



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**TOPOLOJİK SİGMA MODELLERİNDE HEDEF-UZAY
PSÖDO-DUALİTESİ**

Türker Tunay

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Mustafa Sarısaman

Ağustos 2019

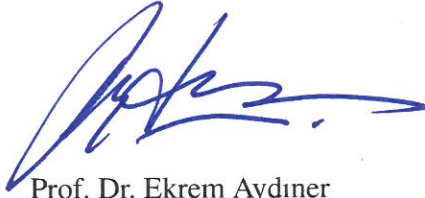
İSTANBUL

Bu çalışma 12.09.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

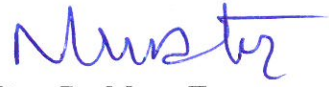
Tez Jürisi



Doç. Dr. Mustafa Sarısan (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Ekrem Aydın
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Doç. Dr. Murat Taş
Altınbaş Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı gerçekleştirmemde katkısı olan Doç. Dr. Mustafa Sarısan'a, bu stresli dönemde bana anlayış gösteren eşime ve çocuklarıma, anneme, geçen sene kaybetdiğim babama, hayatım boyunca bana karşı iyi niyet beslemiş ve bana bir şeyler katanlara, bugün olduğum yere gelmeme katkı sağlamış olan gelmiş geçmiş tüm insanlara, özellikle de bilimi bu noktaya ulaştıran tarihteki tüm bilim insanlarına teşekkür ediyorum.

Ağustos 2019

Türker Tunay



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. ALAN TEORİSİ METODLARI	4
2.1.1. Enerji- Momentum Tensörü	11
3. MALZEME YÖNTEM	13
3.1. SİGMA MODEL SİMETRİLERİ	16
3.1.1. Klasik Sigma Modellerinde Konformal Değişmezlik	16
3.1.2. Sigma Modellerinde Kuantum Konformal Simetri	20
3.1.3. Hilbert Uzayı ve Virasoro Cebiri	22
3.1.4. WZW Modelinde Konformal Simetri	26
4. BULGULAR	30
4.1. KLASİK SİGMA MODELLERİNDE HEDEF-UZAY PSÖDO-DUALİTESİ	30
4.1.1. Sigma Modellerinde Psödo-dualite	31
4.2. TOPOLOJİK SİGMA MODELLERİNDE HEDEF-UZAY PSÖDO-DUALİTESİ	38
4.2.1. BRST Simetrisi	38
4.2.2. Topolojik Sigma Modelleri	42
4.2.3. A-Modeli	45
4.2.4. B-Modeli	47
4.2.5. Kähler Geometrisi ve Topolojik Sigma Modelleri	49
4.3. TOPOLOJİK SİGMA MODELLERİNDE PSÖDO-DUALİTE	52
5. SONUÇ	58

KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	63



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 3.1:** Bu grafik bir sigma modeli eşlemini gösteriyor. ϕ evren yüzeyi Σ 'yı, M hedef uzayına yerleştiriyor ve M üzerindeki yerel koordinatları gösteriyor. Burada τ ve σ , Σ 'nın yerel koordinatlarıdır. 15
- Şekil 4.1:** İki sigma model arasındaki psödo-dualite ilişkisini gösteren grafik. 31



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathcal{L}$	: Lagranjiyan fonksiyonu
∂_μ	: Kısmi türev
$\delta\Phi$	: Φ 'deki değişim
$\det$	: Determinant
Tr	: İz
$\left \frac{\partial x'}{\partial x} \right $	: Jacobian matrisi
S	: Aksiyon fonksiyonu
j^μ	: Akım yoğunluğu
$d^d x$	: d boyutlu integral ölçüsü
Z	: Bölüşüm fonksiyonu
Q_a	: Yük operatörü
$T^{\mu\nu}$	: Enerji-momentum tensörü
g_{ij}	: Metrik tensörü
b_{ij}	: Antisimetrik 2-form alanı
M	: Manifold
H	: Torsiyon
σ^μ	: Evren uzayı koordinatları
Γ_{jk}^i	: Christoffel sembolü
$\text{Ad}(L)$	: L 'nin adjoint operatörü
R_{jkl}^i	: Eğrilik Tensörü
$\tilde{M}$	: Psödo-dual manifold

Kısaltmalar	Açıklama
WZW	: Wess-Zumino-Witten
OPE	: Operatör çarpım açılımı
dim M	: M 'nin boyutu
BRST	: Becchi-Rouet-Stora-Tyutin

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK SİGMA MODELLERİNDE HEDEF-UZAY PSÖDO-DUALİTESİ

Türker Tunay

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Sarısaman

İki boyutlu topolojik sigma modellerinde geçerli psödo-dualite ilişkileri incelenerek, bu tür bir ilişkinin varlığı için yeter ve gereklilik koşulları elde edilmiştir. Bu doğrultuda, konuya hazırlık olarak klasik ve kuantum konformal simetriler gözden geçirilerek bunların etkilerinin oluşturulması düşünülen dualite ilişkilerinde görülmesi sağlanmıştır. Hedef-uzay psödo-dualite ilişkilerini analiz ederken Cartan geometrisinin sonuç üzerindeki etkili gücü kullanılmıştır. Bu amaçla ortonormal düzlem yaklaşımı benimsenmiş ve Cartan düzlemindeki bütün yapılar psödo-dualite dönüşümlerinin etkisini gözlemlemek için evren-yüzeyine geri çekilmiştir. Topolojik bir sigma modeli, iki boyutlu süpersimetrik bir evren-yüzeyinden hedef-uzayı Kähler manifold olan bir uzaya eşlem şeklinde tanımlandığı için teoriyi $N=1$ süpersimetrik şekle indirgeyerek analizimizde ilgili kirallık derecelerini kullandık. Bulduğumuz sonuçlar ışığında, iki topolojik sigma modeli arasındaki psödo-dualite ilişkisi hareket denklemlerinin çözümlerinin birbirlerine eşleştirilmesi ile elde edilmiştir. Bu durumda, psödo-dualite ifadelerinin sadece hedef-uzay torsiyonlarının yok olması ve eğriliklerin de sabit ve birbirinin zıt işaretlisi olması durumunda ortaya çıkabileceğini bulduk. Bu sonuç, psödo-dual modellerin hedef-uzaylarının ancak dual simetrik uzayı olması ile mümkün olmaktadır. Bu da bize klasik anlamda dualite ilişkileriyle bir bağlantısı olabileceğini göstermektedir. Bu tezde gösterildiği gibi, psödo-dualitenin topolojik sigma modellerine uygulanması durumunda, normal bir topolojik alan teorisinde bulunan ayna simetrisi ile eşdeğer sonuçlar elde edilecektir.

Anahtar kelimeler: Sigma modeli, Psödo-Dualite, Topoloji, Kähler Geometrisi, Hedef Uzayı, Simetri, Cartan Yapı Denklemleri, Dual Simetrik Uzaylar



SUMMARY

M.Sc. THESIS

TARGET-SPACE PDEUDO-DUALITY IN TOPOLOGICAL SIGMA MODELS

Türker Tunay

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Doç. Dr. Mustafa Sarısan

We discuss pseudoduality relations applicable to two dimensional topological sigma models and construct necessary and sufficient conditions for their existence. We outline the classical and quantum conformal symmetries for warming-up to the preliminary discussion of the subject, and see their effects in establishing our desired duality expressions. We use the power of Cartan geometry in analyzing our target space pseudoduality expressions. For this purpose, orthonormal coframing approach was adopted and all structures were pulled-back to the world-sheet to observe the impact of pseudo-duality transformations. Since a topological sigma model is based on two dimensional $N = 2$ supersymmetric world sheet which is mapped to the Kähler manifolds on target space, we reduced our theory to the $N=1$ supersymmetric one and use the corresponding conventions in the relevant chirality. In view of our findings, we show that pseudoduality between two topological sigma models could be established by means of the solutions of equations of motions which are mapped to each other. We find out that pseudoduality expressions exist only if the corresponding torsions of the target spaces vanish, and curvatures are constant and opposite to each other. This result amounts that target spaces of the pseudodual models are dual symmetric spaces which are remarkable in the sense that this transformation is geometrically produces the classical duality relations in the literature. The specialty of pseudoduality applicable to the topological sigma models appears in the equality of pseudoduality relations to the mirror symmetry in regular topological field theory.

Keywords: Sigma models, Pseudo-Duality, Topology, Kähler Geometry, Target space, Symmetry, Cartan Structure Equations, Dual Symmetric Spaces



1. GİRİŞ

Simetri kavramı fiziksel teorilerin anlaşılmasında oldukça önemli bir role sahiptir. Tarih boyunca insanoğlunun bilimsel süreç sonunda edindiği birikimle günümüzde artık herhangi bir fiziksel teorinin içeriğinin ne derece önemli olduğu ve neleri kapsadığını görmenin en iyi yolunun teorinin arka planında bulunan simetrilerin meydana çıkarılmasının yattığı bir gerçektir. Dolayısı ile simetrilerin anlaşılması bir teorinin anlaşılmasının en önemli koşuludur. Her fiziksel teoriyi ayrı ayrı irdeleyerek kendine has simetri özelliklerini ortaya koymak mümkün olabildiği gibi aynı zamanda da yorucu bir iştir. Bunun yerine bütün fiziksel teorilerin ortak bir çatı altında toplandığı bir model ele alarak bu modele ait simetrilerin anlaşılması bizler için oldukça faydalı ve kolaylaştırıcı bir zemin hazırlayacaktır. Bütün fiziksel teorileri ortak çatısı altında toplayan bir model olarak sigma modelinin varlığı bizim için simetrilerin anlaşılmasını sağlama açısından bir şanstır.

1960 yılında ilk ortaya çıktığı andan itibaren sigma modeli bütün fiziksel teorilerin temsil edilebildiği bir rol model olarak bizim için oldukça önemli bir çalışma sahası olmuştur. [1] Bu yüzden günümüzde sigma modelinin çalışılmadığı hemen hemen hiç bir fiziksel alan yok gibidir ve başta sicim teorisi, süpersimetrik ve gravite teorileri olmak üzere katıhal, yoğun madde ve kuantum optik teorileri gibi bir çok fizik alanında yoğun uygulamaları vardır. [2–5] Açık bir şekilde anlaşılmaktadır ki sigma modellerindeki simetrilerin anlaşılması söz konusu teorilerin birçok bilinmeyen yönlerinin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Diğer taraftan modern fizik biliminin ilk ortaya çıktığı zamanlardan itibaren her fizikçinin düşüncesi ve ortaya koymaya çalıştığı ideali bütün fiziksel teorilerin tek bir çatı altında toplanabilmesini sağlamaktır. Özellikle 20. Yüzyılın ortalarından itibaren bu konuda yoğun çalışmalar olmuş ancak henüz nihai olumlu bir sonuç elde edilememiştir. Bunun en büyük sebebi de fiziksel teorilerin içerdiği simetri özelliklerinin tam olarak anlaşılamamış olmasıdır. Genel yaygın düşünce şudur ki en son elde edilecek birleştirilmiş bir fiziksel teoride bütün simetrilerin olması gerekmektedir. Bunun için çok sayıda çalışma gerçekleştirilmiş ve bunun neticesinde yeni bir çok fiziksel teoriler ortaya çıkmıştır. Özellikle grup teorisi, süpersimetrik teoriler ve çeşitli dualite ilişkileri bu amaçla öne çıkan örneklerdir.[6, 7]

Bir teoremin sahip olduğu simetri sayısı, teoremin inşa edildiği boyut sayısına bağlı olarak değişmektedir. Simetri sayısının en zengin olduğu boyut sayısı, iki boyutlu uzay zamanda kendini göstermektedir. İki boyutlu uzayda sonsuz sayıda simetrinin var olduğu anlaşılmaktadır. [6, 7] Dolayısı ile zengin simetrinin var olması fiziksel modellerin iki boyutta incelenmesini oldukça popöler hale getirmiştir. O halde iki boyutta tanımlı olan bir fiziksel teoremin sahip olduğu simetriler nelerdir ve bunları nasıl anlayabiliriz? Bunun cevabını bulabilmek için özellikle son 20-30 yıldır teorik fizikçiler oldukça yoğun çalışmalar gerçekleştirmişler ve bu sonsuz sayıda simetrilerin lokal simetriler yoluyla veya dualite ilişkileri yoluyla anlaşılabilceğini düşünmüşlerdir. [6, 7] Dolayısı ile bu amaçla çok sayıda dual simetrik modeller ortaya konulmuştur. Önermiş olduğumuz bu tezde biz de topolojik özelliğe sahip bir sigma modeline ait dualite ilişkilerine değişik bir bakış açısı getirerek sigma modelinin evren-yüzeyinde gerçekleştirilebilen psödo-dualite modeli ortaya koymaktayız. Psödo-dualite ilişkisi bilinen dualite ilişkilerinden oldukça farklı bir anlayışa sahiptir. Normal dualite ilişkileri on-shell ifadelerdir ve standart kanonik formalizme uygunluk sağlarlar. Bu yüzden mevcut teoriye ait Hamiltonian değerini korumaktadır. Bu tür dualite ilişkileri hedef uzayda gerçekleştirilir ve klasik anlamda kanonik dönüşümler şekline indirgenebilmektedirler. Ancak anlaşıldığı kadarıyla bir hedef uzay dualite ilişkisinde, iki farklı manifold üzerinde tanımlanan sigma modelleri aslında bir bütünün parçaları olacak şekilde daha üst çerçevede büyük bir manifoldun iki ayrı parçası gibi davranırlar. Bu sonuç oldukça ilginçtir ve dualite yöntemlerine farklı bir bakış açısı sunmaktadır. [8–13]

Diğer taraftan bir psödo-dualite ilişkisi hedef uzaydan ziyade evren-yüzeyi üzerinde tanımlıdır ve bilinen standart dualite ilişkilerinin aksine Hamiltonian'ı değil stres-enerji tensörünü korur. Bu yüzden bu tür sözde dualite ilişkilerine off-shell dualite ilişkileri denir. [12] Bu yeni dualite yaklaşımı iki boyutta gerçekleştirildiği için özellikle iki boyutta bir fiziksel modelin simetrilerinin daha iyi anlaşılmasını sağlar. Son yapılan çalışmalarla anlaşılmıştır ki bir psödo-dualite ilişkisi aslında bilinen dualite ilişkilerini de içinde barındıran bir üst çatı modeli kurar. Bu şekilde bilinen dualite ilişkilerini psödo-dualite ilişkileri cinsinden ifade etmek mümkündür. Bunun en iyi bilinen örneği T-dualitenin psödo-dualite ilişkilerine izometri koşulunun koyulması ile elde edilebildiğinin gösterilmesidir.[14]

Bu tezde bir topolojik sigma modeli ele alarak bu modeldeki psödo-dualite ilişkileri ortaya konulmuştur. Topolojik sigma modelleri özünde + ve – burulma yöntemleri ile A-

ve B-modeli şekline indirgenerek bu iki farklı modeller arasında ayna simetrisinin var olduğu görülmüştür. Tezimizde bulduğumuz sonuçlarla A- ve B-modeli arasındaki bu ayna simetrisinin psödo-dualite ilişkileri ile kolaylıkla anlaşılması amaçlanmıştır. Bu şekilde iki boyutta ortaya çıkan sonsuz sayıda simetrinin daha iyi anlaşılmasına önemli bir katkı sağlanmış olacaktır.



2. GENEL KISIMLAR

2.1. ALAN TEORİSİ METODLARI

Bu bölümde, alan teorisinin simetrilerin önemini vurgulayan temel konularını gözden geçireceğiz. Toplu olarak Φ ile gösterilen alan kümesini göz önünde bulunduralım. x ile gösterilen, Φ 'ye ve Φ 'nin birinci türevlerine bağlı olan ve d boyutlu bir uzay-zaman üzerinde tanımlanan aksiyon fonksiyoneli şu şekilde gösterilir:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (2.1)$$

Uzay-zamandaki bir dönüşüm, hem uzay-zaman koordinatlarına, hem de alanlara aşağıdaki kurallar doğrultusunda etki eder:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x') \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bu dönüşümde yeni pozisyon x' , x 'in bir fonksiyonu olur ve x' 'ye bağlı olan yeni alan Φ' de x 'e bağlı olan alan Φ alanının bir fonksiyonu olur.

$$\Phi'(x) = \mathcal{F}(\Phi) \quad (2.3)$$

Uzay-zamandan, bir M hedef-uzayına ($\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}$) eşlemi ile tanımlı olan Φ , (2.3) dönüşümünde iki şekilde etkilenir: Bunlar ilk olarak $\Phi' = \mathcal{F}(\Phi)$ fonksiyonel değişiminden dolayı, ikinci olarak da bağımsız değişken $x \rightarrow x'$ değişiminden dolayıdır.

Aksiyon fonksiyonelinin (2.3) dönüşümü etkisiyle değişimi, $\Phi(x)$ fonksiyonun yerine $\Phi'(x)$ fonksiyonun yerleştirilmesi ile elde edilir (Burada her iki durumda da bağımsız değişkenin x olduğuna dikkat edilmesi gerekir.). Bir başka deyişle, yeni aksiyon şöyle olur:

$$\begin{aligned}
 S' &= \int d^d x \mathcal{L}(\Phi'(x), \partial_\mu \Phi'(x)) \\
 &= \int d^d x' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial'_\mu \Phi'(x')) \\
 &= \int d^d x' \mathcal{L}(F(\Phi(x)), \partial'_\mu F(\Phi(x))) \\
 &= \int d^d x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L} \left(F(\Phi(x)), \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \partial_\nu F(\Phi(x)) \right)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bu denklem, yeni dönüştürülmüş aksiyonu genel olarak gösteriyor. Sonsuz küçüklikteki dönüşümün aksiyon üzerindeki etkisini görmek için aşağıdaki dönüşümleri kullanıyoruz:

$$\begin{aligned}
 x'^\mu &= x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \\
 \Phi'(x') &= \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada ω_a birinci dereceye kadar sınırlanmış sonsuz küçüklikteki parametreler kümesidir. Aynı noktadaki sonsuz küçüklikteki dönüşüm için, bir simetri dönüşümünün operatörü G_a 'yı şöyle tanımlarız:

$$\delta \Phi(x) := \Phi'(x) - \Phi(x) := i \omega_a G_a \Phi(x) \tag{2.6}$$

Bunu göz önünde bulundurarak ω_a birinci dereceye kadar olmak üzere, bu tanımlı (2.5) denklemi ile bağdaştırabiliriz:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x') &= \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x) \\
&= \Phi(x') - \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi(x') + \omega_a \frac{\delta F(x')}{\delta \omega_a}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dolayısıyla, jeneratörün açık ifadesi şöyle olur:

$$iG_a \Phi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi(x') - \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \tag{2.8}$$

(2.5) denkleminde faydalanarak (2.4)'te verilen sonsuz küçüklikteki aksiyon üzerindeki etkisini bulabiliriz:

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu + \omega_a \left(\frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right) \tag{2.9}$$

Bu matrisin determinantı, yukarıdaki formüle göre birinci dereceye göre hesaplanabilir:

$$\det(1 + E) \approx (1 + \text{Tr } E) \quad (\text{küçük olan herhangi bir } E \text{ matrisi için}) \tag{2.10}$$

Buradan şunu elde ederiz:

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \approx 1 + \partial_\mu (\omega_a) \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \tag{2.11}$$

Jacobian matrisinin tersi, birinci dereceye kadar basitçe dönüştürme parametresinin işaretini değiştirerek elde edilebilir.

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu - \partial_\mu (\omega_a \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a}) \quad (2.12)$$

Dönüştürülmüş S' aksiyonu, önceki adımların yardımıyla şöyle yazılabilir:

$$S' = \int d^d x \left[1 + \partial_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \omega_a} \right] \times \mathcal{L} \left[\Phi + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}, \left[\delta_\mu^\nu - \partial_\mu \left(\omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \right) \right] \left[\partial_\nu \Phi + \partial_\nu \left(\omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \right) \right] \right] \quad (2.13)$$

Aksiyonun $\delta S = S' - S$ değişiminin ω_a türevi içermeyen terimleri içerdiğini görüyoruz. Eğer aksiyon, yüksel dereceli dönüşümler altındaysa, bunların etkisinin önemsiz olduğunu görüyoruz. O zaman δS , ω_a 'nın sadece Lagrangianın genişletilmesiyle bulunan birinci türevlerini içerir. Böylece:

$$\delta S = - \int dx j_a^\mu \partial_\mu \omega_a \quad (2.14)$$

Burada j_a^μ şöyle tanımlanmıştır:

$$j_a^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \frac{\delta x^\nu}{\delta \omega_a} - \frac{\delta L}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \quad (2.15)$$

j_a^μ , sonsuz küçüklükteki dönüşümle (2.5) bağlantılı akım olarak adlandırılır. Parçalara göre integral aldığımızda şu sonucu elde ederiz:

$$\delta S = - \int d^d x \partial_\mu j_a^\mu \partial_\mu \omega_a \quad (2.16)$$

Buradan Noether teoremini elde ederiz: Eğer alan konfigürasyonu klasik hareket denklemlerine uyuyorsa, aksiyon alanlardaki değişimlerden etkilenmez ve sabittir. Başka bir deyişle, δS tamamen uzay-zamana bağlı olan $\omega_a(x)$ parametreleri uygulandığında yok olmalıdır. Bu bizi korunum yasasına götürür:

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (2.17)$$

Kelimelerle ifade edecek olursak, bütün sürekli simetriler (2.5) denkleminde verilen ve klasik fizikteki anlamıyla korunumlu bir akımın varlığına işaret eder.

j_a^μ ile bağlantılı korunumlu yük olan j_a^0, j_a^μ 'nin zaman bileşenidir ve $d^{d-1}x$ tamamen uzaysal integrasyon ölçüsü olmak üzere

$$Q_a = \int d^{d-1}x j_a^0 \quad (2.18)$$

Klasik fiziğe göre, sürekli bir simetri altındaki aksiyondaki değişim, bir korunumlu akımın varlığını gösterir. Kuantum seviyesinde, ana çalışma konusu korelasyon fonksiyonlarıdır ve sürekli simetriler bize farklı farklı korelasyon fonksiyonları ile bağlantılı sınırlamalar getirir.

Şimdi yine denklem (2.2)'de gösterilen tipteki bir dönüşüm altında değişmez olan bir $S(\Phi)$ aksiyonuna sahip olan bir Φ alanları kümesini düşünün. Z vakum fonksiyoneli olmak üzere, genel korelasyon fonksiyonunu göz önüne alalım: ¹

$$\langle \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\Phi] \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) e^{-S[\Phi]} \quad (2.19)$$

Aksiyon ve fonksiyonel integrasyonun ölçüsünün (2.2) dönüşümünün simetrisinin sonucu; F alanın dönüşüm altındaki fonksiyonel değişimini gösteriyorsa denklem (2.3)'te olduğu gibi,

¹ Burada korelasyon fonksiyonunun içindeki alanlar zaman-sıralıdır, bundan dolayı üstü kapalı bir şekilde zaman-sıralayıcı operatör gereklidir. Zaman sıralaması göreceli olarak küçük zamanların sağa gelmesini gerektirir.

aşağıdaki gibi olur:

$$\langle \Phi(x'_1) \dots \Phi(x'_n) \rangle = \langle F(\Phi(x_1)) \dots F(\Phi(x_n)) \rangle \quad (2.20)$$

Bu eşitliğin gösterimi doğrudan bu şekilde yapılabilir:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x'_1) \dots \Phi(x'_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [d\Phi] \Phi(x'_1) \dots \Phi(x'_n) e^{S[\Phi]} \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\Phi'] \Phi'(x'_1) \dots \Phi'(x'_n) e^{S[\Phi']} \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\Phi] F(\Phi(x_1)) \dots F(\Phi(x_n)) e^{S[\Phi]} \\ &= \langle F(\Phi(x_1)) \dots F(\Phi(x_n)) \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aksiyonun ve korelasyon fonksiyonun ölçüsünün, dönüşümün simetrileri Ward özdeşlikleri ile ifade edilir. Bunu göstermek için öncelikle sonsuz küçüklikteki dönüşüm, jeneratörler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\Phi'(x) = \Phi(x) - i\omega_a G_a(\Phi(x)) \quad (2.22)$$

Burada, ω_a sonsuz küçüklikteki, sabit parametreleri gösteriyor. (2.19) ile verilen korelasyon fonksiyonunda, şu anda ω_a 'nın bir fonksiyonu olan x 'i kullanarak, yukarıdaki sonsuz küçüklikteki dönüşüm şeklinde fonksiyonel integrasyon değişikliği yapıyoruz. Değişimi denklem (2.16)'da verilen bu aksiyon, yerel bir dönüşüm altında değişmez değildir. Korelasyon fonksiyonundaki alanların $\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)$ dizilimini X ile ve bunların dönüşüm altındaki değişimini δX ile gösterirsek aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\Phi'] (X + \delta X) e^{-S[\Phi] - \int dx \partial_\mu j_a^\mu \omega_a(x)} \quad (2.23)$$

Burada yine fonksiyonel integrasyon ölçüsünün yerel dönüşüm (yani $d\Phi' = d\Phi$ gibi) altında değişmez olduğunu varsayıyoruz. Yukarıdaki denklemi ω_a 'da birinci dereceye kadar genişletirsek aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\langle \delta X \rangle = \int dx \partial_\mu \langle j_a^\mu(x) X \rangle \omega_a(x) \quad (2.24)$$

δX değişimi açıkça şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \delta X &= -i \sum_{i=1}^n (\Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n)) \omega_a(x_i) \\ &= -i \int dx \omega_a(x) \sum_{i=1}^n \{ \Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \} \delta(x - x_i) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Denklem (2.24) sonsuz küçüklükteki $\omega_a(x)$ parametresi için geçerli olduğundan, aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle j_a^\mu(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle = -i \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \langle \Phi(x_1) \cdots G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle \quad (2.26)$$

(2.25)'te verilen Ward özdeşliğinin tüm x_i noktalarını içeren bir uzay-zaman bölgesi üzerinde integralini alıyoruz. Denklemin sol tarafında sıfıra giden bir yüzey integrali elde ederiz:

$$\int_{\Sigma} ds_\mu \langle j_a^\mu(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle \quad (2.27)$$

Hiper-yüzey sonsuza giderken Σ integrali değişmez ve dolayısıyla bu integral sıfır olur. Ayrıca, diverjans $\partial_\mu \langle j_a^\mu X \rangle$, x_i noktasından uzaklaştıkça sıfıra gider ve korelatör $\mu \langle j_a^\mu X \rangle$ hipotez gereği $x \rightarrow \infty$ iken tatmin edici bir hızla sıfıra gider. Denklem (2.26)'nın sağ tarafı için şunu çıkarabiliriz:

$$\delta \langle \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle := -i\omega_a \sum_{i=1}^n \langle \Phi(x_1) G_a \Phi(x_i) \cdots \Phi(x_n) \rangle = 0 \quad (2.28)$$

Diğer bir deyişle, sonsuz küçüklükteki dönüşüm altındaki bir koleratörün değişimi sıfıra gider. Bu aslında basitçe denklem (2.21)'in sonsuz küçüklükteki versiyonudur.

Ward özdeşliği korunumlu yükün, kuantum durumlarının Hilbert uzayındaki simetri dönüşümlerine ait jeneratörü olarak tanımlanmasını sağlar:

$$Q_a = \int d^{d-1}x j_a^0(x) \quad (2.29)$$

Operatör formalizminde şu ifadeyi yazabiliriz:

$$[Q_a, \Phi] = iG_a \Phi \quad (2.30)$$

Bir başka deyişle, korunumlu yük Q_a operatör formalizminde sonsuz küçüklükteki simetrinin jeneratörüdür. Tabii ki, Euclid uzayında özdeşlikler genellikle korunur. Minkovski uzay-zamanını elde etmenin kolay bir yolu, zaman-gibi bir vektör bileşeninin integrasyonu olduğu için, Q 'nun yerine $-iQ$ 'yu koymaktır.

2.1.1. Enerji- Momentum Tensörü

Bu alt bölümde, geçen bölümün genel sonuçlarını bir teorinin değişimine öteleme ve dönmeye (veya Lorentz dönüşümleri) bağlı olarak uygulayacağız. Öteleme değişmezliğiyle bağlantılı olan korunumlu akım, bileşenleri yoğunluk ve akı yoğunluğu olan enerji-momentum tensörüdür. Bu tezde, konformal simetrinin sonuçları, enerji-momentum tensörü ile Ward özdeşlikleri cinsinden ifade edilecektir.

Sonsuz küçüklükteki $x'^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu$ ötelemesi, koordinat ve alanlarda aşağıdaki değişimleri

içerir:

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta \varepsilon^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{\delta \Phi}{\delta \varepsilon^\nu} = 0 \quad (2.31)$$

Sonuç olarak, bu ötelemeyle denk gelen kanonik ve korunumlu akım şöyle olur:

$$T_c^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi \quad (2.32)$$

Burada korunum kuralı $\partial_\mu T_c^{\mu\nu} = 0$ şeklinde olur. Korunumlu yük dört-momentumdur.

$$P^\nu = \int d^{d-1}x T_c^{0\nu} \quad (2.33)$$

Enerji de Hamiltoniye'nin genel tanımındır ve şöyle olur:

$$P^0 = \int d^{d-1}x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - \mathcal{L} \right\} \quad (2.34)$$

O halde, bir P_μ korunumlu yük operatörünün, (2.30) denkleminde göre Öklidyen zamandaki etkisi şöyle olur:

$$[P_\mu, \Phi] = -\partial_\mu \Phi \quad (2.35)$$

Gerçek zamanda bu ilişki, $[P_\mu, \Phi] = -i\partial_\mu \Phi$ şekline dönüşür ki, bu da alışılmış kuantum mekaniğinde momentum ile x 'e bağlı operatörün iyi bilinen komütatörüdür.

3. MALZEME YÖNTEM

Topolojik bir sigma modelini elde almadan önce klasik bir sigma modelini düşünelim. İki boyutlu bir manifold Σ 'dan n boyutlu bir M hedef uzayına tanımlanan bir $\{\phi\}$ eşlemi için iki boyutlu ve lineer olmayan klasik bir sigma modelinin [15] sahip olduğu aksiyon şöyle olur:

$$S = -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{h} [h^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi^i \partial_{\nu} \phi^j g_{ij}(\phi) + \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi^i \partial_{\nu} \phi^j b_{ij}(\phi)] \quad (3.1)$$

Burada M hedef uzayı şu şekilde tanımlı bir eşlem ile de gösterilebilir:

$$\phi : \Sigma \rightarrow M \quad (3.2)$$

ϕ fonksiyonu yerel olarak $\phi^i(\sigma)$ fonksiyonlarıyla tanımlanmıştır ve bu da M 'in ϕ^i reel koordinatlarının Σ 'nın (τ, σ) ile tanımlanan reel koordinatları σ^{μ} 'ya bağlı olmasını gerektirir. Notasyon kolaylığı açısından yunan harflerini evren yüzeyi koordinatları için, latin alfabesi harflerini ise hedef uzay için kullanacağız. i indisi, M 'nin boyut sayısı olan n 'e kadar değer alıyor. Hedef manifold M alan-bağımlı bir metrik olan g ve 2-form potansiyel alanı olan b 'ye sahipken Σ 'nın metriği $h = |det(h_{\mu\nu})|$ iken $h_{\mu\nu}$ 'dür. b potansiyeli sadece yerel olarak tanımladır ve global olarak da 3-form H ile $H = db$ şeklinde tanımlanır. Hareket denklemleri, sadece 3-form alan torsiyonu olan H 'ye bağlı olduğu ile rahatlıkla gösterilebilir ve aşağıdaki şekilde gösterilen denklemle belirgin bir şekilde bulunur:

$$\partial^2 \phi^k = [\epsilon^{\mu\nu} H_{ij}^k - h^{\mu\nu} \Gamma_{ij}^k] \partial_{\mu} \phi^i \partial_{\nu} \phi^j \quad (3.3)$$

Burada, $\partial^2 = \partial^{\mu} \partial_{\mu} = h^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}$ 'dur. Burada sınır terimlerini ihmal ediyoruz. Genel olarak,

$h_{\mu\nu}$ metriğinin Lorentz işareti vardır ve $g_{ij}(\phi)$ ve $b_{ij}(\phi)$ 'nin bileşenleri de reeldir. Bu aksiyonun çevresel integralde (Wick rotasyonu tarafından elde edilen) kullanılan öklidyen versiyonu aşağıdaki gibidir:

$$S = -\frac{1}{4} \int_{\Sigma_E} d^2\sigma \sqrt{h} [h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j g_{ij}(\phi) + i\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j b_{ij}(\phi)] \quad (3.4)$$

Burada $h^{\mu\nu}$ bir öklidyen işaret metriğidir ve Σ_E de Öklidyen evren yüzeyini sembolize eder. b 'yi içeren terim tamamen imajiner olduğu için, aksiyon karmaşık olur. Hem Lorentz hem de Wick-döndürülmüş durum için eğer H bir integral kohomoloji sınıfını temsil eden evrensel-tanımlanmış 3-form $H \in G^3(\mathbb{H})$ ise kuantum teorisi belirgin şekilde tanımlanmış olur. Bu, geometrik olarak her koordinat yaması $\mathcal{O}_\alpha$ 'da eğrilik yarıçapı H ve bağlantısı b_α olan bir gerbe olduğunu gösterir. Yol integrali için, eğer $H_2(M)$ sıfırdan farklı ise, H 'yi belirtmek uygun değildir, onun yerine b seçimi yapılmasında fayda vardır. O zaman b 'yi içeren terim

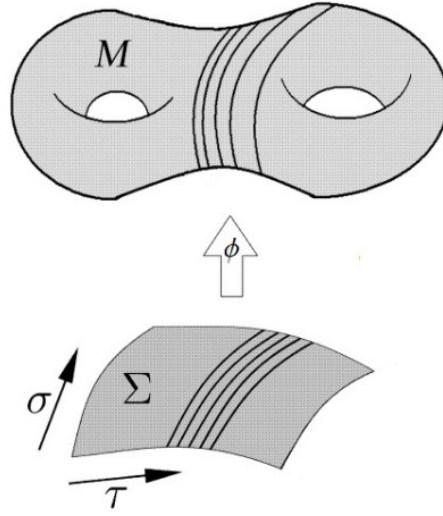
$$e^{2\pi i \int \Phi^*(b)} \quad (3.5)$$

bir gerbenin evren yüzeyinin yerleştirilmesinin üzerindeki holonomiyi tanımlar.

Öklidyen işareti için, $h_{\mu\nu}$ ile birlikte gerçek aksiyon (2.36) bir öklidyen işaret metriği olarak görülebilir. Aksiyonun belirgin bir şekilde tanımlanabilmesi için, b evrensel olarak tanımlanmış bir 2-form olmalıdır. Bununla beraber, alan denklemlerinin belirgin bir şekilde tanımlanabilmesi için H belirgin tanımlanmış bir 3-form olmalı ki herhangi bir 3-form H için bir klasik teori var olabilsin.

Sigma-modellerinin genelde yüksek enerji fiziğinde değerlendirilen diğer QFT'lerden ayrıldığı durumlardan biri, kinetik terimin önündeki katsayının alanlara bağlı olmasıdır. Bu özelliğin, n-noktalı korelasyon fonksiyonlarının veya operatör çarpımı açılımlarının beklenen kısa-mesafe davranışlarını değiştirebilir olması, bu modelleri ilginç kılar.

Sigma modellerinin Weyl değişmezliğiyle birlikte difeomorfizm değişmez olduğu literatürde



Şekil 3.1: Bu grafik bir sigma modeli eşlemeni gösteriyor. ϕ evren yüzeyi Σ 'yı, M hedef uzayına yerleştiriyor ve M üzerindeki yerel koordinatları gösteriyor. Burada τ ve σ , Σ 'nın yerel koordinatlarıdır.

açıkça belirtilmiştir.[16]

Sigma modellerine genellikle G grup manifoldlarında rastlanır. Bu durumda sigma modeli aslında bir Wess-Zumino-Witten Modeli, WZWM,[17] olur ve aksiyon da aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$S = S_0 + \Gamma \quad (3.6)$$

Burada S_0

$$S_0 = -\frac{1}{4} \int d^2\sigma \text{Tr}(g^{-1} \partial^\mu g g^{-1} \partial_\mu g) \quad (3.7)$$

olarak verilir. Γ ise WZ terimidir ve şu şekilde gösterilir:

$$\Gamma = \int d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(\partial^\alpha g^{-1} g \partial^\beta g^{-1} \partial^\gamma g) \quad (3.8)$$

Bu gösterimde Tr , izi, g alanı ise $g : \Sigma \rightarrow G$ ile tanımlanan eşlemlemeyi gösterir. Burada Σ 'yı iki boyutlu Minkowski uzayı ve G 'yi de genellikle Lie grubu içinde değer alan grup değerli hedef uzay manifoldu olarak alıyoruz. Burada S_0 'ın WZW modelinin tanımlandığı bölgenin sınırı üzerinde tanımlandığını ve Γ -teriminin de Wess-Zumino (WZ terimi) olarak bilinen ve kendisine denk gelen balk-uzay kopyasını tanımlıyor. WZ-terimi olmazsa model ölçüye göre değişmez bir model olmayacağından eksik kalacaktır. WZ-terimi ölçüye göre değişmezliği garantilemek ve aşağıda göreceğimiz gibi konformal değişmezlik için de gereklidir. Bu terim modelin geometrisine bağlıdır ve teorisinin içinde bulunduğu uzayın topolojisini belirler.

3.1. SİGMA MODEL SİMETRİLERİ

Bu bölümde iki boyuttaki sigma modellerinin klasik ve kuantum konformal simetrilerini göstereceğiz ve onları WZW sigma modelleri kullanarak Lie cebiri değerli alanlara genelleyeceğiz. Klasik konformal simetriler sadece holomorfik ve antiholomorfik bileşenleri var olan bir stres-enerji tensöründe yer alırken, kuantum konformal simetrileri korelasyon (Green) fonksiyonları ile çıkarılan Ward özdeşliklerinin varlığıyla gösterilir.

3.1.1. Klasik Sigma Modellerinde Konformal Değişmezlik

Klasik simetriler, aksiyon fonksiyoneli üzerinden gösterilir ve bunun sonucunda akımlar [18–21] cinsinden klasik korunumlu nicelikler elde edilir. Bilindiği üzere, iki boyuttaki konformal simetri Cauchy-Riemann şartlarının sağlanıyor olmasını gerektirir ve bizim holomorfik ve antiholomorfik koordinatların [21, 22] ayrılabilme özelliğini kullanabilmemizi sağlar.

Evren yüzeyi düzlemindeki $\pi = (\tau, \sigma)$ koordinatlarını $h_{\mu\nu}$ metrik tensörüyle beraber ele alıyoruz ve $\pi^\mu \rightarrow \xi^\mu(\pi)$ koordinat dönüşümünü yapıyoruz. Böylece, metrik tensörün dönüşümü aşağıdaki gibi olur:

$$h^{\mu\nu} \rightarrow \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial \pi^\alpha} \right) \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \pi^\beta} \right) h^{\alpha\beta}$$

Metrik tensörü, konformal eşlem için aşağıdaki bağıntı yoluyla bir konformal simetri sağlar:

$$h'_{\mu\nu}(\xi) = \Lambda(\pi) h_{\mu\nu}(\pi) \quad (3.9)$$

Bundan dolayı, konformal simetri koşulunun analitiklik için karmaşık Cauchy-Riemann koşulu olarak bilinen sonucu ürettiğini gösterebiliriz:

$$\partial \xi(z, \bar{z}) = 0 \quad (3.10)$$

Burada karmaşık koordinatlar şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} z &:= \tau + i\sigma & \bar{z} &:= \tau - i\sigma \\ \partial_z &:= \frac{1}{2}(\partial_\tau - i\partial_\sigma) & \partial_{\bar{z}} &:= \frac{1}{2}(\partial_\tau + i\partial_\sigma) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Burada, notasyonel uygunluktan dolayı $\partial := \partial_z$ ve $\bar{\partial} := \partial_{\bar{z}}$ şeklinde tanımlanır. Denklem (3.10)'de gösterilen Cauchy-Riemann koşulu bizi konformal simetriye götürür ve bunun üzerinde biraz daha çalışıldığında konformal simetrisinin bir holomorfik eşleme olduğu ortaya çıkar:

$$z \rightarrow \xi(z) \quad (3.12)$$

Sonsuz küçüklükte konformal dönüşüm, aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\xi = z + \varepsilon(z), \quad \bar{\xi} = \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \quad (3.13)$$

Bu sonsuz küçüklükteki eşlemlemeler, $z = 0$ ve $\bar{z} = 0$ etrafında sırasıyla aşağıdaki Laurent açılımlarının yapılmasına imkan sağlar:

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1} \quad \bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \bar{z}^{n+1} \quad (3.14)$$

Bu da bize aşağıdaki jeneratörlerin elde edilmesini sağlar:

$$l_n := -z^{n+1} \partial, \quad \bar{l}_n := -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial} \quad (3.15)$$

Bu jeneratörler, Witt cebiri olarak bilinen aşağıdaki komütasyon şartlarına uyarlar:

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{m+n}, \quad [l_n, \bar{l}_m] = 0, \quad [\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n-m)\bar{l}_{m+n} \quad (3.16)$$

Bu eşitliklerde görüleceği üzere sonsuz sayıda yerel konformal dönüşüm vardır ancak sadece üç tanesi evrensel konformal simetrilere katkı sağlar. Bunlar: $n = (-1, 0, 1)$. $n = -1$ düzlemdeki bilinen dönüşümleri, $(n = 0)$ genel olarak Lorentz rotasyonu ve ölçü dönüşümlerini, ve son olarak $(n = 1)$ özel konformal dönüşümleri üretir. Bu dört dönüşüm konformal grubun altgruplarıdır ve bunlar evrensel konformal simetrilerin işaretleridir.

Şimdi konformal simetri altında bir alanın dönüşümüne geelim. Bir alanın konformal dönüşümden nasıl etkileneceği alanın cinsine bağlıdır. Genel olarak, bir alan u ve $\bar{u}$ konformal boyutları ile gösterilir ve bu boyutlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u := \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad \bar{u} := \frac{1}{2}(\Delta - s) \quad (3.17)$$

Burada Δ alanın ölçüleme boyutudur ve s de onun düzlemsel spinidir. Bizim sigma modellerinde ilgilendiğimiz bir yarı-birincil alan, $z \rightarrow \xi(z)$ ve $\bar{z} \rightarrow \bar{\xi}(\bar{z})$ konformal eşlemleri altında şöyle dönüşür:

$$\phi'(\xi, \bar{\xi}) = \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^{-u} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{u}} (\phi(z, \bar{z})) \quad (3.18)$$

Denklem (3.13)'te gösterilen konformal dönüşüm durumunda bu ifade aşağıdaki şekle döner:

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} &:= \phi'(z, \bar{z}) - \phi(z, \bar{z}) \\ &= -(u\phi\partial\varepsilon + \varepsilon\partial\phi) - (\bar{u}\phi\bar{\partial}\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}\bar{\partial}\phi) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tüm bu işlemler sonucunda, Denklem (3.11)'te tanımlanan karmaşık koordinatlardaki sigma modeli aksiyonu basit formda ² şöyle yazılabilir:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^2z (g_{ij} + b_{ij}) \partial\phi^i \bar{\partial}\phi^j \quad (3.20)$$

Klasik olarak, konformal değişmezlik akımların holomorfik olmasını gerektirir ve bundan dolayı da stres-enerji tensörünün bu aksiyona bağlı olması gerekir[21, 23]. Sigma modeli aksiyonunun Lagranjiyen $\mathcal{L} = (g_{ij} + b_{ij})\partial\phi^i\bar{\partial}\phi^j$ olmak üzere akımlar Denklem (2.15)'ten çıkarılabilir.

² $d^2z, d^2\bar{z} = -\frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z}$ olarak verilmiştir.

Lagranjiyenle^{3,4} bağıntılı enerji-momentum tensörü bileşenleri Denklem (2.32) ile bulunabilir.

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \quad T_{zz} = \frac{1}{2}g_{ij}\partial\phi^i\partial\phi^j \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}g_{ij}\bar{\partial}\phi^i\bar{\partial}\phi^j \quad (3.21)$$

Denklem (3.21)'ün şekli stres-enerji tensörünün sadece holomorfik bileşenlere sahip olduğunu doğruluyor ve böylece sigma modeli aksiyonunun konformal simetrisini ispatlıyor.

3.1.2. Sigma Modellerinde Kuantum Konformal Simetri

Kuantum seviyesindeki konformal simetriler Denklem (2.19)'daki korelasyon (ya da Green) fonksiyonlarıyla tanımlanır. Korelasyon fonksiyonlarındaki korunumlu akımlara karşılık gelen nicelik Denklem (2.26)'da verilen ward özdeşliğidir. Korelasyon fonksiyonlarındaki konformal dönüşüm, Ward özdeşliklerini verir. Bundan dolayı, konformal Ward özdeşliklerinin var olması, sigma modellerindeki kuantum konformal simetrilerin delilidir.

Global konformal simetrilere [21] denk gelen Ward özdeşlikleri şöyledir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\pi^\mu}\langle T_\nu^\mu(\pi)X\rangle &= -\sum_{i=1}^n\delta(\pi-\pi_i)\frac{\partial}{\partial\pi_i^\nu}\langle X\rangle \\ \varepsilon_{\mu\nu}\langle T^{\mu\nu}(\pi)X\rangle &= -i\sum_{i=1}^ns_i\delta(\pi-\pi_i)\langle X\rangle \\ \langle T_\mu^\mu(\pi)X\rangle &= -i\sum_{i=1}^n\delta(\pi-\pi_i)\Delta_i\langle X\rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

Burada X alanlar kümesi, $\varepsilon_{\mu\nu}$ antisimetrik bir tensör ve s_i de ϕ_i alanının spinidir. Karmaşık koordinatlar cinsinden bu özdeşlikler aşağıdaki şekle indirgenirler:

³ Burada kompleks koordinatlardaki metrik tensör eşdeğişimli bazda $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ eşdeğişimli olmayan bazda ise $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

⁴ $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}T_{\alpha\beta}$ eşitliğini kullanarak $T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}T^{zz}$ ve $T_{zz} = \frac{1}{4}T^{\bar{z}\bar{z}}$ olduğu gösterilebilir.

$$\langle T(z)X \rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{z - \xi_i} \partial_{\xi_i} \langle X \rangle + \frac{u_i}{(z - \xi_i)^2} \langle X \rangle \right\} + reg. \quad (3.23)$$

$$\langle \bar{T}(\bar{z})X \rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\bar{z} - \bar{\xi}_i} \partial_{\bar{\xi}_i} \langle X \rangle + \frac{\bar{u}_i}{(\bar{z} - \bar{\xi}_i)^2} \langle X \rangle \right\} + reg. \quad (3.24)$$

Burada $T(z)$ ve $\bar{T}(\bar{z})$ sırasıyla holomorfik ve antiholomorfik normalize edilmiş enerji-momentum tensörleridir ve şöyle tanımlanmışlardır:

$$T := -2\pi T_{zz} \quad \bar{T} := -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \quad (3.25)$$

ve reg de z 'nin ω_i 'de analitik olduğu fonksiyonu gösteriyor.

Bu Ward özdeşlikleri, aynı zamanda konformal simetri altındaki korelasyon fonksiyonunun değişimi de olan bir sözde-konformal Ward özdeşliğinin var olmasına sebep olur. Bu özdeşlik şu şekilde bulunur:

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \, \varepsilon(z) \langle T(z)X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} \, \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z})X \rangle \quad (3.26)$$

Burada $T(z)$ ve $\bar{T}(\bar{z})$ Denklem (3.21)'te daha önce bulunmuştu. Denklem (3.23) ve (3.24) stres-enerji tensörünün operatör değerli alanların açılımıdır yani genişletilmiş halidir. Operatör çarpım alanların açılımını bulmamız gerekiyor. Bu beklenti Ward özdeşlikleri karşılar. İki stres-enerji tensörünün çarpımlarının açılımı şöyle olur:

$$T(z)T(\xi) \sim \frac{c/2}{(z - \xi)^4} + \frac{2T(\xi)}{(z - \xi)^2} + \frac{\partial T(\xi)}{(z - \xi)} \quad (3.27)$$

Burada c merkezi yüküdür ve üzerinde çalıştığımız modele bağlı değer alır (bu yük, bir serbest bozon için 1, bir serbest fermion için $\frac{1}{2}$, ve bir basit hayalet sistem için de -2'dir.). Stres-enerji tensörünün operatör çarpım açılımı (OPE), T 'nin konformal boyutunun $u = 2$ olduğunu gösterir. Alanların OPE'si, Hilbert uzaylarının inşasına yardımcı olduklarından önemlidirler.

3.1.3. Hilbert Uzayı ve Virasoro Cebiri

$\mathcal{H}$ Hilbert uzayının bir bütün iç çarpım uzayı[24] olduğunu biliyoruz. Bu açıkça durum fonksiyonlarının hermitsel çarpımının doğru bir tanımıdır. Konformal simetriyle beraber bir radyal kuantizasyon tarafından tanımlanan bir karmaşık değerli parametre bulunabilir. Bu durumda, uzaysal periyodu L olan sahip olan silindirik bir evren yüzeyi, $t = -\infty$ başlangıç noktası, $t = \infty$ da başlangıç noktasından sozsuz uzaklıktaki bir nokta olacak şekilde tanımlanan karmaşık bir düzleme eşlemlenebilir. Radyal kuantizasyon aşağıdaki eşleme ile ifade edilir:

$$z = e^{\frac{2\pi\xi}{L}} \quad (3.28)$$

Burada $\xi := t + ix$ 'e eşittir ve başlangıç evren yüzeyi Minkowski uzayı olan $(0, t)$ ve (L, t) noktalarının birleştirilmesi ile silindirik bir geometriyi sağlar.

Hilbert uzayını oluşturmak için, Hilbert uzayının kendisine bağlı olarak kurulacağı bir vakum durumuna ihtiyacımız var. Genelde vakum uzayı, etkileşimin olmadığı çok uzak mesafedeki bir alan kullanılarak belirlenir. Bu alan, $t = -\infty$ 'da $\phi_{in} \approx \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x, t)$ asimtotik alan cinsinden gösterilebilir. Hilbert uzay koşullarından dolayı, buna karşılık gelen ve ϕ_{in} 'e hermitsel eşlenikle bağlantılı olan $t = \infty$ 'da $\phi_{out} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t)$ alanı olacaktır. Radyal kuantizasyonda bu alanlar, aşağıdaki alanlara denk gelirler:

$$|\phi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z})|0\rangle \quad |\phi_{out}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \phi(z, \bar{z})|0\rangle \quad (3.29)$$

Hilbert uzayı, $(u, \bar{u})$ boyutlarına sahip konformal alanlar için tanımlanmış ve aşağıda

gösterilen mod açılımlarının mükemmelliği üzerine bina edilmişlerdir:

$$\phi(z, \bar{z}) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} z^{-m-u} \bar{z}^{-n-\bar{u}} \phi_{m,n} \quad (3.30)$$

Burada modlar, aşağıda gösterilen orijinal alanlar cinsinden ifade edilmişlerdir:

$$\phi_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{(m+u-1)} \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{(n+\bar{u}-1)} \phi(z, \bar{z}) \quad (3.31)$$

Burada hermitsel eşleniğin aşağıdaki ifadeyi verdiğini görüyoruz:

$$\phi_{m,n}^\dagger = \phi_{-m,-n} \quad (3.32)$$

Son bölümde stres-enerji tensörünü kullanarak bulduğumuz OPE'nin genel sonucunu anlamamız gerekiyor. Konformal Ward özdeşliğinin OPE cinsinden kendi yapısı içinde konformal simetri içerecek şekilde ifade edildiğini bulmuştuk. Simetriyi açıkça göstermek için, Denklem(3.26) tipindeki integralleri komütasyon bağıntısına çeviriyoruz:

$$[A, B] = \oint_0 d\xi \oint_\xi dz a(z) b(\xi) \quad (3.33)$$

Burada şu tanımlamaları yapıyoruz:

$$A := \oint a(z) dz \quad B := \oint b(z) dz$$

Teorinin arkasındaki simetri özelliklerini yansıtan esas nesneler komütasyon ilişkileridir.

Tüm bu sonuçları birleştirerek konformal Ward özdeşliğini açık şekilde aşağıdaki denkleme dönüştürebiliriz:

$$\delta_\varepsilon \phi(\xi) = -[Q_\varepsilon, \phi(\xi)] \quad (3.34)$$

Burada konformal yükü aşağıdaki gibi tanımladık:

$$Q_\varepsilon := \frac{1}{2\pi i} \oint dz \, \varepsilon(z) T(z) \quad (3.35)$$

Enerji-momentum tensörlerinin mod-açılımı aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n & L_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \, z^{n+1} T(z) \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n & \bar{L}_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \, \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Burada konformal boyutun 2 olduğunu varsaydık. L_n ve $\bar{L}_n$ enerji-momentum tensörlerinin mod operatörleridirler ve yerel konformal dönüşümler üretirler. Bu mod operatörlerine ait komütasyon ilişkileri, klasik fizikteki karşılıkları olan l_n ve l_m ile c haricinde benzerdir ve şöyledir:

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

c burada teorinin merkezi yüküdür. Bu komütasyon ilişkilerine Virasoro cebiri adı verilir.

Tüm bu yapılar Hilbert uzayı oluşturmak üzere birleştirilebilirler. Öncelikle aşağıdaki koşulları sağlamak şartıyla, $z, \bar{z} \rightarrow 0$ iken $T(z)|0\rangle$ ve $\bar{T}(\bar{z})|0\rangle$ 'ın iyi tanımlanmış olduğu gerçeğine dayanarak vakum durumu $|0\rangle$ 'ı içeri koyarak temel durumun varlığını garantiye alırız.

$$L_n|0\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{L}_n|0\rangle = 0 \quad n \geq -1 \text{ için.} \quad (3.38)$$

Asıl alanlar, vakuma etki ettiklerinde asimtotik durumlar, Hamiltoniyeinin öz durumları oluştururlar. Bundan dolayı, asimtotik durumu, Hamiltoniyeinin öz durumu olarak tanımlayabiliriz:

$$|u, \bar{u}\rangle := \phi(0,0)|0\rangle$$

Böylece şğıdaki denklemlere ulaşırız:

$$L_0|u, \bar{u}\rangle = u|u, \bar{u}\rangle \quad \bar{L}_0|u, \bar{u}\rangle = \bar{u}|u, \bar{u}\rangle$$

Benzer şekilde şu durum oluşur:

$$L_n|u, \bar{u}\rangle = 0 \quad \bar{L}_n|u, \bar{u}\rangle = 0 \quad \text{eğer } n > 0 \text{ ise}$$

Temel durumdan farklı durumlar, yani uyarılmış durumlar, temel duruma merdiven operatörü etki ettirilerek belirlenebilir. Bu durumda komütasyon bağıntısı aşağıdaki şartı sağlamalıdır:

$$[L_0, \phi_m] = [n(u-1) - m] \phi_{n+m} \quad (3.39)$$

Buradan şunu anlıyoruz: ϕ_m operatörü $\text{ad}L_0$ 'ın öz durumlarını artırıyor veya azaltıyor. Benzer şekilde L_{-m} jeneratörü de konformal boyutu Virasoro cebirine göre yükseltiyor:

$$[L_0, L_{-m}] = mL_{-m} \quad (3.40)$$

Böylece, holomorfik Hilbert uzayının uyarılmış durumlarının temel düzey $|u\rangle$ ⁵ operatörlerinin doğrudan uyarılmasıyla belirlenebileceğini söyleyebiliriz:

$$L_{-k_1} L_{-k_2} \dots L_{-k_n} |u\rangle \quad (1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n) \quad (3.41)$$

Bunun bir sonucu olarak şunu görüyoruz: Konformal simetri de tıpkı uyarılmış kuantum durumları gibi belirli bir formalizm içerisinde aynı kuantum durumlarına uymaktadır. Bu simetrinin klasik kalıplarına da uyar ve Hilbert uzayının inşasında konformal Ward özdeşliklerinin geçerliliğini ispatlar.

3.1.4. WZW Modelinde Konformal Simetri

Geçen bölümün sonucunda ortaya çıkan bilgi, Lie cebiri değerli modelin yani WZW modelinin (Bölüm 2.3) kullanılmasını gerektirmektedir. Konformal simetriyi sağlayan klasik korunumlu akımlar aşağıdaki gibi bulunur:⁶

$$J_z = \partial_z g g^{-1} \quad J_{\bar{z}} = g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (3.42)$$

⁵ Antiholomorfik durumlar için benzer durumlar aynı yöntemle bulunabilirler.

⁶ Kolaylık açısından J_z yerine $J(z)$ ve $\bar{J}_{\bar{z}}$ yerine de $J(\bar{z})$ ifadelerini kullanıyoruz.

Benzer şekilde, akımların tanımı ayrı ayrı aşağıdaki bağıntıyı verir:

$$[J_\mu, J_\nu] + \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = 0 \quad (3.43)$$

Burada akımların, f ve h lie grup değerli alanlar [21, 25] olmak üzere, $g(z, \bar{z}) = f(z)h(\bar{z})$ altında değişmez olduğunu farkediyoruz. Bu akımların klasik konformal simetrileri, hareket denklemlerinin aşağıdaki gibi bulunmasını sağlar:

$$\partial_{\bar{z}}(\partial_z g g^{-1}) = 0 \quad \partial_z(g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) = 0 \quad (3.44)$$

Bu akımların, $g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\Omega^{-1}(\bar{z})$ ile verilen $G(z) \times G(\bar{z})$ simetrilerine sahip olması özellikle önemli bir noktadır. Burada $\Omega(z)(\Omega^{-1}(\bar{z}))$, $z(\bar{z})$ parametrelili bir Lie cebiri değerine sahip bir alandır.

Kuantum konformal simetrisi, konformal Ward özdeşliğinden yola çıkarak yazılabilir. Öncelikle şunu fark ediyoruz:

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = \langle (\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} S) X \rangle \quad (3.45)$$

Sonra da aşağıdaki denklem gelir:

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} S = \frac{i}{4\pi} \oint dz Tr[\varepsilon(z)J(z)] - \frac{i}{4\pi} \oint d\bar{z} Tr[\bar{\varepsilon}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z})]$$

Lie cebiri değerli alanlar J ve ε , $\{t^a\}$ ⁷ temelinde yazılırlarsa:

⁷ $(Tr)(t^a t^b) = 2\delta_{a,b}$ ve $[t^a, t^b] = \sum_c i f_{abc} t^c$ olduğunu görürüz

$$J = \sum_a J^a t^a \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \sum_a \varepsilon^a t^a$$

Böylece Denklem(3.45) istediğimiz hale dönüşür:

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum_a \varepsilon^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum_a \bar{\varepsilon}^a \langle \bar{J}^a X \rangle \quad (3.46)$$

J 'in ε 'a bağlı değişimi şöyle ifade edilebilir: ⁸

$$\delta_\varepsilon J = [\varepsilon, J] - \partial \varepsilon \quad (3.47)$$

Bundan dolayı, akımların OPE'sini yukarıdaki ifadelerle oluşturabiliriz:

$$J^a(Z)J^b(\xi) \sim \frac{\delta_{ab}}{(z-\xi)^2} + \sum_c i f_c^{ab} \frac{J^c(\xi)}{(z-\xi)} \quad (3.48)$$

O zaman bu akımların komütasyon ilişkisi şöyle olur:

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c i f_c^{ab} J_{n+m}^c + n \delta_{ab} \delta_{n+m,0} \quad (3.49)$$

Benzer şekilde, $\bar{J}$ 'lar için de benzer ifadeler yazılabilir (herbirinin üzerine bir bar yerleştirilmiş olarak) ve J ve $\bar{J}$ 'ın komütasyonları da beklendiği gibi 0'dır.

⁸ Bu, $\delta_\varepsilon g = \varepsilon g$ ve $\delta_{\bar{\varepsilon}} = -g\bar{\varepsilon}$ bağıntılarından gelir.

$$[J_n^a, \vec{J}_m^b] = 0 \quad (3.50)$$

Önceki bölümdeki fikirler aynen uygulanarak, bu komütasyon ilişkilerine dayanan bir Hilbert uzayı doğal olarak inşa edilebilir. Burada $n = 0$ durumunun Denklem (3.49)'deki ikinci terimin sıfıra gitmesini sağladığını ve sigma modeline benzer bir sonuç elde edildiğine dikkat edilmelidir. Buradaki ilginç gerçek ise $n = -m$ olmasına sebep olan $n \neq m$ ve $n + m = 0$ durumunda, cebire orta terim katkısının olmasıdır.

4. BULGULAR

4.1. KLASİK SİGMA MODELLERİNDE HEDEF-UZAY PSÖDO-DUALİTESİ

Dualite kelimesinin pek çok anlamı vardır ve fizikte çok önemli bir kavramdır. İki sistemin eşdeğer olduğu anlaşıldığında bu sistemlerin arasında dualite olduğunu söyleriz. Sicim teorisinde, eğer sicimlerin hareket halinde olduğu uzayda kanonik dönüşüm varsa, "hedef uzay dualitesi" terimi kullanılır. Bu dönüşüm hamiltoniyenin varlığını temin eder. Bunun en basit örneği, standart abelyen dualite dönüşümleridir [26, 27].

$$\partial_+ \tilde{\phi} = +\partial_+ \phi \quad (4.1)$$

$$\partial_- \tilde{\phi} = -\partial_- \phi \quad (4.2)$$

Burada ϕ , ışık konisi koordinatlarındaki $\partial_{+-}^2 \phi = 0$ denklemini sağlayan kütesiz serbest skaler alandır. $\partial_{+-}^2 \tilde{\phi} = 0$ dalga denklemini sağlayan $\tilde{\phi}$ 'yi (4.1) ve (4.2) dualite dönüşümleri cinsinden inşa edebiliriz. Böylece bu iki teoremin eşdeğer ve birbirine dual olduğunu anlarız. Bundan daha genel bir durum ise Zakharov and Mikhailov [28] tarafından ortaya konulan psödokiral modellerdir. Hedef uzayı bir Lie grubu G olan ve hareket denklemleri $\partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) = 0$ olan bir standart sigma sistemini ele alalım. Eğer bir ϕ Lie cebiri değerli alana sahip bir dual model arıyorsak, dualite dönüşümlerini şöyle yazabiliriz:

$$g^{-1} \partial_\mu g = -\epsilon_\mu^\nu \partial_\nu \phi \quad (4.3)$$

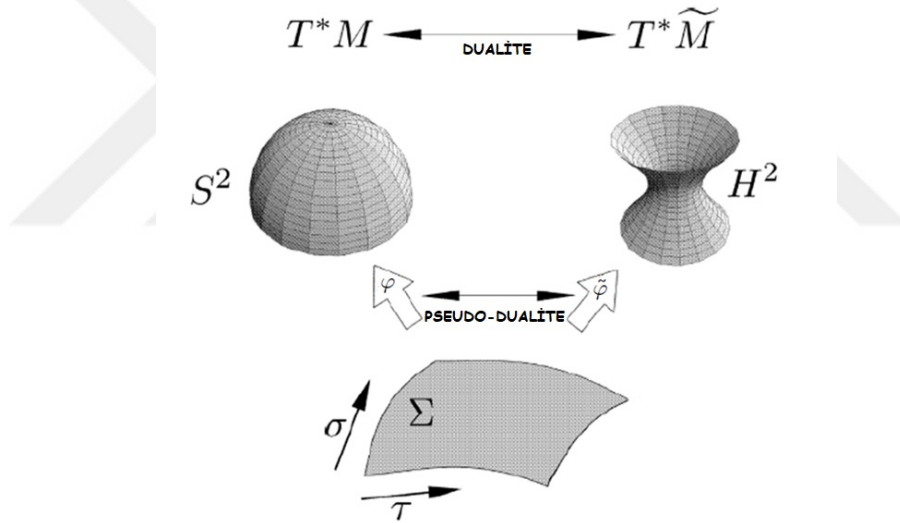
Fakat bu dual modeller kuantum mekaniği açısından birbirlerine eşdeğer değildir, çünkü dualite dönüşümlerinin kanonik dönüşümler olmaları gerekir ⁹ [29, 30], fakat buradaki dönüşüm ise kanonik değildir [31]. Bunun sonrasında, insanlar sicim teorisi tarafından

⁹ Bu bazen "off shell" dualite olarak adlandırılır.

desteklenen bir Poisson-Lie dualitesi ve nonabelyen dualite hakkında geniş bir literatür geliştirdiler.

Alvarez [27, 32] tarafından öne sürülen ve "psödo-dualite"¹⁰ denilen ilginç bir dualite vardır. Alışılmış dualite dönüşümlerinden farklı olarak bu "on-shell dualite" dönüşümü kanonik değildir ve "psödo-dual" modellerin hareket denklemlerini eşlemler. Biz psödo-dual terimini iki farklı model arasında psödo-dualite olduğunda kullanacağız. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta da bu dönüşümün stres-enerji tensörünü korumasıdır [32].

Sigma modellerindeki psödo-dualite dönüşümünde dual modellerin eğrilikleri sabit ve zıt işaretlere sahiplerdir. Bu durumda sigma modelleri arasında psödo-dualite ilişkisinin varlığı, bu modellerin dual simetrik uzaylarda tanımlı olması gerektiği şartını koyar [26, 32]. İki sigma modeli arasındaki psödo-dualite ilişkisini gösteren **Şekil 4.1**'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1: İki sigma model arasındaki psödo-dualite ilişkisini gösteren grafik.

4.1.1. Sigma Modellerinde Psödo-dualite

Bu bölümde uzay-zaman Σ 'yı iki boyutlu bir Minkowski uzayı ve ışık konisi koordinatlarını da $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ olarak alacağız. Hedef uzayı M , metriği g ve iki-formu B olan bir sigma modeli (M, g, B) şeklinde gösterilir ve aşağıdaki Lagranjiyene sahiptir: [32, 33]:

¹⁰ Bu terim ilk defa Curtright ve Zachos tarafından kullanılmıştır [29].

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}g_{ij}(x)\partial_\mu x^i\partial_\mu x^j + \frac{1}{2}B_{ij}(x)\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu x^i\partial_\nu x^j \\
&= \frac{1}{2}g_{ij}(x)(\dot{x}^i\dot{x}^j - x'^i x'^j) + B_{ij}(x)\dot{x}^i x'^j
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Burada $x : \Sigma \rightarrow M$ 'dir ve kapalı 3-form H ise $H = dB$ olarak tanımlanmıştır. Bu teori klasik açıdan konformal değişmezdir. Stres-enerji tensörü de şöyle verilir:

$$\Theta_{\pm\mp} = 0 \quad \Theta_{\pm\pm} = g_{ij}(x)\partial_\pm x^i\partial_\pm x^j \tag{4.5}$$

Burada yapmak istediğimiz, sigma modeli (M, g, B) 'nin hareket deklemlerinin çözümü ile başka bir sigma modeli olan $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{B})$ 'nin de hareket denklemlerinin çözümü arasında bir psödo-dualite dönüşümü yapmaktır. Bunu yapmak için Riemann manifolduna dayalı sigma modelleriyle başlamak yararlı olacaktır. M 'ye dayalı sigma modeli için hareket denklemleri şöyledir:

$$x_{+-}^i = -\frac{1}{2}H_{jk}^i x_+^j x_-^k \tag{4.6}$$

Dualite dönüşümü en iyi şekilde ortonormal eşçerçeve demeti $SO(M)$ kullanılarak formülize edilebilir. Tüm lokal yapıların evrensel yapılara genişletilebiliyor olmasından dolayı [32], biz de evrensel ifadeler kullanacağız. Eşçerçeve demeti $SO(M)$ 'de evrensel tanımlanmış yönlendirilebilen ortonormal eşçerçeveler w^i ve $\tilde{w}^i$ 'yi sırasıyla seçeceğiz ve türevler σ^a cinsinden verildiğinde aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$w^i = x_a^i d\sigma^a \quad \tilde{w}^i = \tilde{x}_a^i d\sigma^a \tag{4.7}$$

Bunlara denk gelen torsiyonsuz antisimetrik Riemann bağlantı 1-formları da w_j^i ve $\tilde{w}_j^i$ olur.

w^i ve w_j^i , $SO(M)$ ve $SO(\tilde{M})$ için lineer olarak bağımsız eşgerçevelemelerdir. Bu evrensel eşgerçevelemeler Cartan yapısal denklemlerini sağlarlar:

$$dw^i = -w_j^i \wedge w^j \quad (4.8)$$

$$dw_j^i = -w_k^i \wedge w_j^k + \frac{1}{2} R_{jkl}^i w^k \wedge w^l \quad (4.9)$$

Burada R_{jkl}^i , M üzerindeki Riemann eğrilik tensörüdür. $\tilde{M}$ üzerinde de benzer denklemler yazılabilir. Uzay-zaman Σ üzerinde psödo-dualite dönüşümü tanımlayacağız ve bunun için gerekli koşulları inceleyeceğiz:

$$X^* w^i = x_a^i d\sigma^a \quad X^* w_j^i = w_{ja}^i d\sigma^a \quad (4.10)$$

Burada Σ 'dan $SO(M)$ 'ya yükseltim, $X : \Sigma \rightarrow SO(M)$ olarak tanımlanmıştır. Bundan dolayı, önceden bahsedilen standart ışık konisi koordinatlarındaki psödo-dualite denklemleri şöyle yazılabilir:

$$\tilde{x}_+(\sigma) = +T_+(x, \tilde{x}) x_+(\sigma) \quad (4.11)$$

$$\tilde{x}_-(\sigma) = -T_-(x, \tilde{x}) x_-(\sigma) \quad (4.12)$$

Burada ortogonal matris değerli fonksiyonlar $T_{\pm} : M \times \tilde{M} \rightarrow SO(n)$ şeklinde verilmiş [34], ve $\dim M = \dim \tilde{M} = n$ 'dir. Bu tezde $T_{\pm} : \Sigma \rightarrow SO(n)$ ve $T_+ = T_- = T$ durumunu ele alacağız. Böylece psödo-dualite denklemleri şöyle olur:

$$\tilde{x}_{\pm}(\sigma) = \pm T(\sigma) x_{\pm}(\sigma) \quad (4.13)$$

x_a^i 'nin eşdeğişimli (covariant) türevi ($\tilde{x}_a^i$ 'ye benzer şekilde) şöyle yazılır:

$$dx_a^i + w_j^i x_a^j = x_{ab}^i d\sigma^b \quad (4.14)$$

Psödo-dualite dönüşümleri hakkında daha fazla bilgi çıkarmak ve gerekli şartları bulmak istediğimizden dolayı, (4.13)'ün dışsal (exterior) türevini alırsak ve şöyle bir sonuç çıkar:

$$d\tilde{x}_\pm^i = \pm(dT_j^i)x_\pm^j \pm T_j^i dx_\pm^j$$

(4.14)'ün eşdeğişimli(covariant) türevi bizi aşağıdaki denkleme götürür:

$$\tilde{x}_{\pm b}^i d\sigma^b - \tilde{w}_j^i \tilde{x}_\pm^j = \pm(dT_j^i)x_\pm^j \pm T_j^i x_{\pm b}^j d\sigma^b \mp T_j^i w_k^j x_\pm^k$$

Şimdi (4.13)'teki psödo-dualite denklemlerini bu denklemin içerisine ekliyerek ortaya çıkan ve terimleri düzenlediğimizde aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\tilde{x}_{\pm b}^i d\sigma^b = \pm(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j)x_\pm^k \pm T_j^i x_{\pm b}^j d\sigma^b \quad (4.15)$$

İntegre edilebilirlik şartlarını açığa çıkartarak hareket denklemlerini kullanmak istediğimiz için, $d\sigma^\pm$ ile kamalıyoruz(wedge) ve şunu elde ediyoruz:

$$\tilde{x}_{\pm\mp}^i d\sigma^\mp \wedge d\sigma^\pm = \pm(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j)x_\pm^k \wedge d\sigma^\pm \pm T_j^i x_{\pm\mp}^j d\sigma^\mp \wedge d\sigma^\pm \quad (4.16)$$

Bu da aşağıdaki iki denkleme ayrışabilir:

$$\tilde{x}_{+-}^i d\sigma^- \wedge d\sigma^+ = +(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) x_+^k \wedge d\sigma^+ + T_j^i x_{+-}^j d\sigma^- \wedge d\sigma^+ \quad (4.17)$$

$$\tilde{x}_{-+}^i d\sigma^+ \wedge d\sigma^- = -(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) x_-^k \wedge d\sigma^- - T_j^i x_{-+}^j d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \quad (4.18)$$

$x_{+-} = x_{-+}$ (ayrıca tildeli hali $\tilde{x}_{+-} = \tilde{x}_{-+}$ olduğunu da) bildiğimiz için, ve $d\sigma^- \wedge d\sigma^+ = -d\sigma^+ \wedge d\sigma^-$ olduğundan, bu denklemlerin sol tarafları birbirine eşitlenerek aşağıdaki sonuç bulunur:

$$(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) x_+^k \wedge d\sigma^+ - (dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) x_-^k \wedge d\sigma^- + 2T_j^i x_{+-}^j d\sigma^- \wedge d\sigma^+ = 0$$

Şimdi, (4.6)'daki hareket denklemlerini kullanarak aşağıdaki denklemleri elde edebiliriz:

$$(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) x_+^k \wedge d\sigma^+ - (dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) x_-^k \wedge d\sigma^- - T_j^i H_{kl}^j x_+^k x_-^l d\sigma^- \wedge d\sigma^+ = 0 \quad (4.19)$$

(-) ve (+)'nın derecelerini değiştirerek ve $w = x_+ d\sigma^+ + x_- d\sigma^-$ eşitliğini kullanarak son terimi ayrıştırarak şunu elde ederiz:

$$(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j - \frac{1}{2} T_j^i H_{kl}^j w^l) x_+^k \wedge d\sigma^+ - (dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j + \frac{1}{2} T_j^i H_{kl}^j w^l) x_-^k \wedge d\sigma^- = 0 \quad (4.20)$$

Bu denklemi daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki tensörleri tanımlıyoruz:

$$U_{k-}^i d\sigma^- = dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j - \frac{1}{2} T_j^i H_{kl}^j w^l \quad (4.21)$$

$$U_{k+}^i d\sigma^+ = dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j + \frac{1}{2} T_j^i H_{kl}^j w^l \quad (4.22)$$

Böylece denklem (4.20) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_{k-}^i x_+^k d\sigma^- \wedge d\sigma^+ - U_{k+}^i x_-^k d\sigma^+ \wedge d\sigma^- = 0 \quad (4.23)$$

Ayrıca, (4.21) ve (4.22) denklemleri aşağıdakileri de sağlar:

$$U_{k+}^i d\sigma^+ + U_{k-}^i d\sigma^- = 2(dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j) \quad (4.24)$$

$$U_{k+}^i d\sigma^+ - U_{k-}^i d\sigma^- = T_j^i H_{kl}^j w^l \quad (4.25)$$

Son olarak (4.25) denkleminden aşağıdakileri de elde edebiliriz:

$$U_{k+}^i d\sigma^+ \wedge d\sigma^- = +T_j^i H_{kl}^j w^l \wedge d\sigma^- \quad (4.26)$$

$$U_{k-}^i d\sigma^- \wedge d\sigma^+ = -T_j^i H_{kl}^j w^l \wedge d\sigma^+ \quad (4.27)$$

Bu sonuçlar (4.23) denkleminde yerine konulursa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$T_j^i H_{kl}^j x_+^k w^l \wedge d\sigma^+ + T_j^i H_{kl}^j x_-^k w^l \wedge d\sigma^- = 0$$

w 'nun tanımını kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir:

$$T_j^i H_{kl}^j x_+^k x_-^l d\sigma^+ \wedge d\sigma^- = 0 \quad (4.28)$$

x_+^k ve x_-^l 'i, herhangi bir σ 'da ve herhangi bir değerde seçebildiğimizden dolayı $H = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu, U_{k+}^i ve U_{k-}^i tensörlerinin (4.26) ve (4.27) denklemlerinden dolayı sıfıra gittiğini gösterir. Böylece (4.21) (veya (4.22)) denklemlerinden şu sonucu çıkarabiliriz:

$$dT_k^i + \tilde{w}_j^i T_k^j - T_j^i w_k^j = 0 \quad (4.29)$$

(4.17) (veya (4.18))'den açıkça görülüyor ki psödo-dual manifold $\tilde{M}$ üzerinde $\tilde{H} = 0$ olur. Bu, bu metodda Ivanov'un [35] neden $\tilde{H} = 0$ durumunu kullandığını açıklıyor. Denklem (4.29)'dan psödo-dualite dönüşümleri üzerine daha çok koşul çıkarmak için bu denklemin integrabilite şartlarını arıyoruz ve bulduklarımızı belirliyoruz. Tekrar dışsal integral alıyoruz ve Denklem (4.29)'u yeniden kullanarak şunu buluyoruz:

$$T_j^i R_{kmn}^j w^m \wedge w^n = \tilde{R}_{jmn}^i T_k^j \tilde{w}^m \wedge \tilde{w}^n \quad (4.30)$$

Burada Cartan'ın ikinci yapısal denklemi (4.9)'u kullanıyoruz. w ve $\tilde{w}$ 'nin tanımlarını psödo-dualite denklemlerinde kullanırsak, eğrilik denklemlerini elde ederiz:

$$T_j^i R_{kmn}^j = -\tilde{R}_{jlp}^i T_k^j T_m^l T_n^p \quad (4.31)$$

Böylece psödo-dualite için yeni bir koşul bulmuş oluyoruz: psödo-dual manifoldları M ve $\tilde{M}$ 'nin eğrilikleri zıt işaretli olmalıdır. Daha fazla koşul bulmak için, (4.31)'in integrabilite kuşullarını aramaya devam ediyoruz ve (4.29)'u tekrar kullanarak şunu elde ediyoruz:

$$T_j^i R_{kmn;q}^j w^q = -\tilde{R}_{jlp;q}^i T_k^j T_m^l T_n^p \tilde{w}^q$$

Burada R 'nin eşdeğişimli türevi $DR_{kmn}^i := R_{kmn;q}^i w^q = dR_{kmn}^i + R_{kmn}^q w_q^i - R_{qmn}^i w_k^q - R_{kqn}^i w_m^q - R_{kmq}^i w_n^q$ şeklinde tanımlanmıştır ve $\tilde{R}$ için de benzer ifade yazabiliriz. Bu denklem aşağıdaki iki bağımsız denklemi verecek şekilde ikiye bölünebilir:

$$\begin{aligned} T_j^i R_{kmn;q}^j &= -\tilde{R}_{jlp;q}^i T_k^j T_m^l T_n^p \\ T_j^i R_{kmn;q}^j &= +\tilde{R}_{jlp;q}^i T_k^j T_m^l T_n^p \end{aligned}$$

Bu denklemler $R_{kmn;q}^j = \tilde{R}_{jlp;q}^i = 0$ sonucunu verir. Yani M ve $\tilde{M}$ manifoldları zıt eğrilikli simetrik uzaylar olmalıdır. Son olarak şu sonucu belirliyoruz: Riemannian manifoldları M ve $\tilde{M}$ 'ye dayanan iki sigma modeli arasında psödo-dualite olabilmesi için 3-formlar H ve $\tilde{H}$ 'nin sıfıra gitmeleri ve hedef uzayların zıt eğrilik değerlerine sahip simetrik uzaylarının olması gerekir. Bu tür uzaylara dual simetrik uzaylar denilir.

4.2. TOPOLOJİK SİGMA MODELLERİNDE HEDEF-UZAY PSÖDO-DUALİTESİ

Sigma modellerinin topolojik doğasını daha iyi anlayabilmek için teoriye özgü temel esasları gözden geçirmeliyiz. Bunun için öncelikle BRST simetrisini ve bunun topolojik sigma modellerindeki rolünü düşünelim. Topolojik alan teorisi literatüründe genel anlamda Witten sınıfı bir model olarak görülen topolojik sigma modelleri, moduli uzayındaki BRST kuantizasyonu ile tipik bir Witten-tipi topolojik alan modeli öncüsüdür.[36–40]

4.2.1. BRST Simetrisi

Topolojik bir alan teorisinin BRST formülasyonu inşa edilirken, toplam alan bileşeni χ ile gösterilir. Buradaki χ , ayar alanları, hayalet (ghost) alanları ve multiplikatörlerden (multipliers) oluşabilmektedir. Her bir lokal ayar simetrisi için nilpotent (sıfırgüçlü) bir Q BRST operatörü oluşturulabilir, yani $Q^2 = 0$ 'dır. Böylece, χ alanlarından oluşmuş

herhangi bir $\mathcal{O}$ fonksiyonelinin varyasyonu

$$\delta \mathcal{O} = \{Q, \mathcal{O}\} \quad (4.32)$$

ile gösterilir. Buradaki parantez sembolü, Q fermiyonik yükü ile dereceli komütatörü temsil etmek için kullanılmaktadır. Toplam kuantum aksiyonu S_q ile gösterilecek olursa, bunu S_c klasik aksiyonu ile ayar sabitleme ve hayalet terimlerden oluşur ve oluşum olarak Q -değişmezdir (invarianttır).

Bu durumda fiziksel Hilbert uzayı, $Q|fiziksel\rangle = 0$ koşulu ile verilir ve $|fiziksel\rangle' = |fiziksel\rangle + Q|\chi\rangle$ şeklindeki bir fiziksel durum herhangi bir $|\chi\rangle$ durumu kullanılarak $|fiziksel\rangle$ durumu ile eşdeğer olarak kullanılabilir. Q ile yok edilen bir duruma Q -kapalı denilirken $Q|\chi\rangle$ şeklindeki bir durum da Q -tam olarak adlandırılır. Bu eşdeğerlik ilişkisi yaklaşımı ile fiziksel bir Hilbert uzayı Q -kohomoloji (eşbenzeti) sınıflarına ayrıştırılabilir. Bunun bir diğer anlamı da bu durumlar Q -tam durumların modülünde Q -kapalıdır. Vakumun BRST değişmezliği, herhangi bir $\mathcal{O}$ fonksiyoneli için $\{Q, \mathcal{O}\}$ vakum beklenen değerini sıfır yapar.

$$\langle 0|\{Q, \mathcal{O}\}|0\rangle := \langle \{Q, \mathcal{O}\} \rangle = 0 \quad (4.33)$$

$\{Q, \mathcal{O}\}$ şeklindeki bir komutatöre bir BRST komütatörü denir. Bütün bu kuramsal oluşum ışığında şimdi farzedelim ki teorimiz bir $g_{\alpha\beta}$ metriğine sahip bir M manifoldu üzerinde tanımlanmış olsun. Bu durumda enerji-momentum tensörü olan $T_{\alpha\beta}$, metriğin sonsuz küçük deformasyonu altında aksiyondaki değişim olarak şu şekilde tanımlanır:

$$\delta_g S_q = \frac{1}{2} \int_M d^n x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \quad (4.34)$$

Son olarak, yol integralindeki fonksiyonel ölçü hem Q -değişmezdir hem de metrikten

bağımsızdır. Bir sigma modelini topolojik yapan kriterler şu şekilde verilebilir:

- (a) Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı Grassmann-dereceli (graded) X alanları olmalıdır, (b) Grassmann derecesine göre tek olan nilpotent (sıfırgüçlü) bir Q operatörü bulunmalıdır, (c) Fiziksel durumlar, Q -kohomoloji sınıfları olarak tanımlanırlar, (d) Q -tam olan bir enerji-momentum tensörü olmalıdır, yani

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, V_{\alpha\beta}(\Phi, g)\} \quad (4.35)$$

Burada $V_{\alpha\beta}$ fonksiyoneli metrik ve alanlara bağlıdır. Buradaki Q operatörüne BRST operatörü denilmektedir ve genel olarak metrikten bağımsızdır. Ancak Q metrikten bağımsız olmasa bile $T_{\alpha\beta}$ tensörü BRST komutatörü olabilmektedir. Eğer bölüşüm fonksiyonu olan Z

$$Z = \int [d\Phi] e^{-S_q}, \quad (4.36)$$

metrikteki sonsuz küçük değişimler altında incelenecek olursa,

$$\begin{aligned} \delta_g Z &= \int [d\Phi] e^{-S_q} \left(-\frac{1}{2} \int_M d^n x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \right), \\ &= \int [d\Phi] e^{-S_q} \left(-\frac{1}{2} \int_M d^n x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} \{Q, V_{\alpha\beta}\} \right), \\ &= \int [d\Phi] e^{-S_q} \{Q, \chi\} = \langle \{Q, \chi\} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

bulunur. Burada $\chi = (-\frac{1}{2} \int_M d^n x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta})$ 'dır. Dolayısı ile vakumun BRST değişmez olması bölüşüm fonksiyonunun metrikten bağımsız olmasını gerektirmektedir. Bunun anlamı bölüşüm fonksiyonunun manifoldun lokal yapısından ziyade global yapısına bağlı olması gerektiğidir, yani Z bir topolojik sabittir. Burada kullanılan topolojik kavramı fiziksel anlamda manifold üzerindeki bütün metrik uzaylarda Z 'nin sabit bir değere eşit olduğu anlamına gelir, yani Z metrikten bağımsızdır. Teorimizde metrikten bağımsız diğer

korelasyon fonksiyonları ile daha zengin bir topolojik sabit kümesine sahip olup olmadığını anlamak için bir gözlenebilirin (observable) vakum beklenen değerini düşünelim:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int [d\Phi] e^{-S_q} \mathcal{O}(\Phi) \quad (4.38)$$

Bu beklenen değerin bir topolojik sabit olması için yeter koşul, yani $\delta_g \langle \mathcal{O} \rangle$ 'nin sıfır olması için aşağıdaki şekilde ilerliyoruz. Öncelikle, $\delta_g \langle \mathcal{O} \rangle$ hesaplanacak olursa

$$\delta_g \langle \mathcal{O} \rangle = \int [d\Phi] e^{-S_q} (\delta_g \mathcal{O} - \delta_g S_q \cdot \mathcal{O}) \quad (4.39)$$

bulunur. Burada $\mathcal{O}$, bazı R 'ler için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\delta_g \mathcal{O} = \{Q, R\}, \quad \{Q, \mathcal{O}\} = 0 \quad (4.40)$$

ve bunlar

$$\delta_g \langle \mathcal{O} \rangle = \langle \{Q, R + \chi \mathcal{O}\} \rangle = 0 \quad (4.41)$$

verir. Farkedileceği üzere, daha önce tanımlamış olduğumuz $V_{\alpha\beta}$ fonksiyoneli açık bir metrik referansı içermesine rağmen BRST komutatör ifadesine girer ve bu yüzden de Z hala metrikten bağımsız olarak elde edilir.

Herhangi bir Witten tipi topolojik alan teorisinde olduğu gibi bir topolojik sigma modelinin toplam kuantum aksiyonu olan S_q da alanlara bağlı belli bir $V(X, g)$ fonksiyoneli ve nilpotent bir Q BRST yükü cinsinden bir BRST komutatörü olarak yazılabilir:

$$S_q = \{Q, V\} \quad (4.42)$$

Bu aksiyona lokal olarak tam bir türev içeren topolojik terimler eklenebilmektedir. Bu terimlerin varlığı ne hareket denklemlerini ne de enerji-momentum tensörünü değiştirir. Sonuç olarak enerji-momentum tensörü

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, (2/\sqrt{g})\delta V/\delta g^{\alpha\beta}\} \quad (4.43)$$

olarak bulunur ve bu da modelimizin topolojik doğasını gösterir.

4.2.2. Topolojik Sigma Modelleri

Bir topolojik sigma modeli, alanları bir Σ Riemann yüzeyinden (evren-yüzeyi (world-sheet)) hedef uzayı M manifolduna olan eşleme ile oluşturulmuş bir topolojik alan teorisidir. Witten'in gösterdiği üzere topolojik sigma modelleri herhangi bir Kähler manifoldu üzerinde tanımlanabilmektedirler [41]. Eğer hedef uzayı Kähler manifoldu ise o zaman topolojik sigma modelleri bir $N = (2, 2)$ süpersimetrik sigma modelinin burulması (döndürülmesi) ile elde edilebilir. Gerçekte ise iki farklı burulma tipi olduğu anlaşılmaktadır ve bu da bize A-modeli ve B-modeli olarak isimlendirilen topolojik alan teorilerini verir.

A-modeli ve B-modeli teoriler, Σ evren-yüzeyi üzerindeki metriğe bağlı değildirler. Ek olarak, A-modeli sadece M 'nin Kähler modülüne bağlı iken B-modeli ise sadece M 'nin karmaşık modülüne bağlıdır. B-modelini ilgilendiren önemli bir gerçekte dört boyutta bilinen kiral anomalisinin bilinen benzerliğinden ötürü B-modeli M 'nin sadece ve sadece bir Calabi-Yau manifoldu olması durumunda iyi tanımlı bir kuantum teorisi olduğudur. A-modelinde böyle bir sınırlama yoktur. Ayna simetrisi, M Calabi-Yau manifoldu üzerinde tanımlı bir B-modelini bir ayna $\tilde{M}$ Calabi-Yau manifoldu üzerinde tanımlı bir A-modeline dönüştürmektedir. Bu tezde göstereceğimiz üzere bu şekilde inşa edilen bir ayna simetrisi aslında iki farklı Calabi-Yau manifoldu üzerinde tanımlı bulunan topolojik sigma modellerinin psödo-dualiteleriyle kolaylıkla bulunabilmektedir. Bu ise psödo-dualitelerin

aslında daha genel bir dualite ilişkileri ortaya koyabileceğini göstermemize yardımcı olacaktır.

İki boyutlu supersimetrik bir sigma modeli $\Phi: \Sigma \rightarrow X$ eşlemi ile verilir, burada Σ bir Riemann yüzeyi ve X ise bir g metriğine sahip Riemann manifoldudur. Σ üzerindeki lokal koordinatları z ve $\bar{z}$, X üzerindeki de Φ^I olarak alırsak Φ lokal olarak $\Phi^I(z, \bar{z})$ fonksiyonları ile ifade edilebilir. K ve $\bar{K}$ sırası ile Σ üzerinde kanonik ve antikanonik çizgi demetleri (yani (1,0) ve (0,1) tipi 1-form demetleri) olsun. TX ise X 'in karmaşıklıklaştırılmış teğet demeti olsun. Modelin fermi alanları Ψ^I_+ , yani $K^{1/2} \otimes \Phi^*(TX)$ 'in bir kesiti, ve Ψ^I_- , yani $\bar{K}^{1/2} \otimes \Phi^*(TX)$ 'in bir kesitidir. Modele ait lagrangian

$$L = 2t \int d^2z \left(\frac{1}{2} g_{IJ}(\Phi) \partial_z \phi^I \partial_{\bar{z}} \phi^J + \frac{i}{2} g_{IJ} \Psi^I_- D_z \Psi^J_- + \frac{i}{2} g_{IJ} \Psi^I_+ D_{\bar{z}} \Psi^J_+ + \frac{1}{4} R_{IJKL} \Psi^I_+ \Psi^J_+ \Psi^K_- \Psi^L_- \right) \quad (4.44)$$

olarak verilir. Burada t kuplaj sabiti ve R_{IJKL} ise X 'in Riemann tensörüdür. $D_{\bar{z}}$, $K^{1/2} \otimes \Phi^*(TX)$ üzerinde tanımlı $\bar{\partial}$ operatörüdür ve TX üzerindeki Levi-Civita bağlantısının geri çekilmesi ile oluşturulur. $K^{1/2}$ 'nin lokal bir holomorfik koordinat seçimi ile

$$D_{\bar{z}} \Psi^I_+ = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Psi^I_+ + \frac{\partial \phi^J}{\partial \bar{z}} \Gamma^I_{JK} \Psi^K_+ \quad (4.45)$$

olduğu gösterilebilir. Burada Γ^I_{JK} , X 'in afin bağlantısıdır. Benzer şekilde D_z ise $\bar{K}^{1/2} \otimes \Phi^*(TX)$ üzerinde tanımlı ∂ operatörüdür. Modelin supersimetrileri aşağıdaki sonsuz küçük dönüşümler yoluyla elde edilirler:

$$\begin{aligned} \delta \Phi^I &= i\varepsilon_- \Psi^I_+ + i\varepsilon_+ \Psi^I_- \\ \delta \Psi^I_+ &= -\varepsilon_- \partial_z \phi^I - i\varepsilon_+ \Psi^K_- \Gamma^I_{KM} \Psi^M_+ \\ \delta \Psi^I_- &= -\varepsilon_+ \partial_{\bar{z}} \phi^I - i\varepsilon_- \Psi^K_+ \Gamma^I_{KM} \Psi^M_- \end{aligned} \quad (4.46)$$

Burada ε_- , $K^{-1/2}$ 'nin holomorfik bir kesitidir, ε_+ ise $\bar{K}^{-1/2}$ 'nin antiholomorfik bir kesitidir. Topolojik sigma modelimizi tanımlayacağımız burulmuş modeller için ek bir yapı tanımlamalıyız, yani $N = 2$ süpersimetriye sahip olabilmek için X 'in bir Kähler manifoldu olması gerekmektedir. Bu durumda X üzerindeki lokal karmaşık koordinatlar ϕ^i ile gösterilirken bunların karmaşık eşlenikleri ise $\phi^{\bar{i}} = \bar{\phi}^i$ olur. X 'in karmaşılaştırılmış teğet demeti $TX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ şeklinde ayrıştırılabilir. Ψ_+ fermi alanının $K^{1/2} \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ ve $K^{1/2} \otimes \Phi^*(T^{0,1}X)$ üzerindeki izdüşümleri sırası ile Ψ_+^i ve $\Psi_+^{\bar{i}}$ şeklinde gösterilecektir. Benzer şekilde Ψ_- alanının $\bar{K}^{1/2} \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ ve $\bar{K}^{1/2} \otimes \Phi^*(T^{0,1}X)$ üzerindeki izdüşümleri de sırası ile Ψ_-^i ve $\Psi_-^{\bar{i}}$ şeklinde gösterilir. Dolayısıyla lagrangian

$$L = 2t \int_{\Sigma} d^2z \left(\frac{1}{2} g_{IJ} \partial_z \phi^I \partial_{\bar{z}} \phi^J + i \Psi_-^{\bar{i}} D_z \Psi_-^i g_{\bar{i}i} + i \Psi_+^{\bar{i}} D_z \Psi_+^i g_{\bar{i}i} + R_{\bar{i}j\bar{j}} \Psi_+^i \Psi_+^{\bar{i}} \Psi_-^j \Psi_-^{\bar{j}} \right) \quad (4.47)$$

şekline dönüşür. Fermiyonik simetrilere olduğu gibi Kähler yapısından dolayı iki kat daha fazla simetrik yapılar meydana gelecektir. Bu durumda burulmuş modelleri elde edebilmek için $K^{-1/2}$ 'nin holomorfik bir kesiti olan sonsuz küçük fermiyonik parametreleri α_- ve $\tilde{\alpha}_-$, $\bar{K}^{-1/2}$ 'nin antiholomorfik bir kesiti olarak α_+ ve $\tilde{\alpha}_+$ alırsak süpersimetrik dönüşüm kuralları

$$\begin{aligned} \delta \Phi^i &= i \alpha_- \Psi_+^i + i \alpha_+ \Psi_-^i \\ \delta \Phi^{\bar{i}} &= i \tilde{\alpha}_- \Psi_+^{\bar{i}} + i \tilde{\alpha}_+ \Psi_-^{\bar{i}} \\ \delta \Psi_+^i &= -\tilde{\alpha}_- \partial_z \phi^i - i \alpha_+ \Psi_-^j \Gamma_{jm}^i \Psi_+^m \\ \delta \Psi_+^{\bar{i}} &= -\alpha_- \partial_z \phi^{\bar{i}} - i \tilde{\alpha}_+ \Psi_-^{\bar{j}} \Gamma_{\bar{j}\bar{m}}^{\bar{i}} \Psi_+^{\bar{m}} \\ \delta \Psi_-^i &= -\tilde{\alpha}_+ \partial_{\bar{z}} \phi^i - i \alpha_- \Psi_+^j \Gamma_{jm}^i \Psi_-^m \\ \delta \Psi_-^{\bar{i}} &= -\alpha_+ \partial_{\bar{z}} \phi^{\bar{i}} - i \tilde{\alpha}_- \Psi_+^{\bar{j}} \Gamma_{\bar{j}\bar{m}}^{\bar{i}} \Psi_-^{\bar{m}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

olur. Böylece burulmuş modeller aşağıdaki gibi elde edilirler:

(i) Ψ_+^i ve $\Psi_+^{\bar{i}}$ 'i $K^{1/2} \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ ve $K^{1/2} \otimes \Phi^*(T^{0,1}X)$ 'nin bir kesiti olarak almak yerine sırası ile $\Phi^*(T^{1,0}X)$ ve $K \otimes \Phi^*(T^{0,1}X)$ 'nin kesitleri olarak alıyoruz. Bu işlemin adına +

burulma adını veriyoruz. Bu durumda lagrangianda Ψ_+ 'i içeren terimler değişmeyecektir (yalnız $D_{\bar{z}}$ uygun demetin $\bar{\partial}$ operatörü olarak yorumlanmalıdır). Alternatif olarak - burulma da Ψ_+^i ve $\Psi_+^{\bar{i}}$ 'in $K \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ ve $\Phi^*(T^{0,1}X)$ 'in kesitleri olarak tanımlanabilmektedir.

(ii) Benzer şekilde Ψ_- 'i ya Ψ_-^i 'yi $\Phi^*(T^{1,0}X)$ 'in bir kesiti ve $\Psi_-^{\bar{i}}$ 'i da $\bar{K} \otimes \Phi^*(T^{0,1}X)$ 'in bir kesiti olarak alarak + burulma ile ya da Ψ_-^i 'yi $\bar{K} \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ 'in bir kesiti ve $\Psi_-^{\bar{i}}$ 'i da $\Phi^*(T^{0,1}X)$ 'in bir kesiti olarak alarak - burulma ile döndürüyoruz. Yine Lagrangian değişmeyecektir.

Eğer sadece Ψ_+ veya Ψ_- döndürülürse + veya - burulma yapıp yapmamak çok önemli olmayacaktır. Her iki seçimde X 'in karmaşık yapısının ters çevrilmesi ile benzer hale gelecektir. Bununla beraber Ψ_+ ve Ψ_- 'in her ikisi de burulursa temelde iki farklı teori ortaya çıkmaktadır. Ψ_+ 'ın + burulması ve Ψ_- 'in - burulması A-modelini oluşturur. Ψ_+ ve Ψ_- 'in her ikisinin de - burulmaları da B-modelini oluşturur. Lokal olarak bakarsak ta K ve $\bar{K}$ önemsiz hale geldiği için burulma herhangi bir farklılaşma oluşturmayacaktır. Dolayısı ile teorinin topolojik doğası global yaklaşımda ortaya çıkmaktadır.

4.2.3. A-Modeli

A-modelinde Ψ_+^i ve $\Psi_-^{\bar{i}}$ 'i $\Phi^*(T^{1,0}X)$ ve $\Phi^*(T^{0,1}X)$ 'in bir kesiti olarak düşünüyoruz. Bunları da $\Phi^*(TX)$ 'in χ kesitinde birleştirmek mümkündür. Böylece $X^i = \Psi_+^i$ ve $X^{\bar{i}} = \Psi_-^{\bar{i}}$ olur. $\Psi_+^{\bar{i}}$ ise Σ üzerinde $(1,0)$ form olarak $\Phi^*(T^{0,1}X)$ 'da değer alır ve $\Psi_z^{\bar{i}}$ ile gösterilir. Benzer şekilde Ψ_+^i ise $\Phi^*(T^{1,0}X)$ 'da değer alan $(0,1)$ formdur ve Ψ_z^i ile gösterilir.

Topolojik dönüşüm kuralları ise $\alpha_+ = \tilde{\alpha}_- = 0$ koyarak ve α_- ile $\tilde{\alpha}_+$ 'yı α ve $\tilde{\alpha}$ olarak isimlendirdiğimiz sabitler seçerek şu şekilde buluruz:

$$\begin{aligned}
 \delta\Phi^i &= i\alpha\chi^i \\
 \delta\Phi^{\bar{i}} &= i\tilde{\alpha}\chi^{\bar{i}} \\
 \delta\chi^i &= \delta\chi^{\bar{i}} = 0 \\
 \delta\Psi_z^{\bar{i}} &= -\alpha\partial_z\phi^{\bar{i}} - i\tilde{\alpha}\chi^{\bar{j}}\Gamma_{\bar{j}\bar{m}}^{\bar{i}}\Psi_z^{\bar{m}} \\
 \delta\Psi_z^i &= -\tilde{\alpha}\partial_z\phi^i - i\alpha\chi^j\Gamma_{jm}^i\Psi_z^m
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Orjinal modelin süpersimetri cebirleri elde edilen bu topolojik dönüşüm kuralları için hareket denklemleri modülünde $\delta^2 = 0$ şekline dönüşür. Basitlik olması açısından $\alpha = \tilde{\alpha}$ seçimi yaparsak ilk iki satırdaki dönüşüm kuralları $\delta\Phi^I = i\alpha\chi^I$ olarak birleştirilebilir. Böylece dönüşüm kurallarını Q BRST operatörü cinsinden ifade edebiliriz ve herhangi bir W alanı için $\delta W = -i\alpha\{Q, W\}$ olarak yazılır. Burada farkedileceği üzere $Q^2 = 0$ 'dır. Bu değişkenler cinsinden Lagrangian kısaca

$$L = 2t \int_{\Sigma} d^2z \left(\frac{1}{2} g_{IJ} \partial_z \phi^I \partial_{\bar{z}} \phi^J + i\Psi_{\bar{z}}^{\bar{I}} D_{\bar{z}} \chi^I g_{\bar{I}\bar{I}} + i\Psi_z^{\bar{I}} D_z \chi^{\bar{I}} g_{\bar{I}\bar{I}} - R_{\bar{I}\bar{I}j\bar{j}} \Psi_z^{\bar{I}} \Psi_{\bar{z}}^{\bar{I}} \chi^j \chi^{\bar{j}} \right) \quad (4.50)$$

olarak elde edilir. Bu lagrangianı Ψ hareket denklemleri ile yok olan modülo terimleri ile ifade etmek mümkündür

$$L = it \int_{\Sigma} d^2z \{Q, V\} + t \int_{\Sigma} \Phi^*(K) \quad (4.51)$$

burada

$$V = g_{i\bar{j}}(\Psi_{\bar{z}}^{\bar{i}}) \partial_{\bar{z}} \phi^j + \partial_z \phi^{\bar{i}} \Psi_z^{\bar{j}} \quad (4.52)$$

Ve

$$\int_{\Sigma} \Phi^*(K) = \int_{\Sigma} d^2z (\partial_z \phi^i \partial_{\bar{z}} \phi^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} - \partial_{\bar{z}} \phi^i \partial_z \phi^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}) \quad (4.53)$$

olarak bulunur ve bu $K = -ig_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}}$ Kähler formunun geri çekilmiş halinin integralidir. Böylece $\int \Phi^*(K)$ integrali sadece K 'nın kohomoloji sınıfı ile Φ eşleminin homotopi sınıfına bağlıdır. A-modelini her yönüyle çok detaylı şekilde incelemek mümkündür ancak psödo-dualitelerin hesaplanması konusundaki amaçlarımız doğrultusunda bu kadar bilgi

bizim için yeterlidir.

4.2.4. B-Modeli

Benzer mantıkla B-modelini inşa edelim. Buna göre $\Psi_{\pm}^{\bar{i}}$, $\Phi^*(T^{0,1}X)$ 'in kesitleri iken Ψ_+^i , $K \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ 'ın bir kesiti ve Ψ_-^i ise $\bar{K} \otimes \Phi^*(T^{1,0}X)$ 'ın bir kesiti olur. Bu durumda şu tanımlamaları yapmak uygun olacaktır:

$$\begin{aligned}\eta^{\bar{i}} &= \Psi_+^{\bar{i}} + \Psi_-^{\bar{i}} \\ \theta_i &= g_{i\bar{i}}(\Psi_+^{\bar{i}} + \Psi_-^{\bar{i}})\end{aligned}\tag{4.54}$$

Aynı zamanda $\Psi_{\pm}^i$ alanlarını da $\Phi^*(T^{0,1}X)$ 'da değerler alan 1-form ρ çatısı altında birleştirebiliriz. Böylece ρ 'nun $(1,0)$ kısmı $\rho_z^i = \Psi_+^i$ olurken $(0,1)$ kısmı ise $\rho_{\bar{z}}^i = \Psi_-^i$ olur. Süpersimetri dönüşüm kurallarına gelecek olursak $\alpha_{\pm} = 0$ koyarak $\bar{\alpha}_{\pm}$ değerlerini sabit seçiyoruz. Bu sabitleri ise basit olması açısından $\bar{\alpha}_+ = \bar{\alpha}_- = \alpha$ olarak alalım. Böylece dönüşüm kurallarımız

$$\begin{aligned}\delta\Phi^i &= 0 \\ \delta\Phi^{\bar{i}} &= i\alpha\eta^{\bar{i}} \\ \delta\eta^{\bar{i}} &= \delta\theta_i = 0 \\ \delta\rho^i &= -\alpha\delta\phi^i\end{aligned}\tag{4.55}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan anlaşılacağı üzere BRST operatörümüz yine $\delta(\dots) = -i\alpha\{Q, \dots\}$ olarak tanımlanır ve bu da hareket denklemleri modülünde $Q^2 = 0$ özdeşliğine uyar. Lagrangian ise

$$L = t \int_{\Sigma} d^2z (g_{IJ} \partial_z \phi^I \partial_{\bar{z}} \phi^J + i\eta^{\bar{i}} (D_z \rho_z^i + D_{\bar{z}} \rho_z^i) g_{i\bar{i}} + i\theta_i (D_{\bar{z}} \rho_z^i + D_z \rho_z^i) + R_{i\bar{i}j\bar{j}} \rho_z^i \rho_z^j \eta^{\bar{i}} \theta_k g^{k\bar{j}})\tag{4.56}$$

ifadesine dönüşür. Elde ettiğimiz bu Lagrangian'ın topolojik karakterini görmek için şu şekilde yazıyoruz:

$$L = it \int \{Q, V\} + tW \quad (4.57)$$

burada V ve W fonksiyonellerimiz

$$V = g_{i\bar{j}}(\rho_z^i \partial_{\bar{z}} \phi^{\bar{j}} + \rho_{\bar{z}}^i \partial_z \phi^{\bar{j}}) \quad (4.58)$$

$$W = \int_{\Sigma} (-\theta_i D\rho^i - \frac{i}{2} R_{i\bar{i}j\bar{j}} \rho^i \wedge \rho^{\bar{j}} \eta^{\bar{i}} \theta_k g^{k\bar{j}}) \quad (4.59)$$

olarak bulunur. Bu ifadelerdeki D notasyonu Σ üzerinde tanımlı dış (exterior) türevidir (yani X 'in Levi-Civita bağlantısı geri çekilir ve $\Phi^*(T^{1,0}X)$ 'daki 1-formlarla işleme girerek değer alır) ve $\wedge$ sembolü ise formlarda tanımlı wedge (vektörel) çarpımıdır.

Bu ifadelerden görüleceği üzere B-teorisinin topolojik karakteri Σ 'nın karmaşık yapısından ve X 'in Kähler metriğinden bağımsız olmasında yatar. Σ 'nın karmaşık yapısını veya X 'in Kähler metriğini çok küçük şekilde değiştirirsek Lagrangian'da karşımıza sadece $\{Q, \dots\}$ biçiminde topolojik özellikleri etkilemeyen ilgisiz terimler gelecektir ve bu da Lagrangian'daki $\{Q, V\}$ ifadesine katkı olarak gelecektir. W 'ya gelecek olursak, bu da diferansiyel formlar cinsinden yazılabildiği için Σ 'nın karmaşık yapısından tamamen bağımsızdır. Açık bir şekilde görülmese de X 'in Kähler metriğinin küçük bir şekilde değiştirilmesi W 'yu $\{Q, \dots\}$ olarak değiştirir. Bu sonuçlar ise A-teorisinde bulduğumuz sonuçlarla aynı olmamakla birlikte paralellik arz etmektedir.

A ve B-Modellerine ait oluşturduğumuz bütün bu formülasyon topolojik sigma modellerinde psödo-dualite ilişkilerinin anlaşılması için kullanılabilir. Bu şekilde iki tane topolojik A-tipi sigma modeli alınarak psödo-dualite ilişkileri incelenebileceği gibi iki tane topolojik

B-tipi sigma modelleri arasındaki psödo-dualite ilişkileri ve bir A-tipi ile bir B-tipi model arasındaki psödo-dualite ilişkileri de incelenebilir. Ancak bunun yerine ortak bir formalizm altında bütün bu psödo-dualite ilişkilerini ortaya koymak mümkündür. Bunun için Lagrangian ve dönüşüm kurallarına ait oluşturmuş olduğumuz bütün formülasyon süper-uzayda modelin formülize edilmesi ile yorumlanabilir, yani süper Riemann yüzeyinden X 'e eşlemler tanımlanarak topolojik sigma modelini yeniden formülize edebiliriz. Bu değerlendirme aslında [42]'de verilen yaklaşımla benzerlik gösterir.

4.2.5. Kähler Geometrisi ve Topolojik Sigma Modelleri

Buna göre topolojik bir sigma modelini karmaşıktırılmış bir süper-uzayda $\Phi : \Sigma \rightarrow M^{\mathbb{C}}$ eşlemi ile tanımlıyoruz. Burada Σ , $N = 2$ süpersimetri ile genişletilmiş evren-yüzeyi ve $M^{\mathbb{C}}$ ise karmaşıktırılmış M manifoldudur. Bu durumda $N = (2, 2)$ süpersimetriye sahip bir topolojik sigma modeli aksiyonu bir K Kähler potansiyeli cinsinden şu şekilde yazılır:

$$S = \int d^2\sigma d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \bar{\Phi}) \quad (4.60)$$

Bu ifadede Φ ve $\bar{\Phi}$ sırası ile kiral ve anti-kiral süper alanlardır ve θ ile $\bar{\theta}$ ise Σ üzerinde tanımlı ilgili koordinatlardır. 2 boyutlu $N = 2$ süpersimetriye sahip topolojik bir modeldeki skaler alanlar, off-shell sınırlı ilişkilerle şu şekilde gösterilebilir:

$$\bar{\mathbb{D}}_{\pm}\Phi = 0, \quad \mathbb{D}_{\pm}\bar{\Phi} = 0 \quad (4.61)$$

burada $\bar{\mathbb{D}}_{\pm}$ ve $\mathbb{D}_{\pm}$, $N = (2, 2)$ kiral ve anti-kiral süper-uzay kovaryant türevleridir. Kiral süper alanı olan Φ 'nin $N = (1, 1)$ alanları cinsinden bilinen alan bileşenleri

$$x = \Phi|, \quad \Psi_{\pm}\mathbb{D}_{\pm} = \Phi|, \quad F = \mathbb{D}_{-}\mathbb{D}_{+}\Phi| \quad (4.62)$$

ile tanımlanabilir. Bu ifadelerde dikey çizgiler bir süper alanın θ 'dan bağımsız bileşenini simgeler, x skaler bozonik bir alanı, $\Psi_{\pm}$ iki boyutlu Majorana spinor alanını ve F ise yardımcı (auxiliary) skaler alandır. Bu alanlar $N = (1, 1)$ olan X süper alanını oluştururlar:

$$X = x + \theta^+ \Psi_+ + \theta^- \Psi_- + \theta^+ \theta^- F \quad (4.63)$$

Bu durumda yukarıda Kähler potansiyeli cinsinden verdiğimiz aksiyon, $N = (1, 1)$ süpersimerik durumda:

$$S = -\frac{i}{2} \int d^2 \sigma d^2 \theta g_{AB} D_+ X^A D_- X^B \quad (4.64)$$

şekline dönüşür. Bu ifadede $D^{\pm}$, $N = 1$ süpersimetride tanımlı süper kovaryant türevlerdir ve $D_{\pm} = \partial_{\theta_{\pm}} + i\theta^{\pm} \partial_{\pm}$ olarak ifade edilir. g_{AB} metriği ise

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & K_{a\bar{b}} \\ K_{\bar{a}b} & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. İşlemlerimizde daha açık ve kolaylık olması açısından $a, b, c, \dots$ indislerini holomorf koordinatları, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ indislerini antiholomorf koordinatları belirtmek için kullanacağız. Böylece bir X^A vektörünü X^a ve $X^{\bar{a}}$ olarak ayrıştırabiliriz. Burada $\{A\}$ holomorf ve antiholomorf koordinatların toplamını simgeler. Dolayısı ile metrik ifadesinde kullanılan $K_{a\bar{b}}$, $K_{a\bar{b}} := \frac{\partial}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial X^{\bar{b}}}$ olarak tanımlanır. Sonuç olarak modelimize ait hedef-uzay geometrimiz metriği $g_{\mu\nu} K = \partial_{\mu} \partial_{\nu} K$ olan bir Kähler manifoldudur.

Kähler yapılarını açık şekilde ortaya koyabilmek için $N = (1, 1)$ süpersimetri kavramları kullanılabilir. Bu durumda alanlar üzerine etki eden ikinci süpersimetri

$$\delta^2(\epsilon) X^i = \epsilon^+ J_{(+)k}^i D_+ X^k + \epsilon^- J_{(-)k}^i D_- X^k \quad (4.65)$$

ile gösterilebilir. Buradaki $J_{(\pm)k}^i$ niceliği, hedef uzayda tanımlı yaklaşık (almost) karmaşık yapıdır. Bu ikinci süpersimetri altında aksiyonun sabit kalabilmesi için

$$J_{(\pm)ij} = -J_{(\pm)ji} \quad (4.66)$$

$$\nabla^\pm J_{(\pm)} = 0 \quad (4.67)$$

koşullarının sağlanması gerekir. Burada verilen $\nabla^\pm$ kovaryant türevi $\Gamma_{jk}^{\pm i} = \Gamma_{jk}^i \pm g^{il} H_{ljk}$ bağlantısına sahiptir. Bu tensörler aşağıdaki koşulları sağlarlar:

$$J_{(\pm)k}^i J_{(\pm)j}^k = -\delta_j^i \quad (4.68)$$

$$N_{jk}^i = J_{(\pm)l}^i \partial_{[k} J_{(\pm)j]}^l + \partial_l J_{(\pm)[k}^i J_{(\pm)j]}^l = 0 \quad (4.69)$$

burada verilen N_{jk}^i Nijenhuis tensörüdür ve bunun yok olması karmaşık yapıların entegre edilebilir olduğunu göstermektedir. Bu durumda, X^i koordinat komşuluk sistemi ile kaplı reel $2n$ boyutlu hedef uzayının $J_{(\pm)}$ yaklaşık karmaşık yapılarla donatıldığı söylenebilir. $(\pm)$ indisleri kaldırılarak

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm iJ) \quad (4.70)$$

izdüşüm operatörleri tanımlanabilir. Bu operatörler herhangi bir V^i vektörünü $V_\pm^i$ izdüşümlerine ayırtırmak için kullanılır. 1-form tabanlarını dX^i ile gösterirsek temel

2-formu şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\omega = J_{ij}dX^i \wedge dX^j \quad (4.71)$$

Bu koşullar altında hedef uzay manifoldumuz bir Hermitsel manifold olur. Topolojik sigma modellerinde kullanacağımız Kähler manifoldu için kapalı bir temel 2-formu olan Hermitsel bir manifold kullanılmalıdır, yani $d\omega = 0$ veya $J_{[ij,k]} = 0$ olmalıdır. Buradan açıkça görülmektedir ki iki boyutlu topolojik bir sigma modeli, hedef uzayı $2n$ boyutlu reel bir Riemann manifoldu olan $N = (1, 1)$ süpersimetriye indirgendiği zaman, manifold üzerinde J Kähler yapısı tanımlanarak hedef uzayı Kähler geometrisine sahip bir model olarak karşımıza çıkmaktadır.

4.3. TOPOLOJİK SİGMA MODELLERİNDE PSÖDO-DUALİTE

Karmaşılaştırılmış süper-uzayda Φ eşlemi ile verilen, kapalı bir 2-forma sahip Kähler geometrisi ile tanımladığımız topolojik sigma modellerine ait yukarıdaki bölümde türettiğimiz indirgenmiş aksiyon ile süper-uzayda dualite ilişkisi kurmak mümkündür. Dualite ilişkisini hedef uzayda oluştururken psödo-dualite ilişkisini de evren-yüzeyi üzerinde kurabiliriz. Bu ilişki daha önce belirttiğimiz gibi teorinin stres-enerji tensörünü koruyacaktır ve hareket denklemlerinin çözümlerinin eşlemlenmesi ile inşa edilir. Bu yüzden de on-shell dualite ilişkisidir. Bunun için öncelikle teorimize ait geometrik yapıları oluşturalım. $M^{\mathbb{C}} = M \times \mathbb{C}$ ile tanımlanan manifold üzerinde antisimetrik 2-form alanı b_{AB} oluşturuyoruz. Bir Kähler manifoldu üzerindeki metrik bileşenleri bize $\Gamma_{bc}^a \in M^+$ ve $\Gamma_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} \in M^-$ bağlantı bileşenlerini verir. Burada tanımlanan M^+ ve M^- , $M^{\mathbb{C}}$ hedef uzayının holomorf ve anti-holomorf kısımlarıdır ve $P_{\pm}$ izdüşüm operatörlerinin $M^{\mathbb{C}}$ 'ye uygulanmasıyla elde edilirler. Buradan anlaşılacağı üzere bir Kähler manifoldu üzerinde izin verilebilen Γ bağlantı katsayılarına karşılık izin verilebilen torsiyon değerleri ancak $H_{bc}^a \in M^+$ ve $H_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} \in M^-$ ile mümkündür. Burada verilen torsiyon H hedef uzayda tanımlı 3-form alanıdır ve $H = db$ ile bulunur. Bileşen olarak $H_{abc} = \frac{1}{2}(\partial_a b_{bc} + \partial_b b_{ca} + \partial_c b_{ab})$ şeklini alır. Buradan anlaşılmaktadır ki $M^{\mathbb{C}}$ manifoldunda tanımlı b_{AB} 2-form alanı sadece $b_{a\bar{b}}$ ile $b_{\bar{b}a}$ bileşenlerini alabilir ve $b_{ab} = b_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ olur. Bunu Kähler manifoldu üzerindeki her $p \in M^{\mathbb{C}}$ noktasında ve

herbir $X, Y \in T_p M^{\mathbb{C}}$ vektörel alanları ile hermitsellik koşulunu kullanarak gösterebiliriz:

$$b_p(X, Y) = b_p(J_p X, J_p Y) \quad (4.72)$$

Böylece 2-form alanı b_{AB} 'nin bileşenleri lokal olarak $b_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & b_{a\bar{b}} \\ b_{\bar{a}b} & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde verilir. Daha sonra, modelimize ait hareket denklemlerini şu şekilde bulabiliriz,

$$X_{+-}^c = (\Gamma_{ab}^c - H_{bc}^a) X_+^a X_-^b \quad (4.73)$$

$$\bar{X}_{+-}^{\bar{c}} = (\Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} - H_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}}) \bar{X}_+^{\bar{a}} \bar{X}_-^{\bar{b}} \quad (4.74)$$

Bu ifadelerde kullandığımız tanımlamalar şöyledir: $X_{\pm} := D_{\pm} X$, $X_{+-} := D_- D_+ X$ ve $\Gamma_{bc}^a := (K^{-1})_d^a K_{bc}^d$

Farkedileceği üzere bu denklemler, hedef uzayın M^+ holomorf ve M^- anti-holomorf kısımları üzerinde oluşan hareket denklemleridir ve $M^{\mathbb{C}}$ üzerinde karşılık gelen hareket denklemleri $P_{\pm}$ izdüşüm operatörlerinin uygulanması ile kolaylıkla elde edilebilirler. Teorimize ait bütün geometrik yapıyı ve fiziksel koşulları inşa ettikten sonra psödo-dualite denklemlerini oluşturarak psödo-dualite oluşması için gerekli olan yeter ve gerekli koşulları ortaya koyabiliriz. Bir dualite ilişkini en kolay ifade etmenin yolu teoriyi $SO(M^{\mathbb{C}})$ üzerinde tanımlı ortonormal eşgerçeve demeti üzerinde analiz etmektir. $SO(M^{\mathbb{C}})$ manifoldu $M^{\mathbb{C}} \times SO(n)$ ile $M^{\mathbb{C}}$ manifoldunun n-boyutlu rotasyonu ile oluşturulur ve bu bildiğimiz anlamda teorimizi Cartan koordinat sistemine taşıdığımız anlamına gelmektedir. Dolayısı ile elimizdeki teorinin $SO(M^{\mathbb{C}})$ manifoldu üzerinde Cartan yapı denklemlerini sağlamasını bekleriz. Bunu görebilmek için süper-uzayın ilgili holomorf kısmı üzerinde $\{\Lambda^a\}$ ortonormal koordinat çerçevesi seçelim ve buna karşılık gelen bağlantı 1-form katsayıları da $\{\Lambda_b^a\}$ olsun. Süper-uzayımızı $z = (\sigma^{\pm}, \theta^{\pm})$ koordinatları ile tanımlayalım. Benzer ifadeleri her indisin

üzerine çizgi koyarak uzayımızın anti-holomorf kısmı içinde yazabiliriz. Böylece holomorf ve anti-holomorf kısımlardaki 1-form alanları

$$\Lambda^a = dz^M X_M^a, \quad \bar{\Lambda}^{\bar{a}} = d\bar{z}^M \bar{X}_M^{\bar{a}}, \quad (4.75)$$

olur. $SO(M^{\mathbb{C}})$ üzerinde tanımlı X_M ve $\bar{X}_M$ kovaryant türevleri de

$$dX_M^a + \Lambda_b^a X_M^b = dz^N X_{MN}^a, \quad d\bar{X}_M^{\bar{a}} + \Lambda_b^{\bar{a}} \bar{X}_M^{\bar{b}} = d\bar{z}^N \bar{X}_{MN}^{\bar{a}} \quad (4.76)$$

şeklinde bulunur. Böylece Cartan yapı denklemlerini şu şekilde yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned} d\Lambda^a &= -\Lambda_b^a \wedge \Lambda^b, & d\Lambda_b^a &= -\Lambda_c^a \wedge \Lambda_b^c + \Omega_b^a \\ d\bar{\Lambda}^{\bar{a}} &= -\bar{\Lambda}_b^{\bar{a}} \wedge \bar{\Lambda}^{\bar{b}}, & d\bar{\Lambda}_b^{\bar{a}} &= -\bar{\Lambda}_c^{\bar{a}} \wedge \bar{\Lambda}_b^{\bar{c}} + \bar{\Omega}_b^{\bar{a}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Burada Ω_b^a ve $\bar{\Omega}_b^{\bar{a}}$ eğrilik 2-formlarıdır ve $\Omega_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \bar{\Lambda}^{\bar{c}} \wedge \Lambda^d + \frac{1}{2} R_{bcd}^a \Lambda^c \wedge \bar{\Lambda}^{\bar{d}}$ ile $\bar{\Omega}_b^{\bar{a}} = \frac{1}{2} R_{bcd}^{\bar{a}} \bar{\Lambda}^{\bar{c}} \wedge \Lambda^d + \frac{1}{2} R_{bcd}^{\bar{a}} \Lambda^c \wedge \bar{\Lambda}^{\bar{d}}$ olarak tanımlanır. Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere psödo-dualite denklemleri hedef uzayın holomorf ve anti-holomorf yapısına uygun olarak ya holomorf ya da anti-holomorf bir şekilde oluşturulabilecektir. Öncelikle holomorf psödo-dualite ilişkisine göz atalım.

Holomorf psödo-dualite durumunda holomorf veya anti-holomorf vektörler psödo-dual manifold üzerindeki ilgili holomorf veya anti-holomorf vektörlere eşlemlenirler. Böylece psödo-dualite ilişkileri şu şekilde verilirler:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\pm}^a &= \pm \mathcal{T}_b^a X_{\pm}^b \\ \tilde{\bar{X}}_{\pm}^{\bar{a}} &= \pm \bar{\mathcal{T}}_b^{\bar{a}} \bar{X}_{\pm}^{\bar{b}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Burada $\mathcal{T} : TM^+ \rightarrow T\tilde{M}^+$ ve $\tilde{\mathcal{T}} : TM^- \rightarrow T\tilde{M}^-$ uygun holomorfluk ölçüsüne sahip ilgili teğet demetleri arasındaki eşlemlerdir. Ancak bu sözde dualite ilişkilerinin var olma yeter ve gereklilik koşullarının anlaşılması için bu denklemlerin entegrabilite koşullarına göz atmalıyız. Bunun içinde bu denklemlerin dış (exterior) türevlerini alarak yukarıda tanımladığımız kovaryant türevleri kullanarak elde ettiğimiz sonuçlarda 1-form yapıları ile Cartan yapı denklemlerini yerine koyarak bütün holomorf ve anti-holomorf indisler için geçerli olan

$$H = \tilde{H} = \tilde{\Gamma} = 0 \quad (4.79)$$

koşulunu elde ediyoruz. Bununla beraber karşımıza

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}_b^a - 2\mathcal{T}_c^a \Lambda_b^c + \tilde{\Lambda}_c^a \mathcal{T}_b^c &= 0 \\ d\tilde{\mathcal{T}}_b^{\bar{a}} - 2\tilde{\mathcal{T}}_c^{\bar{a}} \bar{\Lambda}_b^{\bar{c}} + \tilde{\Lambda}_c^{\bar{a}} \tilde{\mathcal{T}}_b^{\bar{c}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

koşulları da çıkmaktadır. Burada tanımlanan bağlantı 1-form değerleri $\Lambda_b^a = \Gamma_{bc}^a \Lambda^c$ ve $\bar{\Lambda}_b^{\bar{a}} = \bar{\Gamma}_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} \bar{\Lambda}^{\bar{c}}$ şeklinde bulunur. Bu iki koşul aslında psödo-dualite hakkında çok önemli bilgiler içeren ve psödo-dualite oluşması için gerekli koşulları içinde barındıran önemli ifadelerdir. Bunlar kesinlikle topolojik sigma modellerin karakteristik özellikleri ile ilgisi olmadığı gibi tamamen psödo-dualite koşullarının gerçekleşmesiyle ilgilidir. Bu denklemler yoluyla psödo-dualite inşa edilen uzayların geometrik yapıları hakkında bilgi sahibi oluyoruz. Bu bilgiyi ortaya çıkarmak içinde daha fazla entegrabilite koşullarına göz atıyoruz. Bu ifadelerin dış türevlerini alıp tekrar aynı ifadelerin kullanılması ile eğrilik 2-formlarına ait aşağıdaki ilişkileri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c^a \Omega_b^c &= \tilde{\Omega}_c^a \mathcal{T}_b^c \\ \tilde{\mathcal{T}}_c^{\bar{a}} \Omega_b^{\bar{c}} &= \tilde{\Omega}_c^{\bar{a}} \tilde{\mathcal{T}}_b^{\bar{c}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Bunlar da bize aşağıdaki eğrilik ilişkilerini verir:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_b^a R_{cd\bar{e}}^b &= -\tilde{R}_{kl\bar{m}}^a \mathcal{T}_d^l \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{e}}^{\bar{m}} \mathcal{T}_c^k \\ \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{b}}^{\bar{a}} R_{cd\bar{e}}^{\bar{b}} &= -\tilde{R}_{kl\bar{m}}^{\bar{a}} \mathcal{T}_d^l \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{e}}^{\bar{m}} \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{c}}^{\bar{k}}\end{aligned}\quad (4.82)$$

Ancak bu ifadeler hala psödo-dualite eşlem operatörü olan $\mathcal{T}'$ yi içerdiği için daha fazla entegrabilite koşullarını incelemeliyiz. Bunun için yine dış türevler olarak bulduğumuz sonuçları kullanıyoruz. Nihayetinde karşımıza eğriliklerin kovaryant türevlerinin sıfır olması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Buradan anlaşılacağı üzere psödo-dualite ifadelerinin var olabilmesi için hedef uzayı manifoldlarının sabit eğriliklere sahip ve birbirinin zıt işaretlisi olan dual simetrik uzaylar olması gerekmektedir. Bu sonuç genel olarak psödo-dualite denklemlerinin yapılarından kaynaklanmaktadır ve evren-yüzeyi ile hedef uzayı geometrileri ne olursa olsun her zaman aynı sonucu verdiği görülmektedir.

Benzer şekilde holomorf olmayan psödo-dualite ilişkisini incelemek mümkündür. Bu durumda psödo-dual manifold üzerinde holomorf vektörler anti-holomorf vektörlere eşlemlenebilirler ve böylece

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{\pm}^a &= \pm \mathfrak{T}_b^a \bar{X}_{\pm}^{\bar{b}} \\ \tilde{\bar{X}}_{\pm}^{\bar{a}} &= \pm \tilde{\mathfrak{T}}_b^{\bar{a}} X_{\pm}^b\end{aligned}\quad (4.83)$$

bulunur. Bu ifadelerde $\mathfrak{T} : TM^- \rightarrow T\tilde{M}^+$ ve $\tilde{\mathfrak{T}} : TM^+ \rightarrow T\tilde{M}^-$ şeklindedir ve holomorfizmi değiştiren karışık teğet demetleri arasındaki eşlem operatörleridirler. Yukarıdaki duruma benzer şekilde bu tür psödo-dualite ifadelerinin var olma koşullarını anlamak için dış türev olarak ilgili kovaryant türevleri kullanıyoruz ve Cartan yapı denklemlerini de yerine koyarak yukarıda bulduğumuz $H = \tilde{H} = \tilde{\Gamma} = 0$ sonucu ile beraber aşağıdaki koşulu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
d\mathfrak{T}_b^a - 2\mathfrak{T}_c^a \bar{\Lambda}_b^{\bar{c}} + \tilde{\Lambda}_c^a \mathfrak{T}_b^c &= 0 \\
d\bar{\mathfrak{T}}_b^{\bar{a}} - 2\bar{\mathfrak{T}}_c^{\bar{a}} \bar{\Lambda}_b^c + \bar{\tilde{\Lambda}}_c^{\bar{a}} \bar{\mathfrak{T}}_b^{\bar{c}} &= 0
\end{aligned} \tag{4.84}$$

burada yine anti-holomorf bağlantı 1-form katsayıları olarak $\bar{\Lambda}_b^{\bar{a}} = \Gamma_{\bar{b}\bar{c}}^{\bar{a}} \bar{\Lambda}^{\bar{c}}$ ve $\Lambda_b^a = \Gamma_{bc}^a \Lambda^c$ buluruz. Benzer şekilde yine elde ettiğimiz koşulları daha fazla inceleyerek ek bilgi ortaya çıkartabilmek için dış türevlerini alıyoruz ve ilgili Cartan yapı denklemlerinin kullanımı ile aşağıdaki eğrilik ilişkilerini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_b^a R_{c\bar{d}e}^{\bar{b}} &= -\tilde{R}_{kl\bar{m}}^a \mathfrak{T}_c^k \mathfrak{T}_{\bar{d}}^l \bar{\mathfrak{T}}_e^{\bar{m}} \\
\bar{\mathfrak{T}}_b^{\bar{a}} R_{cd\bar{e}}^b &= -\bar{\tilde{R}}_{\bar{k}\bar{l}\bar{m}}^{\bar{a}} \bar{\mathfrak{T}}_c^{\bar{k}} \bar{\mathfrak{T}}_d^{\bar{l}} \bar{\mathfrak{T}}_{\bar{e}}^{\bar{m}}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Bu denklemin daha fazla integrabilite özelliğinin incelenmesi ile yine eğriliklerin kovaryant türevlerinin sıfır olması gerektiği koşulu karşımıza çıkar. Buradan anlaşılmaktadır ki topolojik sigma modellerinde psödo-dualite ilişkisinin geçerli olması için dual simetrik uzaylar üzerinde bulunmalıdır, yani eğrilik değerleri sabit ve işaretleri de zıt olmalıdır. Bununla beraber torsiyon değerleri de yok olmalıdır.

5. SONUÇ

Bu tezde, topolojik sigma modellerindeki klasik ve kuantum simetriler incelenerek evren-yüzeyinde gerçekleştirilebilecek muhtemel psödo-dualite ilişkileri incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda Cartan geometrisi kullanılarak incelenmesi düşünülen sigma modeli Cartan düzlemine taşınmış ve ortonormal koordinat sisteminin mutlak yapısından istifade edilerek Cartan yapı denklemlerinin kolaylıkla modelimizde kullanılması sağlanmıştır. Psödo-dualite denklemlerini inşa edebilmek için Cartan düzlemindeki yapılar evren-yüzeyine çekilerek hareket denklemlerinin çözümleri birbirlerine eşlemlenmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli mesele, evren-yüzeyinin karmaşılaştırılmış yapısından kaynaklanan eşlem özellikleridir. Bu durumu basitleştirmek için $N = 2$ süpersimetri ile Kähler geometrisi üzerinde tanımlı topolojik sigma modelini uygun $N = 1$ süpersimetrik alanlar cinsinden ifade ettik ve bu şekilde bilinen alanlar cinsinden psödo-dualite ilişkisini inceleme fırsatı elde edebildik.

Topolojik sigma modelinde psödo-dualite ilişkilerini oluşturmak bize bu eşsiz dualite ilişkilerinin var olma koşullarını incelememizi sağlamıştır. Buna göre hareket denklemlerini ve Kähler yapısını kullanarak psödo-dualite koşullarını bulduk. Buna göre Kähler manifoldu üzerinde tanımlı bir topolojik sigma modelinde psödo-dualite var olması için manifoldun torsiyonu sıfır olmalı ve eğriliği de sabit olmalıdır. Bu şekilde psödo-dualite ilişkisi manifoldun eğriliğini negatif değeriyle değiştirerek dual simetrik bir süper uzay oluşumuna imkan vermektedir. Bu dikkat çekici sonuç, sigma modelinden ziyade psödo-dualite ilişkisinin fevkalade özelliklerini sergileyen bir durumdur. Bu şekilde herhangi bir fiziksel teorideki psödo-dualite ilişkisini anlamak ne tür sonuçlar doğuracağını anlayabilmek mümkün olacaktır.

Tezimizde elde ettiğimiz bulguların çarpıcı sonuçlarından birisi psödo-dualite ilişkilerinin bilinen klasik dualite ilişkilerinin genelleştirilmiş şeklini verebilmesidir. Özellikle topolojik bir model seçmemizin temel sebebi de psödo-dualite ilişkisinin ayna simetrisinin anlaşılmasına yardımcı olabilme potansiyelidir. Elde ettiğimiz sonuçlar topolojik A-modeli ile topolojik B-modeli arasında var olan ayna simetrisinin psödo-dualite ile kolaylıkla inşa edilebileceği gösterilmiştir. Bu şekilde iki boyutta oluşturulan herhangi bir teorelin sonsuz

sayıdaki simetrileri psödo-dualite yöntemi ile anlaşılabilmesine olanak sağlanmış olacaktır. Diğer bir deyişle, bir çok farklı dualite yaklaşımı kullanmak yerine evren-yüzeyinde oluşturulan psödo-dualite ile bu çok sayıdaki dualite yöntemleri tek bir çatı altında birleştirilmiş olacaktır. Tezimizde göstermiş olduğumuz yaklaşım buna imkan tanımaktadır. Burada işlenen konuya ek olarak göz önünde bulundurulması gereken hususlardan birisi de ele aldığımız sigma modeli evren-yüzeyinde topolojik bir karaktere sahip olduğu için topolojik yüzeyin genus değeri elde edilecek sonuçların yorumlanmasında oldukça önemli olmaktadır. Topolojik yüzeylerin birbirinden farklılaşmasına sebep olan farklı genus değerleri psödo-dualite ilişkilerinin de oluşumunda önemli role sahiptir. Bu tezde biz sadece genusu sıfır olan sabit bir topolojik yüzey kullandık. Ancak genusu bir veya daha yüksek yüzeylerin kullanılması durumunda teorimizde ortaya çıkabilecek homoloji ve cohomoloji değerlerinin de göz önünde bulundurularak psödo-dualite ilişkilerinin bunlara göre yorumlanması gerekmektedir. Ancak bu hesaplama çok uzun bir süreç ve birikim gerektirdiği için bu tezde buna değinmedik. Ancak tezde kullanılan yaklaşım ile topolojik herhangi bir modelin simetrilerinin daha iyi anlaşılması için iyi bir başlangıç zemini oluşturmuş olduk.

KAYNAKLAR

- [1]. Gell-Mann, M., Lévy, M., 1960 The axial vector current in beta decay, *Il Nuovo Cimento*, 16: 705–726
- [2]. Mudry, C., 2014 *Lecture Notes on Field Theory in Condensed Matter Physics*, World Scientific Publishing Company, ISBN:978-981-4449-09-0.
- [3]. Lerner, I. V., 2003, Nonlinear sigma model for normal and superconducting systems: A pedestrian approach, *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, 271-301.
- [4]. Yoshii, R., Nitta, M., 2019 Nambu-Jona Lasinio and Nonlinear Sigma Models in Condensed Matter Systems, *Symmetry*, 11(5), 636.
- [5]. Gliozzi, A. S., Rapola, A. 2001 Nonlinear sigma models and quantum spin systems, *Phys. Rev. B* 64, 184439.
- [6]. Schwarz J.H. 1995 Classical symmetries of some two-dimensional models, *Nucl. Phys. B* 447, 137.
- [7]. Schwarz J.H., 1995 Classical symmetries of some two-dimensional models coupled to gravity, *Nucl. Phys. B* 454, 427.
- [8]. Sarisaman, M. 2013 Euclidean Pseudoduality and Boundary Conditions in Sigma Models, *Nucl.Phys. B* 868, 314-327.
- [9]. Sarisaman, M 2011 Pseudoduality in Supersymmetric Sigma Models on Symmetric Spaces, *Mod.Phys.Lett.A* 26, 1825-1841.
- [10]. Sarisaman, M. 2010 Pseudoduality in Supersymmetric Sigma Models, *Int.J.Mod.Phys.A* 25, 2997-3023.
- [11]. Sarisaman, M 2009 Pseudoduality Between Symmetric Space Sigma Models, *J.Math.Phys.* 50, 112303.
- [12]. Alvarez, O. 2002 Pseudoduality in Sigma Models, *Nucl.Phys. B* 638, 328-350.
- [13]. Alvarez, O. 2000 Target Space Pseudoduality Between Dual Symmetric Spaces, *Nucl.Phys. B* 582, 139-154.
- [14]. Sarisaman, M. 2013, Pseudoduality and Complex Geometry in Sigma Models, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 10, 1350034.
- [15]. Hull, C. M., Lindstrom U., Melo dos Santos L., von Unge R., Zabzine M., (2009) Geometry of the N=2 supersymmetric sigma model with Euclidean worldsheet , *JHEP* 0907 078, hep-th/0906.2741.

- [16]. Meessen, P., *Strings Moving on Group Manifolds: The WZW Model*, <http://www.uniovi.es/meessen/fysica/zooi/WZWClassMunoz.pdf>. [Ziyaret Tarihi: 05.06.2019]
- [17]. Witten, E., (1984) Nonabelian bozonization in two dimensions, *Commun. Math. Phys.* 92 455-472. 5152
- [18]. Peskin, M.E., Daniel V. Schroeder, 1995, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Advanced Book Program, ISBN-13: 978-0201503975.
- [19]. Weinberg, S., 2005, *The Quantum Theory of Fields*, in 3 vols., Cambridge University Press, ISBN-0-521-55001-7.
- [20]. Zwiebach, B., 2004, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, ISBN-0-521-83143-1.
- [21]. Di Francesco P., Mathieu, P., and Sénéchal, D., 1997 *Conformal Field Theory*, SpringerVerlag, New York, ISBN-13:978-1-4612-7475-9.
- [22]. Ketov, S.V. , 1995 *Conformal Field Theory*, World Scientific Publishing Company, ISBN-981-02-1608-4.
- [23]. Blumenhagen, R. and Plauschinn, E. , 2009, *Introduction to Conformal Field Theory: with Applications to String Theory*, Springer, ISBN-978-3-642-00449-0.
- [24]. Eduard, Prugovecki, 2007 *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, Dover Publications, ISBN-0-486-45327-8.
- [25]. Sarisaman, M., 2009 Pseudoduality and Conserved Currents in Sigma Models, *Mod.Phys.Lett.* A24:123-134.
- [26]. Giveon, A., Porrati, M., and Rabinovici, E. , (1994) Target space duality in string theory, *Phys. Rept.* 244 77-202, hep-th/9401139.
- [27]. Alvarez, O., (2000) Target space pseudoduality between dual symmetric spaces, *Nucl. Phys.* B582 139, hep-th/0004120.
- [28]. Zakharov, V.E. and Mikhailov A.V., (1978) Relativistically invariant two-dimensional models in field theory integrable by the inverse problem technique. (in Russian), *Sov. Phys. JETP* 47 1017-1027.
- [29]. Curtright, T. and Zachos, C., (1994) Currents, charges, and canonical structure of pseudochiral models, *Phys. Rev.* D49 5408-5421, hep-th/9401006.
- [30]. Alvarez, E., Alvarez-Gaume, L., and Lozano, Y. , (1994) A canonical approach to duality transformations, *Phys. Lett.* B336 183-189, hep-th/9406206.
- [31]. Nappi, C.R., (1980) Some properties of an analog of the nonlinear sigma model, *Phys. Rev.* D21 418.
- [32]. Alvarez, O., (2002) Pseudoduality in Sigma Models, *Nucl.Phys.* B638 328- 350, hep-th/0204011.

- [33]. Ketov, S.V., 2000 *Quantum Non-Linear Sigma-Models: From Quantum Field Theory to Supersymmetry, Conformal Field Theory, Black Holes and Strings, Texts and Monographs in Physics*, Springer, Berlin, Germany, ISBN-978-3-642-08688-5.
- [34]. Alvarez, O., (2000) Target space duality. I: General Theory, *Nucl.Phys.* B584 659, hep-th/0003177.
- [35]. Ivanov E. A., (1987) Duality in $d=2$ sigma models of chiral field with anomaly, *Theor. Math. Phys.* 71 474-484.
- [36]. Witten, E. 1988 Topological sigma models. *Comm. Math. Phys.* 118, 411-449.
- [37]. Baulieu, L., Singer, I. M. 1989 The topological sigma model. *Comm. Math. Phys.* 125, 227-237.
- [38]. Jia, B. 2017 Topological Sigma Models On Supermanifolds, *Nuclear Physics B* 915 84-101.
- [39]. Witten, E. 1991 Mirror Manifolds And Topological Field Theory, *arXiv:hep-th/9112056*.
- [40]. Birmingham, D., Blau, M., Rakowski, M., Thompson, G. 1991 Topological Field Theory, *Phys. Rep.* 209, 129–340.
- [41]. Witten, E. (1988) Topological Sigma Models, *Commun. Math. Phys.* 118 411
- [42]. Baulieu, L. Singer, I. M. (1989) The topological sigma model. *Comm. Math. Phys.* 125, no. 2, 227–2376

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Türker Tunay
Doğum Yeri	Gebze-Kocaeli
Doğum Tarihi	12.05.1978
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	0541 401 16 74
E-Posta Adresi	turkertunay1978@gmail.com



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Boğaziçi Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Fizik
Mezuniyet Yılı	2001

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Fizik
Programı	Matematiksel Fizik
Mezuniyet Tarihi	2019

Makale ve Bildiriler	
<i>Makaleler</i>	
<i>Bildiriler</i>	

