi(xU)) = xUH$ olup G bir yarı-topolojik grup olduğundan xUH açıktır. G/H üzerinde bölüm topolojisi var olduğundan $\pi(xU)$ kümesi G/H uzayında açıktır. O halde $\mathcal{S}$ ailesi xH noktasının komşuluklar ailesinin bir alt ailesidir. Şimdi G/H uzayında $xH \in W$ olacak biçimde bir W açığı alalım. $\pi(x) = xH$ ve π doğal dönüşümü sürekli olduğundan x noktasının $\pi(V) \subseteq W$ olacak biçimde bir V açık komşuluğu vardır ve $VH \subseteq W$ dir. $\lambda_x(e) = xe = x \in V$ olup G bir yarı-topolojik grup olduğundan λ_x sol öteleme dönüşümü süreklidir. O halde $\lambda_x(U) \subseteq V$ olacak biçimde e birim elemanın bir U açık komşuluğu vardır ve $xU \subseteq V$ olup $xUH \subseteq VH \subseteq W$ dir. Bu durumda $\pi(xU) \subseteq W$ olur. O halde $\mathcal{S}$ ailesi G/H uzayının xH noktasının bir komşuluklar tabanıdır.

ii) $V \subseteq G$ açık olsun. $\pi(V)$ kümesinin G/H uzayında açık olduğunu görelim. $\pi^{-1}(\pi(V)) = VH$ olup G bir yarı-topolojik grup olduğundan VH açıktır. G/H üzerinde bölüm topolojisi var olduğundan $\pi(V)$ kümesi G/H uzayında açık olup π açık bir dönüşümdür.

iii) Her $a \in G$ için $h_a(xH) = axH$ biçiminde tanımlı $h_a : G/H \rightarrow G/H$ dönüşümü Lemma 5.1.1 den bir homeomorfizmadır. $x, y \in G$ için $a = yx^{-1}$ olsun. $xH, yH \in G/H$ için $h_a(xH) = axH = yx^{-1}xH = yH$ olur. Dolayısıyla G/H homojen bir uzaydır.

iv) G/H in T_1 - uzay olduğunu görmek için her $aH \in G/H$ için $\{aH\}$ tek nokta kümesinin G/H uzayında kapalı olduğunu görmek yeterlidir. G/H üzerinde bölüm topolojisi var olduğundan $\pi^{-1}(\{aH\})$ in G uzayında kapalı olduğu görülmelidir. $\pi^{-1}(\{aH\}) = aH$ dir. G bir yarı-topolojik grup olduğundan her sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup H kapalı olduğundan aH G uzayında kapalıdır. Böylece $\{aH\}$ da G/H uzayında kapalı olur. O halde G/H bir T_1 -uzaydır. $\square$

Aşağıdaki örnek bize, H alt grubunun kapalı olmadığı durumda G/H uzayının T_1 -uzay olmak zorunda olmadığını söyleyecektir.

Örnek

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ koset uzayının üzerindeki topoloji aşık ar (ayrık olmayan) topolojidir. Şöyleki; $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ açık olsun. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ üzerindeki topoloji bölüm topolojisi olduğundan $\pi^{-1}(V)$ $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir açık alt kümesidir. $(\mathbb{R}, +)$ bir topolojik grup olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için λ_{-x} sol öteleme dönüşümü homeomorfizma olup $\lambda_{-x}(\pi^{-1}(V)) = -x + \pi^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}$ açıktır. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap (-x + \pi^{-1}(V)) \neq \emptyset$ olup $q \in -x + \pi^{-1}(V)$ olacak biçimde bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. Bu durumda $x + q \in \pi^{-1}(V)$ olup $\pi(x + q) = x + q + \mathbb{Q} = x + \mathbb{Q} \in V$ olur ki $x + \mathbb{Q} = \pi(x)$ olduğundan $\pi(x) \in V$ olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için $\pi(x) \in V$ olup $\pi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathbb{Q} \subseteq V$ olur ki bu da bize $V = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ eşitliğini verir.

Teorem 5.1.2 de G bir sol(sağ) topolojik grup ve H kapalı normal alt grup alınır sa teoremin ifadeleri yine sağlanır.

5.1.3. Önerme

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir alt grubu olmak üzere $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşüm, her $a \in G$ için λ_a G üzerinde bir sol öteleme dönüşümü ve h_a G/H üzerinde bir sol öteleme dönüşümü olmak üzere, λ_a ve h_a dönüşümleri birer homeomorfizma olup $\pi \circ \lambda_a = h_a \circ \pi$ dir.

İspat

Sonuç 3.1.2 de λ_a nın ve Lemma 5.1.1 de h_a nın homeomorfizma oldukları görüldü. Şimdi $\pi \circ \lambda_a = h_a \circ \pi$ olduğunu görelim. Her $x \in G$ için $(\pi \circ \lambda_a)(x) = \pi(\lambda_a(x)) = \pi(ax) = axH$ ve $(h_a \circ \pi)(x) = h_a(\pi(x)) = h_a(xH) = axH$ olduğundan istenen eşitlik sağlanır. $\square$

G bir grup ve H kümesi G nin bir normal altgrubu olsun. G/H üzerinde bir çarpma işlemi şöyle tanımlansın; her $aH, bH \in G/H$ için $(aH)(bH) = abH$ olsun. Bu işleme göre G/H bir gruptur [10]. İlâveten birim elemanı H ve her aH elemanının tersi $a^{-1}H$ dir.

Şimdi bir sonraki teoremde kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

5.1.4. Lemma

G bir topolojik grup, H kümesi G nin kapalı bir normal altgrubu ve $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşüm olmak üzere G/H nin her W altkümesi için $\pi^{-1}(W^{-1}) = \pi^{-1}(W)^{-1}$ dir.

İspat

$W \subseteq G/H$ olsun. $x \in \pi^{-1}(W^{-1})$ alalım. $\pi(x) = xH \in W^{-1}$ olup $(xH)^{-1} = H^{-1}x^{-1} \in W$ dir. $H = H^{-1}$ olduğundan $Hx^{-1} \in W$ dir. H, G nin bir normal altgrubu olduğundan $Hx^{-1} = x^{-1}H$ olup $x^{-1}H = \pi(x^{-1}) \in W$ dir. Bu durumda $x^{-1} \in \pi^{-1}(W)$ olup $x \in \pi^{-1}(W)^{-1}$ elde edilir. Diğer yandan $y \in \pi^{-1}(W)^{-1}$ alınırsa $y^{-1} \in \pi^{-1}(W)$ olup $\pi(y^{-1}) = y^{-1}H \in W$ olur. H altgrubu normal olduğundan $y^{-1}H = (yH)^{-1}$ olduğundan $\pi(y) \in W^{-1}$ olur ve böylece $y \in \pi^{-1}(W^{-1})$ elde edilir. O halde $\pi^{-1}(W^{-1}) = \pi^{-1}(W)^{-1}$ dir. $\square$

5.1.5 Teorem

G bir sol topolojik grup ve H kümesi G nin bir kapalı normal altgrubu ise aşağıdaki koşullar sağlanır.

- i) G/H bir sol topolojik gruptur.
- ii) $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü açık, sürekli bir homomorfizmadır.
- iii) G bir topolojik grup(yarıgrup) ise G/H da bir topolojik grup(yarıgrup)tur.

İspat

G bir sol topolojik grup ve H kümesi G nin bir kapalı normal altgrubu olsun.

- i) Lemma 5.1.1 de her $a \in G$ için h_a sol öteleme dönüşümünün sürekli olduğu görüldü. O halde G/H bir sol topolojik gruptur.
- ii) π doğal dönüşümünün sürekli olduğu aşıkardır. Şimdi π doğal dönüşümünün açık

bir dönüşüm olduğunu görelim. $V \subseteq G$ açık olsun. $\pi^{-1}(\pi(V)) = VH$ dır. H, G nin bir normal altgrubu olduğundan $VH = HV$ olur ve HV kümesi G uzayında açıktır. $\pi^{-1}(\pi(V)) = VH$ olduğundan $\pi^{-1}(\pi(V))$ de G uzayında açık olur. Dolayısıyla $\pi(V)$ de G/H uzayında açıktır. O halde π bir açık dönüşümdür. Şimdi π nin bir homomorfizma olduğunu görelim. Her $a, b \in G$ için $\pi(ab) = abH$ dır. Diğer yandan $\pi(a)\pi(b) = aHbH$ dır. H, G nin bir normal altgrubu olduğundan $aHbH = abH$ olup π dönüşümü bir homomorfizmadır.

Not edelim ki, eğer G bir sağ topolojik grup ise π dönüşümü açık dönüşüm olur.

iii) G bir topolojik grup olsun. O halde her $x, y \in G$ için $h((x, y)) = xy$, $f(x) = x^{-1}$ biçiminde tanımlı $h : G \times G \rightarrow G$ ve $f : G \rightarrow G$ dönüşümleri süreklidir. G/H ın bir topolojik grup olduğunu görmek için her $xH, yH \in G/H$ için $g((xH, yH)) = xyH$, $j(xH) = (xH)^{-1}$ biçiminde tanımlı $g : G/H \times G/H \rightarrow G/H$ ve $j : G/H \rightarrow G/H$ dönüşümlerinin sürekli olduğu görülmelidir. İlk olarak g dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. G/H uzayında $g((xH, yH)) \in W$ olacak biçimde bir W açığı alalım. Öyleyse $xyH = \pi(xy) \in W$ olup $xy \in \pi^{-1}(W)$ dir. π dönüşümü sürekli olduğundan $\pi^{-1}(W)$ de G uzayında açıktır. $h((x, y)) = xy \in \pi^{-1}(W)$ olup h dönüşümü sürekli olduğundan G uzayında $x \in U$ ve $y \in V$ olacak biçimde öyle U ve V açıkları vardır ki $h((U, V)) = UV \subseteq \pi^{-1}(W)$ olup $\pi(UV) \subseteq W$ elde edilir. π dönüşümü (ii) den açık bir homomorfizma olduğundan $\pi(U)\pi(V) \subseteq W$ olup $(UH)(VH) \subseteq W$ dir ve UH ve VH açıktır. Dolayısıyla $(xH)(yH) \in (UH)(VH) = UVH \subseteq W$ olup $g((UH, VH)) \subseteq W$ olur. O halde g dönüşümü süreklidir. Şimdi de j dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. G/H üzerinde bölüm topolojisi var olduğundan $j^{-1}(W)$ nin G/H uzayında açık olması için $\pi^{-1}(j^{-1}(W))$ nin G uzayında açık olduğu görülmelidir. $j^{-1}(W) = W^{-1}$ olduğu basitçe görülebilir. Bu durumda $\pi^{-1}(j^{-1}(W)) = \pi^{-1}(W^{-1})$ dir. İlaveten Lemma 5.1.4 den $\pi^{-1}(W^{-1}) = \pi^{-1}(W)^{-1}$ olduğundan $\pi^{-1}(j^{-1}(W)) = \pi^{-1}(W)^{-1}$ dir. W açık ve π doğal dönüşümü sürekli olduğundan $\pi^{-1}(W)$ de G de açıktır. G bir topolojik grup olduğundan $\pi^{-1}(W)^{-1}$ de G de açıktır. Bu durumda $\pi^{-1}(j^{-1}(W))$ de G de açıktır. Dolayısıyla $j^{-1}(W)$ de G/H uzayında açık olup j dönüşümü süreklidir. O halde hem g hem de j dönüşümü sürekli olduğundan G/H bir topolojik gruptur. G nin bir topolojik yarıgrup olması durumunda G/H ın da bir topolojik yarıgrup olduğu benzer biçimde görülebilir. $\square$

5.1.6. Önerme

G bir sol topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir altgrubu olmak üzere G/H bölüm uzayı ayrıktır $\Leftrightarrow H$ altgrubu G uzayında açıktır.

İspat

($\Rightarrow$) : G/H ayrık bir uzay olsun. G/H in birim elemanı H olup $\{H\}$ tek nokta kümesi G/H uzayında açıktır. G/H üzerinde bölüm topolojisi var olduğundan $\pi^{-1}(\{H\})$ de G uzayında açıktır. $\pi^{-1}(\{H\}) = H$ olduğundan H kümesi G uzayında açıktır.

($\Leftarrow$) : H altgrubu G uzayında açık olsun. G/H in herhangi bir xH elemanını alalım. $\pi^{-1}(\{xH\}) = xH$ olduğundan ve λ_x sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $\lambda_x(H) = xH$ açık olup G/H içindeki her $\{xH\}$ tek nokta kümesi açıktır. O halde G/H bir ayrık uzaydır. $\square$

Şimdi bölüm uzaylarının kapanış operatörüyle ilgili bir lemma verilecektir.

5.1.7. Lemma

G bir topolojik grup, H kümesi G nin kapalı bir altgrubu ve $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal bir dönüşüm olmak üzere, eğer e birim elemanının $V^{-1}V \subseteq U$ olacak biçimdeki her U, V açık komşulukları için $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$ dur.

İspat

U ve V e birim elemanının $V^{-1}V \subseteq U$ olacak biçimde açık komşulukları olsun. $p \in \overline{\pi(V)}$ olsun. π örten bir dönüşüm olduğundan $p = \pi(x)$ olacak biçimde bir $x \in G$ vardır ve $\pi(x) \in \overline{\pi(V)}$ dir. $e \in V$ olduğundan $x \in Vx$ dir. π açık dönüşüm ve Vx açık olduğundan $\pi(Vx)$ de G/H uzayında açıktır. O halde $\pi(x) \in \overline{\pi(V)}$ ve $\pi(Vx)$ açık olduğundan $\pi(Vx) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ olup $\pi(ax) = \pi(b)$ olacak biçimde $a, b \in V$ vardır. O halde $axH = bH$ olup $axh_1 = bh_2$ olacak biçimde bir $h_1, h_2 \in H$ vardır ve $x = a^{-1}bh_2h_1^{-1}$ dir. $h_2h_1^{-1} = h$ denilirse $x = a^{-1}bh$ olup $a^{-1}b \in V^{-1}V \subseteq U$ olduğundan $x = a^{-1}bh \in V^{-1}VH \subseteq UH$ olur ve böylece $\pi(x) \in \pi(UH) = \pi(U)$ olduğundan $\pi(x) \in \pi(U)$ elde edilir. O halde $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$ dir. $\square$

5.1.8 Teorem

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir altgrubu ise G/H bölüm uzayı regüler bir uzaydır.

İspat

Teorem 5.1.2 den G/H homojen bir uzay olduğundan $\pi(e) \in W$ olacak biçimdeki her

$W \subseteq G/H$ açığı için $\pi(e) \in T \subseteq \overline{T} \subseteq W$ olacak biçimde bir $T \subseteq G/H$ açığının var olduğunu görmek yeterlidir. G/H uzayında $\pi(e) \in W$ olacak biçimde bir W açığı alalım. π sürekli olduğundan $\pi(U) \subseteq W$ olacak biçimde e noktasının bir U açık komşuluğu vardır. G bir topolojik grup olduğundan $V^{-1}V \subseteq U$ olacak biçimde e birim elemanın açık simetrik bir V komşuluğu vardır. $e \in V$ olduğundan $\pi(e) \in \pi(V)$ olur. π açık dönüşüm olduğundan $\pi(V)$ de G/H uzayında açıktır. Bu durumda Lemma 5.1.7 den $\pi(e) \in \pi(V) \subseteq \overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U) \subseteq W$ olup G/H regüler bir uzaydır. $\square$

G/H uzayı T_1 ve regüler olduğundan bir T_3 -uzaydır.

5.1.9. Tanım

X ve Y bir topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere f dönüşümü kapalı, sürekli ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ fiberleri kompakt ise f dönüşümüne mükemmel bir dönüşüm denir.

5.1.10 Teorem

G bir topolojik grup olmak üzere, eğer H kümesi G nin kompakt bir altgrubu ise $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü mükemmel bir dönüşümdür.

İspat

H kümesi G nin kompakt bir altgrubu olsun. G/H bölüm uzayı olduğundan π doğal dönüşümü süreklidir. Şimdi π nin kapalı bir dönüşüm olduğunu görelim. $P \subseteq G$ kapalı olsun. $\pi(P)$ nin G/H uzayında kapalı olduğunu görelim. G/H bölüm uzayı olduğundan $\pi(P)$ nin G/H de kapalı olması için $\pi^{-1}(\pi(P))$ nin de G uzayında kapalı olduğu görülmelidir. $\pi^{-1}(\pi(P)) = PH$ olup P altkümesi G uzayında kapalı ve H kompakt olduğundan Teorem 4.1.44 den PH kümesi G uzayında kapalıdır. O halde $\pi^{-1}(\pi(P))$ de G uzayında kapalı olur. Dolayısıyla $\pi(P)$ de G/H uzayında kapalıdır. O halde π kapalı bir dönüşümdür. Şimdi de fiberlerin kompakt olduğunu görelim. $x \in G$ olmak üzere $xH \in G/H$ alalım. H kompakt olduğundan H nin sürekli sol öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü xH de kompakt olup $\pi^{-1}(xH) = xH$ olduğundan fiberler kompakttır. O halde π mükemmel bir dönüşümdür. $\square$

Kompakt uzayların mükemmel dönüşüm altındaki öngörüntüleri de kompakt olduğundan [8], aşağıdaki sonuç verilebilir.

5.1.11. Sonuç

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin kompakt bir altgrubu olmak üzere eğer G/H bölüm uzayı kompakt ise G uzayı da kompakttır.

Şimdi çekirdeklerinin büyüklüklerine göre bir grubun iki homomorfizması karşılaştırılacaktır.

5.1.12. Önerme

G, H ve K gruplar olmak üzere $\Psi(G) = K$, $\ker \Psi \subseteq \ker \varphi$ olacak biçimde $\varphi : G \rightarrow H$ ve $\Psi : G \rightarrow K$ birer homomorfizma olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i) $\varphi = f \circ \Psi$ olacak biçimde bir $f : K \rightarrow H$ homomorfizması vardır.
- ii) Eğer G, H, K sol topolojik gruplar, φ ve Ψ sürekli, H in birim elemanı e_H in her U açık komşuluğu için $\Psi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ olacak biçimde K nin birim elemanı e_K nin bir V açık komşuluğu var ise f sürekli dir.

İspat

i) Her $x \in K$ için $f(x) = \varphi \circ \Psi^{-1}(x)$ biçiminde tanımlı $f : K \rightarrow H$ dönüşümünü alalım. İlk olarak f nin iyi tanımlı olduğunu görelim. $y, z \in \Psi^{-1}(x)$ olsun. O halde $\Psi(y) = \Psi(z) = x$ olup Ψ homomorfizma olduğundan $\Psi(y)\Psi(z^{-1}) = \Psi(yz^{-1}) = e_K$ dir. O halde $yz^{-1} \in \ker \Psi$ olup $\ker \Psi \subseteq \ker \varphi$ olduğundan $yz^{-1} \in \ker \varphi$ dir. Bu durumda φ homomorfizma olduğundan $\varphi(yz^{-1}) = \varphi(y)(\varphi(z))^{-1} = e_H$ olup $\varphi(y) = \varphi(z)$ elde edilir. Dolayısıyla f iyi tanımlıdır. $f = \varphi \circ \Psi^{-1}$ olduğundan $f \circ \Psi = \varphi$ olur.

Şimdi f nin bir homomorfizma olduğunu görelim. $x, y \in K$ alalım. Ψ örten olduğundan $x = \Psi(p), y = \Psi(q)$ olacak biçimde $p, q \in G$ vardır. Bu durumda $f(xy) = f(\Psi(p)\Psi(q))$ olup Ψ bir homomorfizma olduğundan $f(\Psi(p)\Psi(q)) = f(\Psi(pq))$ dur. $\varphi = f \circ \Psi$ olduğundan $f(\Psi(pq)) = \varphi(pq)$ elde edilir. φ bir homomorfizma olduğundan $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$ dur. O halde $\varphi(p)\varphi(q) = f(\Psi(p))f(\Psi(q)) = f(x)f(y)$ olur. O halde $f(xy) = f(x)f(y)$ olup f bir homomorfizmadır.

ii) G, H ve K sol topolojik gruplar, φ ve Ψ sürekli, e_H in her U açık komşuluğu için $\Psi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ olacak biçimde e_K nin bir V açık komşuluğu var olsun. Şimdi f nin e_K noktasında sürekli olduğunu görelim. H uzayında $f(e_K) \in U$ olacak biçimde bir U açığını alalım. f bir homomorfizma olduğundan $f(e_K) = e_H \in U$ dur. U e_H in açık bir komşuluğu olduğundan kabulden $\Psi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ olacak biçimde e_K nin açık bir V komşuluğu vardır. Böylece $\varphi(\Psi^{-1}(V)) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(U))$ olur. Bu durumda $f(V) \subseteq U$

olup f dönüşümü e_K noktasında süreklidir. O halde Sonuç 3.1.4 den f homomorfizması süreklidir. $\square$

Şimdi bu önermeyle ilgili bir sonuç verilecektir

5.1.13. Sonuç

G, H ve K sol topolojik gruplar, $\psi(G) = K$ ve $\ker\psi \subseteq \ker\varphi$ olacak biçimde $\varphi : G \rightarrow H$, $\psi : G \rightarrow K$ sürekli homomorfizmalar olmak üzere, ψ açık bir dönüşüm ise $\varphi = f \circ \psi$ olacak biçimde sürekli bir $f : K \rightarrow H$ homomorfizması vardır.

İspat

ψ dönüşümü açık olsun. Önerme 5.1.12 den $\varphi = f \circ \psi$ olacak biçimde bir $f : K \rightarrow H$ homomorfizması vardır. $V \subseteq H$ açık olsun. $\varphi = f \circ \psi$ ve $\psi(G) = K$ olduğundan $f^{-1}(V) = \psi(\varphi^{-1}(V))$ olur. φ sürekli olduğundan $\varphi^{-1}(V)$ G uzayında açıktır. ψ açık bir dönüşüm olduğundan $\psi(\varphi^{-1}(V))$ de K uzayında açıktır. O halde $f^{-1}(V)$ de K uzayında açıktır. Böylece f sürekli bir homomorfizmadır. $\square$

5.1.14. Önerme

G ve H sol topolojik gruplar, $p : G \rightarrow H$ bir topolojik izomorfizma olmak üzere, G_0 kümesi G nin kapalı normal bir altgrubu ve $p(G_0) = H_0$ ise her $x \in G$ ve $y = p(x)$ için $\Phi(xG_0) = yH_0$ biçiminde tanımlı $\Phi : G/G_0 \rightarrow H/H_0$ dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır.

İspat

G_0 kümesi G nin kapalı normal bir altgrubu ve $p(G_0) = H_0$ olsun. $\varphi : G \rightarrow G/G_0$ ve $\psi : H \rightarrow H/H_0$ doğal bir dönüşüm olmak üzere $\psi \circ p = \Phi \circ \varphi$ olacak biçimde aşağıdaki diyagramı tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p} & H \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ G/G_0 & \xrightarrow{\Phi} & H/H_0 \end{array}$$

Φ nin bire-bir örten bir homomorfizma olduğu kolayca görülebilir. p, ψ, φ birer açık sürekli homomorfizma ve $\psi \circ p = \Phi \circ \varphi$ olduğundan Φ de açık sürekli bir

homomorfizmadır. İlâveten Φ bire-bir, örten ve açık olduğundan Φ^{-1} de süreklidir. O halde Φ bir topolojik izomorfizmadır. Böylece H/H_0 ve G/G_0 topolojik olarak izomorftur. $\square$

Şimdi birinci izomorfizma teoremi olarak bilinen teorem verilecektir.

5.1.15 Teorem

G ve H sol topolojik gruplar, $\ker p = N$ olmak üzere, $p : G \rightarrow H$ sürekli, açık, örten bir homomorfizma ise N kümesi G nin kapalı bir normal altgrubudur ve her $y \in H$ için $p^{-1}(y)$ fiberleri G de N nin bazı sol kosetlerinin birleşimidir ve $\Phi(xN) = p(x)$ biçiminde tanımlı $\Phi : G/N \rightarrow H$ dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır.

İspat

N kümesi grup teorisinden G nin normal bir altgrubudur. H ve G T_1 - uzay olduğundan $\{e_H\}$ kümesi H uzayında kapalıdır. O halde $p^{-1}(\{e_H\}) = N$ kümesi de G uzayında kapalıdır. Şimdi her $y \in H$ için $p^{-1}(y)$ fiberlerinin N nin bazı sol kosetlerinin birleşimi olduğunu görelim. Bunun için $p^{-1}(y) = \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} xN$ olduğu görülmelidir. $a \in \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} xN$ alalım. Bu durumda $a = x_0N$ olacak biçimde bir $x_0 \in p^{-1}(y)$ vardır ve $p(x_0) = y$ dir. $a = x_0N$ olduğundan $x_0^{-1}a \in N$ olur. $N = p^{-1}(e_H)$ olduğundan $x_0^{-1}a \in p^{-1}(e_H)$ olup $p(x_0^{-1}a) = e_H$ dir. p homomorfizma olduğundan $p(x_0)^{-1}p(a) = e_H$ olup $p(x_0) = y$ olduğundan $y^{-1}p(a) = e_H$ dir. O halde $p(a) = ye_H = y$ olup $a \in p^{-1}(y)$ dir. Diğer yandan $z \in p^{-1}(y)$ alınırsa $z \in \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} zN$ olduğu basitçe görülebilir. Böylece $p^{-1}(y) = \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} xN$ olur. Şimdi $\Phi(xN) = p(x)$ biçiminde tanımlı $\Phi : G/N \rightarrow H$ dönüşümünün bir topolojik izomorfizma olduğunu görelim. $\pi : G \rightarrow G/N$ bir doğal dönüşüm olmak üzere $p = \Phi \circ \pi$ olacak biçimde aşağıdaki diyagramı tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \Phi & \\ G/N & & \end{array}$$

Φ nin bir homomorfizma olduğu kolayca görülebilir. $\ker \Phi = \{N\}$ olduğundan Φ nin bire bir olduğu aşıkardır. Şimdi $y \in H$ alalım. p örten olduğundan $p(x) = y$ olacak biçimde bir $x \in G$ vardır ve $p(x) = \Phi(xN)$ olduğundan $\Phi(xN) = y$ dir. O halde Φ örtendir. Şimdi de Φ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. $\Phi(xN) \in W$ olacak biçimde H uzayında bir W açığı alalım. $\Phi(xN) = p(x)$ olduğundan $p(x) \in W$ dur. Bu durumda $x \in p^{-1}(W)$ olup p sürekli olduğundan $p^{-1}(W)$ de G uzayında açıktır. π açık

bir dönüşüm olduğundan $\pi(p^{-1}(W))$ de G/N bölüm uzayında açık olur. $x \in p^{-1}(W)$ olduğundan $xN = \pi(x) \in \pi(p^{-1}(W))$ dir. $\pi(p^{-1}(W)) = V$ denilirse $\Phi(V) = \Phi(\pi(p^{-1}(W)))$ olup $\Phi \circ \pi = p$ olduğundan $\Phi(\pi(p^{-1}(W))) = (pp^{-1})(W) \subseteq W$ olur. Böylece $\Phi(V) \subseteq W$ elde edilir. O halde Φ dönüşümü süreklidir. Şimdi Φ nin açık bir dönüşüm olduğunu görelim. G/N uzayında bir U açığı alalım. $\Phi \circ \pi = p$ olduğundan $\Phi(U) = p(\pi^{-1}(U))$ dir. π sürekli olduğundan $\pi^{-1}(U)$ de G uzayında açıktır. p açık bir dönüşüm olduğundan $p(\pi^{-1}(U))$ de H uzayında açıktır. O halde $\Phi(U)$ de H uzayında açıktır. Böylece Φ dönüşümü açık bir dönüşüm olur. Φ açık, bire bir ve örten olduğundan Φ^{-1} dönüşümü de süreklidir. O halde Φ dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır. $\square$

5.1.16. Önerme

G ve H sol topolojik gruplar ve $p : G \rightarrow H$ örten, sürekli bir homomorfizma olmak üzere, eğer G nin boştan farklı bir U altkütmesi için $p(U) \subseteq H$ açık ve $p|_U : U \rightarrow p(U)$ açık bir dönüşüm oluyorsa p açık bir dönüşümdür.

İspat

$\emptyset \neq U \subseteq G$ için $p(U) \subseteq H$ açık ve $p|_U : U \rightarrow p(U)$ açık bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $W \subseteq G$ açığını alalım. Eğer $W = \emptyset$ ise $p(\emptyset) = \emptyset$ olup $p(\emptyset) \subseteq H$ açıktır. Şimdi $W \neq \emptyset$ olmak üzere $p(W)$ nin H de açık olduğunu görelim. Bunun için $p(W) \subseteq p(W)^\circ$ olduğunu görmek yeterlidir. $t \in p(W)$ alalım. O halde $t = p(w)$ olacak biçimde bir $w \in W$ vardır. Aynı zamanda $U \neq \emptyset$ olduğundan bir $y \in U$ alalım. $\lambda_{yw^{-1}}(w) = yw^{-1}w = y$ ve $\lambda_{yw^{-1}}$ bir homeomorfizmadır. $w \in W$ olduğundan $\lambda_{yw^{-1}}(w) \in \lambda_{yw^{-1}}(W)$ ve $\lambda_{yw^{-1}}(W) \subseteq G$ açıktır. $U \cap \lambda_{yw^{-1}}(W) = V$ diyelim. V kümesi U da açıktır. $p|_U$ açık bir dönüşüm olduğundan $p|_U(V)$ açıktır. $p|_U(V) = p(V)$ ve hipotezden $p(U) \subseteq H$ açık olduğundan $p(V) \subseteq H$ açıktır. $z = p(yw^{-1})^{-1} \in H$ olmak üzere $l_z : H \rightarrow H$ sol öteleme dönüşümünü alalım. p bir homomorfizma olduğundan $l_z \circ p \circ \lambda_{yw^{-1}} = p$ eşitliği sağlanır. Öyleyse $l_z \circ p \circ \lambda_{yw^{-1}}(W) = p(W)$ dir. $p(V) \subseteq H$ açık ve l_z bir homeomorfizma olduğundan $l_z(p(V)) \subseteq H$ açıktır. $U \cap \lambda_{yw^{-1}}(W) = V$ idi. Öyleyse $l_z(p(V)) = l_z(p(U \cap \lambda_{yw^{-1}}(W))) \subseteq l_z(p(\lambda_{yw^{-1}}(W))) = p(W)$ dir. Son eşitliğe (*) diyelim. $w \in W$ olduğundan $\lambda_{yw^{-1}}(w) \in \lambda_{yw^{-1}}(W)$ olup $yw^{-1}w = y \in \lambda_{yw^{-1}}(W)$ olur. $y \in U$ ve $y \in \lambda_{yw^{-1}}(W)$ olduğundan $y \in U \cap \lambda_{yw^{-1}}(W) = V$ dir. O halde $t = p(w) = l_z(p(y)) \in l_z(p(V))$ olup (*) dan $l_z(p(V)) \subseteq p(W)$ dir ve $l_z(p(V)) \subseteq H$ açıktır. O halde $t \in p(W)^\circ$ olup $p(W) \subseteq p(W)^\circ$ olur. Böylece $p(W)$ açık olup p açık bir dönüşümdür. $\square$

5.1.17. Önerme

G ve H topolojik gruplar, $p : G \rightarrow H$ sürekli bir homomorfizma olmak üzere, G

uzayında e_G birim elemanının her U açık komşuluğu için $p(U)$ kümesi H de boştan farklı bir açık küme içerirse p açık bir dönüşümdür

İspat

G uzayında e_G birim elemanının her U açık komşuluğu için $p(U)$ kümesi H de boştan farklı bir açık içersin. $U \subseteq G$ açık olmak üzere $e_G \in U$ olsun. İlk olarak $p(e_G) = e_H$ ın $p(U)$ nun bir iç noktası olduğunu görelim. $e_G \in U$, U açık ve G bir topolojik grup olduğundan $VV^{-1} \subseteq U$ olacak biçimde e_G nin bir V açık komşuluğu vardır. Hipotezden $W \subseteq p(V)$ olacak biçimde H uzayında boştan farklı bir W açığı vardır. $W \neq \emptyset$ ve p bir homomorfizma olduğundan $e_H \in WW^{-1} \subseteq p(V)p(V)^{-1} = p(VV^{-1}) \subseteq p(U)$ olup $e_H \in p(U)^\circ$ dir. Buna (*) diyelim. Şimdi önermenin ispatını görelim. G de boştan farklı bir T açığı alalım. $p(T) \subseteq H$ ın açık olduğunu görelim. Bunun için $p(T) \subseteq p(T)^\circ$ olduğunu görmek yeterlidir. $y \in p(T)$ alalım. Öyleyse $y = p(x)$ olacak biçimde bir $x \in T$ vardır. O halde $e_G \in x^{-1}T$ ve $x^{-1}T$ açık olup (*) dan $e_H \in p(x^{-1}T)^\circ$ dir. Bu durumda $e_H \in S \subseteq p(x^{-1}T)$ olacak biçimde bir $S \subseteq H$ açığı vardır. $e_H \in S \subseteq p(x^{-1})p(T)$ olup $y = p(x) \in p(x)S \subseteq p(T)$ ve $p(x)S$ açık olduğundan $y \in p(T)^\circ$ dir. O halde $p(T) \subseteq p(T)^\circ$ olup $p(T)$ açıktır. Böylece p açık bir dönüşüm olur. $\square$

Şimdi bir sonraki teoremde kullanılacak bir lemma verilecektir.

5.1.18. Lemma

X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli örten bir dönüşüm olmak üzere, eğer D kümesi X uzayında yoğun ise $f(D)$ de Y uzayında yoğundur.

İspat

$D \subseteq X$ olmak üzere $\overline{D} = X$ olsun. Y uzayında boştan farklı bir U açığı alalım. f dönüşümü sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi X uzayında açıktır. D kümesi X içinde yoğun olduğundan $f^{-1}(U) \cap D \neq \emptyset$ dir.

O halde $\emptyset \neq f(f^{-1}(U) \cap D) \subseteq f(f^{-1}(U)) \cap f(D) \subseteq U \cap f(D)$ olur. O halde $f(D)$ kümesi Y uzayında yoğundur. $\square$

5.1.19 Teorem

G bir topolojik grup, H kümesi G nin kapalı bir altgrubu, $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşüm ve K kümesi G nin yoğun bir altgrubu olsun. $r = \pi|_K : K \rightarrow \pi(K)$ dönüşümü açıktır $\Leftrightarrow K \cap H$ kümesi H içinde yoğundur.

İspat

($\Leftarrow$) :

$K \cap H$ kümesi H içinde yoğun olsun. $r = \pi|_K$ dönüşümünün açık olduğunu görelim. K uzayında boştan farklı bir U açığı alalım. Öyleyse $U = V \cap K$ olacak biçimde G uzayında bir V açığı vardır. $\pi(V) \cap \pi(K) = O$ diyelim. π dönüşümü açık olduğundan O kümesi $\pi(K)$ uzayında açıktır. $r(U) = \pi|_K(U) = O$ olduğunu görelim. $y \in O$ olsun $y \in \pi(V) \cap \pi(K)$ dır ve $y = \pi(x)$ olacak biçimde bir $x \in K$ vardır. Bu durumda $xH \cap V = \pi^{-1}(y) \cap V \neq \emptyset$ dir. Şöyleki; $y \in \pi(V) \cap \pi(K)$ ise $y = \pi(x)$ olduğundan $\pi(x) \in \pi(V)$ olup $x \in \pi^{-1}(\pi(V)) = VH$ dır ve böylece $x = vh$ olacak biçimde $v \in V$ ve $h \in H$ vardır. Öyleyse $xh^{-1} = v$ dir. $xh^{-1} \in xH$ olduğundan $v \in xH$ dır. O halde $v \in xH \cap V$ olup $xH \cap V \neq \emptyset$ dir. Üstelik $xH \cap V$ kümesi xH içinde açıktır. Her topolojik grup bir sol topolojik grup olduğundan G den H üzerine indirgenen topolojiyle H bir sol topolojik gruptur. Dolayısıyla H üzerinde her sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olup $\lambda_x(K \cap H) = x(K \cap H)$ dır. O halde Lemma 5.1.18 den $x(K \cap H)$ da H içinde yoğundur. H kümesi xH ye homeomorf olduğundan $x(K \cap H) = xK \cap xH$ kümesi xH içinde yoğundur. O halde $xH \cap V$ kümesi xH uzayının boştan farklı bir açığı ve $xK \cap xH$ da xH uzayında yoğun olduğundan $(xK \cap xH) \cap (xH \cap V) \neq \emptyset$ dir. $(xK \cap xH) \cap (xH \cap V) = (K \cap V) \cap xH$ olduğundan $(K \cap V) \cap xH \neq \emptyset$ dir. Öyleyse $x' \in (K \cap V) \cap xH$ alalım. Bu durumda $x' \in xH$ ve $x' \in (K \cap V)$ dir. $K \cap V = U$ olduğundan $x' \in U$ dur. $r(x') = \pi|_K(x') = \pi(x') = x'H$ dır. $x' \in xH$ ise $xH = x'H$ olur. Öyleyse $r(x') = x'H = xH = \pi(x) = y$ elde edilir. $x' \in U$ ve $y = r(x')$ olduğundan $y \in r(U)$ olur. O halde $O \subseteq r(U)$ dur. Diğer yandan $r(U) = \pi|_K(U) = \pi|_K(V \cap K) \subseteq \pi|_K(V \cap K) \cap \pi|_K(K) = \pi(V \cap K) \cap \pi(K)$ olup $\pi(V \cap K) \cap \pi(K) \subseteq \pi(V) \cap \pi(K) = O$ dur. O halde $r(U) \subseteq O$ elde dilir. Hem $O \subseteq r(U)$ hem de $r(U) \subseteq O$ olduğundan $r(U) = \pi|_K(U) = O$ olur. O , $\pi(K)$ de açık olduğundan $r(U)$, $\pi(K)$ de açıktır. O halde K uzayındaki her U açığı için $r(U)$ kümesi $\pi(K)$ de açık olduğundan $r = \pi|_K$ açık bir dönüşümdür.

($\Rightarrow$) :

$r = \pi|_K$ açık bir dönüşüm olsun. $H \cap K$ nın H içinde yoğun olduğunu görelim. $\mathcal{U}_e$ ailesi G nin birim elemanının komşuluklar ailesi olmak üzere ilk olarak her $U \in \mathcal{U}_e$ için $H \subseteq U(K \cap H)$ olduğunu görelim. $U \in \mathcal{U}_e$ alalım. G bir topolojik grup olduğundan $V^{-1} = V$ ve $V^2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}_e$ vardır. $r(V \cap K) = \pi|_K(V \cap K) = \pi(V \cap K)$ olup $\pi(V \cap K)$, $\pi(K)$ içinde açıktır. $e \in V \cap K$ olduğundan $\pi(V \cap K)$, $\pi(e)$ nin açık bir komşuluğudur. Öyleyse G/H uzayında $\pi(V \cap K) = W \cap \pi(K)$ olacak biçimde bir W açığı vardır. O halde $\pi(e) \in W \cap \pi(K) = \pi(V \cap K)$ olup $\pi^{-1}(W) \cap KH \subseteq (V \cap K)H$ dır. Şöyleki; $W \cap \pi(K) \subseteq \pi(V \cap K)$ olup $\pi^{-1}(W \cap \pi(K)) \subseteq \pi^{-1}(\pi(V \cap K))$ dir. Öyleyse $\pi^{-1}(W \cap \pi(K)) = \pi^{-1}(W) \cap \pi^{-1}(\pi(K))$ olduğundan $(\pi^{-1}(W) \cap KH) \subseteq (V \cap K)H$ dır. W , G/H uzayında açık ve π doğal dönüşümü sürekli olduğundan $\pi^{-1}(W)$ de G uzayında açıktır. $h_0 \in H$ alalım. G topolojik grup olduğundan bir sağ topolojik grup

olup her sağ öteleme dönüşümü bir homeomorfizmadır. Öyleyse $\pi^{-1}(W)h_0$, G uzayında açıktır. İlâveten V , G uzayında açık olduğundan Vh_0 de G uzayında açıktır. O halde $(\pi^{-1}(W) \cap V)h_0$, G de açıktır. K , G de yoğun olduğundan $\overline{K} = G$ dir. Bu durumda $K \cap (\pi^{-1}(W) \cap V)h_0 \neq \emptyset$ dir. O halde $g \in (\pi^{-1}(W) \cap V)h_0$ olacak biçimde bir $g \in K$ vardır. $g \in K$ ve $h_0^{-1} \in H$ olduğundan $gh_0^{-1} \in KH$ olup $gh_0^{-1} \in \pi^{-1}(W) \cap KH$ dir. $\pi^{-1}(W) \cap KH \subseteq (V \cap K)H$ olduğundan $gh_0^{-1} \in (V \cap K)H$ olur. O halde $gh_0^{-1} = xy$ olacak biçimde bir $x \in V \cap K$ ve $y \in H$ vardır. $x^{-1}g = yh_0$ olup $x^{-1}g \in K$ ve $yh_0 \in H$ olduğundan $x^{-1}g = yh_0 \in H \cap K$ dir. Bu durumda $y^{-1} = (h_0g^{-1})x \in V^{-1}V = V^2 \subseteq U$ elde edilir. Öyleyse $h_0 = y^{-1}(x^{-1}g) \in U(H \cap K)$ dir. O halde $H \subseteq U(H \cap K)$ olur. Eğer her $U \in \mathcal{U}_e$ için $H \subseteq U(H \cap K)$ ise $(H \cap K)$, H içinde yoğundur. Şöyleki; kabul edelimki $H \cap K$, H içinde yoğun olmasın. Bu durumda $V \cap (H \cap K) = \emptyset$ olacak biçimde H uzayında boştan farklı bir V açığı vardır. $V \neq \emptyset$ olduğundan bir $x \in V$ vardır. O halde G topolojik grup olduğundan $Ux \subseteq V$ olacak biçimde açık simetrik bir $U \in \mathcal{U}_e$ vardır. $H \subseteq U(K \cap H)$ olduğundan $V \cap H \cap K \neq \emptyset$ dir. Çünkü $x \in V \subseteq H \subseteq U(K \cap H)$ olduğundan $x \in U(K \cap H)$ dir. O halde $x = uz$ olacak biçimde bir $u \in U$ ve bir $z \in (K \cap H)$ vardır. $x = uz$ ise $u^{-1}x = z$ dir. $u^{-1}x \in Ux \subseteq V$ olduğundan $z \in V$ dir. O halde $z \in V \cap K \cap H$ dir. Bu da $V \cap K \cap H = \emptyset$ olması ile çelişir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır. O halde $H \cap K$, H içinde açıktır. $\square$

5.1.20. Önerme

G ve H sol topolojik gruplar ve $f : G \rightarrow H$ sürekli örten bir homomorfizma olsun. Eğer G kompakt ve H Hausdorff bir uzay ise f açık bir dönüşümdür.

İspat

G kompakt ve H Hausdorff bir uzay olsun. Kompakt bir uzaydan Hausdorff bir uzaya giden sürekli her dönüşüm kapalı olduğundan f dönüşümü kapalıdır. f dönüşümü, kapalı, sürekli ve örten olduğundan f bir bölüm dönüşümüdür. $\ker f = K$ olsun. K kümesi G nin kapalı normal bir alt grubudur. Şimdi f nin açık bir dönüşüm olduğunu görelim. $U \subseteq G$ açık olsun. f bölüm dönüşümü olduğundan $f(U)$ nun H uzayında açık olması için $f^{-1}(f(U))$ nun G uzayında açık olduğu görülmelidir. $f^{-1}f(U) = KU$ dur. Şöyleki; $x \in f^{-1}f(U)$ alınrsa $f(x) \in f(U)$ olup $f(x) = f(u)$ olacak biçimde bir $u \in U$ vardır. Öyleyse $f(x)(f(u))^{-1} = e$ dir. f bir homomorfizma olduğundan $f(x)(f(u))^{-1} = f(xu^{-1}) = e$ dir. Öyleyse $xu^{-1} \in \ker f$ olup $x \in (\ker f)u$ olur. O halde $x \in (\ker f)U$ olup $x \in KU$ dur. Diğer yandan $z \in KU$ alınrsa benzer biçimde $z \in f^{-1}(f(U))$ olur. O halde $f^{-1}(f(U)) = KU$ elde edilir. Önerme 4.1.1 den KU , G uzayında açıktır. f bölüm dönüşümü olduğundan $f(U)$ de H uzayında açıktır. O halde f açık bir dönüşümdür. $\square$

5.1.21 Teorem

G ve H sol topolojik gruplar, $p : G \rightarrow H$ açık, sürekli, örten bir homomorfizma olmak üzere, H_0 kümesi H in kapalı normal bir altgrubu ve $G_0 = p^{-1}(H_0)$ ve $N = p^{-1}(e_H)$ ise G/G_0 ve H/H_0 birer sol topolojik grup olup $(G/N)/(G_0/N)$ ye topolojik olarak izomorfturlar.

İspat

H_0 kümesi H in kapalı normal bir altgrubu ve $G_0 = p^{-1}(H_0)$ ve $N = p^{-1}(e_H)$ olsun. Teorem 5.1.2 den H/H_0 ve G/G_0 nin sol topolojik grup olduğu görüldü. Şimdi G_0 in G nin normal altgrubu olduğunu görelim. $a, b \in G_0$ alalım. Öyleyse $G_0 = p^{-1}(H_0)$ olduğundan $a \in p^{-1}(H_0)$, $b \in p^{-1}(H_0)$ olup $p(a) = h_1$, $p(b) = h_2$ olacak biçimde bir $h_1, h_2 \in H_0$ vardır. H_0 , H in normal bir altgrubu olduğundan $h_1 h_2^{-1} \in H_0$ olup $h_1 h_2^{-1} = p(a)p(b)^{-1}$ dir. p dönüşümü bir homomorfizma olduğundan $p(a)p(b)^{-1} = p(ab^{-1}) \in H_0$ olur. O halde $ab^{-1} \in p^{-1}(H_0) = G_0$ olup G_0 kümesi G nin bir alt grubudur. Şimdi her $a \in G_0 = p^{-1}(H_0)$ ve her $g \in G$ için $gag^{-1} \in G_0$ olduğunu görelim. p homomorfizma olduğundan $p(gag^{-1}) = p(a)p(b)p(g)^{-1}$ olur. $p(a) \in H_0$, $p(g) \in H$ ve H_0 kümesi H in normal altgrubu olduğundan $p(a)p(b)p(g)^{-1} \in H_0$ dir. O halde $p(gag^{-1}) \in H_0$ olup $gag^{-1} \in p^{-1}(H_0) = G_0$ dir. Dolayısıyla G_0 kümesi G nin normal bir alt grubudur. H_0 , H da kapalı olduğundan ve p sürekli olduğundan $p^{-1}(H_0) = G_0$ da G uzayında kapalıdır. Öte yandan $\varphi(h) = hH_0$ olacak biçimde $\varphi : H \rightarrow H/H_0$ doğal dönüşümü açık, sürekli bir homomorfizmadır. O halde $\varphi \circ p : G \rightarrow H/H_0$ dönüşümü açık sürekli bir homomorfizmadır. İlâveten $(\varphi \circ p)^{-1}(H_0) = p^{-1}(\varphi(H_0)) = p^{-1}(H_0) = G_0$ dir. Dolayısıyla $\ker(\varphi \circ p) = G_0$ dir. O halde $\varphi \circ p$ açık sürekli örten bir homomorfizma ve $\ker(\varphi \circ p) = G_0$ kümesi G nin kapalı normal altgrubu olduğundan Teorem 5.1.15 den $h : G/G_0 \rightarrow H/H_0$ bir topolojik izomorfizma olup G/G_0 ile H/H_0 topolojik olarak izomorftur. İlâveten Teorem 5.1.15 den $\Phi(xN) = p(x)$ biçiminde tanımlı $\Phi : G/N \rightarrow H$ dönüşümü bir topolojik izomorfizma idi. Şimdi $\Phi(G_0/N) = H_0$ olduğunu görelim. $y \in \Phi(G_0/N)$ alalım. Öyleyse $y = \Phi(xN) = p(x)$ olacak biçimde bir $xN \in G_0/N$ vardır. $x \in G_0 = p^{-1}(H_0)$ olduğundan $y = p(x) \in H_0$ dir. O halde $\Phi(G_0/N) \subseteq H_0$ olur. Diğer yandan $z \in H_0$ alalım. p dönüşümü örten olduğundan $p(x_0) = z \in H_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in G$ vardır. $p(x_0) \in H_0$ ise $x_0 \in p^{-1}(H_0) = G_0$ dir. O halde $\Phi(x_0N) = p(x_0) = z$ dir. O halde $z \in \Phi(G_0/N)$ olup $H_0 \subseteq \Phi(G_0/N)$ olur. Dolayısıyla $\Phi(G_0/N) = H_0$ dir. Şimdi G_0/N kümesinin G/N nin bir kapalı normal altgrubu olduğunu görelim. $xN, yN \in G_0/N$ alalım. $(xN)(yN)^{-1} = (xN)(yN) = xy^{-1}N$ dir. $xy^{-1} \in G_0$ olduğundan $xy^{-1}N \in G_0/N$ dir. O halde G_0/N kümesi G/N nin bir alt grubu olur. İlâveten her $aN \in G/N$ ve her $x_0N \in G_0/N$ için $(aN)(x_0N)(aN)^{-1} = (aN)(x_0N)(a^{-1}N) = (ax_0a^{-1})N$ olur. G_0 kümesi G nin normal

altgrubu olduğundan $ax_0a^{-1} \in G_0$ olup $(ax_0a^{-1})N \in G_0/N$ dir. O halde G_0/N kümesi G/N nin normal bir altgrubudur. Şimdi $G_0/N \subseteq G/N$ nin kapalı olduğunu görelim. $\pi^{-1}(G_0/N) = G_0N$ olduğu kolayca görülebilir. $N = p^{-1}(e_H) = p^{-1}(\{e_H\})$ olup $\{e_H\}$ kompakt olduğundan N kompakttır. G_0 kapalı N kompakt olduğundan Teorem 4.1.44 den G_0N kapalı olup $G_0/N \subseteq G/N$ kapalıdır. Φ dönüşümü bir topolojik izomorfizma, G_0/N kümesi G/N nin kapalı bir normal altgrubu, $\Phi(G_0/N) = H_0$ ve $\Phi(xN) = p(x)$ olduğundan Önerme 5.1.14 den $\psi((xN)G_0/N) = \Phi(xN)H_0$ biçiminde tanımlı $\psi : (G/N)/(G_0/N) \rightarrow H/H_0$ dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır. O halde $(G/N)/(G_0/N)$, H/H_0 a topolojik olarak izomorftur. Üstelik H/H_0 , G/G_0 a topolojik olarak izomorf olduğundan $(G/N)/(G_0N)$ de G/G_0 a topolojik olarak izomorftur. $\square$

5.1.22 Teorem

G bir topolojik grup, H kümesi G nin kapalı normal bir altgrubu, M kümesi G nin bir topolojik altgrubu ve $\pi : G \rightarrow G/H$ bir doğal dönüşüm olsun. MH/H bölüm grubu G/H topolojik grubunun $\pi(M)$ altgrubuna topolojik olarak izomorftur.

İspat

$\pi^{-1}(\pi(M)) = MH$ dır. H , G nin kapalı normal altgrubu olduğu için $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü açık, sürekli, örten bir homomorfizmadır. Öyleyse π nin MH a kısıtlanmış $\pi|_{MH} = \psi : MH \rightarrow \pi(M)$ dönüşümü de açık sürekli ve örtendir. M , G nin bir altgrubu ve π homomorfizma olduğundan $\pi(M)$ de G/H in normal bir altgrubudur. Öte yandan MH da G nin bir altgrubudur. Şöyleki; $xy \in MH$ alalım. Öyleyse $x = m_1h_1$ ve $y = m_2h_2$ olacak biçimde bir $m_1, m_2 \in M$ ve $h_1, h_2 \in H$ vardır. H , G nin normal altgrubu olduğundan $y = h_2m_2$ dir. O halde $xy = m_1h_1h_2m_2$ olup $h_1h_2 = h$ denilirse $m_1h_1h_2m_2 = m_1hm_2$ olur. H , G nin normal altgrubu olduğundan $m_1hm_2 = m_1m_2h$ olup $m_1m_2 = m$ denilirse $m_1m_2h = mh$ dır. O halde $xy \in MH$ olur. Şimdi $y \in MH$ için $y^{-1} \in MH$ olduğunu görelim. $y \in MH$ alınırsa $y = mh$ olacak biçimde bir $m \in M$ ve $h \in H$ vardır. M , G nin altgrubu olduğundan $m^{-1} \in M$ ve H , G nin normal altgrubu olduğundan $h^{-1} \in H$ dir. Öyleyse $y^{-1} = h^{-1}m^{-1} \in HM$ olur. H , G nin normal altgrubu olduğundan $HM = MH$ olup $y^{-1} \in MH$ dır. O halde MH , G nin bir altgrubudur. MH , G nin ve $\pi(M)$ de G/H in altgrubu olup $\psi : MH \rightarrow \pi(M)$ bir homomorfizmadır. e , MH in birim elemanı ve ψ bir homomorfizma olduğundan $\pi(M)$ nin birim elemanı $\psi(e)$ dir. ψ nin çekirdeği $\psi^{-1}(\psi(e))$ olup $\psi^{-1}(\psi(e)) = \pi^{-1}(\pi(e)) = H$ olduğundan $\ker \psi = H$ dır. O halde ψ açık, örten, sürekli bir homomorfizma, $\ker \psi = H$ olduğundan Teorem 5.1.15 den $\phi : MH/H \rightarrow \pi(M)$ dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır. O halde MH/H ve $\pi(M)$ topolojik olarak izomorftur. $\square$

5.1.23 Teorem

G bir topolojik grup, H kümesi G nin kapalı bir altgrubu, X kümesi G nin bir altuzayı, $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü örten bir homomorfizma ve $Y = \pi(X)$ olmak üzere, eğer H altuzayı ve Y altuzayı birinci sayılabilir ise X uzayı da birinci sayılabilir.

İspat

H ve Y birinci sayılabilir uzaylar olsun. e , G nin birim elemanı olmak üzere $e \in X$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. X in birinci sayılabilir bir uzay olduğunu görmek için X in e noktasında sayılabilir bir komşuluklar tabanına sahip olduğunu görmek yeterlidir. H birinci sayılabilir uzay olduğundan e nin H içinde sayılabilir bir $\{T_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ komşuluklar tabanı vardır. O halde her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n = V_n \cap H$ olacak biçimde G uzayında bir V_n açığı vardır. G topolojik grup olduğundan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $W_n \subseteq V_n$ ve $W_{n+1}W_{n+1} \subseteq W_n$ olacak biçimde birim elemanın W_n açık simetrik komşulukları vardır. Öyleyse $\sigma(e) = \{W_n \cap H : n \in \mathbb{Z}^+\}$ ailesi e nin H içinde bir komşuluklar tabanıdır. $e \in X$ ve $\pi(X) = Y$ olduğundan $\pi(e) \in Y$ dir. Y altuzayı birinci sayılabilir olduğundan $\pi(e)$ nin Y içinde sayılabilir bir $\{A_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ komşuluklar tabanı vardır. O halde her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $A_n = O_n \cap Y$ olacak biçimde G/H uzayında bir O_n açığı vardır. $\pi^{-1}(O_n) = U_n$ denilirse $e \in U_n$ ve $\pi(U_n)$ G/H uzayında açıktır. Böylece $\sigma(\pi(e)) = \{\pi(U_n) \cap Y : n \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesi Y içinde $\pi(e)$ nin bir komşuluklar tabanıdır. O halde her $i, j \in \mathbb{Z}^+$ için $B_{i,j} = W_i \cap U_j \cap X$ olmak üzere $\{B_{i,j} : (i, j) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+\}$ kümesi X uzayında e noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. Şöyleki; her i için $e \in W_i$, $e \in U_j$ ve $e \in X$ olduğundan $e \in B_{i,j}$ dir ve $B_{i,j}$ kümesi X uzayında açıktır. Şimdi X uzayında $e \in T$ olacak biçimde bir T açığı alalım. O halde $T = O \cap X$ olacak biçimde G de bir O açığı vardır. G topolojik grup olduğundan $e \in V$ ve $VV \subseteq O$ olacak biçimde G uzayında bir V açığı vardır. Öyleyse $e \in V \cap H$ dir. K kümesi H uzayında e nin bir komşuluklar tabanı olduğundan $W_m \cap H \subseteq V \cap H \subseteq V$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O halde $e \in W_m \cap H \subseteq V$ olup $e \in W_{m+1} \cap V$ dir. Öyleyse $\pi(e) \in \pi(W_{m+1} \cap V)$ olur. π açık bir dönüşüm olduğundan $\pi(W_{m+1} \cap V)$ açıktır. M kümesi Y altuzayında $\pi(e)$ nin komşuluklar tabanı olduğundan $\pi(U_k) \cap Y \subseteq \pi(W_{m+1} \cap V)$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda $B_{m+1,k} = (W_{m+1} \cap U_k \cap X) \subseteq O$ dur. Şöyleki; $z \in B_{m+1,k}$ olsun. O halde $z \in U_k \cap X \subseteq (W_{m+1} \cap V)H$ ve $z \notin W_{m+1}(G \setminus W_m)$ dir. Şimdi bunları sırasıyla görelim. $z \in U_k \cap X$ alınırsa $z \in (W_{m+1} \cap V)H$ olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan $z \in W_{m+1}$ ise $ze \in W_{m+1}W_{m+1}$ dir. O halde $z \in W_{m+1}W_{m+1} \subseteq W_m$ olup $z \in W_m$ dir. Eğer $z \in W_{m+1}(G \setminus W_m)$ ise $z \in W_{m+1}$ olup $z \in W_m$ dir. Bu bir çelişki olup $z \notin W_{m+1}(G \setminus W_m)$ dir. İlaveten $z \in (W_{m+1} \cap V)H$ olduğundan $z = ph$ olacak biçimde bir $p \in W_{m+1} \cap V$ ve bir $h \in H$ vardır. Bu durumda $h \in W_m$ veya $h \notin W_m$ dir. Eğer $h \notin W_m$ ise $h \notin W_m$ ve $p \in W_{m+1} \cap V$ olduğundan $z = ph \in (W_{m+1})(G \setminus W_m)$ olur. Bu da $z \notin W_{m+1}(G \setminus W_m)$ olmasıyla çelişir. O halde $h \in W_m$ olmak zorundadır. Öyleyse

$h \in H \cap W_m$ dir. Böylece $z = ph \in (W_{m+1} \cap V)(H \cap W_m)$ elde edilir. $H \cap W_m \subseteq V$ ve $V \cap W_{m+1} \subseteq V$ olduğundan $z \in V^2 \subseteq O$ olur. O halde $z \in (W_{m+1} \cap U_k \cap X) \subseteq O \cap X = T$ elde edilir. Bu durumda $B_{m+1,k} = (W_{m+1} \cap U_k \cap X)$ kümesi X uzayında e nin sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. Dolayısıyla X uzayı birinci sayılabilirdir. $\square$

Bu teoremden aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

5.1.24. Sonuç

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir altgubu olmak üzere, eğer H ve G/H birinci sayılabilir uzaylar ise G uzayı da birinci sayılabilirdir.

Şimdi bir sonraki teoremden kullanmak üzere bir lemma verilecektir.

5.1.25. Lemma

X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü açık, sürekli ve örten ise her $B \subseteq Y$ için $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$ dir.

İspat

$f : X \rightarrow Y$ dönüşümü açık, sürekli ve örten olsun. $\emptyset \neq B \subseteq Y$ olsun. $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ alalım. $f(x) \in \overline{B}$ olduğunu görelim. $f(x) \in V$ olacak biçimde bir $V \subseteq Y$ açığı alalım. f sürekli olduğundan $f^{-1}(V) \subseteq X$ açıktır. $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ olduğundan $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olup $\emptyset \neq f(f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(f^{-1}(V)) \cap (f^{-1}(B)) \subseteq V \cap B$ dir. O halde $f(x) \in \overline{B}$ olup $x \in f^{-1}(\overline{B})$ dir.

Diğer yandan $x \in f^{-1}(\overline{B})$ olsun. $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ olduğunu görelim. $x \in O$ olacak biçimde bir $O \subseteq X$ açığını alalım. $f(x) \in f(O)$ olup $f(x) \in \overline{B}$ ve f dönüşümü açık olduğundan $f(O) \cap B \neq \emptyset$ dir. f örten olduğundan $f^{-1}(f(O) \cap B) \neq \emptyset$ olup $O \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ dir. O halde $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ olur. Böylece istenen eşitlik sağlanır. $\square$

5.1.26 Teorem

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir altgrubu olmak üzere, eğer H ve G/H ayrılabilir ise G uzayı da ayrılabilirdir.

İspat

H ve G/H ayrılabilir bir uzay olsun. O halde G/H uzayının $\overline{B} = G/H$ olacak biçimde

sayılabilir bir B altkümesi vardır. Her $y \in B$ için, π örten olduğundan, $\pi(x_y) = y$ olacak biçimde bir $x_y \in G$ vardır. $\pi^{-1}(y) = x_y H$ olup $\pi^{-1}(y) = x_y H$ kümesi H ye homeomorftur. O halde H ayrılabilir olduğundan her $y \in B$ için $\pi^{-1}(y) = x_y H$ sol koset uzayı da ayrılabilir. O halde her $y \in B$ için $\pi^{-1}(y) = x_y H$ ın sayılabilir bir yoğun M_y altkümesi vardır. O halde her $y \in B$ için $\overline{M_y}^{\pi^{-1}(B)} = \pi^{-1}(y)$ olur. $M = \bigcup_{y \in B} M_y$ olsun. Bu durumda $\overline{M} = \overline{\bigcup_{y \in B} M_y} \subseteq \overline{\bigcup_{y \in B} \pi^{-1}(y)} = \overline{\pi^{-1}(B)}$ olup $\overline{M} \subseteq \overline{\pi^{-1}(B)}$ dir. Her $y \in B$ için $\overline{M_y}^{\pi^{-1}(B)} = \pi^{-1}(y)$ olduğundan $\overline{M} \cap \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(B)$ olup $\pi^{-1}(B) \subseteq \overline{\pi^{-1}(B)} \subseteq \overline{M}$ dir. Böylece $\overline{M} = \overline{\pi^{-1}(B)}$ olup Lemma 5.1.25 den $\overline{\pi^{-1}(B)} = \pi^{-1}(\overline{B})$ dir. $\overline{B} = G/H$ olduğundan $\overline{M} = \pi^{-1}(\overline{B}) = \pi^{-1}(G/H) = G$ dir. O halde $\overline{M} = G$ dir. Üstelik M sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin sayılabilir bir birleşimi olduğundan sayılabilir. O halde G ayrılabilir. $\square$





6. YEREL KOMPAKT TOPOLOJİK GRUPLAR

Bu bölüm iki alt başlık altında incelenecektir. İlk başlıkta topolojik gruplarda yerel σ -kompaktlık ve yerel kompaktlığın kuvvetli parakompaktlığı verildiği görülecektir. Daha sonra topolojik grupların birim elemanının kompakt açık komşuluklarının kapsadığı açık kompakt bir altgrup bulunacak ve birimin açık kompakt kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı elde edilecektir. Daha sonra G_δ -kümelerle ilgili bazı teoremler verilecektir.

İkinci alt başlıkta bir G topolojik grubunun yerel kompakt bir H altgrubu varsa G/H in bazı koşullar altından korunan bir $\mathcal{P}$ özelliğine sahip olduğunda G nin de bu $\mathcal{P}$ özelliğine sahip olduğu görülecektir. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe bütün uzaylar Hausdorff uzaydır.

6.1. Yerel Kompakt Topolojik Gruplar

Bu bölümde yerel kompakt topolojik gruplar incelenecektir [7]. Bir topolojik uzayın her noktasının kapanışı kompakt olan açık bir komşuluğu varsa bu uzaya yerel kompakt topolojik uzay denir [8].

Şimdi konu bütünlüğünün bozulmaması açısından giriş kısmında verilmeyen topolojik uzaylarla ilgili bazı tanımlar verilecektir. Bu tanımlar [8] ve [12] de bulunabilir.

6.1.1. Tanım

Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa bu uzaya bir Lindelöf uzay denir.

6.1.2. Tanım

X bir küme ve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olmak üzere her $A \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq B$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{A}$ ailesine $\mathcal{B}$ ailesinin bir kısmı incelməsi denir ve $\mathcal{A} <_k \mathcal{B}$ ile gösterilir. $\mathcal{A} <_k \mathcal{B}$ olmak üzere, eğer $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{B}$ ise $\mathcal{A}$ ailesine $\mathcal{B}$ nin bir incelməsi denir ve $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ ile gösterilir.

6.1.3. Tanım

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ X in altkümelerinin bir ailesi olmak üzere, her $A \in \mathcal{A}$ için $\{B \in \mathcal{A} | A \cap B \neq \emptyset\}$ ailesi sonlu ise $\mathcal{A}$ ailesine yıldız sonludur denir.

Yıldız sonlu her açık örtü yerel sonludur.

6.1.4. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere X in her açık örtüsünün yerel sonlu açık bir incelməsi varsa X uzayına bir parakompakt uzay denir.

6.1.5. Tanım

X bir Hausdorff uzay olmak üzere, X in her açık örtüsünün yıldız sonlu açık bir incelməsi varsa X uzayına bir kuvvetli parakompakt uzay denir.

6.1.6. Tanım

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{P}$ bir özellik olmak üzere, X uzayı her biri $\mathcal{P}$ özelliğine sahip olan sayılabilir çoklukta altkumesinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa X uzayına bir σ - $\mathcal{P}$ uzay denir. Örneğin; $\mathcal{P}$ özelliği uzayın kompakt(yerel kompakt) olması ise ve X uzayı sayılabilir çoklukta kompakt(yerel kompakt) altuzayının birleşimi olarak yazılabiliyorsa X e bir σ -kompakt(σ -yerel kompakt) uzay denir.

Şimdi Teorem 6.1.9 de kullanılacak iki Lemma verilecektir.

6.1.7. Lemma

Her σ - kompakt topolojik uzay bir Lindelöf uzaydır.

İspat

X bir σ - kompakt uzay olsun. Tanım 6.1.6 den her $n \in \omega$ için Y_n ler kompakt olmak üzere $X = \bigcup_{n \in \omega} Y_n$ dir. X in herhangi bir $\mathcal{O}$ açık örtüsünü alalım. Bu durumda her $n \in \omega$ için $\mathcal{O}_n = \{O \cap Y_n : O \in \mathcal{O}\}$ ailesi Y_n için bir açık örtü olur. Her $n \in \omega$ için Y_n ler kompakt olduğundan her $\mathcal{O}_n$ açık örtüsünün sonlu bir $\tilde{\mathcal{O}}_n$ alt örtüsü vardır. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{O : O \cap Y_n \in \tilde{\mathcal{O}}_n\}$ ailesi sonludur. $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ olsun. $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{O}$ ailesinin sayılabilir bir alt ailesi olup X i örter. Şöyleki; $\mathcal{V}$ ailesi sayılabilir çoklukta sonlu ailenin birleşimi olduğundan sayılabilir. $\mathcal{V}$ nin $\mathcal{O}$ nun alt ailesi olduğu aşıkardır. Şimdi $\mathcal{V}$ nin X i örttüğünü görelim. $x \in X$ alalım. O halde $x \in Y_{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $\tilde{\mathcal{O}}_{n_0}$ ailesi Y_{n_0} için bir örtü olduğundan $x \in O$ olacak biçimde bir $O \in \tilde{\mathcal{O}}_{n_0}$ vardır. O halde $O \in \mathcal{V}_{n_0}$ olur. Böylece $x \in \bigcup \mathcal{V}_{n_0} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ olup $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ dir. Her zaman $\bigcup \mathcal{V} \subseteq X$ dir. O halde $\bigcup \mathcal{V} = X$ olup $\mathcal{V}$ ailesi X i örter. $\mathcal{O}$ ailesi

keyfi olduğundan X σ -kompakt topolojik uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır. O halde X bir Lindelöf uzaydır. $\square$

6.1.8. Lemma

I bir indis kümesi ve X bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her $\lambda \in I$ için $Y_\lambda \subseteq X$ açık kuvvetli parakompakt bir uzay, $\lambda \neq \mu$ olacak biçimdeki her $\lambda, \mu \in I$ için $Y_\lambda \cap Y_\mu = \emptyset$ ve $X = \bigcup_{\lambda \in I} Y_\lambda$ ise X kuvvetli parakompakt bir uzaydır.

İspat

X in herhangi bir $\mathcal{O}$ açık örtüsünü alalım. Öyleyse her $\lambda \in I$ için $\mathcal{O}_\lambda = \{O \cap Y_\lambda : O \in \mathcal{O}\}$ ailesi Y_λ için bir açık örtüdür. Her $\lambda \in I$ için Y_λ kuvvetli parakompakt bir uzay olduğundan her $\mathcal{O}_\lambda$ açık örtüsünün bir $\mathcal{V}_\lambda$ yıldız sonlu açık incelməsi vardır. $\mathcal{V} = \bigcup_{\lambda \in I} \mathcal{V}_\lambda$ olsun. $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{O}$ açık örtüsünün yıldız sonlu açık bir incelməsi olur. Şöyleki; ilk olarak $\mathcal{V}$ ailesinin $\mathcal{O}$ nun bir açık incelməsi olduğunu görelim. $V \in \mathcal{V}$ alınırsa $V \in \mathcal{V}_{\lambda_0}$ olacak biçimde bir $\lambda_0 \in I$ vardır. $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ ailesi $\mathcal{O}_{\lambda_0}$ ailesinin yıldız sonlu bir incelməsi olduğundan öyle bir $O \in \mathcal{O}$ vardır ki $V \subseteq O \cap Y_{\lambda_0} \subseteq O$ dur. Şimdi $\bigcup \mathcal{V} = X$ olduğunu görelim. $x \in X$ alınırsa $x \in Y_{\lambda_0}$ olacak biçimde bir $\lambda_0 \in I$ vardır. $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ ailesi Y_{λ_0} için bir örtü olduğundan $x \in V$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{V}_{\lambda_0}$ vardır. O halde $x \in \bigcup \mathcal{V}_{\lambda_0} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ olup $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ dir. Her zaman $\bigcup \mathcal{V} \subseteq X$ dir. Öyleyse $\bigcup \mathcal{V} = X$ dir O halde $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{O}$ ailesinin bir incelməsidir. Şimdi de $\mathcal{V}$ nin açık olduğunu görelim. Her $\lambda \in I$ için V_λ açık incelməsi olduğundan her $V \in \mathcal{V}_\lambda$ için V kümesi Y_λ da açık ve Y_λ kümeleri X uzayında açık olduğundan her $V \in \mathcal{V}_\lambda$ için V kümesi X uzayında açıktır. O halde $\mathcal{V}$ ailesi X uzayında açıktır. Şimdi $\mathcal{V}$ nin yıldız sonlu olduğunu görelim. $V_0 \in \mathcal{V}$ olsun. Bu durumda $V_0 \in \mathcal{V}_{\lambda_0}$ olacak biçimde bir $\lambda_0 \in I$ vardır. $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ ailesi Y_{λ_0} için bir örtü olduğundan $V_0 \subseteq Y_{\lambda_0}$ dir. $\lambda_0 \neq \lambda$ olacak biçimdeki her $\lambda \in I$ için $Y_{\lambda_0} \cap Y_\lambda = \emptyset$ olduğundan $\{V \in \mathcal{V} : V \cap V_0 \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{V}_{\lambda_0}$ dir. O halde $\{V \in \mathcal{V} : V \cap V_0 \neq \emptyset\} \subseteq \{V \in \mathcal{V}_{\lambda_0} : V \cap V_0 \neq \emptyset\}$ olur. $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ ailesi yıldız sonlu olduğundan $\{V \in \mathcal{V}_{\lambda_0} : V \cap V_0 \neq \emptyset\}$ kümesi sonludur. O halde $\{V \in \mathcal{V} : V \cap V_0 \neq \emptyset\}$ kümesi sonlu olup $\mathcal{V}$ ailesi yıldız sonludur. Dolayısıyla $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{O}$ ailesinin yıldız sonlu açık bir incelməsi olup X kuvvetli parakompakt bir uzaydır. $\square$

Bir topolojik uzayın her noktasının, kapanışı σ -kompakt olan bir açık komşuluğu varsa bu uzaya yerel σ -kompakt uzay denir. Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

6.1.9 Teorem

Her yerel σ -kompakt topolojik grup kuvvetli parakompakttır.

İspat

G bir yerel σ -kompakt topolojik grup olsun. G yerel σ -kompakt topolojik grup olduğundan $\overline{V}$ σ -kompakt olacak biçimde e noktasının simetrik bir V açık komşuluğu vardır. $H = \bigcup_{n \in \omega} (\overline{V})^n$ diyelim. H ın G nin bir altgrubu olduğu aşıkardır. İlâveten H altgrubu G de açıktır. Şöyleki;

$V \subseteq \overline{V} = \overline{V}^1 \subseteq H$ dır. H altgrubu G nin boştan farklı bir açık altkümesini içerdiğinden Sonuç 3.1.3 den H altgrubu G uzayında açıktır. O halde Teorem 3.1.6 den H altgrubu G nin kapalı bir altgrubudur. Öte yandan her $n \in \omega$ için $\overline{V}^n$ kümeleri σ -kompakt olduğundan her i için K_i kümesi kompakt olmak üzere $\overline{V}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i(n)$ biçimindedir. O halde $H = \bigcup_{n \in \omega} (\overline{V})^n = \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i(n)) = \bigcup_{(i,n) \in \omega \times \omega} K_i(n)$ olur. Bu durumda H sayılabilir çoklukta kompakt kümenin birleşimi olarak yazılabildiğinden H kümesi σ -kompakttır. Öyleyse Lemma 6.1.7 den H Lindelöf uzaydır. Her $a \in G$ için aH sol koset uzayı H ye homeomorf olduğundan aH Lindelöf uzaydır. İlâveten Teorem 3.1.20 den G regüler uzay olup G nin aH altuzayı da regülerdir. Regüler Lindelöf uzaylar kuvvetli parakompakt uzaydır ([8], 5.3.11). O halde her $a \in G$ için aH kuvvetli parakompakttır. $\mathcal{K}$, farklı sol kosetlerin ailesi olmak üzere $G = \bigcup \{aH : aH \in \mathcal{K}\}$ olduğundan Lemma 6.1.8 den G kuvvetli parakompakttır. $\square$

Şimdi bu teoremle ilişkili olarak Teorem 6.1.10, Önerme 6.1.11, Sonuç 6.1.12 ve Sonuç 6.1.13 verilecektir.

6.1.10 Teorem

Her bağlantılı yerel σ -kompakt topolojik grup σ -kompakttır. Dolayısıyla Lindelöftür.

İspat

G bağlantılı yerel σ -kompakt bir topolojik grup olsun. Teorem 6.1.9 un ispatında görüldüğü üzere G nin hem açık hem de kapalı bir H altgrubu vardır. G bağlantılı bir uzay ve $H \neq \emptyset$ olduğundan $H = G$ dir. H σ -kompakt olduğundan G uzayı da σ -kompakttır. Dolayısıyla Lemma 6.1.7 den G bir Lindelöf uzaydır. $\square$

Teorem 6.1.9 ispatında elde edilen H altgrubu için aşağıdaki önermeyi verelim.

6.1.11. Önerme

Her yerel σ -kompakt topolojik grup σ -kompakt olan hem açık hem kapalı bir altgrup

içerir.

6.1.12. Sonuç

Her yerel kompakt topolojik grup kuvvetli parakompakttır.

İspat

G yerel kompakt bir topolojik grup olsun. Her kompakt uzay σ -kompakttır. Böylece her yerel kompakt uzay yerel σ -kompakttır. O halde G yerel kompakt topolojik grubu, yerel σ -kompakt topolojik grup olup Teorem 6.1.9 dan G kuvvetli parakompakt uzaydır. $\square$

6.1.13. Sonuç

Her bağlantılı yerel kompakt topolojik grup σ -kompakttır.

İspat

G bağlantılı yerel kompakt bir topolojik grup olsun. Kompakt uzaylar σ -kompakt olduğundan her bağlantılı yerel kompakt uzay bağlantılı yerel σ -kompakt olup Teorem 6.1.10 den G uzayı σ -kompakttır. $\square$

Örnek

Sonuç 6.1.12 ve Sonuç 6.1.13 yerel kompakt uzaylar için geçerli değildir. $\kappa > \omega$ olmak üzere I^κ Tychonoff küpünün bir $p \in I^\kappa$ noktası için $X = I^\kappa \setminus \{p\}$ altuzayını alalım. X , I^κ dan indirgenen topoloji ile yerel kompakt, bağlantılı, yerel bağlantılı bir uzaydır. Fakat X normal olmadığından parakompakt, dolayısıyla σ -kompakt değildir.

6.1.14 Teorem

G bir topolojik grup olmak üzere, eğer H kümesi G nin bağlantılı bileşeni ise G/H bölüm grubunun boştan farklı bağlantılı her altkümesi tek noktadan oluşur. Yani G/H tamamen bağlantısızdır.

İspat

H kümesi G nin bağlantılı bileşeni olsun. Önerme 4.1.40 den H kümesi G nin kapalı

bir normal altgrubudur. O halde Teorem 5.1.5 den G/H bir topolojik gruptur. K kümesi G/H ın birim elemanı H ı içeren bağlantılı bir küme olsun. $K = \{H\}$ olduğunu görelim. Aksini kabul edelim. Yani K nın H elemanından farklı bir elemanı var olsun. $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşüm olmak üzere $\pi^{-1}(K) = B$ diyelim. Öyleyse $H \subseteq B$ ve $B \neq H$ dır. Şöyleki; ilk olarak $H \subseteq B$ olduğunu görelim. $x \in H$ alınrsa $\pi(x) = xH = H \in K$ olup $\pi(x) \in K$ dır. O halde $x \in \pi^{-1}(K)$ olup $H \subseteq \pi^{-1}(K) = B$ dir. Şimdi de $H \neq B$ olduğunu görelim. Kabulümüzden K da H dan farklı bir F elemanı vardır. O halde $F = aH$ olacak biçimde bir $a \in G$ vardır ve $a \notin H$ dır. Öyleyse $aH = \pi(a)$ ve $F \in K$ olduğundan $\pi(a) \in K$ dır. O halde $a \in \pi^{-1}(K) = B$ olup $H \neq B$ olur. Eğer B bağlantılı ise H bağlantılı bileşen olduğundan $H = B$ olmak zorundadır. Fakat $H \neq B$ idi. O halde B bağlantılı değildir ve $B \neq \emptyset$ dir. Öyleyse B nin boştan farklı hem açık hem kapalı bir U özaltkümesi vardır. Şimdi $b \notin U$ olacak biçimde bir $b \in B$ noktasını sabitleyelim. Aynı zamanda $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ dur. Şöyleki; $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$ alınrsa $\pi(x) \in \pi(U)$ olup $\pi(x) = \pi(u_0)$ olacak biçimde bir $u_0 \in U$ vardır. Öyleyse $\{x, u_0\} \subseteq \pi^{-1}(\pi(u_0))$ olur. $\pi^{-1}(\pi(u_0)) = u_0H$ ve u_0H kümesi H ye homeomorf olduğundan u_0H bağlantılıdır. $\pi^{-1}(\pi(u_0)) = C$ denilirse C bağlantılıdır ve $C \subseteq B$ dir. U kümesi B içinde hem açık hem kapalı olduğundan $C \cap U$ da C içinde hem açık hem kapalı ve boştan farklıdır. C bağlantılı olduğundan $C \cap U = C$ olup $x \in U$ dur. Böylece $\pi^{-1}(\pi(U)) \subseteq U$ olup istenen eşitlik sağlanır. Öte yandan π nin U ya kısıtlanmış $\pi|_B : B \rightarrow K$ açık örten bir dönüşümdür. O halde $\pi|_B(U)$ kümesi K de açık ve $\pi|_B(U) = \pi(U)$ olduğundan $\pi(U)$ de K da açıktır. Aynı zamanda U kapalı, $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ ve π bölüm dönüşümü olduğundan $\pi(U)$ kümesi K içinde kapalıdır. Üstelik $b \notin U = \pi^{-1}(\pi(U))$ olup $\pi(b) \notin \pi(U)$ dur ve $\pi(b) \in \pi(B) \subseteq K$ dur. O halde $\pi(U) \neq K$ dır. Böylece $\pi(U)$ kümesi K nın hem açık hem kapalı bir özaltkümesi olup, K bağlantılı olduğundan, $\pi(U) = \emptyset$ dir. Fakat $U \neq \emptyset$ olduğundan $\pi(U) \neq \emptyset$ dir. O halde kabulümüz yanlış olup $K = \{H\}$ dır. Böylece G/H tamamen bağlantısızdır.

Şimdi topolojik uzaylarla ilgili bir önerme verilecektir.

6.1.15. Önerme

Her tamamen bağlantısız yerel kompakt Hausdorff uzayı sıfır boyutludur.

İspat

X tamamen bağlantısız yerel kompakt Hausdorff bir uzay olsun. X yerel kompakt olduğundan $T_{3\frac{1}{2}}$ -uzay olup X regülerdir. O halde X i kompakt kabul etmek genelliği bozmaz.

Şimdi bir $a \in X$ noktasını sabitleyelim. $\mathcal{P}_a = \{A \subseteq X : a \in A, A \text{ kapalı ve açık} \}$ ailesini alalım. $P = \bigcap \mathcal{P}_a = \bigcap_{A \in \mathcal{P}_a} A$ diyelim. Her $A \in \mathcal{P}_a$ için A kapalı olduğundan

P kapalıdır. $\mathcal{P}_a$ ailesinin sonlu arakesit altında kapalı olduğu aşikardır. Öte yandan $F \cap P = \emptyset$ olacak biçimde X uzayının her F kapalı altkümesi için $W \cap F = \emptyset$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{P}_a$ vardır. Buna $(*)$ diyelim. Şimdi $(*)$ ın doğru olduğunu görelim. Bunun için aksini kabul edelim. Yani $F_0 \cap P = \emptyset$ olacak biçimde X in öyle bir F_0 kapalı altkümesi vardır olsun ki her $U \in \mathcal{P}_a$ için $U \cap F_0 \neq \emptyset$ olsun. $\eta = \{U \cap F_0 : U \in \mathcal{P}_a\}$ ailesini alalım. X kompakt ve η ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan $\bigcap \eta \neq \emptyset$ olur. Bu da $F_0 \cap P = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $(*)$ ifadesi doğrudur.

Şimdi $P = \{a\}$ olduğunu görelim. Şöyleki; kabul edelimki $P \neq \{a\}$ olsun. O halde $b \neq a$ olacak biçimde bir $b \in P$ vardır. a noktasının bileşeni C_a olsun. Eğer P bağlantılı ise; X tamamen bağlantısız olduğundan $C_a = \{a\}$ dir. $a \in P$ ve C_a kümesi a nın bileşeni olduğundan $a \in P \subseteq C_a$ olur. $C_a = \{a\}$ olduğundan $P = \{a\}$ elde edilir. O halde $P \neq \{a\}$ ise P bağlantısızdır. O halde P kümesi $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimde $A, B \subseteq X$ kapalı kümelerinin birleşimi olarak yazılabilir. Yani $P = A \cup B$ dir. $a \in A$ olsun. Hausdorff kompakt uzaylar normal olduğundan X uzayının A ve B kapalı ayrık altkümeleri için $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ olacak biçimde ayrık U ve V açıkları vardır. U ve V açık olduğundan $X \setminus (U \cup V)$ kapalıdır. $F = X \setminus (U \cup V)$ diyelim. Bu durumda $P \cap F = \emptyset$ olup $(*)$ dan $F \cap W = \emptyset$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{P}_a$ vardır. $G = U \cap W$ olsun. $W \in \mathcal{P}_a$ olduğundan W açık olup G açıktır. Aynı zamanda G kümesi X de kapalıdır. Şöyleki; $W \in \mathcal{P}_a$ kapalı olup $\overline{G} = \overline{U \cap W} \subseteq \overline{U} \cap \overline{W} = \overline{U} \cap W$ dir. $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $U \subseteq X \setminus V$ olup $\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V$ dir. $W \cap F = \emptyset$ olduğundan $W \subseteq X \setminus F$ dir. O halde $\overline{G} \subseteq \overline{U} \cap W \subseteq (X \setminus V) \cap (X \setminus F)$ olup $\overline{G} \subseteq \overline{U} \cap W \subseteq X \setminus (F \cup V) \subseteq U$ dur. Çünkü $F = X \setminus (U \cup V)$ olduğundan $X \setminus (F \cup V) = X \setminus [(X \setminus (U \cup V)) \cup V] = (U \cup V) \cap (X \setminus V) = (U \cap (X \setminus V)) \cup \emptyset \subseteq U$ dur. O halde $\overline{G} \subseteq U$ olur. Böylece hem $\overline{G} \subseteq U$ hem de $\overline{G} \subseteq W$ olduğundan $\overline{G} \subseteq U \cap W$ dir. $U \cap W = G$ olduğundan $\overline{G} \subseteq G$ olup $G = \overline{G}$ dir. Böylece G kapalıdır. Şimdi de $a \in G$ olduğunu görelim. $W \in \mathcal{P}_a$ olduğundan $a \in W$ dir ve $a \in A \subseteq U$ olduğundan $a \in U \cap W = G$ dir. O halde G kümesi $a \in G$ olacak biçimde X in hem açık hem kapalı altkümesi olduğundan $G \in \mathcal{P}_a$ dir. Öte yandan $G \cap B = \emptyset$ dir. Çünkü; $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $G = U \cap W \subseteq U \subseteq V^c \subseteq B^c$ olduğundan $G \cap B = \emptyset$ dir. Üstelik $G \in \mathcal{P}_a$ olduğundan $\bigcap \mathcal{P}_a = P \subseteq G$ dir. Diğer yandan $P = A \cup B$ olduğundan $A \cup B \subseteq G$ dir. Fakat bu da $G \cap B = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Öyleyse başlangıçtaki kabulümüz yanlış olup $P = \{a\}$ dir. Üstelik $\mathcal{P}_a$ ailesi a noktasının hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanıdır. Şöyleki; X uzayında $a \in O$ olacak biçimde bir O açığı alalım. O açık olduğundan $X \setminus O$ kapalı olup X kompakt olduğundan $X \setminus O$ kompakttır. $a \in O$ olduğundan $(X \setminus O) \cap \{a\} = \emptyset$ dir. $\{a\} = P$ ve $(X \setminus O)$ kapalı olduğundan $(*)$ dan $V \cap (X \setminus O) = \emptyset$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{P}_a$ vardır. O halde $a \in V \subseteq O$ olup $\mathcal{P}_a$ ailesi X in hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanıdır. O halde her $a \in X$ için a noktasının hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{P}_a$ komşuluklar tabanı bulunmuş olur. $\mathcal{B} = \bigcup_{a \in X} \mathcal{P}_a$ denilirse $\mathcal{B}$ X uzayının hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir tabanıdır. Böylece X uzayı sıfır boyutlu olur. $\square$

6.1.16. Önerme

G bir topolojik grup olmak üzere, F kümesi G nin e birim elemanının açık kompakt bir komşuluğu ise G nin $H \subseteq F$ olacak biçimde açık kompakt bir H altgrubu vardır.

İspat

F kümesi e birim elemanının açık kompakt bir komşuluğu olsun. Teorem 4.1.43 den $FU \cap F^c = \emptyset$ olacak biçimde G uzayında e nin bir U açık komşuluğu var olup $FU \subseteq F$ dir. G topolojik grup olduğundan $e \in V \subseteq U$ olacak biçimde simetrik bir $V \subseteq G$ açığı vardır ve $FV \subseteq F$ dir. $p \in V$ alınırsa $p = ep \in FV \subseteq F$ olduğundan $p \in F$ olur. O halde $V \subseteq F$ dir. Üstelik $VV \subseteq FV \subseteq F$ olup tümevarımdan her $n \in \omega$ için $V^n \subseteq F$ olduğu görülebilir. $H = \bigcup \{V^n : n \in \omega\}$ diyelim. H ın G nin açık bir altgrubu olduğu kolayca görülebilir. H , G nin açık altgrubu olduğundan Teorem 3.1.6 den aynı zamanda kapalı altgrubudur. F kompakt ve H kapalı olduğundan H de kompaktır. O halde H kümesi G nin $H \subseteq F$ olacak biçimde açık kompakt bir altgrubudur. $\square$

6.1.17 Teorem

Her tamamen bağlantısız yerel kompakt topolojik grubun birim elemanının öyle bir $\mathcal{B}$ komşuluklar tabanı vardır ki $\mathcal{B}$ nin her elemanı bu topolojik grubun açık kompakt bir altgrubudur.

İspat

G tamamen bağlantısız yerel kompakt bir topolojik grup ve e de G nin birim elemanı olsun. Teorem 6.1.15 in ispatında görüldüğü üzere e nin G nin açık kapalı altkümelerinden oluşan bir $\mathcal{P}_e$ komşuluklar tabanı vardır. G yerel kompakt olduğundan $e \in T$ ve $\bar{T}$ kompakt olacak biçimde bir $T \subseteq G$ açığı vardır. O halde $\mathcal{B} = \{H_V : V \in \mathcal{P}_e\}$ ailesi e nin açık kompakt kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanıdır. Şöyleki; $e \in O$ olacak biçimde bir $O \subseteq G$ açığı alalım. O halde $e \in V \subseteq O$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{P}_e$ var olup $e \in V \cap T \subseteq O \cap T \subseteq O$ olur. V kapalı olduğundan $V \cap T$ kapalı olup kompaktır. O halde Önerme 6.1.17 den $H_V \subseteq V \cap T \subseteq O$ olacak biçimde G nin açık kompakt bir H_V altgrubu vardır. $\square$

6.1.18. Önerme

G bir kompakt topolojik grup olmak üzere, U kümesi G nin e birim elemanının hem açık hem kapalı bir komşuluğu ise $K \subseteq U$ olacak biçimde G nin bir K normal altgrubu

vardır.

İspat

U kümesi e nin hem açık hem de kapalı bir komşuluğu olsun. G kompakt ve U kapalı olduğundan U kompakttır. O halde Teorem 6.1.17 den $H \subseteq U$ olacak biçimde G nin açık kompakt bir H altgrubu vardır. $K = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$ olsun. K , G nin bir normal altgrubu olduğu kolayca görülebilir. bir $z \in K$ alınırsa $z \in eHe^{-1} = H$ olup $K \subseteq H$ dir. H açık ve G kompakt olduğundan Önerme 4.1.46 den her $x \in G$ için $xVx^{-1} \subseteq H$ olacak biçimde e nin bir V açık komşuluğu vardır. Öyleyse $V \subseteq x^{-1}Hx$ olup $x^{-1} = y$ denilirse her $y \in G$ için $V \subseteq yHy^{-1}$ dir. Böylece $V \subseteq \bigcap_{y \in G} yHy^{-1} = K$ olup $V \subseteq K$ dir. K , G nin bir V açık altkümesini içerdiğinden Sonuç 3.1.3 den K normal altgrubu G uzayında açıktır. O halde $K \subseteq U$ olacak biçimde G nin açık bir K normal altgrubu vardır. $\square$

Önerme 6.1.18 den aşağıdaki teorem verilebilir.

6.1.19 Teorem

G tamamen bağlantısız kompakt bir grup olmak üzere, G nin açık normal altgruplarının $\sigma(e) = \{K \subseteq G : e \in K \text{ ve } K \subseteq G \text{ açık normal altgrup}\}$ ailesi e birim elemanının bir komşuluklar tabanıdır.

6.1.20. Sonuç

Yerel kompakt bir topolojik grubun bağlantılı bileşeni bu topolojik grubun tüm açık altgruplarının arakesitine eşittir.

İspat

G yerel kompakt bir topolojik grup ve C de G uzayının bağlantılı bileşeni olsun. Önerme 4.1.40 den C bileşeni G nin kapalı bir normal altgrubu olup $\pi : G \rightarrow G/C$ doğal dönüşümü bir homomorfizmadır. π açık, sürekli, örten ve G yerel kompakt olduğundan G/C yerel kompakttır. C bağlantılı bileşen olduğundan Teorem 6.1.14 den G/C tamamen bağlantısızdır. C normal altgrup olduğundan Teorem 5.1.5 den G/C bir topolojik gruptur. Öyleyse Teorem 6.1.17 den G/C nin birim elemanın açık kompakt altgruplardan oluşan bir $\mathcal{B}$ komşuluklar tabanı vardır. Her $B \in \mathcal{B}$ için B kümesi G/C uzayında açık ve π dönüşümü de sürekli olduğundan $\pi^{-1}(B)$ de G uzayında açıktır. Üstelik her $B \in \mathcal{B}$ için B kümesi G/C nin bir altgrubu idi. O halde

π bir homomorfizma olduğundan $\pi^{-1}(B)$ de G nin bir altgrubudur. G/C T_1 -uzay olduğundan $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \pi^{-1}(B) = C$ dir. O halde C bağlantılı bileşeni G nin tüm açık altgruplarının arakesiti olarak yazılır. $\square$

6.1.21. Sonuç

G , yerel kompakt topolojik grup olmak üzere, aşağıdakiler denktir.

- i) G uzayı bağlantılıdır.
- ii) G nin açık öz altgrubu yoktur.
- iii) G nin birim elemanının her komşuluğu G grubunu cebirsel olarak üretir.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii) G bağlantılı olduğundan hem açık hem kapalı altkümeleri G ye eşittir.

ii) $\Rightarrow$ iii) $e \in U$ olacak biçimde G uzayında bir U açığı alalım. $U = U^{-1}$ olduğunu kabul etmek genelliği bozamaz. $\langle U \rangle = \{u_1 u_2 \cdots u_n : n \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq i \leq n \text{ için } u_i \in U\}$ olsun. $\langle U \rangle = H$ diyelim. H ın G de açık olduğunu görelim. $x \in H$ olsun. $x \in xU$ olup $xU \subseteq H$ dır. O halde $x \in H^\circ$ dır. Böylece $H = H^\circ$ olup H açıktır. H kümesi boştan farklı bir açık olduğundan hipotezden $H = G$ olmak zorundadır. O halde $\langle U \rangle = G$ dir.

iii) $\Rightarrow$ i) C_e , e nin bağlantılı bileşeni olsun. G nin bütün açık altgruplarının ailesi $\mathcal{H}$ olsun. Sonuç 6.1.20 den $C_e = \bigcap \mathcal{H}$ olup her $H \in \mathcal{H}$ için H kümesi e nin bir açık komşuluğudur. O halde hipotezden $\langle H \rangle = G$ dir. Öte yandan her $H \in \mathcal{H}$ için $\langle H \rangle = H$ olup $H = G$ dir. Öyleyse $C_e = G$ olup G bağlantılıdır. $\square$

6.1.22 Teorem

G tamamen bağlantısız yerel kompakt bir topolojik grup olmak üzere, H kümesi G nin kapalı bir altgrubu ise G/H bölüm uzayı sıfır boyutludur.

İspat

H kümesi G nin kapalı bir altgrubu olsun. $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal bir dönüşüm, $e \in G$ birim olmak üzere, $\sigma(\pi(e)) = \{\pi(V) : e \in V, V \subseteq G \text{ açık ve kapalı}\}$ ailesinin G/H ın birimi $\pi(e)$ nin bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. $\pi(e) \in W$ olacak biçimde

bir $W \subseteq G/H$ açığı alalım. $U = \pi^{-1}(W)$ denilirse $U \subseteq G$ açık ve $e \in U$ dur. Teorem 6.1.17 den G nin $e \in V \subseteq U$ olacak biçimde bir V açık kompakt altgrubu vardır. π açık ve sürekli olduğundan $\pi(V)$ de G/H de açık ve kompaktır. G/H Hausdorff $\pi(V)$ kompakt olduğundan $\pi(V)$ kapalıdır. Böylece $\pi(e) \in \pi(V) \subseteq \pi(U) \subseteq W$ olup $\sigma(\pi(e))$ ailesi $\pi(e)$ nin bir komşuluklar tabanıdır. G/H homojen uzay olduğundan her $x \in G/H$ noktasının açık kapalı kümelerden oluşan bir $\sigma(x)$ komşuluklar tabanı vardır. $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in G/H} \sigma(x)$ denilirse $\mathcal{B}$ ailesi G/H in hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir tabanı olur. Böylece G/H sıfır boyutlu olur. $\square$

Burada dikkat edilirse $\pi(V)$ kompakt V grubunun sürekli ve açık bir dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Şimdi bununla ilgili olarak dyadic kompakta olarak bilinen bir tanım verilecektir.

6.1.23. Tanım

X kompakt bir topolojik grup, Y Hausdorff bir uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli örten bir dönüşüm ise Y dyadic kompakta olarak adlandırılır.

O halde Teorem 6.1.17 ve Tanım 6.1.23 den aşağıdaki teorem verilebilir.

6.1.24 Teorem

G tamamen bağlantısız yerel kompakt bir topolojik grup olmak üzere, H kümesi G nin kapalı bir altgrubu ise G/H bölüm uzayı ve G dyadic kompakt kümelerden oluşan bir tabana sahiptir.

Şimdi topolojik gruplarla ilgili başka bir tanım verelim.

6.1.25. Tanım

G bir topolojik grup olmak üzere, eğer e nin öyle bir V komşuluğu varsa ki G nin $H \subseteq V$ biçimindeki her H altgrubu için $H = \{e\}$ ise G grubuna bir *NSS-grup* denir. (*NSS* no small subgroup olarak ingilizce aslına sadık kalınmıştır.)

Yukarıdaki tanıma göre *NSS-grup* larda birimin en az bir komşuluğu aşıkâr olmayan altgrup içermez. Şimdi *NSS-grup* ile ilgili bir örnek verilecektir.

Örnek

$\mathbb{R}$ reel sayılar toplamsal grubu alışılmış topolojiyle yerel kompakt bir *NSS-grup* tur. Şöyleki; kabul edelim ki $\mathbb{R}$ *NSS-grup* olmasın. Öyleyse $\mathbb{R}$ nin toplamsal birimi 0 ın $(-1, 1)$ komşuluğu için $\mathbb{R}$ nin öyle bir H altgrubu vardır ki $H \subseteq (-1, 1)$ ve $H \neq \{0\}$ dir. O halde $x \neq 0$ olacak biçimde bir $x \in H$ vardır. Eğer $x > 0$ ise $nx > 1$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Eğer $x < 0$ ise $nx < -1$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. H altgrup olduğundan her iki durumda da $nx \in H$ olur. Bu da $H \subseteq (-1, 1)$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup G bir *NSS-grup*tur. $\mathbb{R}$ aynı zamanda yerel kompakttır. Böylece $\mathbb{R}$ yerel kompakt bir *NSS -grup* tur.

6.1.26. Sonuç

Her tamamen bağlantısız yerel kompakt *NSS-grup* ayrıktır.

İspat

G tamamen bağlantısız yerel kompakt bir *NSS-grup* olsun. Öyleyse G nin birim elemanı e nin aşıkır olmayan altgrup içermeyen bir U açık komşuluğu vardır. Teorem 6.1.17 den e nin açık kompakt altgruplardan oluşan bir komşuluklar tabanı var olduğundan $H \subseteq U$ olacak biçimde G uzayında bir H açık kompakt altgrubu vardır. G bir *NSS-grup* ve $H \subseteq U$ olduğundan $H = \{e\}$ dir. Her $x \in G$ için $\lambda_x(\{e\}) = \{x\}$ olup sol öteleme dönüşümü bir homeomorfizma olduğundan $\{x\}$ açıktır. O halde her tek nokta kümesi açıktır. Böylece G uzayı ayrıktır. $\square$

Şimdi Önerme 6.1.16 ile uzaktan ilişkilendirilebilecek olan aşağıdaki önermeyi verelim.

6.1.27. Önerme

G bir topolojik grup olmak üzere, F kümesi G uzayında boştan farklı kompakt bir G_δ -küme ise $e \in P$ ve $FP \subseteq F$ olacak biçimde G uzayında bir P G_δ -kümesi vardır.

İspat

F kümesi G uzayında boştan farklı kompakt bir G_δ -küme olsun. O halde γ G uzayının açık altkümelerinin sayılabilir bir ailesi olmak üzere $F = \bigcap \gamma$ biçimindedir. $U \in \gamma$ alalım. Teorem 4.1.43 den $e \in V_U$ ve $FV_U \cap U^c = \emptyset$ olacak biçimde G uzayında bir V_U açığı vardır. Öyleyse $FV_U \subseteq U$ olur. $P = \bigcap \{V_U : U \in \gamma\}$ denilirse P G_δ -küme olup $e \in P$ dir. İlaveten $FP \subseteq \bigcap \gamma = F$ dir. Şöyleki; $x \in F$ ve $y \in P$ alalım. $P = \bigcap_{U \in \gamma} V_U$

olduğundan her $U \in \gamma$ için $y \in V_U$ olur. Öyleyse her $U \in \gamma$ için $xy \in FV_U \subseteq U$ olup $xy \in \bigcap_{U \in \gamma} U = \bigcap \gamma = F$ dir. O halde $FP \subseteq F$ dir. $\square$

6.1.28. Önerme

G bir topolojik grup olmak üzere, F kümesi G uzayında e birim elemanını içeren kompakt bir G_δ -küme ise G uzayında $e \in P \subseteq H \subseteq F$ olacak biçimde bir P G_δ -kümesi ve kapalı bir H altgrubu vardır.

İspat

F kümesi G de $e \in F$ olacak biçimde kompakt bir G_δ -küme olsun. Önerme 6.1.27 den G uzayında $e \in P$ ve $FP \subseteq F$ olacak biçimde bir P G_δ -kümesi vardır. $P = P^{-1}$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. $FP \subseteq F$ olduğundan $FPP \subseteq FP \subseteq F$ dir. Öyleyse $ePP \subseteq \bigcup_{x \in F} xPP \subseteq F$ olup $PP = P^2 \subseteq F$ dir. Tümevarımdan her $n \in \omega$ için $P^n \subseteq F$ olur. $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n$ denilirse S kümesinin G nin altgrubu olduğu kolayca görülebilir. Üstelik $e \in P \subseteq S \subseteq F$ dir. $\bar{S} = H$ diyelim. S kümesi G nin altgrubu olduğundan Sonuç 4.1.15 den $\bar{S}$ kümesi de G nin bir altgrubudur. İlâveten $\bar{S} = H$ olduğundan H altgrubu G de kapalıdır. O halde $e \in P \subseteq H \subseteq F$ olacak biçimde G uzayında bir P G_δ -kümesi ve kapalı bir H altgrubu vardır. $\square$

6.1.29 Teorem

G topolojik grubu bir NSS -grup ise aşağıdakiler denktir.

- i) G de boştan farklı kompakt bir G_δ -küme vardır.
- ii) G nin e birim elemanı bir G_δ -noktadır.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii) F, G uzayında boştan farklı kompakt bir G_δ -küme olsun. $F \neq \emptyset$ olduğundan bir $x \in F$ var olup $e \in x^{-1}F$ dir. $x^{-1}F$ kümesi F ye homeomorf olduğundan $e \in F$ kabul edebiliriz. e nin aşıkâr olmayan altgrup içermeyen bir U açık komşuluğunu alalım. G regüler uzay olduğundan $F \subseteq U$ kabul etmek genelliği bozmaz. Önerme 6.1.28 den G de $e \in P \subseteq H \subseteq F$ olacak biçimde bir P G_δ -kümesi ve kapalı bir H altgrubu vardır. $H \subseteq U$ olup G bir NSS -grup olduğundan $H = \{e\}$ olmak zorundadır. O halde $e \in P \subseteq H \subseteq F$ olduğundan $P = \{e\}$ olur. Öyleyse e birim elemanı G de bir G_δ -noktadır.

ii) $\Rightarrow$ i) Sonlu her küme kompakt olduğundan ispat açıktır. $\square$

Şimdi bir sonraki teoremden kullanılmak üzere bir lemma verilecektir.

6.1.30. Lemma

Her yerel kompakt uzay boştan farklı kompakt bir G_δ -küme içerir.

İspat

X yerel kompakt bir uzay olsun. $x \in X$ alalım. X yerel kompakt bir uzay olduğundan $x \in U$ ve $\bar{U}$ kompakt olacak biçimde X uzayında bir U açığı vardır. Yerel kompakt uzaylar Tychonoff ve dolayısıyla regüler olduğundan $x \in V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U$ olacak biçimde X uzayında bir V_1 açığı vardır. Dolayısıyla $x \in V_2 \subseteq \bar{V}_2 \subseteq V_1 \subseteq U$ olacak biçimde X uzayında bir V_2 açığı vardır. Bu biçimde devam edilirse her $n \in \omega$ için $\bar{V}_{n+1} \subseteq V_n$ olacak biçimde x noktasının bir V_n açık komşuluğu vardır. Her $n \in \omega$ için $V_n \subseteq \bar{V}_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n$ dir. Şimdi $\bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} V_n$ olduğunu görelim. $x \in \bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n$ alalım. Kabul edelim ki $x \notin \bigcap_{n \in \omega} V_n$ olsun. Öyleyse $x \notin V_{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $\bar{V}_{n_0+1} \subseteq V_{n_0}$ olduğundan $x \notin \bar{V}_{n_0+1}$ dir. Bu da $x \in \bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Öyleyse $\bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} V_n$ dir. Böylece $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n$ elde edilir. $\bigcap_{n \in \omega} \bar{V}_n = K$ diyelim. O halde her $n \in \omega$ için $\bar{V}_n$ kapalı olduğundan K kapalıdır. Üstelik $K \subseteq \bar{U}$ ve $\bar{U}$ kompakt olduğundan K kompakttır. Böylece $K = \bigcap_{n \in \omega} V_n$ olup boştan farklı kompakt bir G_δ -kümedir. $\square$

6.1.31 Teorem

Her yerel kompakt NSS -grup birinci sayılabilir uzaydır.

İspat

G yerel kompakt bir NSS -grup olsun. Lemma 6.1.30 den G yerel kompakt uzayı boş kümeden farklı kompakt bir G_δ -küme içeririr. Bu durumda Teorem 6.1.29 dan G nin e birim elemanı bir G_δ -noktadır. G yerel kompakt olduğundan e nin sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. Şöyleki; Teorem 6.1.29 dan e elemanı G uzayında bir G_δ -nokta olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} W_n = \{e\}$ olacak biçimde bir $\{W_n : n \in \omega\}$ açıklar ailesi vardır. $e \in W_0$, W_0 açık ve G regüler olduğundan $e \in V_0 \subseteq \bar{V}_0 \subseteq W_0$ olacak biçimde bir V_0 açığı vardır. O halde $e \in V_0 \cap W_1$, $V_0 \cap W_1$ açık ve G regüler olduğundan $e \in V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq V_0 \cap W_1$ olacak biçimde bir V_1 açığı vardır. Bu biçimde devam edilirse her $n \in \omega$ için $e \in V_{n+1} \subseteq \bar{V}_{n+1} \subseteq V_n \cap W_{n+1}$ olacak biçimde bir V_n açığı vardır.

Öyleyse $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} = \{e\}$ ve her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ dir. G yerel kompakt olduğundan $e \in U_0$ ve $\overline{U_0}$ kompakt olacak biçimde G uzayında bir U_0 açığı vardır. Öyleyse $\sigma = \{U_0 \cap V_n : n \in \omega\}$ ailesi e noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. Şöyleki; T açık olmak üzere $e \in T$ olsun. Kabul edelim ki her $n \in \omega$ için $U_0 \cap T^c \cap V_n \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse her $n \in \omega$ için $(\overline{U_0} \cap T^c) \cap V_n \neq \emptyset$ olur. $\overline{U_0} \cap T^c = K$ denilirse $K \cap \overline{V_n} \neq \emptyset$ dir. K , $\overline{U_0}$ ın kapalı bir altkümesi ve $\overline{U_0}$ kompakt olduğundan K kompakttır. Her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ olduğundan $\{K \cap \overline{V_n} : n \in \omega\}$ ailesi K ın boş olmayan kapalı alt kümelerinin sonlu arakesit özelliğine sahip bir ailesidir. K kompakt olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} (K \cap \overline{V_n}) \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $K \cap (\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n}) \neq \emptyset$ olur. $K = \overline{U_0} \cap T^c$ ve $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} = \{e\}$ olduğundan $(\overline{U_0} \cap T^c) \cap \{e\} \neq \emptyset$ elde edilir. Bu durumda $e \in T^c$ olur ki bu bir çelişkidir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır. Bu durumda $U_0 \cap T^c \cap V_{n_0} = \emptyset$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. O halde $U_0 \cap V_{n_0} \subseteq T$ dir. Öyleyse σ ailesi e noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. G homojen bir uzay olduğundan her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. O halde G birinci sayılabilir bir uzaydır. $\square$

Şimdi yerel kompakt topolojik gruplar üzerindeki sürekli homomorfizmalarla ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

6.1.32. Önerme

G yerel kompakt bir topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir altgrubu olmak üzere, G/H bölüm uzayı yerel kompakttır.

İspat

Yerel kompakt uzayların sürekli açık dönüşümler altındaki görüntüsü de yerel kompakttır [8]. $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü sürekli açık örten bir dönüşüm olduğundan G/H uzayı yerel kompakttır. $\square$

Şimdi bir sonraki teoremde kullanılmak üzere bir lemma verilecektir.

6.1.33. Lemma

G bir topolojik grup olmak üzere, H kümesi G nin kompakt bir altgrubu ve P kümesi G uzayında $P \subseteq H$ olacak biçimde boş kümeden farklı bir G_δ -küme ise H altgrubu G de bir G_δ -kümedir ve G/H ın her noktası bir G_δ -noktadır.

İspat

H kümesi G nin kompakt bir altgrubu ve P kümesi G de $P \subseteq H$ olacak biçimde boş kümeden farklı bir G_δ -küme olsun. $e \in P$ kabul etmek genelliği bozmaz. G regüler ve P G_δ -küme olduğundan her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ ve $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq P$ olacak biçimde e nin açık komşuluklarının bir $\{V_n : n \in \omega\}$ azalan dizisini sabitleyebiliriz. Şimdi $x \in G \setminus H$ alalım. H kompakt olduğundan xH kompakttır ve $H \cap xH = \emptyset$ dir. Aynı zamanda $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq P \subseteq H$ olduğundan $(xH) \cap (\bigcap_{n \in \omega} V_n) = \emptyset$ dir. Her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n}$ dir. O halde bazı $k \in \omega$ lar için $xH \cap V_k = \emptyset$ dir. Şöyleki; $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n}$ ve $xH \cap (\bigcap_{n \in \omega} V_n) = \emptyset$ olduğundan $xH \cap (\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n}) = \emptyset$ dir. Öyleyse $\{(\overline{V_n})^c : n \in \omega\}$ ailesi xH kompakt kümesi için bir açık örtüdür. Bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu sonlu alt örtünün elemanlarının indislerinin en büyüğüne k dersek $xH \cap V_k = \emptyset$ dir. Böylece $\Phi : G \rightarrow G/H$ örten doğal dönüşüm olmak üzere $\{\Phi(e)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi(V_n)$ dir. Her $n \in \omega$ için $\Phi(V_n)$ açıktır. Öyleyse $\Phi(e)$ birim elemanı G/H uzayında bir G_δ -noktadır. G/H in birimi bir G_δ -nokta ve G/H homojen bir uzay olduğundan G/H uzayının her noktası bir G_δ -noktadır. Diğer yandan $H = \Phi^{-1}(\Phi(e))$ ve $H = \Phi^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi(V_n)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^{-1}(\Phi(V_n))$ dir. Φ sürekli, açık ve örten bir dönüşüm olduğundan $\Phi^{-1}(\Phi(V_n))$ açıktır. O halde H kompakt altgrubu G uzayında bir G_δ -kümedir. $\square$

Şimdi Önerme 6.1.28 ve Lemma 6.1.33 ile ilgili bir teorem verilecektir.

6.1.34 Teorem

G bir topolojik grup olmak üzere, F kümesi G uzayında birimi içeren kompakt bir G_δ -küme olsun. Bu durumda G uzayında $H \subseteq F$ olacak biçimde kompakt bir H G_δ -kümesi vardır ve G/H in her noktası bir G_δ -kümedir.

İspat

G bir topolojik grup ve F kümesi G uzayında birimi içeren bir G_δ -küme olduğundan Önerme 6.1.28 den G uzayında öyle bir P G_δ -kümesi ve H kapalı altgrubu vardır ki $e \in P \subseteq H \subseteq F$ olur. Öyleyse F kompakt H kapalı olduğundan H de kompakttır. O halde Lemma 6.1.33 den H bir G_δ -kümedir. Öyleyse H kümesi $H \subseteq F$ olacak biçimde G uzayında bir G_δ -kümedir ve Lemma 6.1.33 den G/H in her noktası bir G_δ -noktadır. $\square$

6.1.35. Lemma

X kompakt bir Hausdorff uzay, $x_0 \in X$ ve her $n \in \omega$ için $G_n \subseteq X$ açık olmak üzere $\{x_0\} = \bigcap_{n \in \omega} G_n$ ise x_0 ın sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır.

İspat

$\{x_0\} = \bigcap_{n \in \omega} G_n$ olsun. X kompakt Hausdorff bir uzay olduğundan regülerdir. O halde $x_0 \in G_0$ olduğundan $x_0 \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq G_0$ olacak biçimde bir $V_0 \subseteq X$ açığı vardır. $x_0 \in G_1 \cap V_0$ olduğundan $x_0 \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq G_1 \cap V_0$ olacak biçimde bir $V_1 \subseteq X$ açığı vardır. Bu biçimde devam edilirse her $n \in \omega$ için $x_0 \in V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq V_n \cap G_{n+1}$ olacak biçimde bir $V_n \subseteq X$ açığı vardır. Her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ ve $V_n \subseteq G_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} = \{x_0\}$ olur. Her $n \in \omega$ için $(\overline{V_n})^c = O_n$ dersek O_n açıktır. $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \omega\}$ ailesi artan olup $X \setminus \{x_0\}$ için bir açık örtüdür. $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ ailesi x_0 ın bir komşuluklar tabanıdır. Şöyleki; $x_0 \in U$ ve $U \subseteq X$ açık olsun. $\mathcal{O}$ ailesi $X \setminus U$ için bir açık örtüdür. $X \setminus U$ kapalı ve X kompakt olduğundan $X \setminus U$ kompaktır. O halde $X \setminus U \subseteq O_{n_1} \cup O_{n_2} \cup \dots \cup O_{n_k}$ olacak biçimde $n_1, n_2, \dots, n_k$ vardır. $\mathcal{O}$ artan olduğundan $\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} = m$ denilirse $X \setminus U \subseteq O_m = (\overline{V_m})^c$ dir. Bu durumda $\overline{V_m} \subseteq U$ olup $x_0 \in V_m \subseteq U$ olur. O halde $\mathcal{V}$ ailesi x_0 ın sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. $\square$

İspatı yukarıdaki lemma gibi yapılabilen aşağıdaki lemma ispatsız olarak verilecektir.

6.1.36. Lemma

X Hausdorff bir topolojik uzay, H ve F X in kompakt altuzayları olmak üzere, $H \subseteq F$ olsun. Eğer H kümesi X içinde bir G_δ -küme ise X in açık altkümelerinin sayılabilir öyle bir $\{V_n : n \in \omega\}$ ailesi vardır ki $H = \bigcap_{n \in \omega} V_n$ ve $H \subseteq O$ olacak biçimdeki her $O \subseteq X$ açığı için $H \subseteq V_{n_0} \subseteq O$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır.

6.1.37 Teorem

G yerel kompakt topolojik bir grup olmak üzere, V kümesi G nin e birim elemanının açık bir komşuluğu ise G uzayının $H \subseteq V$ olacak biçimde öyle bir kompakt H altgrubu vardır ki G/H uzayı birinci sayılabilir.

İspat

V kümesi G nin e birim elemanının açık bir komşuluğu olsun. G yerel kompakt

olduğundan $e \in W$ ve $\overline{W}$ kompakt olacak biçimde G uzayında birimin bir W açık komşuluğu vardır. $V \cap W = U$ diyelim. $e \in U$, U açık ve $\overline{U} = \overline{V \cap W} \subseteq \overline{W}$ dir. O halde $\overline{U} \subseteq \overline{W}$ ve $\overline{W}$ kompakt olduğundan $\overline{U}$ kompakttır. Lemma 6.1.30 den $e \in F \subseteq U$ olacak biçimde G uzayında kompakt bir F G_δ -kümesi vardır. Şöyleki; $e \in U$, U açık ve G regüler olduğundan her $n \in \omega$ için $e \in \overline{V_{n+1}} \subseteq V_n \subseteq U$ olacak biçimde V_n açıkları vardır. O halde $\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{V_n} \subseteq U$ olur. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{V_n} = F$ denilirse F kapalı bir G_δ -küme olup $F \subseteq \overline{F} \subseteq \overline{U}$ olur. Öyleyse $\overline{U}$ kompakt ve F kapalı olduğundan F kompakttır. O halde $e \in F \subseteq U$ ve F kompakt bir G_δ -küme olduğundan Teorem 6.1.34 den $H \subseteq F$ olacak biçimde G de G_δ -küme olan kompakt bir H altgrubu vardır. G uzayı yerel kompakt olduğundan Lemma 6.1.36 dan G de H ın açık komşuluklarının sayılabilir bir γ komşuluklar tabanı vardır. Bu durumda H ın her açık komşuluğu en az bir $U \in \gamma$ içerir. $\Phi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümü açık olduğundan $\{\Phi(U) : U \in \gamma\}$ ailesi G/H de $\Phi(e)$ birim elemanının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. G/H uzayı homojen olduğundan G/H ın her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı vardır. O halde G/H uzayı birinci sayılabilir bir uzaydır. $\square$

Şimdi bir sonraki teorem için Baire özelliğinin tanımını ve bir lemma verilecektir.

6.1.38. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere X uzayında sayılabilir çoklukta yoğun açık kümenin arakesiti de X uzayında yoğunsa X uzayına Baire özelliğine sahiptir denir.

6.1.39. Lemma

Yerel kompakt, Hausdorff uzaylar Baire özelliğine sahiptir.

İspat

X yerel kompakt Hausdorff bir uzay olsun. Her $n \in \omega$ için $U_n \subseteq X$ açık olmak üzere $\overline{U_n} = X$ olsun. X uzayının Baire özelliğine sahip olduğunu görmek için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} = X$ olduğunu görelim. X uzayında boş kümeden farklı bir S_0 açığı alalım. $S_0 \neq \emptyset$ olduğundan bir $x \in S_0$ vardır. X yerel kompakt olduğundan $x \in T_0$ ve $\overline{T_0}$ kompakt olacak biçimde bir $T_0 \subseteq X$ açığı vardır. $S_0 \cap T_0 = V_0$ diyelim. V_0 boştan farklı açık ve $\overline{U_0} = X$ olduğundan $V_0 \cap U_0 \neq \emptyset$ dir. X uzayı regüler olduğundan $V_1 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_0 \cap U_0$ olacak biçimde X uzayında boştan farklı bir V_1 açığı vardır. $\overline{U_1} = X$ olduğundan $V_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ dir. X uzayı regüler olduğundan $V_2 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_1 \cap U_1$ olacak biçimde X uzayında bir V_2 açığı vardır. Bu biçimde devam edilirse her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n \cap U_n$ olacak biçimde boştan farklı bir V_n açığı vardır. O halde $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n}$ dir.

$V_{n+1} \subseteq U_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} U_n$ dir. Her $n \in \omega$ için $V_n \subseteq T_0 \subseteq \overline{T_0}$ dir. $\overline{T_0}$ kompakt ve $\{V_n : n \in \omega\}$ ailesi hiçbirisi boş olmayan kapalı kümelerden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip bir aile olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} V_n \neq \emptyset$ dir. O halde $V_0 \cap (\bigcap_{n \in \omega} U_n) \neq \emptyset$ olup $V_0 \subseteq S_0$ olduğundan $S_0 \cap (\bigcap_{n \in \omega} U_n)$ olur. Böylece $\overline{\bigcap_{n \in \omega} U_n} = X$ elde edilir. $\square$

6.1.40 Teorem

G σ -kompakt bir topolojik grup ve M yerel kompakt bir topolojik grup olmak üzere $f : G \rightarrow M$ sürekli örten bir homomorfizma ise f dönüşümü açıktır.

İspat

$f : G \rightarrow M$ sürekli örten bir homomorfizma olsun. G nin birim elemanı e olmak üzere $f^{-1}(f(e)) = H$ olsun. f homomorfizma olduğundan $f(e)$ de M nin birimidir. Öyleyse $f^{-1}(f(e)) = H$ kümesi f nin çekirdeği olup H kümesi G nin kapalı normal bir altgrubudur. $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşüm ve $f : G \rightarrow M$ sürekli, örten homomorfizma olduğundan Sonuç 5.1.12 den $f = g \circ \pi$ olacak biçimde açık, sürekli bir $g : G/H \rightarrow M$ homomorfizması vardır. g nin bire-bir ve örten olduğu kolayca görülebilir. Öyleyse g dönüşümü bir izomorfizmadır. G σ -kompakt olduğundan π sürekli dönüşümü altındaki görüntüsü G/H de σ -kompakttır. O halde her $n \in \omega$ için F_n kompakt olmak üzere $G/H = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ biçimindedir. Öte yandan g sürekli ve bire-bir olduğundan ve kompakt bir uzaydan Hausdorff bir uzaya giden sürekli her dönüşüm kapalı olduğundan g nin kompakt F_n uzayına kısıtlanması $g|_{F_n} : F_n \rightarrow g(F_n)$ de bir homeomorfizmadır. Her $n \in \omega$ için F_n kompakt ve g sürekli olduğundan $g(F_n)$ kompakttır. g örten olduğundan $G/H = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ eşitliğinden $M = \bigcup_{n \in \omega} g(F_n)$ eşitliği sağlanır. M bir topolojik grup olduğundan Hausdorff'tur. İlaveten her $n \in \omega$ için $g(F_n)$ kompakt ve Hausdorff uzayların kompakt altuzayları kapalı olduğundan her $n \in \omega$ için $g(F_n)$ kapalıdır. M yerel kompakt ve Hausdorff olduğundan önceki lemmadan Baire özelliğine sahiptir. Öyleyse $V \subseteq g(F_k)$ olacak biçimde M nin boştan farklı bir V açığı ve bir $k \in \omega$ vardır. $U = f^{-1}(V)$ denilirse $U = f^{-1}(V) = \pi^{-1}(g^{-1}(V))$ dir. f sürekli ve $V \neq \emptyset$ olduğundan U boştan farklı bir açıktır. π açık sürekli bir dönüşüm olduğundan π dönüşümünün U ya kısıtlanması $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$ dönüşümü de açık ve süreklidir. f homomorfizma olduğundan $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ dur. O halde $\pi^{-1}(\pi(U)) = U = f^{-1}(V) = \pi^{-1}(g^{-1}(V))$ olup π örten olduğundan $\pi(U) = g^{-1}(V)$ dir. O halde $\pi|_U : U \rightarrow g^{-1}(V)$ açık ve sürekli olup $f = g \circ \pi$ olduğundan g nin $\pi(U) = g^{-1}(V) \subseteq F_k$ ye kısıtlanması $g|_{\pi(U)} : \pi(U) \rightarrow V$ bir homeomorfizmadır. O halde $f|_U : U \rightarrow V$ açık, sürekli örten bir dönüşüm olup Önerme 5.1.16 dan f açık bir dönüşümdür. $\square$

6.1.41. Sonuç

Yerel kompakt bağlantılı bir topolojik gruptan yerel kompakt bir topolojik gruba giden örten sürekli her homomorfizma açıktır.

İspat

Sonuç 6.1.13 den yerel kompakt bağlantılı her topolojik grup σ -kompakttır. Dolayısıyla Teorem 6.1.40 den bu homomorfizma açıktır. $\square$

6.2. Yerel Kompakt Bölüm Grupları

Bu bölümde topolojik bir G grubunun yerel kompakt bir H altgrubu için $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal dönüşümünün bazı yerellik özelliklerini sağladığı görülecektir [7]. Önerme 4.1.25 de bir topolojik grubun yerel kompakt her altgrubunun kapalı olduğu görülmüştü.

6.2.1. Önerme

G bir topolojik grup, H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu, P de G nin birim elemanının bir açık komşuluğunu içeren G nin kapalı simetrik bir altkümesi olmak üzere $\overline{P^3} \cap H$ kompakt ve $\pi : G \rightarrow G/H$ örten doğal dönüşüm ise $f = \pi|_P : P \rightarrow \pi(P)$ örten mükemmel bir dönüşümdür.

İspat

$\overline{P^3} \cap H$ kompakt ve $\pi : G \rightarrow G/H$ örten doğal dönüşüm olsun. f nin mükemmel bir dönüşüm olması için f nin sürekli, kapalı ve her $a \in P$ için $f^{-1}(f(a))$ fiberleri kompakt olmalıdır. Şimdi bunları görelim. π sürekli olduğundan π nin P ye kısıtlanmış fonksiyonu da sürekli dir. O halde f dönüşümü sürekli dir. Şimdi her $a \in P$ için $f^{-1}(f(a))$ nın kompakt olduğunu görelim. $a \in P$ olsun. $f^{-1}(f(a)) = aH \cap P$ dir. Şöyleki; $x \in f^{-1}(f(a))$ olsun. Bu durumda $f(x) = f(a)$ olup $xH = aH$ ve böylece $x \in aH$ dır. Aynı zamanda $x \in P$ olduğundan $x \in aH \cap P$ dir. Şimdi de $p \in aH \cap P$ olsun. Bu durumda $\pi(p) = \pi(a)$ olup $f(p) = f(a)$ ve böylece $p \in f^{-1}(f(a))$ olur. Böylece eşitlik sağlanır. $aH \cap P$ kümesi $H \cap a^{-1}P$ kümesine homeomorftur. H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu olduğundan Önerme 4.1.25 den kapalıdır. Aynı zamanda P de kapalı olduğundan $aH \cap P$ kapalıdır. $a \in P$ ve P simetrik olduğundan $a^{-1} \in P$ dir. O halde $(H \cap a^{-1}P) \subseteq (H \cap P^2) \subseteq (H \cap P^3) \subseteq (H \cap \overline{P^3})$ olur. $H \cap \overline{P^3}$ kompakt ve $H \cap a^{-1}P$ kapalı olduğundan $H \cap a^{-1}P$ kümesi G de kompakttır. $f^{-1}(f(a)) = aH \cap P$ ve $aH \cap P$ kümesi $H \cap a^{-1}P$ ye homeomorf olduğundan $f^{-1}(f(a))$ fiberi kompakttır.

Şimdi f dönüşümünün kapalı olduğunu görelim. Bunun için P nin bir M kapalı altkümesi için $f(M)$ nin $\pi(P)$ de kapalı olduğu görülmelidir. Her zaman $f(M) \subseteq \overline{f(M)}^{\pi(P)}$ dir. Öyleyse $\overline{f(M)}^{\pi(P)} \subseteq f(M)$ olduğunu görmek yeterlidir. $\overline{f(M)}^{\pi(P)} = \overline{f(M)} \cap \pi(P)$ dir. $y \in \overline{f(M)} \cap \pi(P)$ alınırsa f örten olduğundan $y = f(a)$ olacak biçimde bir $a \in P$ vardır. O halde $f(a) \in \overline{f(M)}$ dir. Eğer $aH \cap M \neq \emptyset$ ise $f(a) \in f(M)$ dir. Çünkü $u \in aH \cap M$ alınırsa $u \in aH$ olup $uH = aH$ dir. $uH \in MH$ ve $aH = f(a)$ olduğundan $f(a) \in MH$ olur. Öyleyse $f(a) \in f(M)$ dir. O halde şimdi $aH \cap M \neq \emptyset$ olduğunu görelim. Aksini kabul edelim. Yani $aH \cap M = \emptyset$ olsun. Bu durumda $(aH \cap \overline{P^2}) \cap M = \emptyset$ olur. $aH \cap \overline{P^2} \subseteq aH \cap \overline{P^3}$, $aH \cap \overline{P^2}$ kapalı ve $aH \cap \overline{P^3}$ kompakt olduğundan $aH \cap \overline{P^2}$ kompakttır. O halde Teorem 4.1.43 den $(T(aH \cap \overline{P^2})) \cap M = \emptyset$ olacak biçimde G nin biriminin bir T açık komşuluğu vardır. $T \cap P = S$ diyelim. $S \cap S^{-1} = W$ denilirse W açık, simetrik ve $W \subseteq P$ olur. $e \in W$ ve W açık olduğundan $a \in Wa$ olup Wa açıktır. $\pi(a) \in \pi(Wa)$ ve π açık bir dönüşüm olduğundan $\pi(Wa)$ kümesi G/H uzayında açıktır. $f(a) \in \overline{f(M)}$ olduğundan $\pi(a) \in \overline{\pi(M)}$ dir. $\pi(a) \in \overline{\pi(M)}$, $\pi(a) \in \pi(Wa)$ ve $\pi(Wa)$ açık olduğundan $\pi(Wa) \cap \pi(W) \neq \emptyset$ olur. Öyleyse $\pi(m) = \pi(ya)$ olacak biçimde bir $m \in M$ ve $y \in W$ vardır. Bu durumda $mH = yaH$ olup $m = yah$ olacak biçimde bir $h \in H$ vardır. $y^{-1} \in W^{-1} = W \subseteq P$ ve $M \subseteq P$ olduğundan $y^{-1}m \in PP \subseteq P^2 \subseteq \overline{P^2}$ olup $aH = y^{-1}m \in \overline{P^2}$ dir. Öyleyse $ah \in aH$ ve $aH \in (aH \cap \overline{P^2})$ olduğundan $m = yah \in W(aH \cap \overline{P^2})$ dir. Bu durumda $m \in W(aH \cap \overline{P^2}) \subseteq T(aH \cap \overline{P^2})$ olup $T(aH \cap \overline{P^2}) \cap M = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $aH \cap M \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $f(a) \in f(M)$ olup $\overline{f(M)}^{\pi(P)} \subseteq f(M)$ elde edilir. O halde $\overline{f(M)}^{\pi(P)} = f(M)$ olur. Bu durumda f dönüşümü kapalı olur. Böylece üç koşul da sağlandığından f mükemmel bir dönüşümdür. $\square$

Önerme 6.2.1 ün daha sade bir hali A.V. Arhangel'skii tarafından aşağıdaki teoreme verilmiştir.

6.2.2 Teorem

G bir topolojik grup, H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu ve $\pi : G \rightarrow G/H$ doğal bölüm dönüşümü olmak üzere G nin e birim elemanının öyle bir U açık komşuluğu vardır ki $\pi(\overline{U})$ kümesi G/H uzayında kapalıdır. Üstelik $\pi|_{\overline{U}} : \overline{U} \rightarrow \pi(\overline{U})$ mükemmel bir dönüşümdür.

İspat

H , G nin yerel kompakt bir altgrubu olduğundan $e \in V \cap H$ ve $\overline{V \cap H}$ kümesi H de kompakt olacak biçimde G uzayında bir V açığı vardır. G topolojik grup olduğundan Teorem 3.1.20 den regüler bir uzaydır. Öyleyse $\overline{W} \subseteq V$ olacak biçimde G de e nin bir W açık komşuluğu vardır. $(\overline{W} \cap H) \subseteq (V \cap H) \subseteq (\overline{V \cap H})$ dir. $\overline{W} \cap H$ kapalı $\overline{V \cap H}$

kompakt olduğundan $\overline{W} \cap H$ kompakttır. Şimdi e nin $U_0^3 \subseteq W$ olacak biçimde simetrik bir U_0 açık komşuluğunu alalım. $P = \overline{U_0}$ diyelim. $\overline{U_0}^3 \subseteq \overline{U_0}^3$ olduğundan P Önerme 6.2.1 deki tüm koşulları sağlar. O halde π nin U_0 a kısıtlanması $\pi|_{\overline{U_0}} : \overline{U_0} \rightarrow \pi(\overline{U_0})$ mükemmel bir dönüşümdür. Şimdi U_0 ın teoremdeki diğer koşulu sağladığını görmek için yeni bir U elde edeceğiz. π açık dönüşüm olduğundan $\pi(U_0)$ kümesi G/H de açıktır. Teorem 5.1.8 den G/H regüler olduğundan $\overline{V_0} \subseteq \pi(U_0)$ olacak biçimde $\pi(e)$ nin bir V_0 açık komşuluğu vardır. $\pi^{-1}(V_0) \cap U_0 = U$ denilirse U birimin açık bir komşuluğu ve $\overline{U} \subseteq P$ dir. Öyleyse π nin $\overline{U}$ ya kısıtlanması $f = \pi|_{\overline{U}} : \overline{U} \rightarrow \pi(\overline{U})$ mükemmel bir dönüşümdür. Aynı zamanda $\pi(\overline{U}) \subseteq \overline{V_0} \subseteq \pi(U_0) \subseteq \pi(P)$ dir. $\pi(\overline{U})$ ve $\overline{V_0}$ kümeleri $\pi(P)$ de kapalı ve $\pi(\overline{U}) \subseteq \overline{V_0}$ olduğundan $\pi(\overline{U})$ de G/H de kapalıdır. $\square$

Yukarıdaki teoreme istinaden H kompakt ise Teorem 6.2.2 de U yerine G alınırsa Teorem 5.1.10 de görüldüğü üzere π mükemmel bir dönüşümdür. Ancak Teorem 6.2.2 de π dönüşümünün kapalı olması gerekmez.

6.2.3 Teorem

G sıfır boyutlu bir topolojik grup ve H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu olsun. O halde G/H uzayı sıfır boyutludur.

İspat

$\pi : G \rightarrow G/H$ doğal bölüm dönüşümü olsun. Teorem 6.2.2 den G nin e birim elemanının öyle bir U açık komşuluğu vardır ki π nin $\overline{U}$ ya kısıtlanması $\pi|_{\overline{U}} : \overline{U} \rightarrow \pi(\overline{U})$ mükemmel bir dönüşümdür ve $\pi(\overline{U})$ kümesi G/H de kapalıdır. G uzayı sıfır boyutlu olduğundan G nin hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{B}_0$ tabanı vardır. Bu durumda $\sigma(\pi(e)) = \{\pi(V) : V \in \mathcal{B}_0\}$ ailesi G/H ın biriminin hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanıdır. Şöyleki; G/H de $\pi(e)$ nin bir W açık komşuluğunu alalım. O halde $U \cap \pi^{-1}(W)$ kümesi açık ve $e \in U \cap \pi^{-1}(W)$ dir. $\mathcal{B}_0$ taban olduğundan $V \subseteq U \cap \pi^{-1}(W)$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{B}_0$ açık, kapalı komşuluğu vardır. π açık dönüşüm olduğundan $\pi(V)$ kümesi G/H uzayında açıktır. $V \subseteq \overline{U}$ ve $\pi|_{\overline{U}}$ mükemmel dönüşüm olduğundan $\pi(V)$ kümesi G/H içinde kapalıdır. $V \subseteq U \cap \pi^{-1}(W)$ olduğundan $\pi(V) \subseteq W$ dir. O halde $\sigma(\pi(e))$ ailesi G/H ın $\pi(e)$ birim elemanının hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanıdır. G/H homojen olduğundan G/H ın her x noktasının hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir $\sigma(x)$ komşuluklar tabanı vardır. $\bigcup_{x \in G/H} \sigma(x) = \mathcal{B}$ denilirse $\mathcal{B}$ ailesi G/H ın hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir tabanı olur. O halde G/H sıfır boyutlu bir uzay olur. $\square$

6.2.4. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, X in bir açık altkümesinin kapanışı olarak yazılabilen kümelerle regüler kapalı küme denir.

Teorem 6.2.2 den aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

6.2.5. Sonuç

$\mathcal{P}$, Tychonoff uzaylarda mükemmel dönüşümlerin öngörüntüsü altında korunan ve bu uzayın regüler kapalı altkümelerinde kahtsal bir topolojik özellik olsun. G bir topolojik grup, H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu ve G/H uzayı $\mathcal{P}$ özelliğine sahip olsun. Bu durumda e birim elemanın öyle bir U açık komşuluğu vardır ki $\bar{U}$ kümesi de $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir.

İspat

Sonuç 6.2.2 den e birim elemanın öyle bir U açık komşuluğu vardır ki $\pi|_{\bar{U}} : \bar{U} \rightarrow \pi(\bar{U})$ mükemmel bir dönüşümdür. π doğal dönüşümü açık bir dönüşüm olduğundan $U \subseteq \bar{U}$ için $\pi(U) = \pi|_{\bar{U}}(U)$ açıktır. $\pi|_U$ mükemmel dönüşüm olduğundan kapalı ve sürekli olup $\pi(\bar{U}) = \pi|_U(\bar{U}) = \overline{\pi|_U(U)}$ dur. O halde $\pi(\bar{U})$ açık bir kümenin kapanışı olarak yazılabildiğinden $\pi(\bar{U})$ regüler kapalı bir küme olup $\mathcal{P}$ özelliğini sağlar. $\pi|_{\bar{U}}$ mükemmel dönüşüm olduğundan $\bar{U} = \pi|_{\bar{U}}^{-1}(\pi(\bar{U}))$ de $\mathcal{P}$ özelliğini sağlar. O halde e nin kapanışı $\mathcal{P}$ özelliğine sahip bir U açık komşuluğu vardır. $\square$

6.2.6. Tanım

X bir $\mathcal{P}$ özelliğine sahip bir topolojik uzay olmak üzere, X in her noktasının, kapanışı $\mathcal{P}$ özelliğine sahip, bir açık komşuluğu varsa X uzayına yerel $\mathcal{P}$ özelliğine sahiptir denir.

Yerel kompaktlık, sayılabilir kompaktlık, sözde kompaktlık, parakompaktlık, Lindelöf uzay olma, σ -kompaktlık, Cech tam olma ve k -uzay olma özelliği regüler kapalı kümeler ve mükemmel dönüşümlerin öngörüntüleri altında korunan özelliklerdir [8]. Şimdi bununla ilgili olarak iki sonuç verilecektir. Fakat öncesinde topolojik uzaylarla ilgili bazı tanımları verelim.

6.2.7. Tanım

n herhangi bir kardinal sayı olmak üzere, eğer X topolojik uzayı $\mathbb{R}^n$ nin kapalı bir altuzayına homeomorf ise bu X uzayına reelkompakt bir uzay denir.

6.2.8. Tanım

Bir X uzayı kompakt bir uzayın bir G_δ -altkümesine homeomorf ise X uzayına Cech-tamdır denir.

6.2.9. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayında bir A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul A nın her kompakt kapalı küme ile arakesitinin kapalı olması ise X uzayına bir k -uzay denir [12].

6.2.10. Sonuç

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu olmak üzere G/H aşağıdaki özelliklerden hangisine sahipse G de aynı özelliğe sahiptir.

- i) G/H yerel kompakt uzaydır.
- ii) G/H yerel sayılabilir kompakt uzaydır.
- iii) G/H yerel sözde kompakt uzaydır.
- iv) G/H yerel parakompakt uzaydır.
- v) G/H yerel Lindelöf uzaydır.
- vi) G/H yerel σ -kompakt uzaydır.
- vii) G/H yerel Cech-tamdır.
- viii) G/H yerel reel kompakttır.

İspat

Bu sonucun ispatı sadece i için yapılacak olup diğerleri de benzer biçimde görülebilir.

- i) Sonuç 6.2.5 dan birim elemanın öyle bir U açık komşuluğu vardır ki $\overline{U}$ kümesi de yerel kompakttır. G homojen bir uzay olduğundan her noktasının böyle U açık komşulukları vardır. O halde G yerel kompakt bir uzaydır. $\square$

6.2.11. Sonuç

G bir topolojik grup ve H kümesi G nin yerel kompakt bir altgrubu olmak üzere, G/H bir k -uzay ise G de bir k -uzaydır.

İspat

([8], 3.7.25) den k -uzay olma özelliği mükemmel dönüşümlerin öngörüntüleri altında korunur. ([8], 3.3.25) den k -uzay olma özelliği hem açık hem de kapalı kümelerde kalıtsal olduğundan regüler kapalı kümeler k -uzaydır. O halde Sonuç 6.2.5 dan G nin birimi e nin $\bar{U}$ k -uzay olacak biçimde bir U açık komşuluğu vardır. G homojen bir uzay olduğundan her noktasının kapanışı k -uzay olacak biçimde bir açık komşuluğu vardır. O halde G yerel k -uzay olup bir k -uzaydır.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada sağ(sol) topolojik grupların homojenliğinden faydalanarak topolojik grupların bazı temel özellikleri incelenmiş ve ilgili örnekler verilmiştir. G bir topolojik grup ve H kümesi G nin kapalı bir altgrubu olmak üzere G/H ın da topolojik bir grup olduğu görülmüş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bir G topolojik grubunun yerel kompakt bir H altgrubunun kapalı olduğu görülerek G/H ın sahip olduğu bazı özellikler incelenmiş ve G/H ın sahip olduğu bir $\mathcal{P}$ özelliği için G nin de aynı $\mathcal{P}$ özelliğine sahip olduğu görülmüştür.





KAYNAKLAR

1. Brouwer, L.E.J (1910). On the structure of perfect sets of points, *Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, 12, 785-794.
2. Leja, F. (1927). Sur la notion du groupe abstrait topologique, *Fundamenta Mathematicae*, 9, 37-44.
3. Schreier, O. (1925). Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 4, 15-32.
4. Pontryagin, L.S. (1973). *Continuous Groups* (Third edition), Nauka Russian.
5. Freudenthal, H. (1936). Einige satze über topologische gruppen, *Annals of Mathematics*, 37, 46-56.
6. Markov, A. A. (1935). Über endlich-dimensionale vektor raume, *Annals of Mathematics*, 36, 464-506.
7. Arhangel'skii, A. and Tkachenko, M. (2008). *Topological Groups and Related Structures* (Volume 1), Amsterdam-Paris: Atlantis Press/ World Scientific, 1-793
8. Engelking, R. (1989). *General Topology* (Volume 6), Berlin: Helderman Verlag, 1-529
9. Willard, S. (1970). *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1-369
10. Asar, A. O., Arıkan, A. ve Arıkan, A. (2012). *Cebir* (2. Baskı), Ankara: Gazi Kitapevi, 1-156
11. Banakh T., Ravsky A. (2017). Each regular paratopological group is completely regular, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145, 1373-1382
12. Nagata, J. I (1985). *Modern General Topology*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1-529





GAZİ GELECEKTİR..