

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK ROUGH GRUPLAR

Nurettin BAĞIRMAZ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2015

Tezin Başlığı : TOPOLOJİK ROUGH GRUPLAR

Tezi Hazırlayan : Nurettin BAĞIRMAZ

Sınav Tarihi : 24.08.2015

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. A. Fatih ÖZCAN

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Mehmet BARAN

Erciyes Üniversitesi

Prof.Dr. İlhan İÇEN

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Erol KILIÇ

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. Muammer KULA

Erciyes Üniversitesi

Prof.Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Topolojik Rough Gruplar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Nurettin BAĞIRMAZ

ÖZET

Doktora Tezi

TOPOLOJİK ROUGH GRUPLAR

Nurettin BAĞIRMAZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

82+vi sayfa

2015

Danışman: Yrd.Doç.Dr. A. Fatih ÖZCAN

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, çalışmanın amacı ve literatürdeki yeri açıklandı.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, yaklaşımlı topolojik alt grup kavramı verildi. Sonra bir topolojik grupta, bir küme ve bir topolojik grup için alt ve üst yaklaşım kavramları verilerek bunların bazı özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde, topolojik rough grup kavramı verildi. Daha sonra topolojik rough alt gruplar, topolojik rough normal alt gruplar ve topolojik rough alt grupların homomorfizmleri kavramları verilerek bazı özellikleri incelendi.

ANAHTAR KELİMELEER: Rough kümeler, Rough gruplar, Topolojik rough gruplar.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

TOPOLOGICAL ROUGH GROUPS

Nurettin BAĞIRMAZ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

82+vi pages

2015

Supervisor: Assist. Prof.Dr. A. Fatih ÖZCAN

The aim of this study is to characterize topological rough groups. In the first chapter, the purpose of the study and place in literature was announced. In the second chapter, general information about rough sets, groups, topological groups, rough groups, and their properties which are necessary for the other chapters are given. In the third chapter, lower and upper approximations in a topological group and some properties of them are proved. In the fourth chapter, topological rough group and topological rough subgroups are defined. In addition, homomorphic images of topological rough subgroups studied.

KEY WORDS: Rough sets, Topological rough groups, Topological rough subgroups.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim süresince değerli bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, her zaman ve her konuda bana yol gösteren çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN' a içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca, kıymetli zamanını ve fikirlerini esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. İlhan İÇEN'e teze olan katkılarından dolayı çok teşekkür ederim. Ayrıca tüm yaşamım boyunca olduğu gibi doktora çalışmamda da yoğun çalışma temposu içerisinde desteklerini her zaman hissettiğim aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Gruplar	7
2.2. Topolojik Gruplar	17
2.3. Rough Kümeler	23
2.4. Yaklaşımlı Alt Gruplar	28
2.4.1. Bir Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlar	28
2.4.2. Bir Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlı Alt Gruplar	31
2.4.3. Alt ve Üst Yaklaşımların Homomorfik Görüntüsü	32
2.5. Rough Gruplar	33
2.5.1. Rough Grup ve Rough Alt Grup	34
2.5.2. Rough Kalan Sınıfları	36
2.5.3. Rough Normal Alt Gruplar	37
2.5.4. Rough Alt Grupların Homomorfizmleri	37
3. YAKLAŞIMLI TOPOLOJİK ALT GRUPLAR	40
3.1. Bir Topolojik Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlar	40
3.2. Bir Topolojik Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlı Topolojik Alt Gruplar	47
3.3. Alt ve Üst Yaklaşımların Homomorfik Görüntüsü	57
4. TOPOLOJİK ROUGH GRUPLAR	62
4.1. Topolojik Rough Gruplar	62
4.2. Topolojik Rough Alt Gruplar ve Topolojik Rough Normal Alt Gruplar	68
4.3. Topolojik Rough Alt Grupların Homomorfizmleri	72
5. KAYNAKLAR	78

ÖZGEÇMİŞ.....	82
---------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR

U	: Evrensel küme,
R	: U kümesi üzerinde denklik bağıntısı,
$R(x)$	: x elemanının denklik sınıfı,
(U, R)	: Yaklaşım uzayı,
$\underline{R}(X)$	: X kümesinin alt yaklaşımı,
$\overline{R}(X)$	: X kümesinin üst yaklaşımı,
$A \leq G$	: A, G grubunun altgrubu,
$N \triangleleft G$	: N, G grubunun normal alt grubu,
$\text{Çek}(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$\text{Im}(f)$	: f homomorfizmasının görüntüsü
$f _A$	: f homomorfizmasının A grubuna kısıtlanması
G/N	: Bölüm grubu,
xN	: x elemanın sol denklik sınıfı,
$\mu_X^R(x)$	: x elemanının yaklaşımlı üyelik fonksiyonu.

1. GİRİŞ

İnsanlık tarihi ile paralel gelişen ve şüphesiz matematiğin en önemli amaçlarından birisi de günlük sorunlarımıza çözüm üretmektir. 20. yüzyıla damgasını vuran ve G. Cantor tarafından 1874 ile 1895 yılları arasında geliştirilen klasik küme kuramının kesinlik mantığı; kesin olmayan durumların matematik modellenmesinde yetersiz kaldığı görülmüştür. Buna çözüm olarak değişik küme teorileri ortaya atılmıştır. Bu teorilerden başta gelenleri; 1965 yılında A. Zadeh tarafından tanımlanan bulanık (fuzzy) kümeler [1], 1982 yılında Z. Pawlak' ın tanımladığı kaba (rough) kümeler [2], 1999 yılında D. Molodtsov tarafından tanımlanan esnek (soft) kümeler [3] ve 2007 de J.F. Peter tarafından ortaya atılan yakın (near) kümelerdir [4]. Rough küme teorisini de kapsayan near küme teorisi ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır [5, 6, 7, 8, 9] .

Klasik küme teorisinde; bir nesne, bir kümenin ya elemanı ya da elemanı değilken, yukarıda belirttiğimiz diğer küme teorilerinde ise bu nesnenin kümenin belirli bir oranda kısmen elemanı olabilir.

Klasik küme teorisinin bir genişlemesi olan rough küme teorisi, Pawlak [2] tarafından belirsizlik kavramına yeni bir matematiksel yaklaşım olarak ileri sürülmüştür. Rough küme teorisinde bir kümenin tanımlanması için başlangıçta bazı özellikleri bilinen elemanlara sahip bir evrenin (uzay) tanımlanması gerekir. Aynı özelliklere sahip nesneler aynıdır veya ayırt edilemezdir. Örneğin, eğer nesneler belli bir eğitim (lise, ön lisans, lisans, vb.) almış olan insanlar ise eğitimin seviyesi bu kişiler hakkındaki bilgileri oluşturur. Aynı eğitim seviyesindeki kişiler, kendileri hakkındaki bilgiler bakı-

mından ayırt edilemezdir. Bu şekilde elde edilen ayırt edilmezlik (denklik) bağıntısı, rough küme kuramının matematiksel temelini oluşturur. Bütün aynı nesnelerin kümesine temel (elemanter) küme denir. Gerçekte her temel küme birer denklik sınıfını temsil eder. Bu temel kümelerin birleşimine kesin (crisp) küme denir. Kesinlik kavramının söz konusu olduğu klasik kümede kümeyi elemanlara göre nitelendirirken, belirsizlik kavramının söz konusu olduğu bir rough küme elemanlara göre nitelendirilemez. Bunun için bir rough küme, belirsizlik kavramının alt yaklaşımı (lower approximation) ve üst yaklaşımı (upper approximation) olarak adlandırılan iki kesin küme ile nitelendirilir. Nitelik bakımından aynı değerlere sahip nesnelerin oluşturduğu kümeye alt yaklaşım, nitelik bakımından aynı değerlere sahip olması muhtemel tüm nesnelerin oluşturduğu kümeye de üst yaklaşım denir. Denklik bağıntısı ve yaklaşım kavramları rough küme teorisinin temelini oluşturur.

U nesnelerin sonlu bir kümesi ve $R \subseteq U \times U$ ikili işlemi (bağıntısı) verilsin. U ya evren (universe), R ye ayırt edilemezlik (indiscernibility) bağıntısı denir. Bir $x \in U$ elemanının R ye göre denklik sınıfı $R(x)$ ile gösterilir. U evren ve R , U üzerindeki bir denklik bağıntısı olarak alındığında (U, R) ikilisine yaklaşım uzayı denir.

(U, R) bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ için X in R alt yaklaşımı, Z. Pawlak [2] tarafından

$$\underline{R}(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \subseteq X\} \text{ veya } \underline{R}(X) = \{x : R(x) \subseteq X\}$$

şeklinde tanımlandı. Buna göre X in alt yaklaşımı X tarafından tamamen kapsanan denklik sınıfların birleşiminden oluşur. Ya da denklik sınıfı X in içinde olan elemanların oluşturduğu kümedir.

X in R üst yaklaşımı ise

$$\overline{R}(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \cap X \neq \emptyset\} \text{ veya } \overline{R}(X) = \{x : R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlandı [2]. Buna göre X in üst yaklaşımı X ile arakesiti boştan farklı denklik sınıfların oluşturduğu kümedir. Ya da denklik sınıfları ile X in arakesitinde bulunan elemanların oluşturduğu kümedir.

Burada $x \notin X$ için $R(x) \cap X \neq \emptyset$ olabilir. Yani üst yaklaşımdaki elemanlar X in elemanı olmayabilir.

X in R sınır bölgesi de

$$RN(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Böylece Pawlak tarafından yapılan rough küme tanımı aşağıdaki biçimdedir.

Tanım 1.0.1. [2] (U, R) bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin sınır bölgesi boştan farklı ise X kümesine R ile bir rough küme denir.

Rough kümeler teorisi bugüne kadar bir çok dalda uygulama alanı buldu. Bu alanlara bir kaç örnek verilecek olursa; tıp [10, 11], yapay zeka ve data analizi [12, 13] sayılabilir. Rough kümeler başta cebir ve topoloji olmak üzere bir çok matematik alanında da uygulanmıştır. Topoloji alanı ile ilgili [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] çalışmaları gösterebiliriz.

Cebir alanında Iwinski [23] ile başlayan çalışmalar Bonikowaski [24] ve Pomykala [25] ile devam etmiştir. Grup alanında iki farklı tanım ve yönelme vardır. Bunlardan ilkinde, Kuroki and Wang [26], bir normal alt gruba göre alt ve üst yaklaşımları

tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Buna göre bir G grubu üzerinde N alt grubuna göre tanımlanan

$$x \equiv y(mod N) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı kullanılarak N. Kuroki ve P. P. Wang tarafından G bir grup, $N \subset G$ normal alt grup ve X, G nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere N normal altgrubuna göre X alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$\underline{N}(X) := \{x \in G : xN \subseteq X\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \subseteq X\}$$

ve

$$\overline{N}(X) := \{x \in G : xN \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlandı [26]. Burada (G, N) ikilisine yaklaşım uzayı denir.

Daha sonra bu tanımları kullanarak, W. Chen [27], F. Li ve Z. Zhang [28], C. Z. Wang ve D. G. Chen [29], A. F. Özcan ve N. Bağırmar [30], Z. Wang ve L. Shu [31] ve C. Wang et al [32] çalışmalar yapmışlardır.

İkincisinin de ise Biswas ve Nanda [33], sadece üst yaklaşıma göre tanımlanan rough grubu ve rough alt grubu, (U, R) bir yaklaşım uzayı ve $"."$ U üzerinde bir ikili işlem olmak üzere

$$(rg1) \quad \forall x, y \in G \text{ için } x.y \in \overline{G},$$

$$(rg2) \quad \forall x, y, z \in G \text{ için } (x.y).z = x.(y.z) \text{ birleşme özelliği } \overline{G} \text{ de sağlansın,}$$

$$(rg3) \quad \forall x \in G \text{ için } x.e = e.x = x \text{ olacak biçimde en az bir } e \in \overline{G} \text{ vardır (} e \text{ elemanına } G \text{ rough grubun birim elemanı denir),}$$

(rg4) $\forall x \in G$ için $x.y = y.x = e$ olacak biçimde en az bir $y \in G$ vardır (y elemanına G rough grubunda x elemanının ters elemanı denir ve x^{-1} ile gösterilir).

özelliklerini sağlayan bir $G \subset U$ alt kümesine bir "rough grup" denir, şeklinde tanımladı.

Daha sonra Miao et al [34], bu tanımdan yola çıkarak rough alt grubun bazı özelliklerini, koset kavramını ve rough homomorfizmaları göstermiştir. Ayrıca Yan et al [35] de rough normal alt grup ve rough bölüm grubu ile ilgili bazı özellikler vermiştir.

Bunun yanında Kuroki [36], bir yarı grupta yaklaşımlı ideal kavramını tanımladı. Davvaz [37], halka üzerinde bir ideale göre tanımlanan denklik bağıntısını kullanarak halkanın alt kümesinin alt ve üst yaklaşımlarını tanımladı. Davvaz ve Mahdavi-pour [38], rough modülleri oluşturdular. Ayrıca rough kümelerin yapısı ile ilgili olarak pek çok çalışma yapılmıştır [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46].

Tezin ikinci bölümünde, tezde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir. Bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, gruplar ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verildi. İkinci alt bölümde, topolojik grupların temel kavram ve özellikleri verildi. Üçüncü alt bölümde, rough kümeler tanıtıldı. Dördüncü alt bölümde, yaklaşımlı alt grupların temel kavramları verildi. Beşinci alt bölümde ise rough gruplar ile ilgili temel bilgiler verildi. Tezin orjinal bölümlerini oluşturan üçüncü ve dördüncü bölümlerinde, grup alanında yukarıda sözü edilen çalışmaların topolojik versiyonları incelendi. Üçüncü bölüm, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, bir topolojik grupta bir kümenin alt ve üst yaklaşımları G bir topolojik grup, $N \subset G$ normal alt grup ve X, G nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, N normal alt

grubuna göre X alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$\underline{N}(X) := \{x \in G : xN \subseteq X\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \subseteq X\}$$

ve

$$\overline{N}(X) := \{x \in G : xN \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlandı ve bazı özellikleri verildi. Burada (G, N) ikilisine topolojik yaklaşım uzayı denir.

İkinci alt bölümde, bir topolojik grupta alt ve üst yaklaşımli topolojik gruplar tanımlandı ve bazı özellikleri verildi. Üçüncü alt bölümde ise alt ve üst yaklaşımların bir sürekli homomorfizma altındaki özellikleri incelendi.

Dördüncü bölüm, tezin son bölümü olup topolojik rough gruplara ayrıldı. Bu bölüm, üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde topolojik rough grup tanımı, (U, R) yaklaşım uzayı, " $\cdot$ " U üzerinde bir ikili işlem, $G \subseteq U$ rough grup ve $(\overline{G}, T)$ bir topolojik uzay olmak üzere

(trg1) $f : G \times G \rightarrow \overline{G}, (x, y) \mapsto x.y$ sürekli fonksiyon,

(trg2) $g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon.

özellikleri sağlanıyor ise, G ye topolojik rough grup denir şeklinde yapıldı. Ayrıca bazı özellikleri incelendi ve örnekler verildi.

İkinci alt bölümde, topolojik rough grup ve topolojik rough normal alt grup kavramları verildi. Üçüncü alt bölümde ise topolojik rough alt grupların homomorfizm altındaki özellikleri incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin daha sonraki bölümlerinde kullanılacak bazı temel kavramların verildiği bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, grup kavramı ve bazı teoremler hatırlatıldı. İkinci alt bölümde, topolojik gruplar ile ilgili temel kavramlara yer verildi. Üçüncü alt bölümde, rough kümeler verildi. Dördüncü alt bölümde, yaklaşımlı alt gruplara yer verildi. Beşinci alt bölümde ise, rough grup ve rough alt grup kavramı ve bazı özellikleri verildi.

2.1 Gruplar

Bu alt bölümdeki tanım ve teoremler [47] kaynağından alındı.

Tanım 2.1.1. *G boştan farklı bir küme ve $\circ$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G, \circ)$ cebirsel yapısına bir grup denir.*

(g1) *Her $a, b \in G$ için $a \circ b \in G$ dir.*

(g2) *Her $a, b, c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ dir.*

(g3) *Her $a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.*

(g4) *Her $a \in G$ için $a \circ b = b \circ a = e$ olacak şekilde bir $b = a^{-1} \in G$ vardır.*

Tanım 2.1.2. *G bir grup ve H, G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H, G deki işleme göre bir grup ise H ye, G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.*

e , G nin birim elemanı ise G ve $\{e\}$, G nin her zaman alt gruplarıdır.

Teorem 2.1.1. G bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H nin bir alt grup olması için gerek ve yeter şart $\forall a, b \in H$ için, $ab^{-1} \in H$ (veya $a^{-1}b \in H$) olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ H bir alt grup olsun. Her $b \in H$ için $b^{-1} \in H$ ve $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ dir.

$(\Leftarrow)$ Her $a, b \in H$ için, $ab^{-1} \in H$ olsun. $a = b$ seçilirse $bb^{-1} = e \in H$ bulunur. $e \in H$ ve $b \in H$ için $a = e$ seçilirse $eb^{-1} = b^{-1} \in H$ olur. Son olarak $a, b \in H$ için $ab \in H$ olduğunu gösterilmelidir. Her $a, b \in H$ için $b^{-1} \in H$ olup, $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$ bulunur. G de birleşme özelliği sağlandığından H de de sağlanır. Sonuç olarak $H < G$ dir. $\square$

Tanım 2.1.3. G bir grup ve $H < G$ olsun. G de

$$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

şeklinde tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre $a \in G$ elemanının denklik sınıfı

$$\bar{a} = \{b \in G : a \equiv b \pmod{H}\}$$

ile verilir.

Teorem 2.1.2. G bir grup ve $H < G$ olsun. Tanım 2.1.3 de verilen $\equiv$ denklik bağıntısına göre

$$\bar{a} = aH = \{aH : h \in H\}$$

alt kümesi, $a \in G$ elemanının denklik sınıfıdır.

İspat. $a \in G$ elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{b \in G : a \equiv b \pmod{H}\}$ ve denklik sınıfı tanımından

$$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b \in aH$$

olduğundan $\bar{a} = aH$ elde edilir. $\square$

Tanım 2.1.4. G bir grup ve $H < G$ olsun. aH altkümese H alt grubuna göre a nın sol denklik (kalan) sınıfı denir.

Benzer biçimde sağ denklik sınıfları da tanımlanabilir.

Tanım 2.1.5. G bir grup ve $N < G$ olsun. Her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ ise N ye G nin normal alt grubu denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.1. G ve $\{e\}$, G nin her zaman normal alt gruplarıdır. G abelyan (değişmeli) ise her alt grubu aynı zamanda normal alt grubudur.

Tanım 2.1.6. G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. G nin N ye göre sol (veya sağ) denklik sınıfları kümesine bölüm kümesi denir ve G/N ile gösterilir.

Teorem 2.1.3. G bir grup ve N, G nin bir normal alt grubu olsun. $G/N = \{gN : g \in G\}$ bölüm kümesi bir gruptur.

İspat. $(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$ olup iki sol denklik sınıfının çarpımı yine bir sol denklik sınıfıdır.

$$\begin{aligned}(g_1N)(g_2Ng_3N) &= (g_1N)(g_2g_3N) = ((g_1)g_2g_3)N \\ &= ((g_1g_2)g_3)N \\ &= (g_1g_2N)(g_3N) \\ &= (g_1Ng_2N)(g_3N)\end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır.

Her $gN \in G/N$ için

$$gNeN = gN \text{ ve } eNgN = gN$$

olduğundan $eN = N$, G/N grubunun birim elemanıdır.

Her $gN \in G/N$ için

$$gNg^{-1}N = N \text{ ve } g^{-1}NgN = N$$

olduğundan gN nin tersi

$$(gN)^{-1} = g^{-1}N$$

dir.

Sonuç olarak G/N bir gruptur. □

$G/N = \{gN : g \in G\}$ grubuna G grubunun bölüm grubu denir.

Tanım 2.1.7. $(G_1, \cdot)$ ve $(G_2, \circ)$ iki grup olsun. Her $x, y \in G_1$ için

$$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$$

ise $f : G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümüne G_1 den G_2 ye bir homomorfizma denir.

Bire-bir ve örten homomorfizmaya izomorfizma denir. G_1 ve G_2 grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G_1 \cong G_2$ yazılır.

Teorem 2.1.4. $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir grup homomorfizması olsun. O zaman

$$(i) \quad f(e_1) = e_2,$$

$$(ii) \quad \forall a \in G \text{ için, } f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \text{ dir.}$$

İspat. (i) Her $a \in G$ için,

$$f(a) = f(ae_1) = f(a)f(e_1)$$

olup eşitliğin her iki tarafı soldan $f(a)^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$f(a)^{-1}f(a) = f(a)^{-1}f(a)f(e_1) \Rightarrow e_2 = f(e_1)$$

elde edilir.

(ii) Her $a \in G$ için,

$$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_1) = e_2$$

olduğundan, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ elde edilir. $\square$

Teorem 2.1.5. G_1, G_2 iki grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir homomorfizma, $N \subset G_1$ ve $H \subset G_2$ olsun. O zaman,

(i) $N < G_1$ ise $f(N) < G_2$,

(ii) $H < G_2$ ise $f^{-1}(H) < G_1$,

(iii) f örten ve $N \triangleleft G_1$ ise $f(N) \triangleleft G_2$,

(iv) $H \triangleleft G_2$ ise $f^{-1}(H) \triangleleft G_1$ dir.

İspat. (i) $a, b \in N$ için $f(a), f(b) \in f(N)$ olsun. $ab^{-1} \in N$ olduğundan

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in f(N)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f(N) < G_2$ dir.

(ii) $f^{-1}(H) = \{a \in G_1 : f(a) \in H\}$ olduğundan her $a, b \in f^{-1}(H)$ için $f(a), f(b) \in H$ dir. Ayrıca $H < G_2$ olduğundan

$$f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \in H$$

olur. Buradan $ab^{-1} \in f^{-1}(H)$ bulunur.

(iii) f örten ve $N \triangleleft G_1$ olsun. (i) den $f(N) < G_2$ dir. Şimdi normal alt grup olduğunu gösterelim.

$g \in G_2$ ve $f(a) \in f(N)$ olsun. f , örten olduğundan $g \in G_2$ için $f(b) = g$ olacak biçimde $\exists b \in G_1$ vardır. Buradan

$$gf(a)g^{-1} = f(b)f(a)f(b)^{-1} = f(b)f(a)f(b^{-1}) = f(bab^{-1})$$

bulunur. $N \triangleleft G_1$ olduğundan, $bab^{-1} \in N$ ve $gf(a)g^{-1} \in f(N)$ elde edilir.

(iv) $H \triangleleft G_2$ olsun. (ii) den $f^{-1}(H) < G_1$ dir. Şimdi $f^{-1}(H)$ altgrubunun normal alt grup olduğu gösterilmelidir.

Her $a \in G_1$ ve $b \in f^{-1}(H)$ için,

$$f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}$$

yazılabilir. $H \triangleleft G_2$ ve $f(b) \in H$ olduğundan $f(aba^{-1}) \in H$ olur. Buradan, $f(aba^{-1}) \in H$ ise $aba^{-1} \in f^{-1}(H)$ elde edilir. Sonuç olarak $f^{-1}(H) \triangleleft G_1$ bulunur. $\square$

Tanım 2.1.8. $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir homomorfizma ise

$$f^{-1}(e_2) = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir ve $\text{Çek}f$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.6. G_1, G_2 iki grup ve $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir homomorfizma olsun. O zaman,

(i) $\text{Çek}f = N \triangleleft G_1$,

(ii) $a \in G_2$ ve bir $x \in G_1$ için $f(x) = a$ ise $f^{-1}(a) = x\text{Çek}f = xN$ dir.

İspat. (i) $\{e_2\} \triangleleft G_2$ olduğundan Teorem 2.1.5 (iv) e göre, $f^{-1}(e_2) = \text{Çek}f \triangleleft G_1$ dir.

(ii) $a \in G_2$ ve bir $x \in G_1$ için $f(x) = a$ olsun.

$$\begin{aligned} b \in f^{-1}(a) &\Leftrightarrow f(b) = a = f(x) \\ &\Leftrightarrow f(b) f(x)^{-1} = f(b) f(x^{-1}) = f(bx^{-1}) = e_2 \\ &\Leftrightarrow bx^{-1} \in \text{Çek}f = N \\ &\Leftrightarrow b \in xN = Nx \end{aligned}$$

denkliklerinden $f^{-1}(a) = x\text{Çek}f = xN$ elde edilir. $\square$

Sonuç 2.1.1. G_1, G_2 iki grup ve $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir homomorfizma olsun. O zaman,

$$K \subset G_1 \Rightarrow f^{-1}(f(K)) = K\text{Çek}f$$

eşitliği vardır.

İspat. Teorem 2.1.6 (ii) den kolayca bulunur. $\square$

Teorem 2.1.7. G_1, G_2 iki grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir homomorfizma ve $\text{Çek}f = N$ olsun. O zaman,

$$G_1/N \cong f(G_1)$$

izomorfizmi vardır.

İspat. $\varphi : G_1/N \rightarrow f(G_1)$ dönüşümü, her $aN \in G_1/N$ için $\varphi(aN) = f(a)$ ile tanımlansın. φ nin izomorfizma olduğu gösterilmelidir. Önce φ nin iyi tanımlı olduğu, yani aN sınıfındaki temsilciye bağlı olmadığı gösterilsin. Bunun için, $aN = bN$ ise $\varphi(aN) = \varphi(bN)$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
aN = bN &\Rightarrow ab^{-1}N = N = \zeta ekf \\
&\Rightarrow ab^{-1} \in \zeta ekf \Rightarrow f(ab^{-1}) = e_2 \\
&\Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = e_2 \Rightarrow f(a) = f(b) \\
&\Rightarrow \varphi(aN) = \varphi(bN)
\end{aligned}$$

dir. Böylece φ iyi tanımlıdır.

φ nin homomorfizma olduğunu gösterelim. Bunu için her $aN, bN \in G_1/N$ için, $\varphi(aNbN) = \varphi(aN)\varphi(bN)$ olduğu gösterilmelidir. f homomorfizma ve N de normal alt grup olduğundan

$$r(aNbN) = r(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(aN)\varphi(bN)$$

elde edilir. Böylece φ bir homomorfizmadır.

φ nin örten olduğunu gösterelim. Her $b \in f(G_1)$ için $f(a) = b$ olacak biçimde $a \in G_1$ vardır. Öte yandan, $\varphi(aN) = f(a) = b$ için $aN \in G_1/N$ olduğundan φ örtendir.

Son olarak φ nin 1-1 olduğunu gösterelim. Her $aN, bN \in G_1/N$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi(aN) = \varphi(bN) &\Rightarrow f(a) = f(b) \\
&\Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) = e_2 \\
&\Rightarrow ab^{-1} \in \zeta ekf = N \\
&\Rightarrow aN = bN
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece φ , 1-1 dir.

Sonuç olarak φ bir izomorfizma olup $G_1/N \cong f(G_1)$ dir. □

Uyarı 2.1.2. Bir önceki teoremden $f : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizması örten ise $G_1/N \cong f(G_1) = G_2$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.9. G bir grup ve N , G nin bir normal alt grubu olmak üzere

$$\varphi : G \rightarrow G/N$$

$$g \mapsto gN$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya doğal (kanonik) homomorfizma denir.

Gerçekten, her $x, y \in G$ için

$$\varphi(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \varphi(x)\varphi(y)$$

olup φ bir homomorfizmadır. Her $xN \in G/N$ için $\varphi(x) = xN$ olacak biçimde bir $x \in G$ elemanı var olduğundan φ örtendir.

Teorem 2.1.8. G_1 ve G_2 iki grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ örten bir homomorfizma, $N_2 \triangleleft G_2$ ve $N_1 = f^{-1}(N_2)$ olsun. O zaman,

$$G_1/N_1 \cong G_2/N_2$$

izomorfizmi vardır.

İspat. Her $a \in G_1$ için, $\phi : G_1 \rightarrow G_2/N_2$ dönüşümü $\phi(a) = f(a)N_2$ ile tanımlansın. ϕ nin örten bir homomorfizma olduğunun gösterilmesi gerekir.

$a, b \in G_1$ için

$$\begin{aligned} a = b &\Rightarrow ab^{-1} = e_1 \Rightarrow \phi(ab^{-1}) = \phi(e_1) \\ &\Leftrightarrow f(ab^{-1})N_2 = N_2 \\ &\Leftrightarrow f(a)f(b)^{-1}N_2 = N_2 \\ &\Leftrightarrow f(a)N_2 = f(b)N_2 \\ &\Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b) \end{aligned}$$

olduğundan ϕ iyi tanımlıdır.

f örten olduğundan, her $b \in G_2$ için, $f(a) = b$ olacak şekilde $\exists a \in G_1$ bulunabilir. Bu durumda G_2/N_2 herhangi bir elemanı $bN_2 = f(a)N_2 = \phi(a)$ olduğundan örtendir.

Her $a, b \in G_1$ için

$$\phi(ab) = f(ab)N_2 = f(a)f(b)N_2 = (f(a)N_2)(f(b)N_2) = \phi(a)\phi(b)$$

olduğundan ϕ bir homomorfizmadır.

Şimdi $\text{Çek}\phi$ yi bulalım. Bir $a \in G_1$ için

$$a \in \text{Çek}\phi \Leftrightarrow \phi(a) = f(a)N_2 = N_2 \Leftrightarrow f(a) \in N_2$$

olmasıdır. $N_1 = f^{-1}(N_2)$ olduğundan, $f(a) \in N_2 \Leftrightarrow a \in N_1$ bulunur. Buradan, $\text{Çek}\phi = N_1$ bulunur. Böylece $\phi : G_1 \rightarrow G_2/N_2$ çekirdeği N_1 olan örten bir homomorfizma olduğundan Teorem 2.1.7 den $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ bulunur. $\square$

Teorem 2.1.9. G bir grup, $N \triangleleft G$ ve $H \triangleleft G$ olsun. O zaman,

$$N \subseteq H \Rightarrow G/H \cong (G/N)/(H/N)$$

izomorfizmi vardır.

İspat. $\varphi(xN) = xH$ ile tanımlı $\varphi : G/N \rightarrow G/H$ dönüşümü göz önüne alınsın.

Her $xN, yN \in G/N$ için $xN = yN \Rightarrow xy^{-1} \in N \Rightarrow xy^{-1} \in H \Rightarrow xH = yH \Rightarrow \varphi(xN) = \varphi(yN)$ olduğundan φ iyi tanımlıdır.

Ayrıca her $x, y \in G$ için $\varphi((xN)(yN)) = \varphi(xyN) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(xN)\varphi(yN)$ olduğundan φ bir homomorfizmadır.

φ örten olduğundan ve $\text{Çek}\varphi = \{xN : xH = H\} = \{xN : x \in H\} = H/N$ bulunur. Böylece Teorem 2.1.7 den $G/H \cong (G/N)/(H/N)$ elde edilir. $\square$

2.2 Topolojik Gruplar

Bu altbölümde kullanılan tanım ve teoremler Pontryagin' in Topological Groups [48] adlı kitabından alındı.

Tanım 2.2.1. (G, T) topolojik uzay ve $(G, .)$ bir grup olsun. Aşağıdaki özellikler mevcut ise; $(G, T, .)$ üçlüsüne topolojik grup denir.

(tg1) $f : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x.y$ sürekli fonksiyon,

(tg2) $g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon

veya tg1 ve tg2 ye denk olarak

(tg3) $f : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x.y^{-1}$ sürekli fonksiyondur.

Yukardaki tanım komşuluk kavramıyla da verilebilir. Bu durumda $\mathcal{N}(x)$, x noktasının komşuluklar sistemi olmak üzere, yukardaki tanımın komşuluklar türünden ifadesi aşağıdaki gibidir.

(tg1) $f : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x.y$ sürekli fonksiyondur $\Leftrightarrow \forall x, y \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x.y) \subseteq G$ için $U.V \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır,

(tg2) $g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyondur $\Leftrightarrow \forall x \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x^{-1})$ için $U^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ vardır. Burada $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ dir.

veya tg1 ve tg2 ye denk olarak

(tg3) $f : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x.y^{-1}$ süreklidir $\Leftrightarrow \forall x, y \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x.y^{-1}) \subseteq G$ için $U.V^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır.

Örnek 2.2.1. (1) G cebirsel bir grup olsun. G üzerinde ayrık topoloji düşünülürse $(T = P(G))$ G bir topolojik grup olur.

(2) G cebirsel bir grup olsun. G üzerindeki $\{\emptyset, G\}$ topolojisi ile bir topolojik grup olur.

(3) $\mathbf{R}$ reel sayılar toplamsal grubu, üzerindeki adi topoloji ile bir topolojik gruptur.

(4) $G = (Z_2, +)$ grubu, $T = \{\emptyset, \{0\}, G\}$ topolojisi ile bir topolojik grup değildir. Çünkü $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0), (1, 1)\}$, G üzerindeki çarpım topolojisine göre açık değildir.

Teorem 2.2.1. G bir topolojik grup ve $a \in G$ olmak üzere aşağıdaki dönüşümler birer homeomorfizmdir.

(1) $f : G \rightarrow G, x \mapsto xa$ (sağ kayma dönüşümü),

(2) $g : G \rightarrow G, x \mapsto ax$ (sol kayma dönüşümü),

(3) $t : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ (tersinin dönüşümü).

İspat. (1) Her $x, y \in G$ için $f(x) = f(y) \Rightarrow xa = ya$ olup her iki taraf a^{-1} ile çarpılırsa $x = y$, yani f bire-bir dir.

$y \in G$ olsun. $ya^{-1} = x$ dersek, $f(x) = f(ya^{-1}) = (ya^{-1})a = y$ olduğundan f örtendir.

f nin sürekliliği: $x \in G$ için $f(x) = xa \in W$ ve $W \in \mathcal{N}(xa)$ olsun. Topolojik grup tanımı (tg1) den $U.V \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(a) \subseteq G$ vardır. Buna göre $Ua \subseteq UV \subseteq W$ ve $f(U) \subseteq W$ yazılabilir. Böylece f, x noktasında süreklidir. x, G nin herhangi bir noktası olduğundan f, G de süreklidir.

f^{-1} in sürekliliği: $f^{-1} : G \rightarrow G, x \mapsto xa^{-1}$ olduğundan f sürekliliğinden f^{-1} de süreklidir.

Sonuç olarak f bir homeomorfizmdir. □

Teorem 2.2.2. G bir topolojik grup olsun. O zaman, $a \in G, F \subset G$ kapalı küme, $U \subset G$ açık küme ve $P \subset G$ herhangi bir küme ise Fa, aF, F^{-1} kapalı kümelerdir ve UP, PU, U^{-1} açık kümelerdir.

İspat. Önce aF nin kapalı olduğunu gösterelim. $f : G \rightarrow G, x \mapsto xa$ fonksiyonu bir önceki teoreme göre homeomorfizmdir. F , kapalı olduğundan $f(F) = Fa$ da kapalıdır. aF ve F^{-1} kümelerin kapalılığı benzer biçimde gösterilir.

$U \subset G$ açık küme ve $P \subset G$ herhangi bir küme olsun. Bu durumda $UP = \bigcup_{p \in P} Up$ olarak yazılabilir. Up , bir önceki teoreme göre sağ dönüşüm altında U nun görüntüsü olduğundan açıktır. Böylece UP açıktır. PU ve U^{-1} kümelerin açıklığı benzer biçimde gösterilir. □

Teorem 2.2.3. G bir topolojik grup olsun. O zaman G nin her cebirsel alt grubu, aynı zamanda topolojik alt grubudur.

İspat. H, G nin alt grubu olsun. Her $x, y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ dır.

$$H \times H \rightarrow H$$

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu göstereceğiz.

Diğer taraftan, buna denk olarak $x, y \in H$ ve $xy^{-1} \in H$ için $W_H \in \mathcal{N}_H(xy^{-1})$ verildiğinde $W_H = W \cap H$ olacak biçimde $\exists W \in \mathcal{N}_G(xy^{-1})$ vardır.

G bir topolojik grup olduğundan $\forall x, y \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(xy^{-1}) \subseteq G$ için $UV^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır.

Şimdi $U_H = U \cap H$ ve $V_H = V \cap H$ denilirse H deki alt uzay topolojisine göre $U_H \in \mathcal{N}_H(x)$ ve $V_H \in \mathcal{N}_H(y)$ yazılabilir.

$$U_H V_H^{-1} \subseteq UV^{-1} \subseteq W$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$U_H V_H^{-1} \subseteq HH^{-1} = H$$

yazılabilir. Böylece

$$U_H V_H^{-1} \subseteq W \cap H = W_H$$

bulunur. Sonuç olarak G topolojik grubunun her alt grubu bir topolojik alt gruptur.

□

Tanım 2.2.2. G_1 ve G_2 iki topolojik grup olsun. $f : G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümü hem grup izomorfizması hem de homeomorfizm ise bu dönüşüme topolojik izomorfizma denir. G_1 ve G_2 ye topolojik olarak izomorf gruplar denir.

Teorem 2.2.4. G bir topolojik grup, $N \subset G$ nin normal alt grubu ve G/N bölüm topolojisi olsun. O zaman,

(1) $\pi : G \rightarrow G/N$, $g \mapsto gN$, sürekli ve açık homomorfizmadır.

(2) G/N bir topolojik gruptur.

İspat. (1) $U \subset G$ açık olsun. Bu durumda $\pi(U)$ nun G/N içinde açık olduğunu göstermek gerekir. Bunun için de $\pi^{-1}(\pi(U)) = UN$ eşitliğini göstermek yeterlidir.

$g \in \pi^{-1}(\pi(U)) \Rightarrow \pi(g) \in \pi(U) \Rightarrow gN \in \pi(U) \subseteq UN$ olur. Buradan $g \in gN \in UN$ bulunur.

Tersine, $n \in N, g \in U$ olmak üzere $gn \in UN$ olsun. O zaman

$$\pi(gn) = gnN = gN = \pi(g) \in \pi(U)$$

olur. Buradan

$$\pi(gn) \in \pi(U) \Rightarrow gn \in \pi^{-1}(\pi(U)) \Rightarrow UN \subseteq \pi^{-1}(\pi(U))$$

elde edilir. Böylece $\pi^{-1}(\pi(U)) = UN$ bulunur.

$U \subset G$ açık olduğundan Teorem 2.2.2 den UN açıktır. Buradan $\pi^{-1}(\pi(U))$ açıktır. φ bölüm dönüşümü sürekli olduğundan $\pi(U)$ da açıktır. U açık iken $\pi(U)$ da açık olduğundan π açık homomorfizmadır.

(2) G/N nin bölüm grubu olduğu Teorem 2.1.3 den bilindiği için geriye

$$f : G/N \times G/N \rightarrow G/N$$

$$(g_1N, g_2N) \mapsto (g_1N)(g_2N)^{-1} = g_1g_2^{-1}N$$

dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$W, G/N$ içinde $g_1g_2^{-1}N$ nin bir açık komşuluğu olsun. Bu durumda $\pi(g_1g_2^{-1}) = g_1g_2^{-1}N \in W$ olduğundan $g_1g_2^{-1} \in \pi^{-1}(W)$ olur. G bir topolojik grup olduğundan,

g_1 in en az bir U komşuluğu ve g_2 nin en az bir V komşuluğu için $UV^{-1} \subseteq \pi^{-1}(W)$ yazılabilir. Buradan $\pi(UV^{-1}) \subseteq W$ olur. π bir homomorfizma olduğundan $\pi(UV^{-1}) = \pi(U)\pi(V^{-1}) \subseteq W$ bulunur. π açık olduğundan $A = \pi(U)$, g_1N elemanının ve $B = \pi(V^{-1}) = \pi(V)^{-1}$ de g_2N elemanının birer açık komşuluğudur. Dolayısıyla $AB \subseteq W$ açık olduğundan topolojik grup tanımı ve süreklilik tanımından f dönüşümü süreklidir. Sonuç olarak G/N bir topolojik gruptur. $\square$

Teorem 2.2.5. G_1, G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir sürekli örten homomorfizma ve $\text{Çek} f = N$ olsun. O zaman, f bir açık dönüşüm ise

$$\varphi : G_1/N \rightarrow G_2$$

dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır.

İspat. f bir açık dönüşüm ve $\pi : G_1 \rightarrow G_1/N$ olsun. Teorem 2.1.7 den φ bir grup izomorfizmasıdır. $f : G_1 \rightarrow G_2$ sürekli ve Teorem 2.2.4 den $\pi : G_1 \rightarrow G_1/N$ dönüşümü sürekli olduğundan $f = \varphi \circ \pi$ olup φ dönüşümü de süreklidir.

Şimdi $\varphi^{-1} : G_2 \rightarrow G_1/N$ sürekliliğini gösterelim. φ^{-1} sürekliliği için önce φ nin açık olduğunu gösterelim. $U \subset G_1$ açık olsun. f açık oldundan $f(U) = V$, G_2 de açık ve π açık dönüşüm olduğundan $\pi(U) = W$ da G_1/N de açıktır. Böylece $f(U) = \varphi(\pi(U)) = \varphi(W) = V$ olduğundan φ bir açık dönüşümdür. Buradan $\varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(\varphi(W)) = W$ olup φ^{-1} süreklidir.

Sonuç olarak $\varphi : G_1/N \rightarrow G_2$ bir topolojik izomorfizmadır. $\square$

Teorem 2.2.6. G_1, G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir sürekli örten homomorfizma, $N_2 \triangleleft G_2$ ve $N_1 = f^{-1}(N_2)$ olsun. O zaman, f bir açık dönüşüm ise $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ izomorfizmi vardır.

İspat. f açık bir dönüşüm olsun. $\phi(a) = f(a)N_2$ ile tanımlı $\phi : G_1 \rightarrow G_2/N_2$ homomorfizması alınırsa, Teorem 2.1.8 den $\text{Çek}\phi = N_1$ olup G_1/N_1 ve G_2/N_2 izomorf gruplardır. G_1/N_1 ve G_2/N_2 topolojik gruplar olduğundan bir önceki teoreme göre G_1/N_1 ve G_2/N_2 topolojik izomorfturlar, yani $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. $\square$

2.3 Rough Kümeler

Rough küme teorisi, ilk olarak Pawlak [2] tarafından ortaya atılmıştır. Rough (yaklaşımlı) küme, evrensel kümenin herhangi bir alt kümesi olup, evrensel küme üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı ile oluşturulan alt ve üst yaklaşımlar ikilisi ile tanımlanır.

U , nesneleri sayısı sonlu bir küme ve $R \subseteq U \times U$ ikili işlemi (bağıntısı) verilsin. U ya evren (universe), R ye ayırtedilemezlik (indiscernibility) bağıntısı denir. Bu tez boyunca R bağıntısı bir denklik bağıntısı olarak kabul edilecektir. Bir $x \in U$ elemanının R ye göre denklik sınıfı $R(x)$ ile gösterilir. U evren ve R , U üzerindeki bir denklik bağıntısı olarak alındığında (U, R) ikilisine yaklaşım uzayı denir.

Tanım 2.3.1. [2] (U, R) bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin R -alt yaklaşımı

$$\underline{R}(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \subseteq X\}$$

ya da

$$\underline{R}(X) = \{x : R(x) \subseteq X\}$$

ile tanımlanır.

Buna göre X in alt yaklaşımı X tarafından tamamen kapsanan denklik sınıfların birleşiminden oluşur. Ya da denklik sınıfı X in içinde olan elemanların oluşturduğu kümedir.

X kümesinin R -üst yaklaşımı

$$\overline{R}(X) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

ya da

$$\overline{R}(X) = \{x : R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

ile tanımlanır.

Buna göre X in üst yaklaşımı, X ile arakesiti boştan farklı denklik sınıfların oluşturduğu küme ya da denklik sınıfı ile X in arakesiti boştan farklı elemanların oluşturduğu kümedir.

Burada $x \notin X$ için $R(x) \cap X \neq \emptyset$ olabilir. Yani üst yaklaşımdaki elemanlar X in elemanı olmayabilir.

X kümesinin R -sınır bölgesi

$$RN(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X)$$

ile tanımlanır.

X kümesinin R - sınır bölgesi, üst ve alt yaklaşımlar arasındaki farktır. Yani ne X kümesinin nede $-X$ ($-X : X$ in tümleyeni, yani $-X = U - X$ ile tanımlanır.) kümesinin elemanı olarak R bağıntısıyla sınıflandıramadığımız elemanların oluşturduğu kümedir.

Tanım 2.3.2. [13] Bir X kümesinin sınır bölgesi boş ise X kümesine R ile crisp (tam, kesin) dir denir.

Tanım 2.3.3. [13] Bir X kümesinin sınır bölgesi boştan farklı ise X kümesine R ile rough kümedir denir.

Önerme 2.3.1. [13] (U, R) yaklaşım uzayı olmak üzere U nun X ve Y alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$,
2. $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$, $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$,
3. $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$,
4. $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$,
5. $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$,
6. $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$,
7. $X \subset Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$ ve $\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$,
8. $\underline{R}(-X) \subseteq -\overline{R}(X)$,
9. $-\underline{R}(X) \subseteq \overline{R}(-X)$,
10. $\underline{R}\underline{R}(X) = \overline{R}\underline{R}(X) = \underline{R}(X)$,
11. $\overline{R}\overline{R}(X) = \underline{R}\overline{R}(X) = \overline{R}(X)$.

Rough kümeleri 4 temel sınıfa ayırabiliriz. Yani belirsizliği (vagueness) dört kategoriye göre düzenleyebiliriz.

1. Bir X kümesi roughly R -definable $\Leftrightarrow \underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$.
2. Bir X kümesi internally R -undefinable $\Leftrightarrow \underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$.
3. Bir X kümesi externally R -undefinable $\Leftrightarrow \underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$.

4. Bir X kümesi totally R -undefinable $\Leftrightarrow \underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$.

Rough kümeler, yaklaşımlar yerine bir yaklaşımlı üyelik fonksiyonu ile de tanımlanır.

Klasik küme teorisinde bir eleman bir kümeye ya aittir ya da değildir. Burada bu küme için karakteristik fonksiyonu olarak üyelik fonksiyonu sırasıyla 1 ve 0 değerini alır.

Rough kümelerde ise üyelik fonksiyonu notasyonu farklıdır. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu, x in ait olduğu $R(x)$ denklik sınıfı ile X kümesi arasında birbiriyle göreceli örtüşme derecesini ölçer.

$|X|$, X in eleman sayısını göstermek üzere yaklaşımlı üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^R : U \rightarrow [0, 1], \mu_X^R(x) = \frac{|X \cap R(x)|}{|R(x)|}$$

şeklinde tanımlanır.

Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu R verilmişken x elemanının X kümesine ait olmasının şartlı ihtimalini ve R nin yardımıyla x hakkında verilen bilgi göz önünde tutularak x in X e ait olma derecesini açıklar.

Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu, yaklaşımları tanımlamak ve sınır bölgesini belirlemek için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [13]:

$$\underline{R}(X) = \{x \in U : \mu_X^R(x) = 1\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x \in U : \mu_X^R(x) > 0\},$$

$$RN(X) = \{x \in U : 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$$

Örnek 2.3.1. [49] $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ objelerin kümesi, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ değişkenlerin kümesi ve $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $V_2 = \{1, 2\}$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri de her bir değişkenin aldığı değerlerin kümesini gösterebilir.

Yukarıda verilen 10 obje için elde edilen üç sonucun matris formu aşağıdaki gibi verilir.

$\underline{U}$	$\underline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\underline{a_3}$
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_6	1	1	2
x_7	3	2	1
x_8	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

Bu sistem için f_a fonksiyonu yukarıdaki gibi verilir. Verilenlere göre $f_{a_1}(x) = V_1$, $f_{a_2}(x) = V_2$ ve $f_{a_3}(x) = V_3$ olarak verilir.

$R(x)$, x elemanının denklik sınıfını göstermek üzere

$$R(x_i) = \{x_j : x_j, x_i \text{ ile aynı ölçüme sahip, } 1 \leq i, j \leq 10\}$$

şeklinde tanımlansın.

Buna göre denklik sınıfları;

$$R(x_1) = R(x_3) = R(x_9) = \{x_1, x_3, x_9\},$$

$$R(x_2) = R(x_7) = R(x_{10}) = \{x_2, x_7, x_{10}\},$$

$$R(x_4) = \{x_4\},$$

$$R(x_5) = R(x_8) = \{x_5, x_8\},$$

$$R(x_6) = \{x_6\},$$

şeklinde bulunur.

Bu denklik sınıflarından yararlanarak U nun bir $X = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ alt kümesinin alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve sınır bölgesi sırasıyla

$$\underline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\},$$

$$RN(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{x_5, x_8\}.$$

şeklindedir.

2.4 Yaklaşımlı Alt Gruplar

Bu alt bölümde, yaklaşımli alt gruplar tanıtıldı.

2.4.1 Bir Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlar

Rough kümelerin, evrensel küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntıları ile belirlendiği daha önce verilmişti. Buna göre bir G grubu üzerinde N alt grubuna göre tanımlanan

$$x \equiv y(mod N) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı kullanılarak bir grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [26].

Tanım 2.4.1. [26] G bir grup, $N \subset G$ normal alt grup ve X , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. N normal alt grubuna göre X alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$\underline{N}(X) := \{x \in G : xN \subseteq X\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \subseteq X\}$$

ve

$$\overline{N}(X) := \{x \in G : xN \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (G, N) ikilisine yaklaşım uzayı denir.

Sonuç 2.4.1. [26] (G, N) yaklaşım uzayı olmak üzere G nin X ve Y alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1 $\underline{N}(X) \subseteq X \subseteq \overline{N}(X)$,
- 2 $\underline{N}(\emptyset) = \overline{N}(\emptyset) = \emptyset$, $\underline{N}(G) = \overline{N}(G) = G$,
- 3 $\overline{N}(X \cup Y) = \overline{N}(X) \cup \overline{N}(Y)$,
- 4 $\underline{N}(X \cap Y) = \underline{N}(X) \cap \underline{N}(Y)$,
- 5 $\underline{N}(X \cup Y) \supseteq \underline{N}(X) \cup \underline{N}(Y)$,
- 6 $\overline{N}(X \cap Y) \subseteq \overline{N}(X) \cap \overline{N}(Y)$,
- 7 $X \subset Y \Rightarrow \underline{N}(X) \subseteq \underline{N}(Y)$ ve $\overline{N}(X) \subseteq \overline{N}(Y)$,
- 8 $\underline{N}(-X) \subseteq -\overline{N}(X)$,
- 9 $-\underline{N}(X) \subseteq \overline{N}(-X)$,
- 10 $\underline{N}\underline{N}(X) = \overline{N}\underline{N}(X) = \underline{N}(X)$,

$$11 \quad \overline{NN}(X) = \underline{N}\overline{N}(X) = \overline{N}(X)$$

Uyarı 2.4.1. X ve Y , G nin boştan farklı alt kümeleri ise

$$XY = \{xy : x \in X, y \in Y\} \text{ ve } X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

ile tanımlıdır.

Önerme 2.4.1. [26] G bir grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X , G nin bir alt grubu olsun. O zaman,

$$N \subseteq X \Rightarrow \underline{N}(X) = X$$

eşitliği vardır.

Önerme 2.4.2. [26] G bir grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman,

$$\overline{N}(X) = XN$$

eşitliği vardır.

Önerme 2.4.3. [26] G bir grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X ile Y , G nin boştan farklı alt kümeleri ise

$$\overline{N}(X)\overline{N}(Y) = \overline{N}(XY)$$

eşitliği vardır.

Önerme 2.4.4. [26] G bir grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X ile Y , G nin boştan farklı alt kümeleri ise

$$\underline{N}(X)\underline{N}(Y) \subseteq \underline{N}(XY)$$

kapsama bağıntısı vardır.

Önerme 2.4.5. [26] G bir grup, $H \triangleleft G$ normal alt grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X, G nin boştan farklı alt kümesi ise

$$(\overline{H \cap N})(X) = \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X)$$

eşitliği vardır.

Önerme 2.4.6. [26] G bir grup, $H \triangleleft G$ normal alt grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X, G nin boştan farklı alt kümesi ise

$$(\underline{H \cap N})(X) = \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$$

eşitliği vardır.

2.4.2 Bir Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlı Alt Gruplar

Tanım 2.4.2. [26] G bir grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X, G nin boştan farklı alt kümesi olsun.

Eğer $\overline{N}(X)$, G grubunun (normal) alt grubu ise X kümesine, G grubunun üst yaklaşım (normal) alt grubu denir.

Eğer $\underline{N}(X)$, G grubunun (normal) alt grubu ise X kümesine, G grubunun alt yaklaşım (normal) alt grubu denir.

Önerme 2.4.7. [26] G bir grup ve N, G grubunun normal alt grubu olsun. X, G grubunun (normal) alt grubu ise X, G grubunun üst yaklaşım (normal) alt grubudur.

Önerme 2.4.8. [26] G bir grup ve N, G grubunun normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X, G grubunun (normal) alt grubu ise X, G grubunun alt yaklaşım (normal) alt grubudur.

Önerme 2.4.9. [26, 29] G bir grup ve H ile N , G grubunun normal alt grupları olsun. X , G nin alt grubu ise

$$\overline{H}(X) \overline{N}(X) = (\overline{HN})(X)$$

eşitliği vardır.

Önerme 2.4.10. [26, 29] G bir grup ve H ile N , G grubunun normal alt grupları olsun. X , G nin alt grubu ise

$$\underline{H}(X) \underline{N}(X) = (\underline{HN})(X)$$

eşitliği vardır.

2.4.3 Alt ve Üst Yaklaşımların Homomorfik Görüntüsü

G_1 ve G_2 iki grup olsun. Her $x, y \in G_1$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ise $f : G_1 \rightarrow G_2$ dönüşümüne G_1 den G_2 ye bir homomorfizma denir. Bire-bir ve örten homomorfizmaya izomorfizma denir. e_2 , G_2 nin birimi olmak üzere

$$\ker f = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir. Ayrıca $\ker f$, G_1 in bir normal alt grubudur.

Önerme 2.4.11. [29] H ve N , G grubunun normal alt grupları ve $\pi : G \rightarrow G/N$ kanonik homomorfizm olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

$$(1) (G/N) / (\overline{H}(N)/N) \cong (G/H) / (\overline{N}(H)/H),$$

(2) Eğer $N \subseteq H$ ise $G/\underline{N}(H) \cong (G/\underline{N})/\underline{(N(H)/N)}$.

Önerme 2.4.12. [29] G_1 ve G_2 iki grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir örten homomorfizma, $N \triangleleft G_1$ normal alt grup ve X, G_1 grubunu alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(1) Eğer $N \subseteq X$ ise $f(\underline{N}(X)) = \underline{f(N)}(f(X))$,

(2) $f(\overline{N}(X)) = \overline{f(N)}(f(X))$.

Önerme 2.4.13. [29] G_1 ve G_2 iki grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir örten homomorfizma, $N_2 \triangleleft G_2$ grubunun normal alt grubu ve X, G_2 grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(1) Eğer $N_2 \subseteq X$ ise $f^{-1}(\underline{N_2}(X)) = \underline{f^{-1}(N_2)}(f^{-1}(X))$,

(2) $f^{-1}(\overline{N_2}(X)) = \overline{f^{-1}(N_2)}(f^{-1}(X))$.

Önerme 2.4.14. [29] G_1 ve G_2 iki grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir örten homomorfizma, $N \triangleleft G_1$ normal alt grup, $\text{Çek} f \subseteq N$ ve X, G_1 in her hangi bir normal alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(1) $G_1/\overline{N}(X) \cong G_2/\overline{f(N)}(f(X))$,

(2) $N \subseteq X$ ise $G_1/\underline{N}(X) \cong G_2/\underline{f(N)}(f(X))$.

2.5 Rough Gruplar

Bu alt bölümde, rough grup ve rough alt gruplar ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

2.5.1 Rough Grup ve Rough Alt Grup

Tanım 2.5.1. [33] (U, R) bir yaklaşım uzayı ve " $\cdot$ " U üzerinde bir ikili işlem olsun.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $G \subset U$ alt kümesine bir rough grup denir:

$$(rg1) \quad \forall x, y \in G \text{ için } x.y \in \overline{G},$$

$$(rg2) \quad \forall x, y, z \in G \text{ için } (x.y).z = x.(y.z) \text{ birleşme özelliği } \overline{G} \text{ de sağlansın},$$

$$(rg3) \quad \forall x \in G \text{ için } x.e = e.x = x \text{ olacak biçimde en az bir } e \in \overline{G} \text{ vardır (} e \text{ elemanına } G \text{ rough grubun birim elemanı denir),}$$

$$(rg4) \quad \forall x \in G \text{ için } x.y = y.x = e \text{ olacak biçimde en az bir } y \in G \text{ vardır (} y \text{ elemanına } G \text{ rough grubunda } x \text{ elemanının ters elemanı denir ve } x^{-1} \text{ ile gösterilir).}$$

Burada $\overline{G}$, G nin üst yaklaşımını gösterir.

Uyarı 2.5.1. Eğer G bir grup ise aynı zamanda rough grup olur. Fakat, bunun tersi her zaman doğru değildir. Bunun yanında G rough grubunda bir ve yalnız bir birim eleman vardır. Her $x \in G$ elemanının tersi tektir ve x^{-1} ile gösterilir.

Önerme 2.5.1. [33] Bir rough grupta aşağıdaki özellikler vardır.

$$(a) \quad (x^{-1})^{-1} = x,$$

$$(b) \quad (x.y) = y^{-1}.x^{-1}.$$

Örnek 2.5.1. $\text{mod } 3$ ' e göre kalan sınıflarının kümesi $U = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ ve " $\oplus$ " işlemi kalan sınıfların toplama işlemi olsun. $G = \{\overline{1}, \overline{2}\}$ ve U nun bir ayrık parçalanışı da $E_1 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, $E_2 = \{\overline{2}\}$ olmak üzere $U/R = \{E_1, E_2\}$ olsun.

Bu durumda $\overline{G} = E_1 \cup E_2$ olur. Ayrıca

$$(1) \forall x, y \in G \text{ için } x \oplus y \in \overline{G},$$

$$(2) \text{ Birleşme özelliği sağlanır,}$$

$$(3) \overline{1} \oplus \overline{2} = \overline{0} \in \overline{G},$$

$$(4) (\overline{2})^{-1} = \overline{1} \in \overline{G}, (\overline{1})^{-1} = \overline{2} \in \overline{G}$$

olduğundan G bir rough gruptur. Eğer $G = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ olarak alınırsa $\overline{G} = E_1$ olur. Bu durumda $\overline{1} \oplus \overline{1} = \overline{2} \notin \overline{G}$ olduğundan G , bir rough grup değildir.

Önerme 2.5.2. [33] H , G rough grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H alt kümesi G deki işleme göre bir rough grup ise H kümesine G grubunun rough alt grubu denir.

G rough grubunun aşikar rough alt grubu sadece kendisidir. $\{e\}$ kümesinin G grubunun rough altgrubu olması için gerek ve yeter şart $e \in G$ olmasıdır.

Teorem 2.5.1. [33] G bir rough grup ve H , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H rough grubunun bir rough alt grubu olması için gerek ve yeter şart,

$$(a) \forall x, y \in H \text{ için } x.y \in \overline{H},$$

$$(b) \forall x \in H \text{ için } x^{-1} \in H$$

olmasıdır.

Teorem 2.5.2. [34] G bir rough grup, H_1 ve H_2 de G nin iki rough alt grubu olsun. Bu durumda $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \overline{H_1 \cap H_2}$ ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir rough alt grubudur.

Teorem 2.5.3. [35] G bir rough grup, K , G nin bir rough alt grubu ve H , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H , K nin bir rough alt grubu ise G nin de rough alt grubudur.

Teorem 2.5.4. [35] G bir rough grup, H_1, H_2 de G nin iki rough alt grubu ve $\overline{H_1} \cdot \overline{H_2} = \overline{H_1 \cdot H_2}$ olsun. Bu durumda $H_1 \cdot H_2$ nin G rough grubunun bir rough alt grubu olması için gerek ve yeter şart $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$ olmasıdır.

Tanım 2.5.2. [34] G bir rough grup olsun. Her $x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise G ye değişmeli rough grup denir.

2.5.2 Rough Kalan Sınıfları

(U, R) bir yaklaşım uzayı, $G \subset U$ ve H de G nin bir rough alt grubu olsun. Bu durumda $a, b \in G$ olmak üzere, G rough grubunun elemanları arasında aşağıdaki gibi bir " $\sim$ " bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \cup \{e\}$$

[34].

Teorem 2.5.5. [34] G bir rough grup olmak üzere, " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.5.3. [34] " $\sim$ " denklik bağıntısının G rough grubunda belirttiği sınıflara rough sağ kalan sınıfları denir. Herhangi bir $a \in G$ nin rough sağ kalan sınıfı $H \cdot a$ ile gösterilir. Yani;

$$H \cdot a = \{h \cdot a : h \in H, a \in G, h \cdot a \in G\} \cup \{a\}.$$

Benzer biçimde herhangi bir $a \in G$ elemanının rough sol kalan sınıfı da

$$a \cdot H = \{a \cdot h : h \in H, a \in G, a \cdot h \in G\} \cup \{a\}$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.5.2. Genel olarak, rough grubun ikili işlemi her zaman değişme özelliğini sağlamayabilir. Bundan dolayı, rough sağ ve rough sol kalan sınıfları farklı olur.

Teorem 2.5.6. [34] G bir rough grup ve H , G nin bir rough alt grubu olmak üzere, rough sağ ve rough sol kalan sınıflarının eleman sayıları aynıdır.

2.5.3 Rough Normal Alt Gruplar

Tanım 2.5.4. [34] Bir G rough grubunun bir rough alt grubu N olsun. Her $a \in G$ için $a.N = N.a$ ise N alt grubuna rough normal alt grup denir.

Teorem 2.5.7. [34] Bir G rough grubun bir rough normal alt grubu N olsun. N rough alt grubunun G nin rough normal alt grubu olması için gerek ve yeter şart her $a \in G$ ve her $n \in N$ için $ana^{-1} \in N$ olmasıdır.

Teorem 2.5.8. [35] G bir rough grup, H_1, H_2 de G nin iki rough normal alt grubu ve $\overline{H_1} \cdot \overline{H_2} = \overline{H_1 \cdot H_2}$ olsun. Bu durumda $H_1 \cdot H_2$, G rough grubunun bir rough normal alt grubudur.

2.5.4 Rough Alt Grupların Homomorfizmleri

(U_1, R_1) ve (U_2, R_2) , iki yaklaşım uzayı ve $"."$, $"\circ"$ sırasıyla U_1 , U_2 üzerinde iki ikili işlem olsun.

Tanım 2.5.5. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough grup olsun. Her $x, y \in \overline{G_1}$ için $\varphi(x.y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ olacak şekilde örten bir $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ fonksiyonu varsa φ ye rough homomorfizm, G_1 ve G_2 rough gruplarına da rough homomorfik gruplar denir.

Teorem 2.5.9. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup olsun. G_1 değişmeli rough grup ise G_2 de değişmeli rough gruptur.

Teorem 2.5.10. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup ve $\overline{\varphi(G_1)} = \overline{G_2}$ olsun. O zaman $\varphi(G_1)$ bir rough gruptur.

Teorem 2.5.11. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup, $e_1 \in G_1$ ve $e \in G_2$ olsun. O zaman $\varphi(e_1) = e_2$ ve her $a \in G_1$ için $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ dir.

Tanım 2.5.6. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup, $e_1 \in G_1$ ve $e_2 \in G_2$ olsun. $\{x \mid \varphi(x) = e_2, x \in G_1\}$ kümesine rough homomorfizm çekirdeği denir ve N ile gösterilir.

Teorem 2.5.12. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup olsun. O zaman, rough homomorfizm çekirdeği N , G_1 in bir rough normal alt grubudur.

Teorem 2.5.13. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup, H_1 ve N_1 sırasıyla G_1 in bir rough alt grubu ve rough normal alt grubu olsun. O zaman aşığıdaki özellikler sağlanır:

- (a) $\varphi(\overline{H_1}) = \overline{\varphi(H_1)}$ ise $\varphi(H_1)$, G_2 nin bir rough alt grubudur,
- (b) $\varphi(\overline{N_1}) = \overline{\varphi(N_1)}$ ve $\varphi(G_1) = G_2$ ise $\varphi(N_1)$, G_2 nin bir rough normal alt grubudur.

Teorem 2.5.14. [34] $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough homomorfik grup, H_2 ve N_2 sırasıyla G_2 nin bir rough alt grubu ve rough normal alt grubu olsun. O zaman aşığıdaki özellikler sağlanır:

- (a) H_1, H_2 nin ters görüntüsü olmak üzere, $\varphi(\overline{H_1}) = \overline{H_2}$ ise H_1 , G_1 in bir rough alt grubudur,

(b) N_1, N_2 nin ters görüntüsü olmak üzere, $\varphi(G_1) = G_2$ ve $\varphi(\overline{N_1}) = \overline{N_2}$ ise N_1, G_1 in bir rough normal alt grubudur.

3. YAKLAŞIMLI TOPOLOJİK ALT GRUPLAR

Bu bölüm, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, bir topolojik grupta alt ve üst yaklaşım tanımları yapıldı ve bazı özellikleri verildi. İkinci alt bölümde, bir topolojik grupta alt ve üst yaklaşımli topolojik alt grup kavramları verildi ve bazı özellikleri incelendi. Üçüncü alt bölümde, alt ve üst yaklaşımların bir topolojik homomorfizma altındaki özellikleri incelendi.

3.1 Bir Topolojik Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlar

Rough kümeler evrensel küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntıları ile belirlenmektedir. Buna göre bir G grubu üzerinde N alt grubuna göre tanımlanan

$$x \equiv y(mod N) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı kullanılarak bir topolojik grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. N normal alt grubuna göre X alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$\underline{N}(X) := \{x \in G : xN \subseteq X\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \subseteq X\}$$

ve

$$\overline{N}(X) := \{x \in G : xN \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır. (G, N) ikilisine topolojik yaklaşım uzayı denir.

Sonuç 3.1.1. (G, N) topolojik yaklaşım uzayı olmak üzere G nin X ve Y alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1 \quad \underline{N}(X) \subseteq X \subseteq \overline{N}(X),$$

$$2 \quad \underline{N}(\emptyset) = \overline{N}(\emptyset) = \emptyset, \underline{N}(G) = \overline{N}(G) = G,$$

$$3 \quad \overline{N}(X \cup Y) = \overline{N}(X) \cup \overline{N}(Y),$$

$$4 \quad \underline{N}(X \cap Y) = \underline{N}(X) \cap \underline{N}(Y),$$

$$5 \quad \underline{N}(X \cup Y) \supseteq \underline{N}(X) \cup \underline{N}(Y),$$

$$6 \quad \overline{N}(X \cap Y) \subseteq \overline{N}(X) \cap \overline{N}(Y),$$

$$7 \quad X \subset Y \Rightarrow \underline{N}(X) \subseteq \underline{N}(Y) \text{ ve } \overline{N}(X) \subseteq \overline{N}(Y),$$

$$8 \quad \underline{N}(-X) \subseteq -\overline{N}(X),$$

$$9 \quad -\underline{N}(X) \subseteq \overline{N}(-X),$$

$$10 \quad \underline{N}\underline{N}(X) = \overline{N}\underline{N}(X) = \underline{N}(X),$$

$$11 \quad \overline{N}\overline{N}(X) = \underline{N}\overline{N}(X) = \overline{N}(X)$$

Önerme 3.1.1. G bir topolojik grup N , G nin normal alt grubu ve X , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman N , açık ise X in alt ve üst yaklaşımları da açıktır.

İspat. N , açık olsun. Teorem 2.2.2 den xN kümesi de açıktır. X in alt yaklaşımı $\underline{N}(X) = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \subseteq X\}$ olduğundan $\underline{N}(X)$ açıktır. Yine benzer biçimde $\overline{N}(X) = \bigcup_{x \in G} \{xN : xN \cap X \neq \emptyset\}$ olduğundan $\overline{N}(X)$ açıktır. $\square$

Uyarı 3.1.1. G topolojik grubu sonlu olsun. Bir önceki önermeden N kapalı ise X in alt ve üst yaklaşımları da kapalı olur.

Örnek 3.1.1. G bir topolojik grup, $G = Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, G üzerindeki topoloji $T_G = \{\emptyset, G, \{\bar{0}, \bar{2}\}, \{\bar{1}, \bar{3}\}\}$ ve G nin bir normal alt grubu $N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ olsun. Bu durumda $X = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesinin alt yaklaşımı $\underline{N}(X) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ ve üst yaklaşımı da $\overline{N}(X) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ olur.

Uyarı 3.1.2. X ve Y , G nin boştan farklı alt kümeleri ise XY ve $X + Y$ sırasıyla

$$XY = \{xy : x \in X, y \in Y\} \text{ ve } X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.1.2. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X , G nin bir alt grubu olsun. O zaman,

$$N \subseteq X \Rightarrow \underline{N}(X) = X$$

eşitliği vardır.

İspat. $N \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. $xN \subseteq XX \subseteq X$ olduğundan $x \in \underline{N}(X)$ olur. Buradan $X \subseteq \underline{N}(X)$ olur. Sonuç 3.1.1 den $\underline{N}(X) \subseteq X$ dir. Sonuç olarak $\underline{N}(X) = X$ dir. $\square$

Önerme 3.1.3. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman,

$$\overline{N}(X) = XN$$

eşitliği vardır.

İspat. $x \in \overline{N}(X)$ olsun. $x \in \overline{N}(X) \Rightarrow xN \cap X \neq \emptyset \Rightarrow y \in xN$ ve $y \in X$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır. N, G nin normal alt grubu olduğundan $x \in yN$ dir. Buradan $x \in yN$ ve $y \in X$ ise $x \in XN$ olur. Böylece $\overline{N}(X) \subseteq XN$ olur.

Şimdi $x \in XN$ olsun. O zaman $x = an$ olacak şekilde $a \in X$ ve $n \in N$ vardır. Buradan $a = xn^{-1}$ olur. N, G nin normal alt grubu olduğundan $a = xn^{-1} \in xN$ dir. Böylece $a \in xN \cap X \neq \emptyset$ dir. Buradan $x \in \overline{N}(X)$ olup $XN \subseteq \overline{N}(X)$ bulunur.

Sonuç olarak $\overline{N}(X) = XN$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.1.4. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ nin normal alt grup ve X ile Y , G nin boştan farklı alt kümeleri ise

$$\overline{N}(X)\overline{N}(Y) = \overline{N}(XY)$$

eşitliği vardır.

İspat. İspat bir kümenin üst yaklaşım tanımı kullanılarak aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{aligned} x \in \overline{N}(X)\overline{N}(Y) &\Rightarrow z = xy \in \overline{N}(X)\overline{N}(Y) \\ &\Rightarrow x \in \overline{N}(X) \text{ ve } y \in \overline{N}(Y) \\ &\Rightarrow x \in xN \cap X \neq \emptyset \text{ ve } y \in yN \cap Y \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in xN \cap X \text{ ve } y \in yN \cap Y \\ &\Rightarrow xy = z \in XY \text{ ve } xy \in (xy)N = zN \\ &\Rightarrow z \in zN \cap XY \neq \emptyset \\ &\Rightarrow z \in \overline{N}(XY) \end{aligned}$$

Böylece $\overline{N}(X)\overline{N}(Y) \subseteq \overline{N}(XY)$ olduğu görülür. Tersine

$$\begin{aligned}
z \in \overline{N}(XY) &\Rightarrow zN \cap XY \neq \emptyset \\
&\Rightarrow z = xy \in XY \text{ ve } z = xy \in zN \\
&\Rightarrow x \in X, y \in Y \text{ ve } z \in (xy)N = (xN)(yN) \\
&\Rightarrow x \in X, y \in Y \text{ ve } x \in xN, y \in yN \\
&\Rightarrow x \in xN \cap X \text{ ve } y \in yN \cap Y \\
&\Rightarrow x \in \overline{N}(X) \text{ ve } y \in \overline{N}(Y) \\
&\Rightarrow z = xy \in \overline{N}(X)\overline{N}(Y).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\overline{N}(XY) \subseteq \overline{N}(X)\overline{N}(Y)$ olduğu görülür.

Her iki kapsamadan

$$\overline{N}(X)\overline{N}(Y) = \overline{N}(XY)$$

eşitliği elde edilir. □

Önerme 3.1.5. *G bir topolojik grup N , G nin normal alt grubu, X ve Y , G nin boştan farklı alt kümeleri ise*

$$\underline{N}(X)\underline{N}(Y) \subseteq \underline{N}(XY)$$

kapsama ilişkisi vardır.

İspat. İspat bir kümenin üst yaklaşım tanımı kullanılarak aşağıdaki gibi yapılır.

$$x \in \underline{N}(X)\underline{N}(Y) \Rightarrow z = xy \in \underline{N}(X)\underline{N}(Y)$$

$$\Rightarrow x \in \underline{N}(X) \text{ ve } y \in \underline{N}(Y)$$

$$\Rightarrow xN \subseteq X \text{ ve } yN \subseteq Y$$

$$\Rightarrow (xN)(yN) \subseteq XY$$

$$\Rightarrow (xy)N \subseteq XY$$

$$\Rightarrow (xy)N = zN \subseteq XY$$

$$\Rightarrow z \in \underline{N}(XY).$$

Buradan

$$\underline{N}(X)\underline{N}(Y) \subseteq \underline{N}(XY)$$

olarak bulunur. □

Önerme 3.1.6. *G bir topolojik grup, H ile N , G nin normal alt grubu ve X , G nin boştan farklı alt kümesi ise*

$$(\overline{H \cap N})(X) = \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X)$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$\begin{aligned}\forall z \in (\overline{H \cap N})(X) &\Leftrightarrow z(H \cap N) \cap X \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists x \in z(H \cap N) \cap X \\ &\Leftrightarrow x \in z(H \cap N) \text{ ve } x \in X \\ &\Leftrightarrow x \in zH, x \in zN \text{ ve } x \in X \\ &\Leftrightarrow \exists x \in zH \cap X \text{ ve } \exists x \in zN \cap X \\ &\Leftrightarrow z \in \overline{H}(X) \text{ ve } z \in \overline{N}(X) \\ &\Leftrightarrow z \in \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X).\end{aligned}$$

Böylece

$$(\overline{H \cap N})(X) = \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X)$$

olarak bulunur. □

Önerme 3.1.7. *G bir topolojik grup, H ile N , G nin normal alt grubu ve X , G nin boştan farklı alt kümesi ise*

$$(\underline{H \cap N})(X) = \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$\begin{aligned}\forall z \in (\underline{H \cap N})(X) &\Leftrightarrow z(H \cap N) \subseteq X \\ &\Leftrightarrow zH \subseteq X \text{ ve } zN \subseteq X \\ &\Leftrightarrow z \in \underline{H}(X) \text{ ve } z \in \underline{N}(X) \\ &\Leftrightarrow z \in \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X).\end{aligned}$$

Böylece

$$(\underline{H \cap N})(X) = \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$$

olarak bulunur. $\square$

3.2 Bir Topolojik Grupta Alt ve Üst Yaklaşımlı Topolojik Alt Gruplar

Tanım 3.2.1. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X, G nin boştan farklı alt kümesi olsun.

Eğer $\overline{N}(X)$, G nin (normal) alt grubu ise X e, G nin üst yaklaşımli topolojik (normal) alt grubu denir.

Eğer $\underline{N}(X)$, G nin (normal) alt grubu ise X e, G nin alt yaklaşımli topolojik (normal) alt grubu denir.

Önerme 3.2.1. G bir topolojik grup ve N, G nin normal alt grubu olsun. X, G nin alt grubu ise X, G nin üst yaklaşımli topolojik alt grubudur.

İspat. e, G nin birim elemanı olsun. N ve X, G nin alt grubu olduğundan $e \in X$ ve $e = ee \in eN$ olur. Bundan dolayı $e \in eN \cap X$ dir. Böylece $eN \cap X \neq \emptyset$ olduğundan $e \in \overline{N}(X)$ dir.

$a, b \in \overline{N}(X)$ olsun. Buradan $x \in aN \cap X$ ve $y \in bN \cap X$ olacak şekilde x ve y elemanları vardır. Buna göre $x \in aN, y \in bN$ ve $x \in X, y \in X$ olur. X, G nin alt grubu olduğundan $xy \in X$ ve N, G nin normal alt grubu olduğundan $xy \in (aN)(bN) = abN$ dir. Böylece $xy \in abN \cap X$ ve bundan dolayı da $ab \in \overline{N}(X)$ olur.

$a \in \overline{N}(X)$ olsun. Buradan $x \in aN \cap X$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Buna göre $x \in aN$ ve $x \in X$ olur. X, G nin alt grubu olduğundan $x^{-1} \in X$ dir. Diğer taraftan

$h \in N$ için $x = ah$ olarak yazılabilir. Ayrıca N, G nin normal alt grubu olduğundan $h^{-1} \in N$ dir.

Böylece $x^{-1} = (ah)^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Na^{-1} = a^{-1}N$ olarak bulunur. Bu durumda $x^{-1} \in a^{-1}N \cap X$ olduğundan $a^{-1} \in \overline{N}(X)$ bulunur.

Sonuç olarak $\overline{N}(X)$, G nin alt grubu olup X , G nin üst yaklaşımli alt grubudur.

Şimdi X in G nin üst yaklaşımli topolojik alt grubu olduğunu gösterelim. G topolojik grup olduğundan, $\forall x, y \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x.y^{-1}) \subseteq G$ için $U.V^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır.

$U \cap X \neq \emptyset$ ve $V \cap X \neq \emptyset$ olmak üzere $U_{\overline{N}(X)} = U \cap \overline{N}(X)$, $V_{\overline{N}(X)} = V \cap \overline{N}(X)$ denilirse, $U_{\overline{N}(X)}$ ve $V_{\overline{N}(X)}$ kümeleri $\overline{N}(X)$ deki alt uzay topolojisine göre x ve y nin komşulukları olacaktır. Yani $U_{\overline{N}(X)} \in \mathcal{N}_{\overline{N}(X)}(x)$ ve $V_{\overline{N}(X)} \in \mathcal{N}_{\overline{N}(X)}(y)$ dir. Buradan

$$U_{\overline{N}(X)}V_{\overline{N}(X)}^{-1} \subseteq UV^{-1} \subseteq W$$

ve

$$U_{\overline{N}(X)}V_{\overline{N}(X)}^{-1} \subseteq \overline{N}(X)(\overline{N}(X))^{-1} = \overline{N}(X) \text{ ve } (U_{\overline{N}(X)}V_{\overline{N}(X)}^{-1})N \cap X \neq \emptyset$$

olduğundan

$$U_{\overline{N}(X)}V_{\overline{N}(X)}^{-1} \subseteq W \cap \overline{N}(X) = W_{\overline{N}(X)} \text{ ve } W_{\overline{N}(X)}N \cap X \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece X , G nin alt yaklaşımli topolojik alt grubudur □

Önerme 3.2.2. G bir topolojik grup ve N , G nin normal alt grubu olsun. X , G nin normal alt grubu ise X , G nin üst yaklaşımli topolojik normal alt grubudur.

İspat. Bir önceki önermede X in üst yaklaşımli alt grup olduğu gösterilmişti. O halde $\overline{N}(X)$ in normal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a \in \overline{N}(X)$ ve $x \in G$ olsun.

Bundan dolayı $y \in aN \cap X$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. Buradan $y \in aN$ ve $y \in X$ yazılabilir. N normal olduğundan

$$xyx^{-1} \in x(aN)x^{-1} = (xa)(Nx^{-1}) = (xa)(x^{-1}N) = (xax^{-1})N$$

bulunur. X normal olduğundan

$$xyx^{-1} \in xXx^{-1} \subseteq X$$

elde edilir.

Böylece $xyx^{-1} \in (xax^{-1})N \cap X$ olduğundan $xax^{-1} \in \overline{N}(X)$ olur. O halde $\overline{N}(X)$ normaldir. $\square$

Önerme 3.2.3. G bir topolojik grup ve N , G nin normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X , G nin alt grubu ise X , G nin alt yaklaşımlı topolojik alt grubudur.

İspat. $eN = N \subseteq X$ olduğundan $e \in \underline{N}(X)$ dir. $x, y \in \underline{N}(X)$ olsun. O halde $xN \subseteq X$ ve $yN \subseteq X$ yazılır. N , normal alt grup ve X, G nin alt grubu olduğundan

$$xyN = (xN)(yN) \subseteq XX \subseteq X.$$

bulunur. Böylece $xy \in \underline{N}(X)$ olur.

$x \in \underline{N}(X)$ olsun. Böylece $x = xe \in xN \subseteq X$ yazılabilir. X , G nin alt grubu olduğundan $x^{-1} \in X$ olur. Bundan dolayı $x^{-1}N \subseteq XX \subseteq X$ elde edilir.

Bu ise $x^{-1} \in \underline{N}(X)$ olmasını gerektirir. Böylece $\underline{N}(X)$, G nin alt grubudur.

Şimdi X in G nin alt yaklaşımlı topolojik alt grubu olduğunu gösterelim. G topolojik grup olduğundan, $\forall x, y \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x.y^{-1}) \subseteq G$ için $U.V^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır. $U_{\underline{N}(X)} = U \cap \underline{N}(X)$, $V_{\underline{N}(X)} = V \cap \underline{N}(X)$ denilirse, $U_{\underline{N}(X)}$ ve $V_{\underline{N}(X)}$ kümeleri $\underline{N}(X)$ deki alt uzay topolojisine

göre x ve y nin komşulukları olacaktır. Yani $U_X \in \mathcal{N}_{\underline{N}(X)}(x)$ ve $V_{\underline{N}(X)} \in \mathcal{N}_{\underline{N}(X)}(y)$ dir. Buradan

$$U_{\underline{N}(X)} V_{\underline{N}(X)}^{-1} \subseteq UV^{-1} \subseteq W$$

ve

$$U_{\underline{N}(X)} V_{\underline{N}(X)}^{-1} \subseteq \underline{N}(X) (\underline{N}(X))^{-1} = \underline{N}(X) \text{ ve } \left(U_{\underline{N}(X)} V_{\underline{N}(X)}^{-1} \right) N \subseteq X$$

olduğundan

$$U_{\underline{N}(X)} V_{\underline{N}(X)}^{-1} \subseteq W \cap \underline{N}(X) = W_{\underline{N}(X)} \text{ ve } (W_{\underline{N}(X)}) N \subseteq X$$

elde edilir. Böylece X, G nin alt yaklaşımlı topolojik alt grubudur. $\square$

Önerme 3.2.4. G bir topolojik grup ve N, G nin normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X, G nin normal alt grubu ise X, G nin alt yaklaşımlı topolojik normal alt grubudur.

İspat. Bir önceki önermede X in alt yaklaşımlı alt grup olduğu gösterilmişti. O halde $\underline{N}(X)$ in normal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a \in \underline{N}(X)$ ve $x \in G$ olsun.

Buradan $aN \subseteq X$ dir. N ve X normal olduğundan

$$(xax^{-1})N = x(aN)x^{-1} \subseteq xXx^{-1} \subseteq X$$

ve böylece $xax^{-1} \in \underline{N}(X)$ olur. Sonuç olarak $\underline{N}(X)$ normaldir. $\square$

Önerme 3.2.5. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X, G nin bir alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- (1) G nin topolojik alt grubu $\underline{N}(X)$, açık ise aynı zamanda kapalıdır,
- (2) G nin topolojik alt grubu $\overline{N}(X)$, açık ise aynı zamanda kapalıdır.

İspat. (1) $\underline{N}(X)$, G nin açık topolojik alt grubu olsun. $\underline{N}(X) = (\underline{N}(X))^-$ olduğunu göstermeliyiz. $a \in (\underline{N}(X))^-$ olsun. $\underline{N}(X)$ açık ve $e \in \underline{N}(X)$ olduğundan $a.(\underline{N}(X))$ açık ve $a \in a.(\underline{N}(X))$ olur. Böylece $a.(\underline{N}(X)) \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $b \in a.(\underline{N}(X))$ ve $b \in \underline{N}(X)$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır.

$$b \in a.(\underline{N}(X)) \Rightarrow \exists h \in \underline{N}(X) \text{ için } h.N \subset X \text{ ve } b = a.h$$

bulunur. Diğer taraftan

$$b \in \underline{N}(X) \Rightarrow b.N \subset X$$

yazılabilir. Böylece $b, h \in \underline{N}(X)$ olduğundan

$$b.h^{-1} \in \underline{N}(X) \Rightarrow (b.h^{-1}).N \subset X \Rightarrow a.N \subset X$$

olur. Buradan

$$a.N \subset X \Rightarrow a \in \underline{N}(X) \Rightarrow (\underline{N}(X))^- \subseteq \underline{N}(X)$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$\underline{N}(X) = (\underline{N}(X))^-$$

ve $\underline{N}(X)$ kapalıdır.

(2) $\overline{N}(X)$, G nin açık topolojik alt grubu olsun. $\overline{N}(X) = (\overline{N}(X))^-$ olduğunu göstermeliyiz. $a \in (\overline{N}(X))^-$ olsun. $\overline{N}(X)$ açık ve $e \in \overline{N}(X)$ olduğundan $a.(\overline{N}(X))$ açık ve $a \in a.(\overline{N}(X))$ yazılır. Böylece $a.(\overline{N}(X)) \cap (\overline{N}(X)) \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $b \in a.(\overline{N}(X))$ ve $b \in \overline{N}(X)$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır.

$$b \in a.(\overline{N}(X)) \Rightarrow \exists h \in \overline{N}(X) \text{ için } h.N \cap X \neq \emptyset \text{ ve } b = a.h$$

olur. Diğer taraftan

$$b \in \overline{N}(X) \Rightarrow b.N \cap X \neq \emptyset$$

olur. Böylece $b, h \in \overline{N}(X)$ olduğundan

$$b.h^{-1} \in \overline{N}(X) \Rightarrow (b.h^{-1}).N \cap X \neq \emptyset$$

elde edilir. Buradan

$$a.N \cap X \neq \emptyset \Rightarrow a \in \overline{N}(X) \Rightarrow (\overline{N}(X))^{\perp} \subseteq \overline{N}(X)$$

olur.

Sonuç olarak

$$\overline{N}(X) = (\overline{N}(X))^{\perp}$$

ve $\overline{N}(X)$ kapalıdır. □

Önerme 3.2.6. G bir topolojik grup, $N \triangleleft G$ normal alt grup ve X, G nin bir alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- (1) $\underline{N}(X)$, G nin topolojik alt grubu ise $\underline{N}(X)$ in topolojik kapanışı $(\underline{N}(X))^{\perp}$ da G nin topolojik alt grubudur,
- (2) $\overline{N}(X)$, G nin topolojik alt grubu ise $\overline{N}(X)$ in topolojik kapanışı $(\overline{N}(X))^{\perp}$ da G nin topolojik alt grubudur.

İspat. (1) $\underline{N}(X)$, G nin topolojik alt grubu olsun. $(\underline{N}(X))^{\perp}$ nın G nin topolojik alt grubu olduğunu göstermek için her $x, y \in (\underline{N}(X))^{\perp}$ için $x.y \in (\underline{N}(X))^{\perp}$ ve her $x \in (\underline{N}(X))^{\perp}$ için $x^{-1} \in (\underline{N}(X))^{\perp}$ olduğu gösterilmelidir.

$x, y \in (\underline{N}(X))^{\perp}$ olsun. $W \in \mathcal{N}(x.y) \subseteq G$ için $U.V \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır. $x \in (\underline{N}(X))^{\perp}$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan

$U \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$ olur. Benzer şekilde $y \in (\underline{N}(X))^-$ ve $V \in \mathcal{N}(y)$ olduğundan $V \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$ olur. Böylece

$$a \in U \cap \underline{N}(X) \text{ ve } b \in V \cap \underline{N}(X)$$

olacak şekilde a ve b elemanları vardır. Bu durumda

$$a \in U, b \in V, a \in \underline{N}(X) \Rightarrow aN \subseteq X \text{ ve } b \in \underline{N}(X) \Rightarrow bN \subseteq X$$

olur. Buradan $a.b \in U.V$ ve

$$a.b \in U.V \text{ ve } a.b \in \underline{N}(X) \Rightarrow (a.b)N \subseteq X$$

olduğundan $U.V \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$ olur. Böylece $W \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$ olup $x.y \in (\underline{N}(X))^-$ bulunur.

$x \in (\underline{N}(X))^-$ olsun. $W \in \mathcal{N}(x^{-1})$ için $U^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ vardır. Burada $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ şeklinde tanımlıdır. $x \in (\underline{N}(X))^-$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan $U \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$ yazılabilir. Böylece

$$a \in U \cap \underline{N}(X) \Rightarrow a \in U \text{ ve } a \in \underline{N}(X) \Rightarrow aN \subseteq X$$

olacak şekilde bir a elemanı vardır. Buradan

$$a^{-1} \in U^{-1} \text{ ve } a^{-1} \in \underline{N}(X) \Rightarrow a^{-1}N \subseteq X$$

olur. Böylece

$$a^{-1} \in U^{-1} \cap \underline{N}(X) \Rightarrow U^{-1} \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset \Rightarrow W \cap \underline{N}(X) \neq \emptyset$$

olduğundan $x^{-1} \in (\underline{N}(X))^-$ bulunur.

Sonuç olarak $(\underline{N}(X))^-$ bir topolojik alt gruptur. Yani X, G nin alt yaklaşımlı topolojik alt grubudur.

(2) $\overline{N}(X), G$ nin topolojik alt grubu olsun. $(\overline{N}(X))^-$ nin G nin topolojik alt grubu olduğunu göstermek için her $x, y \in (\overline{N}(X))^-$ için $x.y \in (\overline{N}(X))^-$ ve her $x \in (\overline{N}(X))^-$ için $x^{-1} \in (\overline{N}(X))^-$ olduğu gösterilmelidir.

$x, y \in (\overline{N}(X))^-$ olsun. $W \in \mathcal{N}(x.y) \subseteq G$ için $U.V \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır. $x \in (\overline{N}(X))^-$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan $U \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$ yazılır. Benzer şekilde $y \in (\overline{N}(X))^-$ ve $V \in \mathcal{N}(y)$ olduğundan $V \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$ olur. Böylece

$$a \in U \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset \text{ ve } b \in V \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$$

olacak şekilde a ve b elemanları vardır. Bu durumda $a \in U$ ve $b \in V$ olduğunda

$$aN \cap X \neq \emptyset \text{ ve } bN \cap X \neq \emptyset$$

olur. Buradan

$$a.b \in U.V \text{ ve } a.b \in \overline{N}(X) \Rightarrow (a.b)N \cap X \neq \emptyset$$

olduğundan $U.V \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$ olur. Böylece $W \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$ olup $x.y \in (\overline{N}(X))^-$ bulunur.

$x \in (\overline{N}(X))^-$ olsun. $W \in \mathcal{N}(x^{-1})$ için $U^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ vardır. Burada $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ dir. $x \in (\overline{N}(X))^-$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan $U \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$ dır. Böylece

$$a \in U \cap \overline{N}(X) \Rightarrow a \in U \text{ ve } a \in \overline{N}(X) \Rightarrow aN \cap X \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir a elemanı vardır. Buradan

$$a^{-1} \in U^{-1} \text{ ve } a^{-1} \in \overline{N}(X) \Rightarrow a^{-1}N \cap X \neq \emptyset$$

olur. Böylece

$$a^{-1} \in U^{-1} \cap \overline{N}(X) \Rightarrow U^{-1} \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset \Rightarrow W \cap \overline{N}(X) \neq \emptyset$$

olduğundan $x^{-1} \in (\overline{N}(X))^{-}$ olur.

Sonuç olarak $(\overline{N}(X))^{-}$ bir topolojik alt gruptur. Yani X, G nin üst yaklaşımli topolojik alt grubudur. $\square$

Önerme 3.2.7. G bir topolojik grup ve H ile N, G grubunun normal alt grupları olsun. X, G nin alt grubu ise

$$\overline{H}(X) \overline{N}(X) = (\overline{HN})(X)$$

dir.

İspat.

$$z \in \overline{H}(X) \overline{N}(X) \Rightarrow z = xy \text{ olacak şekilde } \exists x \in \overline{H}(X) \text{ ve } \exists y \in \overline{N}(X)$$

$$\Rightarrow \exists a, b \in G, a \in xH \cap X \text{ ve } b \in yN \cap X$$

$$\Rightarrow a \in xH, b \in yN \text{ ve } a, b \in X.$$

H normal olduğundan

$$ab \in (xH)(yN) = (x(Hb)N) = (x(yH)N) = ((xy)H)N = (xy)HN = zHN.$$

X, G nin alt grubu olduğundan $ab \in X$ dir. Bundan dolayı

$$ab \in zHN \cap X \text{ ve } z \in (\overline{HN})(X)$$

olarak bulunur. Böylece

$$\overline{H}(X) \overline{N}(X) \subseteq (\overline{HN})(X)$$

olarak bulunur.

Tersine $z \in (\overline{HN})(X) \Rightarrow z(HN) \cap X \neq \emptyset \Rightarrow y \in z(HN) \cap X$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. Buradan $y \in z(HN)$ ve $y \in X$ olur. Böylece $a \in H; b \in N$ için $y = zab$ yazılabilir. $y = zab \in zaN$ ve $y \in X$ olduğundan $zaN \cap X \neq \emptyset$ olup $za \in \overline{N}(X)$ olur. Buradan $z \in \overline{N}(X)a^{-1}$ bulunur. $a \in H \subseteq \overline{H}(X)$ olduğundan Teorem 3.2.1 den $z \in \overline{H}(X)\overline{N}(X)$ olur. Böylece $(\overline{HN})(X) \subseteq \overline{H}(X)\overline{N}(X)$ olarak bulunur.

Sonuç olarak $\overline{H}(X)\overline{N}(X) = (\overline{HN})(X)$ dir. $\square$

Önerme 3.2.8. G bir topolojik grup ve H ile N , G grubunun normal alt grupları olsun. X, G nin alt grubu ise

$$\underline{H}(X)\underline{N}(X) = (\underline{HN})(X)$$

eşitliği vardır.

İspat. İlk olarak $\underline{H}(X) \neq \emptyset$ için $\underline{H}(X) = X$ olduğunu gösterelim. $x \in \underline{H}(X) \Rightarrow xH \subseteq X$ olur. Buradan e , H nin birim elemanı olmak üzere $x = xe \in X$ ve $x^{-1} \in X$ yazılabilir. $H = xx^{-1} \subseteq XX = X$. $a \in X$ olsun. O zaman $H \subseteq X$ olduğundan $aH \subseteq XX = X \Rightarrow a \in \underline{H}(X)$ olur. Böylece $X \subseteq \underline{H}(X)$ elde edilir. Aynı zamanda $\underline{H}(X) \subseteq X$ olduğundan $\underline{H}(X) = X$ olur. Benzer şekilde $\underline{N}(X) \neq \emptyset$ için $\underline{N}(X) = X$ olur.

Yukardaki gibi $\underline{H}(X) \neq \emptyset$ ve $\underline{N}(X) \neq \emptyset$ ise $\underline{H}(X) = X$ ve $\underline{N}(X) = X$. $\underline{H}(X)$ ve $\underline{N}(X)$ alt gruplar olduğundan $e \in \underline{H}(X)$ ve $e \in \underline{N}(X)$ yazılabilir. Buradan $eH = H \subseteq X$ ve $eN = N \subseteq X$ olup $eHN \subseteq X \Rightarrow e \in (\underline{HN})(X) \neq \emptyset$ bulunur. Yukardaki ispata benzer şekilde $(\underline{HN})(X) = X$ olur.

Son olarak $\underline{H}(X) = \emptyset$ ise $(\underline{HN})(X) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\underline{H}(X) = \emptyset$ ise

$\exists x \in G$ için $xH \not\subseteq X$ dir. Buradan $xH \not\subseteq NX$ dir. Böylece $x \notin (\underline{HN})(X)$ olup $(\underline{HN})(X) = \emptyset$ dir. $\square$

3.3 Alt ve Üst Yaklaşımların Homomorfik Görüntüsü

Tanım 3.3.1. G_1 ve G_2 iki topolojik grup olsun. Sürekli bir $f : G_1 \rightarrow G_2$ homomorfizmasına topolojik homomorfizma denir.

Önerme 3.3.1. G_1 ve G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir açık ve örten topolojik homomorfizma, $N \triangleleft G_1$ normal alt grup ve X , G_1 in boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman $X \subseteq N$ ve $\ker f = N$ ise $G_1/\overline{N}(X)$ bölüm grubu ve G_2 topolojik izomorfturlar.

İspat. $X \subseteq N$ ve Önerme 3.1.3 den $\overline{N}(X) = N$ yazılabilir. Böylece f açık homomorfizmasının çekirdeği $\ker f = \overline{N}(X)$ olur. Sonuç olarak Teorem 2.1.3 ile $G_1/\overline{N}(X)$ bölüm grubu ve G_2 topolojik izomorfturlar. $\square$

Önerme 3.3.2. G_1 ve G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir açık ve örten topolojik homomorfizma, $N \triangleleft G_1$ normal alt grup ve X , G_1 in bir alt grubu olsun. O zaman $N \subseteq X$ ve $\ker f = X$ ise $G_1/\underline{N}(X)$ bölüm grubu ve G_2 topolojik izomorfturlar.

İspat. Önerme 3.1.2 den $\underline{N}(X) = X$ dir. Buradan f açık homomorfizmasının çekirdeği $\ker f = \underline{N}(X)$ olur. Sonuç olarak Teorem 2.1.3 ile $G_1/\underline{N}(X)$ bölüm grubu ve G_2 topolojik izomorfturlar. $\square$

Önerme 3.3.3. H ve N , G topolojik grubunun normal alt grupları ve $\pi : G \rightarrow G/N$ kanonik homomorfizm olsun. O zaman;

- (1) Eğer $f : G/N \rightarrow G/(\overline{H}(N))$; $xN \mapsto x(\overline{H}(N))$ ve $g : G/H \rightarrow G/(\overline{N}(H))$; $xH \mapsto x(\overline{N}(H))$ ile tanımlı dönüşümler açık ise $(G/N)/(\overline{H}(N)/N)$ ve $(G/H)/(\overline{N}(H)/H)$ bölüm grupları topolojik izomorftur,
- (2) Eğer $N \subseteq H$ ve $f : G/N \rightarrow G/(\underline{N}(H))$; $xN \mapsto x(\underline{N}(H))$ ile tanımlı dönüşüm açık ise $G/\underline{N}(H)$ ve $(G/N)/(\underline{N}(H)/N)$ bölüm grupları topolojik izomorftur.

İspat. (1) N ve H , G nin normal alt grupları olduğundan ve Önerme 3.2.2 den $\overline{N}(H)$ ve $\overline{H}(N)$ de G nin normal alt gruplarıdır. 3. izomorfizm teoreminden

$$G/\overline{H}(N) \cong (G/N)/(\overline{H}(N)/N) \text{ ve } G/\overline{N}(H) \cong (G/H)/(\overline{N}(H)/H)$$

yazılabilir. $f : G/N \rightarrow G/(\overline{H}(N))$; $xN \mapsto x(\overline{H}(N))$ ile tanımlı olsun. $\pi : G \rightarrow G/N$ ve $\varphi : G \rightarrow G/(\overline{H}(N))$ fonksiyonları sürekli, örten ve açık homomorfizmalar olduğundan f fonksiyonu da sürekli, örten ve açık homomorfizmadır. Böylece f açık homomorfizma ve $\ker f = (\overline{H}(N)/N)$ olduğundan Teorem 2.2.5 den $G/(\overline{H}(N))$ ve $(G/N)/(\overline{H}(N)/N)$ bölüm grupları topolojik izomorfturlar. Benzer biçimde $G/(\overline{N}(H))$ ve $(G/H)/(\overline{N}(H)/H)$ bölüm grupları da topolojik izomorfturlar.

Diğer taraftan Önerme 3.1.3 den $\overline{N}(H) = \overline{H}(N)$ olduğundan $(G/N)/(\overline{H}(N)/N)$ ve $(G/H)/(\overline{N}(H)/H)$ bölüm grupları topolojik izomorfturlar.

(2) (1) deki ispata benzer biçimde yapılır. □

Önerme 3.3.4. G_1 ve G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir topolojik örten homomorfizma, $N \triangleleft G_1$ nin normal alt grubu ve X , G_1 in alt grubu olsun. O zaman;

- (1) Eğer $N \subseteq X$ ise $f(\underline{N}(X)) = \underline{f(N)}(f(X))$,

$$(2) \quad f(\overline{N}(X)) = \overline{f(N)}(f(X))$$

(3) Eğer $N \subseteq X$ ise $f(\underline{N}(X))$, G_2 nin alt yaklaşımlı topolojik alt grubudur,

(4) $f(\overline{N}(X))$, G_2 nin üst yaklaşımlı topolojik alt grubudur.

İspat. (1) f örten, $N \triangleleft G_1$ nin normal alt grubu ve X , G_1 in alt grubu olduğundan $f(N)$, G_2 nin normal alt grubu ve $(f(X))$, G_2 nin alt grubu olur. Ayrıca, $N \subseteq X \Leftrightarrow f(N) \subseteq (f(X))$ olup Önerme 3.1.2 den $\underline{N}(X) = X \Leftrightarrow \underline{f(N)}(f(X)) = (f(X))$ yazılabilir. Buradan $f(\underline{N}(X)) = \underline{f(N)}(f(X))$ bulunur.

(2) f örten, $N \triangleleft G_1$ in normal alt grubu ve X , G_1 in alt grubu olduğundan $f(N)$, G_2 nin normal alt grubu ve $(f(X))$, G_2 nin alt grubu olur. Ayrıca, Önerme 3.1.3 den $\overline{N}(X) = NX$ ve $\overline{f(N)}(f(X)) = f(N)(f(X))$ yazılabilir. Diğer taraftan, f bir homomorfizma olduğundan $f(NX) = f(N)(f(X))$. Buradan $f(\overline{N}(X)) = \overline{f(N)}(f(X))$ bulunur.

(3) $N \subseteq X$ olsun. f örten, $N \triangleleft G_1$ nin normal alt grubu ve X , G_1 in alt grubu olduğundan $f(N)$, G_2 nin normal alt grubu ve $f(X)$, G_2 nin alt grubu olur. (1) ve Önerme 3.2.3 den $f(\underline{N}(X))$, G_2 nin alt yaklaşımlı topolojik alt grubu olur.

(4) f örten, N, G_1 nin normal alt grubu ve X , G_1 in alt grubu olduğundan $f(N)$, G_2 nin normal alt grubu ve $f(X)$, G_2 nin alt grubu olur. (2) ve Önerme 3.2.1 den $f(\overline{N}(X))$, G_2 nin üst yaklaşımlı topolojik alt grubu olur. $\square$

Önerme 3.3.5. G_1 ve G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir topolojik örten homomorfizma, $N_2 \triangleleft G_2$ normal alt grup ve X , G_2 nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

$$(1) \quad \text{Eğer } N_2 \subseteq X \text{ ise } f^{-1}(\underline{N_2}(X)) = \underline{f^{-1}(N_2)}(f^{-1}(X)),$$

$$(2) \quad f^{-1}(\overline{N_2}(X)) = \overline{f^{-1}(N_2)}(f^{-1}(X)) \text{ ,}$$

(3) Eğer $N_2 \subseteq X$ ise $f^{-1}(\overline{N_2}(X))$, G_1 in alt yaklaşımlı topolojik alt grubudur,

(4) $f^{-1}(\overline{N_2}(X))$, G_1 in üst yaklaşımlı topolojik alt grubudur.

İspat. Önerme 3.3.4 ün ispatına benzer biçimde yapılır. □

Önerme 3.3.6. G_1 ve G_2 iki topolojik grup, $f : G_1 \rightarrow G_2$ bir topolojik örten homomorfizma, $N \triangleleft G_1$ nin normal alt grubu, $\text{Çek}f \subseteq N$ ve X , G_1 in her hangi bir normal alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(1) f açık dönüşüm ise $G_1/\overline{N}(X)$ ve $G_2/\overline{f(N)}(f(X))$ bölüm grupları topolojik izomorftur,

(2) Eğer N kapalı ise $f(\overline{N}(X))$, G_2 nin kapalı bir topolojik alt grubudur.

(3) f açık dönüşüm ve $N \subseteq X$ ise $G_1/\underline{N}(X)$ ve $G_2/\underline{f(N)}(f(X))$ bölüm grupları topolojik izomorftur,

(4) Eğer $N \subseteq X$ ve N kapalı ise $f(\underline{N}(X))$, G_2 nin kapalı bir topolojik alt grubudur.

İspat. (1) Önerme 3.3.4 den $f(\overline{N}(X)) = \overline{f(N)}(f(X))$ yazılabilir. Sonuç 2.1.1 den $f(\overline{N}(X))$ nın ters görüntüsü $f^{-1}(f(\overline{N}(X))) = \overline{N}(X)$.Çekf yazılabilir. Böylece $\overline{N}(X) \cdot \text{Çek}f = \overline{N}(X)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

N ve X , G_1 in normal alt grupları olduğundan Önerme 3.2.2 den $\overline{N}(X)$, G_1 in normal alt grubudur. Buradan $e \in \overline{N}(X) \Rightarrow eN \cap X \neq \emptyset \Rightarrow N \cap X \neq \emptyset$ olur. Buradan da her $n \in N$ için $nN \cap X = N \cap X \neq \emptyset$ ise $n \in \overline{N}(X)$ ve $N \subseteq \overline{N}(X)$ olur. Böylece, $\text{Çek}f \subseteq N$ olduğundan $\text{Çek}f \subseteq N \subseteq \overline{N}(X)$ dır. Sonuç olarak $\overline{N}(X) \cdot \text{Çek}f = \overline{N}(X)$ bulunur. Teorem 2.2.6 den $G_1/\overline{N}(X) \cong G_2/\overline{f(N)}(f(X))$ bulunur.

(2) N kapalı olsun. Önerme 3.1.1 den $\overline{N}(X)$ kapalıdır. f , sürekli ve (1) den $f^{-1}(f(\overline{N}(X))) = \overline{N}(X)$ olduğundan $f(\overline{N}(X))$, G_2 nin kapalı bir alt grubudur.

(3) $\text{Çek}f \subseteq N$ ve $N \subseteq X$ olduğundan Önerme 3.1.2 den $\underline{N}(X) = X$ ve $f(\underline{N})(f(X)) = f(X)$ dir. Ayrıca Önerme 3.3.4 den $\underline{f(N)}(f(X))$, G_2 nin normal alt grubudur. Buradan $\underline{f(N)}(f(X)) = f(X)$ ters görüntüsü $f^{-1}(f(X)) = \text{Çek}f$. $X = X$ olur. Böylece Teorem 2.2.6 den $G_1/\underline{N}(X) \cong G_2/\underline{f(N)}(f(X))$ elde edilir.

(4) $N \subseteq X$ ve N kapalı olsun. Önerme 3.1.1 den $\underline{N}(X)$ kapalıdır. f , sürekli ve (1) den $f^{-1}(f(\underline{N}(X))) = \underline{N}(X)$ olduğundan $f(\underline{N}(X))$, G_2 nin kapalı bir alt grubudur. □

4. TOPOLOJİK ROUGH GRUPLAR

Bu bölüm, üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, topolojik rough grup kavramı verildi. Ayrıca bazı özellikler ile örnekler sunuldu. İkinci alt bölümde, topolojik rough alt grup ve topolojik rough normal alt grup kavramları verildi. Üçüncü alt bölümde ise topolojik rough alt grupların homomorfizmleri incelendi.

4.1 Topolojik Rough Gruplar

Tanım 4.1.1. (U, R) yaklaşım uzayı, $"."$ U üzerinde bir ikili işlem, $G \subseteq U$ rough grup ve $(\overline{G}, T)$ bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan G rough grubuna topolojik rough grup denir.

(trg1) $f : G \times G \rightarrow \overline{G}, (x, y) \mapsto x.y$ sürekli fonksiyon,

(trg2) $g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon.

Bu bölümde, G üzerindeki T topolojisinden indirgenen alt uzay topolojisi T_G ile gösterilecektir.

Yukardaki tanım komşuluk kavramı yardımı ile de ifade edilebilir. $\mathcal{N}(x)$, x noktasının komşuluklar sistemini oluştursun. Bu durumda topolojik rough grup tanımı;

(trg1) $f : G \times G \rightarrow \overline{G}, (x, y) \mapsto x.y$ sürekli fonksiyon $\Leftrightarrow \forall x, y \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x.y) \subseteq \overline{G}$ için $U.V \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır,

(trg2) $g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon $\Leftrightarrow \forall x \in G$ ve $\forall W \in \mathcal{N}(x^{-1})$ için $U^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ vardır. Burada $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ ile tanımlıdır.

şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.1.1. $U = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ mod 3 e göre kalan sınıfların kümesi ve " $\oplus$ " işlemi kalan sınıfların toplama işlemi olsun. $G = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ ve U nun bir ayrık parçalanışı da $E_1 = \{\bar{0}, \bar{1}\}, E_2 = \{\bar{2}\}$ olmak üzere $U/R = \{E_1, E_2\}$ olsun.

Böylece $\bar{G} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ olur ve Örnek 2.5.1 den G , bir cebirsel rough gruptur. $\bar{G}$ üzerindeki topolojiyi $T = \{\emptyset, \bar{G}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{1}, \bar{2}\}\}$ olarak alalım.

Bu durumda G , üzerindeki alt uzay topolojisi $T_G = \{\emptyset, G, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}\}$ olur. Şimdi G nin topolojik rough grup olduğunu gösterelim.

(trg1) $\bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}$ ve $\forall W = \{\bar{2}\} \in \mathcal{N}(\bar{2}) \in T$ için $\exists U = \{\bar{1}\} \in \mathcal{N}(\bar{1}) \in T_G$ var öyle ki $U \oplus U = \{\bar{2}\} \subseteq W$,

$\bar{2} \oplus \bar{2} = \bar{1}$ ve $\forall W = \{\bar{1}\} \in \mathcal{N}(\bar{1}) \in T$ için $\exists U = \{\bar{2}\} \in \mathcal{N}(\bar{2}) \in T_G$ var öyle ki $U \oplus U = \{\bar{1}\} \subseteq W$,

$\bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{0}$ ve $\forall W = \bar{G} \in \mathcal{N}(\bar{0}) \in T$ için $\exists U = \{\bar{1}\} \in \mathcal{N}(\bar{1}) \in T_G$ ve $\exists V = \{\bar{2}\} \in \mathcal{N}(\bar{2}) \in T_G$ var öyle ki $U \oplus V = \{\bar{0}\} \subseteq W$ bulunur.

O halde $G \times G \rightarrow \bar{G} (x, y) \mapsto x \oplus y$ süreklidir.

(trg2) $(\bar{1})^{-1} = \bar{2}$ ve $W = \{\bar{2}\} \in \mathcal{N}(\bar{2}) \in T_G$ için $\exists U = \{\bar{1}\} \in \mathcal{N}(\bar{1}) \in T_G$ var öyle ki $U^{-1} = \{\bar{2}\} \subseteq W$,

$(\bar{2})^{-1} = \bar{1}$ ve $W = \{\bar{1}\} \in \mathcal{N}(\bar{1}) \in T_G$ için $\exists U = \{\bar{2}\} \in \mathcal{N}(\bar{2}) \in T_G$ var öyle ki $U^{-1} = \{\bar{1}\} \subseteq W$ elde edilir.

Dolayısıyla $G \rightarrow G x \mapsto x^{-1}$ süreklidir. Böylece G bir topolojik rough gruptur.

Örnek 4.1.2. U, S_4 permütasyonlar grubu ve "." işlemide permütasyonlar arasındaki bileşke işlemi olsun. U nun bir ayrık parçalanışı da

$$E_1 = \{(1), (12), (13), (14), (23), (24), (34)\},$$

$$E_2 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\},$$

$$E_3 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\},$$

$$E_4 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

olmak üzere $U/R = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ olsun.

$G = \{(12), (123), (132)\}$ olsun. Böylece $\overline{G} = E_1 \cup E_2$ olur ve G nin bir cebirsel rough grup olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $\overline{G}$ üzerindeki topolojiyi

$T = \{\emptyset, \overline{G}, \{(12)\}, \{(1), (123), (132)\}, \{(1), (12), (123), (132)\}\}$ olarak aldığımızda G nin bir topolojik rough grup olduğunu gösterelim.

Bu durumda G , üzerindeki altuzay topolojisi $T_G = \{\emptyset, G, \{(12)\}, \{(123), (132)\}\}$ olur.

$(trg1) (12) \cdot (12) = (1)$ ve $\forall W \in \mathcal{N}((1)) \in T$ için $\exists U \in \mathcal{N}((12)) \in T_G$ var öyle ki $U \cdot U \subseteq W$ dir. Gerçekten de, $W = \{(1), (123), (132)\}$ ve $U = \{(12)\}$ alındığında bu şart sağlanır.

$(12) \cdot (123) = (23)$ ve $\forall W \in \mathcal{N}((23)) \in T$ için $\exists U \in \mathcal{N}((12)) \in T_G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}((123)) \in T_G$ var öyle ki $U \cdot V \subseteq W$ dir. Gerçekten de, $W = \overline{G}$, $U = \{(12)\}$ ve $V = \{(123), (132)\}$ alındığında bu şart sağlanır.

$(12) \cdot (132) = (13)$ ve $\forall W \in \mathcal{N}((13)) \in T$ için $\exists U \in \mathcal{N}((12)) \in T_G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}((132)) \in T_G$ var öyle ki $U \cdot V \subseteq W$ dir. Gerçekten de, $W = \overline{G}$, $U = \{(12)\}$ ve $V = \{(123), (132)\}$ alındığında bu şart sağlanır.

$(123) \cdot (132) = (1)$ ve $\forall W \in \mathcal{N}((1)) \in T$ için $\exists U \in \mathcal{N}((123)) \in T_G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}((132)) \in T_G$ var öyle ki $U \cdot V \subseteq W$ dir. Gerçekten de, $W = \{(1), (123), (132)\}$ ve

$U=V = \{(123), (132)\}$ alındığında bu şart sağlanır.

Böylece $G \times G \rightarrow \overline{G} (x, y) \mapsto x.y$ süreklidir.

(trg2) $(12)^{-1} = (12)$ ve $\forall W \in \mathcal{N}((12)) \in T_G$ için $\exists U \in \mathcal{N}((12)) \in T_G$ var öyle ki $U^{-1} \subseteq W$ dir. Gerçekten de , $W = \{(12)\}$ ve $U = \{(12)\}$ alındığında $U^{-1} = \{(12)\}$ olup bu şart sağlanır.

$(123)^{-1} = (132)$ ve $\forall W \in \mathcal{N}((132)) \in T_G$ için $\exists U \in \mathcal{N}((123)) \in T_G$ var öyle ki $U^{-1} \subseteq W$ dir. Gerçekten de , $W = \{(123), (132)\}$ ve $U = \{(123), (132)\}$ alındığında $U^{-1} = \{(123), (132)\}$ olup bu şart sağlanır.

Böylece $G \rightarrow G x \mapsto x^{-1}$ süreklidir.

Sonuç olarak G bir topolojik rough gruptur.

Tanım 4.1.2. A ve B , G topolojik rough grubun iki alt kümesi olsun.

$$(a) A.B = \{x.y \in \overline{G} : x \in A, y \in B\},$$

$$(b) x.A = \{x.a \in \overline{G} : a \in A\},$$

$$(c) A^{-1} = \{a^{-1} \in G : a \in A\},$$

$$(d) A = A^{-1} \text{ ise } A \text{ ya } G \text{ de simetriktir denir.}$$

Önerme 4.1.1. G bir topolojik rough grup ve $a \in G$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

1) $L_a : G \rightarrow \overline{G} x \mapsto ax$ sol öteleme dönüşümü $\forall x \in G$ için sürekli ve bire-bir bir dönüşümdür,

2) $R_a : G \rightarrow \overline{G} x \mapsto xa$ sağ öteleme dönüşümü $\forall x \in G$ için sürekli ve bire-bir bir dönüşümdür,

3) $f : G \rightarrow G$ $x \mapsto x^{-1}$ tersinin dönüşümü bir homeomorfizmdir.

İspat. 1) $\forall x_1, x_2 \in G$ için $L_a(x_1) = L_a(x_2)$ ise $ax_1 = ax_2$ ve $a \in G$ olduğundan $a^{-1} \in G \subseteq \overline{G}$ olup her iki taraf a^{-1} ile çarpılırsa $a^{-1}(ax_1) = a^{-1}(ax_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olur. Böylece L_a bire-bir bir dönüşümdür.

$\forall x \in G$ için $L_a(x) = ax$ ve $W \in \mathcal{N}(ax)$ olsun. Topolojik rough grup tanımı (trg1) den $\exists U \in \mathcal{N}(a) \in T_G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(x) \in T_G$ var öyle ki $UV \subseteq W$ dir. Böylece, $aV \subseteq UV \subseteq W$ olduğundan $L_a(V) = aV \subseteq W$ olup L_a, x te sürekli bir dönüşümdür. $x \in G$ herhangi bir nokta olduğundan L_a, G üzerinde sürekli bir dönüşümdür.

2) ve 3) benzer biçimde yapılır. □

Uyarı 4.1.1. Teorem 2.2.1 den L_a ve R_a dönüşümleri birer homeomorfizm olmasına karşın burada L_a ve R_a dönüşümleri birer homeomorfizm değildir. Ayrıca L_a ve R_a dönüşümleri açık dönüşümler de değildir. Gerçekten de Örnek 4.1.1 de $G = \{\bar{1}, \bar{2}\}, T = \{\emptyset, \overline{G}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{1}, \bar{2}\}\}$ ve $T_G = \{\emptyset, G, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}\}$ olup $\bar{1} \in G$ ve $U = \{\bar{2}\} \in T_G$ açık kümesini aldığımızda $L_{\bar{1}}(\{\bar{2}\}) = \bar{1} \oplus \{\bar{2}\} = \{\bar{0}\}$ kümesi T topolojik uzayında açık değildir.

Önerme 4.1.2. G bir topolojik rough grup olsun. O zaman $G = G^{-1}$ eşitliği vardır.

İspat. Rough grup ve topolojik rough grup tanımlarından kolayca bulunur. □

Önerme 4.1.3. G bir topolojik rough grup ve $V \subseteq G$ olsun. O zaman;

$$V \text{ açıktır (kapalıdır)} \Leftrightarrow V^{-1} \text{ açıktır (kapalıdır)}.$$

İspat. $f : G \rightarrow G$ $x \mapsto x^{-1}$ dönüşümü bir homeomorfizm olduğundan $V \subseteq G$ açık ise $f(V) = V^{-1}$ de açıktır. Kapalı olma durumu da benzer biçimde yapılır. □

Önerme 4.1.4. G bir topolojik rough grup ve $e \in U$ olmak üzere $U \subset \overline{G}$ açık bir alt küme olsun. O zaman $V = V^{-1}$ ve $V.V \subseteq U$ olacak biçimde V açık kümesi vardır ve $e \in V$ dir.

İspat. $f : G \times G \rightarrow \overline{G}$ dönüşümü sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$, $G \times G$ de açık ve $e.e = e \in U$ için $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e) \in T_G$ var öyle ki $V_1.V_2 \subseteq U$ dir. V_1, V_2 kümeleri T_G topolojisinde açık olduklarından V_1^{-1}, V_2^{-1} kümeleride açıktır. Böylece $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ kümesi de açık olup $e \in V$, $V = V^{-1}$ ve $V.V \subseteq V_1.V_2 \subseteq U$ dir. $\square$

Önerme 4.1.5. G bir topolojik rough grup ve $G, \{e\} \subset \overline{G}$ kümeleri açık olsun. O zaman;

(1) Eğer $e \in G$ ise $\{e\}$ tek nokta kümesi G açıktır.

(2) Eğer $e \notin G$ ise $V = V^{-1}$ olacak biçimde bir $V \subseteq G$ açık kümesi vardır.

İspat. (1) $e \in G$ olsun. G bir topolojik rough grup ve $e.e = e$ olduğundan e elemanının G de bir U açık komşuluğu için $U.U \subseteq \{e\}$ olur. Eğer $U \neq \{e\}$ ise $U.U \not\subseteq \{e\}$ olacağından bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $U = \{e\}$ bulunur.

(2) $e \notin G$ olsun. G bir topolojik rough grup ve $\{e\} \subset \overline{G}$ tek nokta kümesi açık olduğundan $(trg1)$ den $f^{-1}(\{e\})$, $G \times G$ de açık ve $a.b = e$ için $\exists V_1 \in \mathcal{N}(a)$ ve $\exists V_2 \in \mathcal{N}(b)$ var öyleki $V_1.V_2 \subseteq \{e\}$ olur. Böylece $V_1.V_2 \neq \emptyset$ olduğundan $V_1.V_2 = \{e\}$ elde edilir. Buradan $V_1 = \{a\}$, $V_2 = \{b\}$ ve $V_1 = V_2^{-1}$ bulunur. $\square$

Aşağıda verilen iki önerme topolojik grup ile topolojik rough gruplar arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 4.1.6. G bir topolojik rough grup olsun. Eğer $G = \overline{G}$ ise G bir topolojik gruptur.

İspat. G bir topolojik rough grup ve $G = \overline{G}$ olsun.

Önce G nin bir grup olduğunu gösterelim:

(1) G bir topolojik rough grup olduğundan $\forall x, y \in G$ için $x.y \in \overline{G} = G$ dir.

(2) G bir topolojik rough grup olduğundan $\forall x, y, z \in G$ için $(x.y).z = x.(y.z)$

birleşme özelliği $G = \overline{G}$ de sağlanır.

(3) $e \in G$ dir.

(4) $\forall x \in G$ için $x^{-1} \in G$ dir.

Böylece G bir gruptur. Şimdi G nin bir topolojik grup olduğunu gösterelim:

G bir topolojik rough grup ve $G = \overline{G}$ olduğundan

$$f : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x.y$$

$$g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

fonksiyonları sürekli olur. Böylece G bir topolojik gruptur. □

Önerme 4.1.7. (G, T_1) bir topolojik grup ve $(\overline{G}, T)$ bir topolojik uzay olsun. O zaman G nin bir topolojik rough grup olması için, $\overline{G}$ üzerindeki T topolojisinden indirgenen alt uzay topolojisi T_G ile T_1 topolojileri aynı olmalıdır.

İspat. Topolojik rough grup ve topolojik grup tanımlarından açıktır. □

4.2 Topolojik Rough Alt Gruplar ve Topolojik Rough Normal Alt Gruplar

Tanım 4.2.1. (U, R) yaklaşım uzayı, "." U üzerinde bir ikili işlem, $G \subseteq U$ bir topolojik rough grup ve H, G nin bir rough alt grubu olsun. Aşağıdaki fonksiyonlar sürekli ise H rough alt grubuna G nin topolojik rough alt grubu denir.

(trh1) $f : H \times H \rightarrow \overline{H}, (x, y) \mapsto x.y$ sürekli fonksiyon,

(trh2) $g : H \rightarrow H, x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon.

Teorem 4.2.1. *Bir topolojik rough grubun bir rough alt grubu da bir topolojik rough gruptur.*

İspat. G bir topolojik rough grup ve H, G nin bir rough alt grubu olsun.

$$f : G \times G \rightarrow \overline{G}, (x, y) \mapsto x.y \text{ ve } g : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

fonksiyonları sürekli olduğundan

$$f_H : H \times H \rightarrow \overline{H}, (x, y) \mapsto x.y \text{ ve } g_H : H \rightarrow H, x \mapsto x^{-1}$$

kısıtlaması da süreklidir. □

Teorem 4.2.2. *G bir topolojik rough grup olsun. O zaman H, G nin bir topolojik rough alt grubu ise H nin topolojik kapanışı H^c de G nin bir topolojik rough alt grubudur.*

İspat. H, G nin topolojik alt grubu olsun. H^c nin G nin topolojik alt grubu olduğunu göstermek için her $x, y \in H^c$ için $x.y \in \overline{H^c}$ ve her $x \in H^c$ için $x^{-1} \in H^c$ olduğunu göstermeliyiz.

$x, y \in H^c$ olsun. $W \in \mathcal{N}(x.y)$ için $U.V \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x) \subseteq G$ ve $\exists V \in \mathcal{N}(y) \subseteq G$ vardır. $x \in H^c$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan $U \cap H \neq \emptyset \Rightarrow U \cap \overline{H} \neq \emptyset$ olur. Benzer şekilde $y \in H^c$ ve $V \in \mathcal{N}(y)$ olduğundan $V \cap H \neq \emptyset \Rightarrow V \cap \overline{H} \neq \emptyset$ olur. Böylece

$$x \in U \cap \overline{H} \text{ ve } y \in V \cap \overline{H}$$

olacak şekilde a ve b elemanları vardır. Bu durumda

$$x.y \in U.V \text{ ve } x.y \in \overline{H} \text{ ise } U.V \cap \overline{H} \neq \emptyset$$

olur. Buradan $W \cap \overline{H} \neq \emptyset$ elde edilir. Böylece $x.y \in \overline{H^c}$ bulunur.

$x \in H^c$ olsun. $W \in \mathcal{N}(x^{-1})$ için $U^{-1} \subseteq W$ olacak biçimde $\exists U \in \mathcal{N}(x)$ vardır. Burada $U^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in H^c\}$ dir. $x \in H^c$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ olduğundan $U \cap H \neq \emptyset$ olup, $U^{-1} \cap H \neq \emptyset$ olduğundan $x^{-1} \in H^c$ olur.

Sonuç olarak H^c bir topolojik rough gruptur. $\square$

Uyarı 4.2.1. H bir cebirsel grup olarak aldığımızda her $p \in H$ için $p.H = H$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla bir topolojik grubun bir H alt grubu açık ise aynı zamanda kapalıdır. Fakat, H bir rough grup olarak alındığında bileşke işlemi $\overline{H}$ de tanımlı olduğundan her $p \in H$ için $p.H \neq H$ dir. Çünkü bir topolojik grupta H açık olduğunda $p.H$, p nin açık bir komşuluğu iken topolojik rough grupta Uyarı 4.1.1 de de gösterildiği gibi $p.H$, p nin açık bir komşuluğu olmayabilir. Sonuç olarak topolojik rough grubun bir H alt grubu açık ise aynı zamanda kapalı olmayabilir.

Teorem 4.2.3. G bir topolojik rough grup, H_1 ve H_2 de G nin iki topolojik rough alt grubu olsun. Bu durumda $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \overline{H_1 \cap H_2}$ ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir topolojik rough alt grubudur.

İspat. H_1 ve H_2 , G nin iki topolojik rough alt grubu olsun. $H_1 \cap H_2 \subset G$ olduğu açıktır. $x, y \in H_1 \cap H_2$ elemanlarını alalım. H_1 ve H_2 rough alt grup olduklarından $xy \in \overline{H_1}$, $xy \in \overline{H_2}$ ve $x^{-1} \in H_1$, $x^{-1} \in H_2$ dir. Buradan $xy \in \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$ ve $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ olur. Bu durumda $\overline{H_1} \cap \overline{H_2} = \overline{H_1 \cap H_2}$ olduğundan $xy \in \overline{H_1 \cap H_2}$ ve $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ elde edilir. Böylece $H_1 \cap H_2$, G nin bir rough alt grubudur. Diğer taraftan Teorem 4.2.1 den $H_1 \cap H_2$, G nin bir topolojik rough alt grubudur. $\square$

Teorem 4.2.4. *G bir topolojik rough grup, K , G nin bir topolojik rough alt grubu ve H , G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda H , K nin bir topolojik rough alt grubu ise G nin de topolojik rough alt grubudur.*

İspat. Önce H nin, G nin bir rough alt grubu olduğu gösterilsin. $H \subset G$ olduğu açıktır. H , K nin bir rough alt grubu olduğundan $\forall x, y \in H$ için $xy \in \overline{H}$ ve $\forall z \in H$ için $z^{-1} \in H$ olur. Böylece H , G nin bir rough alt grubudur.

Şimdi H nin bir topolojik rough alt grup olduğunu gösterelim. G bir topolojik rough grup olduğundan $(\overline{G}, T)$ topolojik uzayı ve K bir topolojik rough alt grup olduğundan da $(\overline{K}, T_{\overline{K}})$ topolojik uzaylarını alabiliriz. Diğer taraftan H , K nin bir topolojik rough alt grubu olduğundan $(\overline{H}, T_{\overline{K}|_{\overline{H}}})$ topolojik uzayı vardır. Sonuç olarak $\overline{H}$ üzerindeki indirgenmiş $T_{\overline{K}|_{\overline{H}}}$ topolojisi ile $T_{\overline{H}}$ topolojisi aynı olduğundan H , G nin topolojik rough alt grubu olur. $\square$

Teorem 4.2.5. *G bir topolojik rough grup, H_1, H_2 de G nin iki topolojik rough alt grubu ve $\overline{H_1} \cdot \overline{H_2} = \overline{H_1 \cdot H_2}$ olsun. Bu durumda $H_1 \cdot H_2$ nin G topolojik rough grubunun bir topolojik rough alt grubu olması için gerek ve yeter şart $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$ olmasıdır.*

İspat. Önce Teorem 2.5.4 sonra Teorem 4.2.1 den kolayca bulunur. $\square$

Tanım 4.2.2. *Bir G topolojik rough grubun bir topolojik rough alt grubu N olsun. $\forall a \in G$ için $a \cdot N = N \cdot a$ ise N ye topolojik rough normal alt grup denir.*

Teorem 4.2.6. *G bir topolojik rough grup, H_1, H_2 de G nin iki topolojik rough normal alt grubu ve $\overline{H_1} \cdot \overline{H_2} = \overline{H_1 \cdot H_2}$ olsun. Bu durumda $H_1 \cdot H_2$, G topolojik rough grubunun bir topolojik rough normal alt grubudur.*

İspat. H_1, H_2 iki rough normal alt grup olduklarından $H_1.H_2 = H_2.H_1$ olup Teorem 4.2.5 den $H_1.H_2, G$ nin bir topolojik rough alt grubudur. Şimdi de $H_1.H_2$ nin normal olduğunu gösterelim. $\forall a \in G$ için $a.(H_1.H_2) = (a.H_1).H_2 = (H_1.a).H_2 = H_1.(a.H_2) = H_1.(H_2.a) = (H_1.H_2).a$ olduğundan Tanım 4.2.2 den $H_1.H_2, G$ topolojik rough grubunun bir topolojik rough normal alt grubu olur. $\square$

4.3 Topolojik Rough Alt Grupların Homomorfizmleri

(U_1, R_1) ve (U_2, R_2) , iki yaklaşım uzayı ve $"."$, $"\circ"$ sırasıyla U_1, U_2 üzerinde iki ikili işlem olsun.

Tanım 4.3.1. $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki rough grup olsun. Her $x, y \in \overline{G_1}$ için $\varphi(x.y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ olacak şekilde örten bir $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ fonksiyonu varsa φ ye rough homomorfizm, G_1 ve G_2 rough gruplarına da rough homomorfik gruplar denir.

Tanım 4.3.2. $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup olsun. Sürekli bir $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ rough homomorfizmine bir topolojik rough homomorfizm denir.

Örnek 4.3.1. G bir topolojik rough grup olsun. $\mathbf{I} : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ birim fonksiyonu bir topolojik rough homomorfizmdir.

Teorem 4.3.1. $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup ve $\varphi : (\overline{G_1}, T) \rightarrow (\overline{G_2}, \mathfrak{T})$ bir topolojik rough homomorfizm olsun. O zaman $\varphi_G : (G, T_G) \rightarrow (\overline{G_2}, \mathfrak{T})$, $\varphi_G(a) = \varphi(a)$ ile tanımlı kısıtlanmış fonksiyonu da bir topolojik rough homomorfizmdir.

İspat. Herhangi bir $U \in \mathfrak{T}$ açık kümesi verilsin. $\varphi_G^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U) \cap G$ olup $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\varphi^{-1}(U) \in T$ dir. Böylece $\varphi_G^{-1}(U) \in T_G$ olup φ_G fonksiyonu sürekli dir. $\square$

Teorem 4.3.2. $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup, $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ bir topolojik rough homomorfizm, $\overline{\varphi(G_1)} = \overline{G_2}$ ve $\varphi(G_1) \subseteq G_2$ olsun. O zaman $\varphi(G_1)$ bir topolojik rough gruptur.

İspat. (1) $\forall x', y' \in \phi(G_1)$ için $\phi(x) = x', \phi(y) = y'$ olacak biçimde en az bir $x, y \in G_1$ vardır. Böylece $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y) \in \overline{G_2} = \overline{\phi(G_1)}$ olur. Buradan $x' \circ y' \in \overline{\phi(G_1)}$ elde edilir.

(2) $e \in \overline{G_1}, \phi(e) \in \overline{G_2}$ ve $\forall \phi(x) \in \phi(G_1)$ olduğundan $\phi(e) \circ \phi(x) = \phi(x * e) = \phi(x)$ olur.

(3) G_1 bir rough group olduğundan her $x, y, z \in G_1$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ dir. Böylece

$$\phi(x * (y * z)) = \phi(x) \circ \phi(y * z) = \phi(x) \circ (\phi(y) \circ \phi(z))$$

ve

$$\phi((x * y) * z) = \phi(x * y) \circ \phi(z) = (\phi(x) \circ \phi(y)) \circ \phi(z)$$

olduğundan

$$(\phi(x) \circ \phi(y)) \circ \phi(z) = \phi(x) \circ (\phi(y) \circ \phi(z))$$

bulunur.

(4) $\forall x' \in \phi(G_1)$ için $\phi(x) = x'$ olacak biçimde en az bir $x \in G_1$ vardır. G_1 bir rough group olduğundan $x^{-1} \in G_1$ dir. Böylece $\phi(x^{-1}) \in \phi(G_1)$ ve $\phi(x) \circ \phi(x^{-1}) = \phi(x^{-1}) \circ \phi(x) = \phi(e)$ olur. Bu durumda $(x')^{-1} = \phi(x^{-1})$ dir. Böylece $\phi(G_1)$ bir rough grup olur.

Diğer taraftan $\phi(G_1) \subseteq G_2$ olduğundan ve Teorem 4.2.1 den $\phi(G_1)$ bir topolojik rough grup olur. $\square$

Teorem 4.3.3. $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup, $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ bir

topolojik rough homomorfizm, $e_1 \in G_1$ ve $e \in G_2$ olsun. O zaman $\varphi(e_1) = e_2$ ve her $a \in G_1$ için $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ dir.

İspat. Teorem 2.5.11 den kolayca bulunur. $\square$

Tanım 4.3.3. $G_1 \subset U_1$ ve $G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup , $e_1 \in G_1$, $e_2 \in G_2$ ve $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ bir topolojik rough homomorfizm olsun. $\{x \mid \varphi(x) = e_2, x \in G_1\}$ kümesine topolojik rough homomorfizm çekirdeği denir ve N ile gösterilir.

Teorem 4.3.4. $G_1 \subset U_1$, $G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup ve $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ bir topolojik rough homomorfizm olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (a) Topolojik rough homomorfizm çekirdeği N , G_1 in bir topolojik rough normal alt grubudur.
- (b) $\{e_2\} \subset \overline{G_2}$ açık ise N de $\overline{G_1}$ de açıktır.
- (c) N bir topolojik gruptur.

İspat. (a) $\phi, \overline{G_1}$ den $\overline{G_2}$ ye tanımlı sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in N$ için $\phi(x) = e', \phi(y) = e'$ dir. Böylece $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y) = e' \circ e' = e'$ yani $x * y \in N$ bulunur. Ayrıca $\forall x \in N$ için $\phi(x) = e'$ dir. Böylece $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = e'^{-1} = e'$ olduğundan, $x^{-1} \in N$ dir. Sonuç olarak N , G_1 in bir rough normal alt grubudur. Diğer taraftan Teorem 4.2.1 ve Tanım 4.2.2 den N , G_1 in bir topolojik rough normal alt grubu olur.

(b) $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ sürekli ve $N = \varphi^{-1}(e_2) = \{x \mid \varphi(x) = e_2, x \in G_1\}$ olsun. $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ sürekli ve $\{e_2\}, \overline{G_2}$ açık olduğundan $\varphi^{-1}(e_2)$ de $\overline{G_1}$ açık olur.

(c) $\forall x, y \in N$ için $\varphi(x.y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) = e_2 \circ e_2 = e_2$ olduğundan $x.y \in N$ dir. $\varphi(e_1) = e_2$ olduğundan $e_1 \in N$ dir. $\forall x \in N$ için $\varphi(x^{-1}) = \varphi^{-1}(x) = (e_2)^{-1} = e_2$

olduğundan $x^{-1} \in N$ dir. Böylece N bir gruptur. Sonuç olarak Teorem 4.2.1 den N bir topolojik gruptur. $\square$

Teorem 4.3.5. $G_1 \subset U_1, G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup, $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ bir topolojik rough homomorfizm, H_1 ve N_1 sırasıyla G_1 in bir topolojik rough alt grubu ve topolojik rough normal alt grubu olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (a) $\varphi(\overline{H_1}) = \overline{\varphi(H_1)}$ ve $\varphi(H_1) \subset G_2$ ise $\varphi(H_1), G_2$ nin bir topolojik rough alt grubudur,
- (b) $\varphi(\overline{N_1}) = \overline{\varphi(N_1)}$ ve $\varphi(G_1) = G_2$ ise $\varphi(N_1), G_2$ nin bir topolojik rough normal alt grubudur.

İspat. (a) $\phi, \overline{G_1}$ den $\overline{G_2}$ ye tanımlı sürekli ve örten bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \overline{G_1}$ için $\phi(x*y) = \phi(x) \circ \phi(y)$ dir. ϕ nin tanımından, her $x', y' \in \phi(H_1)$ için $\phi(x) = x', \phi(y) = y'$ olacak biçimde en az bir $x, y \in H_1$ vardır ve her $x, y \in \overline{H_1}$ için $\phi(x) \circ \phi(y) = \phi(x * y) \in \phi(\overline{H_1})$ dir. Böylece $\phi(\overline{H_1}) = \overline{\phi(H_1)}$ olduğundan, $\phi(x) \circ \phi(y) \in \overline{\phi(H_1)}$ dir.

Her $x' \in \phi(H_1)$ için $\phi(x) = x'$ olacak biçimde en az bir $x \in H_1$ vardır. H_1, G_1 in bir rough alt grubu olduğundan $x^{-1} \in H_1$ dir. Böylece $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1}) \in \phi(H_1)$ olur. Sonuç olarak $\phi(H_1), G_2$ nin bir rough alt grubudur. Diğer taraftan $\phi(H_1) \subset G_2$ olduğundan ve Teorem 4.2.1 den $\phi(H_1), G_2$ nin bir topolojik rough alt grubu olur.

(b) (a) dan, $\phi(\overline{N_1}) = \overline{\phi(N_1)}$ olduğu için $\varphi(N_1), G_2$ nin bir rough alt grubudur. $\phi(G_1) = G_2$ olduğundan her $\phi(x) \in G_2$ için $\phi(x) \in \phi(G_1)$ dir. Buradan her $x \in G_1$ için $x^{-1} \in G_1$ ve $\phi(x^{-1}) \in \phi(G_1) = G_2$ olur. Her $\phi(x) \in G_2$ ve her $\phi(n) \in \phi(N_1)$ için $\phi(x) \circ \phi(n) \circ \phi(x^{-1}) = \phi(x * n * x^{-1})$ olup ve N_1, G_1 in rough normal alt grubu olduğundan $x * n * x^{-1} \in N_1$ elde edilir. Böylece $\phi(x) \circ \phi(n) \circ \phi(x^{-1}) \in \phi(N_1)$ olur.

Buradan $\phi(N_1), G_2$ nin rough normal alt grubudur. Sonuç olarak, $\varphi(N_1) \subseteq \varphi(G_1) = G_2$ ve Teorem 4.2.1 den $\varphi(N_1), G_2$ nin bir topolojik rough normal alt grubudur. $\square$

Teorem 4.3.6. $G_1 \subset U_1, G_2 \subset U_2$ iki topolojik rough grup, $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ bir topolojik rough homomorfizm, H_2 ve N_2 sırasıyla G_2 nin bir topolojik rough alt grubu ve topolojik rough normal alt grubu olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (a) H_1, H_2 nin ters görüntüsü olmak üzere, $H_1 \subset G_1$ ve $\varphi(\overline{H_1}) = \overline{H_2}$ ise H_1, G_1 in bir topolojik rough alt grubudur,
- (b) N_1, N_2 nin ters görüntüsü olmak üzere, $\varphi(G_1) = G_2$ ve $\varphi(\overline{N_1}) = \overline{N_2}$ ise N_1, G_1 in bir topolojik rough normal alt grubudur,
- (c) N_1 ve H_1 , sırasıyla N_2 ve H_2 nin ters görüntüsü olsun. Bu durumda H_2 ve $N_2, \overline{G_2}$ topolojik uzayında açık ve $H_1, N_1 \subset G_1$ ise H_1 ve N_1 de $\overline{G_1}$ topolojik uzayında açıktır.

İspat. (a) H_1, H_2 nin ters görüntüsü olduğundan $\phi(H_1) = H_2$ dir. Buradan her $x, y \in H_1$ için $\phi(x), \phi(y) \in H_2$ olur. H_2, G_2 nin rough alt grubu olduğundan $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y) \in \overline{H_2} = \phi(\overline{H_1})$ dir. Buradan $x * y \in \overline{H_1}$ olur. Her $x \in H_1$ için $\phi(x) \in H_2$ dir. H_2, G_2 nin bir rough alt grubu olduğundan $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1}) \in H_2$ bulunur. Buradan da $x^{-1} \in H_1$ olur. Böylece H_1, G_1 in bir rough alt grubudur. Sonuç olarak $H_1 \subset G_1$ ve Teorem 4.2.1 den, H_1, G_1 in bir topolojik rough alt grubudur.

(b) (a) dan, $\varphi(\overline{N_1}) = \overline{N_2}$ olduğundan N_1, G_1 in rough alt grubudur. $\phi(x) \in \phi(G_1) = G_2$ olduğundan her $x \in G_1, n \in N_1$ için $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1}) \in \phi(G_1) = G_2$ ve $\phi(n) \in N_2$ olur. N_2, G_2 nin bir rough alt grubu olduğundan $\phi(x) \circ \phi(n) \circ \phi(x^{-1}) = \phi(x * n * x^{-1}) \in N_2$ dir. Buradan $x * n * x^{-1} \in N_1$ olur. Böylece N_1, G_1 in bir rough

normal alt grubu olur. Sonuç olarak, Teorem 4.2.1 den, N_1, G_1 in bir topolojik rough normal alt grubudur.

(c) $\varphi : \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ topolojik rough homomorfizmi olduğundan süreklidir ve $\varphi^{-1}(H_2) = H_1, \varphi^{-1}(N_2) = N_1$ olduğundan da H_1 ve $N_1, \overline{G_1}$ de açıktırlar. $\square$

5. KAYNAKLAR

- [1] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control, 8 (1965) 338-353.
- [2] Z. Pawlak, Rough sets, Int. J. Comput. Inform. Sci. 11 (1982) 341–356.
- [3] D. Molodtsov, Soft set theory-first results, Comput. Math. Appl. 37 (1999) 19–31.
- [4] J. Peters, Near sets, general theory about nearness of objects, Appl. Math. Sci. 1 (53) (2007) 2029–2609.
- [5] A. Fatih Özcan and Nurettin Bağirmaz, Comparison of near sets by means of a chain of features, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (2015) to appear.
- [6] Henry, C. Near Sets: Theory and Applications, (Ph.D. Diss., supervisors: J. F. Peters, Dept. Elec. and Comp. Engg., U. of Manitoba, WPG, MB, Canada, 2010).
- [7] Peters, J. F., Near sets, special theory about nearness of objects, Fundam. Inform. 75 (1–4) (2007) 407–433.
- [8] Taşbozan, H., İçen, İ., Bağirmaz, N., Özcan, A., Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces, Fund. Informaticae (2014) to appear.
- [9] Wolski, W. Perception and classification. A note on near sets and rough sets, Fundamenta Informaticae, 101, (2010) 143-155.
- [10] M. L. Thivagar, C. Richard, N. R. Paul, Mathematical innovations of a modern topology in medical events, Internat. J. Inform. Sci. 2(4) (2012) 33-36.
- [11] Wakulicz-Deja, A. and Paszek, P., Diagnose progressive encephalopathy applying the rough set theory. International Journal of Medical Informatics, 46; (1997) 119-127.
- [12] Z. Pawlak, Rough sets and intelligent data analysis, Inform. Sci. 147 (2002) 1-12.
- [13] Z. Pawlak, A. Skowron, Rudiments of rough sets, Inform. Sci. 177 (2007) 3-27.

- [14] A. F. Özcan, N. Bağirmaz, H. Taşbozan, İ. İçen, Topologies and approximation operators induced by binary relations, IECMSA-2013, Sarajevo, Bosna and Herzegovina, August, 2013.
- [15] A. A. Allam, M. Y. Bakeir, E. A. Abo-Tabl, Some methods for generating topologies by relations, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 31(1) (2008) 35–45.
- [16] E.F. Lashin et al, Rough set theory for topological spaces, Int. J. Approx. Reason. 40 (2005) 35–43.
- [17] Z. Li, T. Xie, Q. Li, Topological structure of generalized rough sets, Comput. Math. with Appl. 63 (2012) 1066–1071.
- [18] Z. Pei, D. Pei , L. Zheng, Topology vs generalized rough sets, Int. J. Approx. Reason. 52 (2011) 231–239.
- [19] A.S. Salama, M.M.E. Abd El-Monsef, New topological approach of rough set generalizations, Internat. J. Computer Math. Vol. 8, No.7 (2011) 1347-1357.
- [20] A. Skowron, On the topology in information systems, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 36 (1988) 477–480.
- [21] M. Vlach, Algebraic and topological aspects of rough set theory, Fourth International Workshop on Computational Intelligence Applications, IEEE SCM Hiroshima Chapter, Hiroshima University, Japan, December, 2008.
- [22] A. Wiweger, On topological rough sets, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 37 (1988) 51–62.
- [23] T. Iwinski, Algebraic approach to rough sets, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987) 673–683.
- [24] Z. Bonikowaski, Algebraic structures of rough sets, in: W.P. Ziarko (Ed.), Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp. 242–247.
- [25] J. Pomykala, J. A. Pomykala, The stone algebra of rough sets, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 36 (1998) 495–508.
- [26] N. Kuroki, P. P. Wang, The lower and upper approximations in a fuzzy group, Information Sciences 90 (1996) 203–220.

- [27] W. Cheng, Z. Mo, J. Wang, Notes on “the lower and upper approximations in a fuzzy group” and “rough ideals in semigroups”, *Inform. Sci.* 177 (2007) 5134-5140.
- [28] F. Li, Z. Zhang, The homomorphisms and operations of rough groups, *The ScientificWorld Journal*, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/507972>, Volume 2014.
- [29] C. Z. Wang, D. G. Chen, A short note on some properties of rough groups, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 431-436.
- [30] A. F. Özcan, N. Bağırmar, Direkt çarpım gruplarında yaklaşımlı alt gruplar, 26. Ulusal matematik sempozyumu, Dicle Ü., Diyarbakır, Eylül 2013.
- [31] Z. Wang, L. Shu, The lower and upper approximations in a group, *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 6 (2012) 158-162.
- [32] C. Wang, D. Chen, Q. Hu, On rough approximations of groups, *Int. J. Mach. Learn. & Cyber.* DOI 10.1007/s13042-012-0108-6, Springer-Verlag, 2012.
- [33] R. Biswas, S. Nanda, Rough groups and rough subgroups, *Bull. Polish Acad. Sci. Math* 42 (1994) 251–254.
- [34] D. Miao, S. Han, D. Li, and L. Sun, Rough group, rough subgroup and their properties, D. Ślezak et al. (Eds.): *RSFDGrC 2005*, LNAI 3641, pp. 104–113, 2005.© Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [35] Y. H. Yan, J. P. Li, D. S. Wang, Rough invariant subgroup’s properties and rough quotient group, *Apperceiving Computing and Intelligence Analysis*, IEEE, 2008.
- [36] N. Kuroki, Rough ideals in semigroups, *Inform. Sci.* 100 (1997) 139–163.
- [37] B. Davvaz, Roughness in rings, *Inform. Sci.* 164 (2004) 147–163.
- [38] B. Davvaz, M. Mahdavi pour, Roughness in modules, *Inform. Sci.* 176 (2006) 3658-3674.
- [39] J. Jarvinen, Properties of rough approximations, *J. Adv. Comput. Intel. and Intelligent Inform.* Vol.9 No.5 (2005) 502-505.
- [40] J. Jarvinen, On the structure of rough approximations, *Fund. Inform.* 53 (2002) 135-153.
- [41] M. Kondo, On the structure of generalized rough sets, *Inform. Sci.* 176 (2006) 589–600.

- [42] Y.Y. Yao, Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets, Inform. Sci. 109 (1998) 21- 47.
- [43] D. Dubois, H. Prade. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, International Journal of General Systems 17 (1990) 191–209.
- [44] G. Liu a, W. Zhu, The algebraic structures of generalized rough set theory, Information Sciences 178 (2008) 4105–4113.
- [45] W. Zhu, Generalized rough sets based on relations, Information Sciences 177 (22) (2007) 4997–5011.
- [46] L. Yang, L. Xu, Algebraic aspects of generalized approximation spaces, International Journal of Approximate Reasoning 51 (2009) 151–161.
- [47] F.Çallıalp, Cebir, Sakarya University Press, 1995.
- [48] Pontryagin, Lev S., Topological groups , Princeton Univ. Press,1958 (Translated from Russian).
- [49] H. Aktaş, N. Çağman, Bulanık ve yaklaşımlı kümeler, Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Journal of Arts and Sciences, (Mayıs 2005) 13-25.

ÖZGEÇMİŞ

Nurettin Bağırılmaz, 1979 yılında Diyarbakır' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Diyarbakır' da tamamladıktan sonra 1996 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2001 yılında mezun oldu. 2003 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına kayıt yaptırdı ve 2006 yılında mezun oldu. 2001- 2010 yılları arasında MEB'e bağlı çeşitli lise türlerinde matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2010 yılından beri Mardin Artuklu Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.

Kabul edilen yayınlar:

1. A. Fatih Özcan and Nurettin Bağırılmaz, Comparison of near sets by means of a chain of features, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Doi: 10.15672/HJMS.20154512480.
2. Taşbozan, H., İçen, İ., Bağırılmaz, N., Özcan, A., Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces, Fund. Informaticae (2014) to appear.

Sempozyumlar:

1. A. F. Özcan, N. Bağırılmaz, H. Taşbozan, İ. İçen, Topologies and Approximation Operators Induced by Binary Relations, IECMSA-2013, Sarajevo, Bosna and Herzegovina, August 2013.
2. A. F. Özcan, H. Taşbozan, N. Bağırılmaz, İ. İçen, Near Soft Sets and Near Soft Topology, IECMSA-2013, Sarajevo, Bosna and Herzegovina, August 2013.
3. A. F. Özcan, N. Bağırılmaz, Direkt çarpım gruplarında yaklaşımlı alt gruplar, 26. Ulusal Matematik Sempozyumu, Dicle Ü., Diyarbakır, Eylül 2013.