



TORSİYON GRUPLARIN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR

Meltem SAĞLAM

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Meltem SAĞLAM

15/10/2021

TORSİYON GRUPLARIN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Meltem SAĞLAM

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında Tarek Rouabhi ve Nadir Trabelsi'nin "A note on Torsion-by-Nilpotent Groups" başlıklı makalesi çalışılmıştır. Bahsedilen makalede torsiyon grupların nilpotent genişlemesi olan gruplar incelenmektedir. İlk olarak, bu makaledeki bazı sonuçların ispatı için gerekli olan Nadir Trabelsi'nin "Soluble groups with many 2-generator torsion-by-nilpotent subgroups" adlı makalesi göz önüne alınmıştır. Tezin 4. bölümünde bu makalede $\mathfrak{X}$ bir torsiyon-by-nilpotent grup sınıfı olduğunda $(\mathfrak{X}, \infty)$ sınıfı incelenmiş ve $\mathcal{N}$, (sırasıyla, $\mathcal{T}$) nilpotent grup (sırasıyla, torsiyon grup) sınıfını göstermek üzere " $G, (\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. O zaman G grubu torsiyon-by-nilpotenttir" teoreminin ispatı ayrıntılı olarak verilmiştir. [3], [10] un sonuçları ve bu teorem birleştirildiğinde $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfıyla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, elde edilen bu sonuçlar Tarek Rouabhi ve Nadir Trabelsi'nin makalesinde $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfına genişletilmiştir. Böylece çalışmamızın ana sonucu " $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup, torsiyon-by-nilpotent gruptur" teoreminin ispatı ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Çalışmamızda [2] nin sonuçları ve bu teorem birleştirildiğinde şu sonuçlar elde edilmiştir: " k bir pozitif tam sayı olmak üzere (i) Eğer $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup ise o zaman sadece k ya bağlı $c = c(k)$ tamsayısı vardır öyle ki $G, \mathcal{TN}_c$ ye aittir. (ii) Sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu bir grubun $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart bu grubun $\mathcal{TN}_{k+1}$ ye ait olmasıdır". Beşinci bölümde bu sonuçların ispatı ayrıntılı olarak verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : Torsiyon-by-nilpotent grup, çözülebilir grup, sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu grup
Sayfa Adedi : 75
Danışman : Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TORSION-BY-NILPOTENT GROUPS

(M. Sc. Thesis)

Meltem SAĞLAM

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2021

ABSTRACT

In this thesis, the article written by Tarek Rouabhi and Nadir Trabelsi titled “A note on Torsion-by-Nilpotent Groups” was studied. In the aforementioned article, groups with nilpotent extension of torsion groups were investigated. First of all, to prove a few results in this thesis, we considered the article titled “Soluble groups with many 2-generator torsion-by-nilpotent subgroups” written by Nadir Trabelsi. In the fourth chapter of this thesis, we examined class $(\mathfrak{X}, \infty)$, when $\mathfrak{X}$ is class of torsion-by-nilpotent groups and proof of the theorem “Let G be a finitely generated soluble group in the class $(\mathcal{TN}, \infty)$. Then G is torsion-by-nilpotent” was given in detail. When the results of [3], [10] and this theorem were combined, some results regarding the class $(\mathcal{TN}, \infty)$ were obtained. These results obtained in the fifth chapter were extended to the $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ class in the article by Tarek Rouabhi and Nadir Trabelsi. Thus, the main result of our study, the proof of the theorem “A finitely generated soluble-by-finite group in the class $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ is torsion-by-nilpotent” was shown in detail. When the results of [2] and this theorem were combined in our study, the following results were obtained: “Let k be a positive integer (i) If G is a finitely generated soluble-by-finite group in the class $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$, then there exists an integer $c = c(k)$, depending only on k , such that G belongs to $\mathcal{TN}_c$ (ii) A finitely generated metabelian-by-finite group is in the class $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ if, and only if, it belongs to $\mathcal{TN}_{k+1}$ ”. In the fifth chapter, the proof of these results was given in detail.

Science Code : 20401

Key Words : Torsion-by-nilpotent group, soluble group, finitely generated soluble-by-finite group

Page Number : 75

Supervisor : Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Danışmanlığımı üstlenen, çalışmalarım boyunca bana yol gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, her konuda bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım sayın hocam Prof. Dr. Aynur ARIKAN'a ve tüm hayatım boyunca aldığım kararları her zaman destekleyen, her türlü zorlukta maddi, manevi yanımda olan, sadece bu çalışma sürecinde değil tüm eğitim hayatım boyunca motivasyon kaynağım olan sevgili annem ve babama teşekkürü borç bilirim. Ayrıca çıkmaza girdiğimde beni yüreklendiren, güzel tavsiyeleriyle her zaman yanımda olan sevgili ablam ve kardeşlerime en içten teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLAR.....	3
3. YARDIMCI LEMMALAR VE ÖNERMELER	29
4. ÜRETEÇ SAYISI İKİ OLAN TORSİYON GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN ALTGRUPLARA SAHİP ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR.....	41
5. TORSİYON GRUPLARIN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR.....	57
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	75

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Grup sınıflarının diyagramı	26



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$$H \leq G, H < G, H \triangleleft G$$

H, G nin altgrubu, öz altgrubu, normal altgrubu

$$G/H$$

G nin H ile bölüm grubu

$$|G:H|$$

H ın G içindeki indeksi

$$G \cong K$$

G grubu ile K grubu izomorf

$$\text{Ker } \varphi$$

φ dönüşümünün çekirdeği

$$\langle X \rangle$$

X in elemanları tarafından üretilen grup

$$\langle X, Y \rangle$$

X ve Y tarafından üretilen grup

$$G^n$$

$$\langle g^n | g \in G, n \in \mathbb{Z} \rangle$$

$$x^y = y^{-1}xy$$

x in y ile eşleniği

$$H^x$$

$$x^{-1}Hx$$

$$[x_1, x_2]$$

$x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$, x_1 ile x_2 nin komütatör çarpımı

$$[X_1, X_2]$$

$\langle [x_1, x_2] | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$, X_1 ile X_2 nin komütatör altgrubu

$$[G, G] = G'$$

G nin komütatör altgrubu

$$C_G(a)$$

a nın G içindeki merkezleyeni

$$C_G(X)$$

X in G içindeki merkezleyeni

$$N_G(H)$$

H ın G içindeki normalleyeni

$$Z(G)$$

G grubunun merkezi

$$Z_i(G)$$

G grubunun i . merkezi

$$Z_\infty(G)$$

G nin hipermerkezi

$$X^G$$

X in G içindeki normal kapanışı

$$H \text{ sn } G, H \triangleleft\triangleleft G$$

H, G nin bir altnormal altgrubu

$$s(G:H)$$

H nın G içindeki altnormallik indeksi

$$\text{Hasc } G$$

H, G nin bir artan altgrubu

Simgeler**max, min****max- n , min- n** **max- s , min- s** **$Fit(G)$** **$L(G)$** **$\bar{L}(G)$** **$R(G)$** **$\bar{R}(G)$** **$\varrho(G)$** **$\bar{\varrho}(G)$** **C_p^∞** **Açıklamalar**

Maksimal, minimal şartı

Normal altgruplarda maksimal, minimal şartı

Altnormal altgruplarda maksimal, minimal şartı

 G nin Fitting altgrubu G grubunun sol Engel elemanları G grubunun sınırlı sol Engel elemanları G grubunun sağ Engel elemanları G grubunun sınırlı sağ Engel elemanlarıHer $x \in G$ için $\langle x \rangle asc \langle x, a^G \rangle$ olacak şekildeki G nin a elemanlarının kümesiBir $n = n(a)$ pozitif tamsayısı olmak üzere her $x \in G$ için $\langle x \rangle \triangleleft^n \langle x, a^G \rangle$ olacak şekildeki G nin a elemanlarının kümesi

Quasidevirli grup

Kısaltmalar **$\mathcal{A}$** **$\mathcal{AT}$** **$\mathcal{AN}$** **$\mathfrak{X}$** **$\mathcal{C}$** **$\mathcal{CN}$** **$\mathcal{N}_k$** **$\mathcal{N}_k^{(2)}$** **$J\mathcal{NP}$ -grup** **$\mathcal{E}_k$** **$\mathcal{N}$** **Açıklamalar**

Abelyan grupların sınıfı

Abelyan-by-torsiyon grupların sınıfı

Abelyan-by-nilpotent grupların sınıfı

Bir grup sınıfı

Chernikov grupların sınıfı

Chernikov-by-nilpotent grupların sınıfı

Nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfıİki üreteçli nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfıJust-non- $\mathcal{P}$ grup k -Engel grupların sınıfı

Nilpotent grupların sınıfı

Kısaltmalar**Açıklamalar** **$\mathcal{FN}$**

Sonlu-by-nilpotent grupların sınıfı

 $\mathcal{FN}_k^{(2)}$ Sonlu-by-iki üreteçli nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfı **$\mathcal{FE}_k$** Sonlu-by- k -Engel grupların sınıfı **$\mathcal{T}$**

Torsiyon grupların sınıfı

 $\mathcal{TN}$

Torsiyon-by-nilpotent grupların sınıfı

 $\mathcal{TA}$

Torsiyon-by-abelyan grupların sınıfı

 $\mathcal{TN}_k$ Torsiyon-by-nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada $\mathfrak{X}$ ile bir grup sınıfı gösterilecektir. $\mathfrak{X}$ elemanları gruplar olan bir sınıf olsun. Eğer,

i) $\mathfrak{X}$ mertebesi bir olan grubu içerir,

ii) $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ ise $G_1 \in \mathfrak{X}$ tir;

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{X}$ sınıfına bir grup-teorik sınıf (veya grupların sınıfı) denir. Her sonsuz altkümesi $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{X}$ (sırasıyla, $\langle x, x^y \rangle \in \mathfrak{X}$) olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını içeren grupların sınıfı $(\mathfrak{X}, \infty)$ (sırasıyla, $(\mathfrak{X}, \infty)^*$) şeklinde gösterilir. $\mathfrak{X}$ grup sınıfı için $(\mathfrak{X}, \infty)$ üzerinde birçok sonuç elde edilmiştir.

B. H. Neuman, [1] de bir grubun, merkezinin sonlu genişlemesi (merkez-by-sonlu) olması için gerek ve yeter şart her sonsuz altkümesinin değişmeli olan farklı iki eleman çiftini içerdiğini göstermiştir. Bu sonuçtan dolayı, benzer yapıdaki problemler birçok makalenin konusu olmuştur (örneğin; [2-14]).

[9] da Lennox ve Wiegold, $\mathfrak{X}$ grup sınıfı polycyclic veya nilpotent veya coherent grupların sınıfı olduğunda $(\mathfrak{X}, \infty)$ sınıfına ait olan sonlu üreteçli çözülebilir grupları karakterize etmişlerdir.

$\mathcal{N}$ (sırasıyla, $\mathcal{C}, \mathcal{T}$) nilpotent (sırasıyla, Chernikov, torsiyon) grupların sınıfını göstermek üzere Nadir Trabelsi, “Soluble groups with many 2-generator torsion-by-nilpotent subgroups” başlıklı çalışmasında $\mathfrak{X}$ torsiyon grubun nilpotent genişlemesi olan grupların (torsiyon-by-nilpotent grup) (kısaca $\mathcal{TN}$ ile gösterilir) sınıfı ya da Chernikov grubun nilpotent genişlemesi olan grupların (Chernikov-by-nilpotent grup) (kısaca $\mathcal{CN}$ ile gösterilir) sınıfı olduğunda $(\mathfrak{X}, \infty)$ sınıfının yapısını araştırmıştır. Nadir Trabelsi, [12] de $(\mathcal{TN}, \infty)$ (sırasıyla, $(\mathcal{CN}, \infty)^*$) sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grubun, torsiyon grubun nilpotent genişlemesi (torsiyon-by-nilpotent grup) (sırasıyla, sonlu grubun nilpotent genişlemesi (sonlu-by-nilpotent grup)) olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada öncelikle [12] de $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından elde edilen sonuçlar incelenecektir. $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından gruplar için elde edilen sonuçlar, bu çalışmada $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfına genişletilecektir. Burada ana sonuç aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.1

$(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup torsiyon-by-nilpotent gruptur [13].

Teorem 1.1 herhangi bir grup için doğru değildir. Gerçekten [15, Sonuç 4.2] de her $d \geq 2$ tamsayısı için herhangi $d - 1$ üreteçli bir nilpotent grup olacak şekilde d üreteçli nilpotent olmayan residually nilpotent torsiyonsuz grup olduğu ispat edilmiştir.

k pozitif bir tamsayı olsun. Her sonsuz altkümesi $[x, {}_k y] = 1$ olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını kapsayan grupların sınıfı $\mathcal{E}_k(\infty)$ şeklinde ifade edilir. [2] de Abdollahi bir sonlu üreteçli metabelyan G grubunun $\mathcal{E}_k(\infty)$ grup sınıfından olması için gerek ve yeter şart $G/Z_k(G)$ nun sonlu olduğunu göstermiştir.

Abdollahi yine aynı çalışmada eğer $G, \mathcal{E}_k(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup ise o zaman $G/Z_c(G)$ sonlu olacak şekilde yalnızca k ya bağlı $c = c(k)$ tamsayısı olduğunu göstermiştir. Nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfı $\mathcal{N}_k$ olsun. $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından her grup $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfındandır. [2] deki sonuçlar Teorem 1.1 ile birleştirildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 1.2

k bir pozitif tam sayı olsun.

(i) Eğer $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup ise o zaman sadece k ya bağlı bir $c = c(k)$ tamsayısı vardır öyle ki G grubu $\mathcal{TN}_c$ ye aittir.

(ii) Sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu bir grubun $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart bu grubun $\mathcal{TN}_{k+1}$ ye ait olmasıdır [13].

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLAR

2.1. Tanım

$\mathfrak{X}$ elemanları gruplar olan bir sınıf olsun. Eğer

i) $\mathfrak{X}$ mertebesi bir olan grubu içerir,

ii) $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ ise $G_1 \in \mathfrak{X}$ tir;

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{X}$ sınıfına bir *grup-teorik sınıf* (veya *grupların sınıfı*) denir. Örneğin bütün sonlu gruplar ve bütün abelyan gruplar bir grup-teorik sınıf oluştururlar. Daha genel olarak $\mathcal{P}$ bir grup özelliği olmak üzere eğer mertebesi 1 olan grup $\mathcal{P}$ özelliğine sahip ve $\mathcal{P}$ özelliğine sahip her G grubu için $G_1 \cong G$ iken G_1 grubu $\mathcal{P}$ özelliğine sahipse $\mathcal{P}$ ye grup-teorik özellik denir. Her grup-teorik sınıfına bir grup-teorik özelliği ve her grup-teorik özelliğine bir grup-teorik sınıfı karşılık geldiğinden ikisi birbirlerinin yerine kullanılabilir. $\mathfrak{X}$ grup sınıfına ait bir gruba $\mathfrak{X}$ -grup denir. Eğer bir grubun altgrubu $\mathfrak{X}$ -grup ise o altgruba $\mathfrak{X}$ -altgrup denir.

2.2. Tanım

X bir G grubunun boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. G nin X i kapsayan altgruplarının arakesitine X tarafından üretilen altgrup denir. X tarafından üretilen altgrup $\langle X \rangle$ şeklinde gösterilir. Eğer n bir pozitif tamsayı olmak üzere G grubu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretiliyorsa G ye n -üreteçli grup denir. Eğer G grubu n -üreteçli ise G ye *sonlu üreteçli* denir.

1-üreteçli $\langle x \rangle = \langle \{x\} \rangle$ grubuna *devirli grup* denir.

G nin altgruplarından oluşan küme $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ olmak üzere X_λ lar tarafından üretilen grup $\langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rangle$ şeklinde tanımlanır. Bu altgrup

$$\langle X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$$

veya $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ olacak şekilde Λ bir sonlu küme ise

$$\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n} \rangle$$

şeklinde yazılır.

Eğer $\langle g, X \rangle = G$ iken her zaman $\langle X \rangle = G$ oluyorsa g elemanına G nin üreteç olmayan elemanı denir.

2.3. Tanım

G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$x^y = y^{-1}xy$$

elemanına x in y ile eşleniği (konjugesi) denir.

X ve Y , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. G nin X in Y ile eşleniği olan altgrubu

$$X^Y = \langle x^y \mid x \in X, y \in Y \rangle \text{ olarak tanımlanır.}$$

2.4. Tanım

G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1} x_1^{x_2}$$

elemanına x_1 ile x_2 nin komütatörü denir. Daha genel olarak $n \geq 2$ olmak üzere n ağırlıklı basit bir komütatör, ardıl olarak

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[x_1] = x_1$ olarak kabul edilir.

$x, y \in G$ için $[x, \underbrace{y, \dots, y}_n]$ komütatörü $[x, {}_n y]$ ile gösterilir.

X_1 ve X_2 , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör altgrubu

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G]$ komütatör grubuna G nin *komütatör (derived) altgrubu* denir ve G' ile gösterilir. Yani $[G, G] = G'$ dir.

Daha genel olarak $[X_1] = \langle X_1 \rangle$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$[X_1, X_2, \dots, X_n] = [[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

olarak tanımlanır.

2.5. Tanım

G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer her $n \in N$ ve her $g \in G$ için $g^{-1}ng \in N$ yani $g^{-1}Ng \leq N$ ise o zaman N ye G nin bir *normal altgrubu* denir ve $N \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.

2.6. Tanım

G bir grup olsun. G nin 1 den ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa G grubuna *basit grup* denir.

2.7. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H nın G içindeki sol (veya sağ) kosetlerinin kümesinin kardinalitesine H nın G içindeki *indeksi* denir ve $|G:H|$ ile gösterilir

2.8. Tanım

X , G nin boştan farklı bir altkümesi olsun. G nin X i içeren bütün normal altgruplarının kesişimine X in G içindeki *normal kapanışı* denir.

$X^G = \langle g^{-1}Xg \mid g \in G \rangle$ ile gösterilir.

X^G , G nin X i içeren en küçük normal altgrubudur.

2.9. Tanım

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun.

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

altgrubuna H nın G içindeki *normalleyeni* denir.

$H \triangleleft N_G(H)$ ve $N_G(H)$, H in normal olduğu G nin en büyük altgrubudur.

2.10. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin her öz altgrubu normalleyeni tarafından öz olarak içeriliyorsa G ye *normalleyen şartını* sağlıyor denir. Başka bir ifadeyle G nin normallayen şartını sağlaması için gerek ve yeter şart her $H < G$ için $H < N_G(H)$ olmasıdır.

2.11. Tanım

G bir grup ve $a \in G$ olsun.

$$C_G(a) = \{x \in G \mid xa = ax\} = \{x \in G \mid [x, a] = 1\}$$

kümesine a nın G içindeki *merkezleyeni* denir. Eğer $N \leq G$ ise

$$C_G(N) = \{x \in G \mid \text{her } n \in N \text{ için } [n, x] = 1\}$$

kümesine N nin G içindeki *merkezleyeni* denir. $C_G(a)$ ve $C_G(N)$, G nin altgruplarıdır. Özel olarak $N \triangleleft G$ ise $C_G(N) \triangleleft G$ dir. $C_G(G)$ altgrubuna G nin *merkezi* denir ve $Z(G)$ ile gösterilir.

2.12. Tanım

G bir grup olmak üzere G nin her elemanının mertebesi sonlu ise G ye *periyodik (torsiyon) grup* denir. G nin birim eleman dışındaki her elemanının mertebesi sonsuz ise G ye *torsiyonsuz grup* denir. Eğer G nin en az bir elemanının mertebesi sonsuz ise G ye *periyodik olmayan grup* denir.

2.13. Tanım

G bir grup ve p asal sayı olsun. Her $g \in G$ için $g^{p^n} = 1$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tamsayısı varsa, başka bir deyişle G nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise o zaman G ye bir p -grubu denir.

2.14. Tanım

G bir grup olsun. $S = \{1 = G_0, G_1, \dots, G_n = G\}$ G nin altgruplarının bir dizisi olmak üzere

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

ise S ye G nin bir *sonlu serisi* denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına *serinin faktörleri* denir. Her bir G_i grubuna ise *serinin terimleri* denir. Eğer bütün G_i ler farklı ise o zaman negatif olmayan n tamsayısına *serinin uzunluğu* denir.

$T = \{H_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinalerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi;

$$(i) \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ ise } H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$$

$$(ii) H_0 = 1 \text{ ve } H_\beta = G$$

$$(iii) H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$$

$$(iv) \text{ Eğer } \lambda \text{ limit ordinali ise } H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha \text{ dır,}$$

şartlarını sağlıyorsa T ye bir *artan seri (ascending seri)* denir. Artan bir seriyi

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots H_\beta = G$$

şeklinde yazmak uygundur. Burada H_α lar serinin terimleri β serinin uzunluğudur.

Eğer T kümesi;

$$(i) \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ ise } H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$$

$$(ii) H_0 = G \text{ ve } H_\beta = 1$$

$$(iii) H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$$

$$(iv) \text{ Eğer } \lambda \text{ limit ordinali ise } H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha \text{ dır,}$$

şartlarını sağlıyorsa T ye bir *azalan seri* (*decreasing seri*) denir. Azalan bir seriyi

$$1 = H_\beta \dots \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

şeklinde yazmak uygundur.

2.15. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer H , G nin bir artan serisinin bir terimi ise H ya G nin bir *artan altgrubu* denir ve $HascG$ ile ifade edilir.

2.16. Tanım

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \triangleleft H_{r-1} \triangleleft \cdots \triangleleft H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, \dots, H_r$ altgrupları varsa H , G *de altnormaldir* denir. Burada r sonlu ve $i = 0, 1, \dots, r-1$ için $H_{i+1} \triangleleft H_i$ dir. Genellikle $H \triangleleft^r G$, $H \triangleleft\triangleleft G$ veya $HsnG$ ile gösterilir.

$H_r = H$ olacak şekildeki en küçük $r \geq 0$ tamsayısına H nin G içindeki *altnormallik indeksi* denir ve $s(G: H)$ ile gösterilir.

2.17. Tanım

G bir grup olsun. Bir n tamsayısı için eğer G nin bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

serisi olmak üzere her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için G_{i+1}/G_i faktörleri abelyan ise G nin bu serisine *abelyan seri* denir.

2.18. Tanım

G bir grup olsun. G nin bir sonlu serisi

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

olmak üzere eğer her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i abelyan ise G ye bir *çözülebilir grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin *çözülebilirlik uzunluğu* (*derived uzunluğu*) denir ve $d(G)$ ile gösterilir. Tanımdan dolayı her abelyan grup çözülebilir gruptur.

2.19. Tanım

Eğer bir çözülebilir grubun çözülebilir uzunluğu en fazla 2 ise o zaman bu gruba *metabelyan grup* denir. Örneğin; G bir grup olsun. $1 \triangleleft G' \triangleleft G$ abelyan serisinin uzunluğu 2 olduğundan G bir metabelyan gruptur. Çözülebilirlik uzunluğu en fazla 1 olan gruplar sadece abelyan gruplardır. Bu durumda abelyan gruplar bir metabelyan gruptur.

2.20. Tanım

G bir grup ve $G^{(0)} = G$ olsun. $i \geq 0$ olmak üzere

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

dir. Bu seriye G nin *komütatör serisi* ve her $k \geq 0$ için $G^{(k)}$ ya G nin k yıncı *komütatör altgrubu* denir.

$G^{(1)} = G'$, $G^{(2)} = G''$ ve $G^{(3)} = G'''$ biçiminde yazılır. $G' = G$ ise G ye *mükemmel grup* denir ve $[G, G] = G$ dir. Komutatör serisi sona ermeyebilir ve 1'e ulaşmayabilir. Eğer bir $n \geq 0$ tamsayısı için $G^{(n)} = 1$ ise G bir *çözülebilir gruptur*. Bu şekildeki en küçük $n \geq 0$ tamsayısı G nin *komütatör uzunluğuna* eşittir.

2.21. Teorem

G bir grup olsun. Aşağıdakiler sağlanır [16].

(i) $G' \triangleleft G$ dir.

(ii) G/G' abelyandır.

İspat

(i) $[a, b] \in G'$ ve $g \in G$ olsun.

$$\begin{aligned} g[a, b]g^{-1} &= g(a^{-1}b^{-1}ab)g^{-1} \\ &= g(a^{-1}g^{-1}gb^{-1}g^{-1}gag^{-1}gb)g^{-1} \\ &= (ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1})(gag^{-1})(gbg^{-1}) \\ &= (gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}(gag^{-1})(gbg^{-1}) \\ &= [gag^{-1}, gbg^{-1}] \in G' \end{aligned}$$

olduğundan $g[a, b]g^{-1} \in G'$ ve böylece $G' \triangleleft G$ dir.

(ii) $aG', bG' \in G/G'$ olsun.

$$aG'bG' = abG' = ab(b^{-1}a^{-1}ba)G' = baG' = bG'aG'$$

olduğundan G/G' abelyandır.

2.22. Teorem

G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. G/N bölüm grubunun abelyan olması için gerek ve yeter şart $G' \leq N$ olmasıdır [17].

İspat

Eğer G/N abelyan ise her $xN, yN \in G/N$ için $(xN)(yN) = (yN)(xN)$

$$\Rightarrow (x^{-1}y^{-1}xy)N = N$$

$$\Rightarrow (x^{-1}y^{-1}xy) \in N$$

$$\Rightarrow [x, y] \in N$$

dir. O halde $\langle [x, y] | x, y \in G \rangle = G' \leq N$ olur.

Karşıt olarak $G' \leq N$ ise her $x, y \in G$ için $[x, y] \in N$ dir. Böylece her $x, y \in G$ için $[x, y]N = N$ olduğundan $xyN = yxN$ dir.

2.23. Sonuç

G bir grup ve $n \geq 0$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [16].

$$(i) G^{(n)} \triangleleft G$$

$$(ii) G^{(n)}/G^{(n+1)} \text{ abelyandır.}$$

İspat

(i) $G^{(n)} \triangleleft G$ olduğunu tümevarım hipoteziyle gösterelim. $n = 0$ için $G^{(0)} = G$ olduğundan $G^{(0)} \triangleleft G$ dir.

Kabul edelim ki $n \geq 0$ için $G^{(n)} \triangleleft G$ olsun. Şimdi $G^{(n+1)} \triangleleft G$ olduğunu gösterelim. $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] = \langle [x, y] \mid x, y \in G^{(n)} \rangle$ dir. Her $x, y \in G^{(n)}$ ve her $g \in G$ için

$$\begin{aligned}
 g^{-1}[x, y]g &= g^{-1}x^{-1}y^{-1}xyg \\
 &= g^{-1}x^{-1}gg^{-1}y^{-1}gg^{-1}xgg^{-1}yg \\
 &= (g^{-1}x^{-1}g)(g^{-1}y^{-1}g)(g^{-1}xg)(g^{-1}yg) \\
 &= (g^{-1}xg)^{-1}(g^{-1}yg)^{-1}(g^{-1}xg)(g^{-1}yg) \\
 &= (x^g)^{-1}(y^g)^{-1}x^gy^g \\
 &= [x^g, y^g]
 \end{aligned}$$

dir. $G^{(n)} \triangleleft G$ olduğundan $g^{-1}xg, g^{-1}yg \in G^{(n)}$ dir. Dolayısıyla $x^g, y^g \in G^{(n)}$ olur. Böylece $[x^g, y^g] \in G^{(n+1)}$ dir. O halde her $g \in G$ için $x_i, y_i \in G^{(n)}$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ ($0 \leq i \leq t$) olmak üzere

$$\begin{aligned}
 g^{-1}[x_1, y_1]^{\varepsilon_1}[x_2, y_2]^{\varepsilon_2} \dots [x_t, y_t]^{\varepsilon_t}g &= (g^{-1}[x_1, y_1]g)^{\varepsilon_1}(g^{-1}[x_2, y_2]g)^{\varepsilon_2} \dots (g^{-1}[x_t, y_t]g)^{\varepsilon_t} \\
 &= [x_1^g, y_1^g]^{\varepsilon_1}[x_2^g, y_2^g]^{\varepsilon_2} \dots [x_t^g, y_t^g]^{\varepsilon_t}
 \end{aligned}$$

olduğundan $G^{(n+1)} \triangleleft G$ dir. Böylece tümevarım hipotezi gereği ispat tamamlanmış olur.

(ii) Her $n \geq 0$ için $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] = (G^{(n)})'$ dir. Böylece Teorem 2.21 (ii) den dolayı $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ abelyandır.

2.24. Teorem

G bir grup olsun. G nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart bir $G^{(n)} = 1$ olacak biçimde bir n doğal sayısının olmasıdır [16].

İspat

G çözülebilir bir grup olsun. G nin öyle bir altnormal serisi

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$$

vardır ki, her $0 \leq k < n$ için H_{k+1}/H_k abelyandır. k üzerine tümevarımla her $0 \leq k \leq n$ için $G^{(k)} \leq H_{n-k}$ olduğunu gösterelim. $k = 0$ için $G^{(0)} = G = H_n$ olduğundan iddia doğrudur. Kabul edelim ki $k \geq 0$ için $G^{(k)} \leq H_{n-k}$ olsun. Ayrıca H_{n-k}/H_{n-k-1} abelyan olduğundan Teorem 2.22 den dolayı $(H_{n-k})' \leq H_{n-k-1}$ dir. O zaman

$$G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] \leq [H_{n-k}, H_{n-k}] = (H_{n-k})' \leq H_{n-k-1}$$

olduğundan $G^{(k+1)} \leq H_{n-k-1}$ dir. Dolayısıyla tümevarım hipotezi gereği $G^{(k)} \leq H_{n-k}$ dir.

Böylece $k = n$ için $G^{(n)} \leq H_{n-n} = H_0 = 1$ olduğundan $G^{(n)} = 1$ dir.

Karşıt olarak $G^{(n)} = 1$ olsun. O zaman

$$1 = G^{(n)} \triangleleft G^{(n-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(0)} = G$$

G nin bir normal serisidir. Ayrıca Sonuç 2.23 (ii) den dolayı her $0 \leq k < n$ için $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ abelyan olduğundan G çözülebilirdir.

2.25. Teorem

(i) Çözülebilir bir grubun her altgrubu ve her homomorfik görüntüsü çözülebilirdir.

(ii) G bir grup ve N , G nin bir normal altgrubu olsun. N ve G/N çözülebilir ise G çözülebilirdir [17].

2.26. Tanım

G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots G_\beta = G$$

serisi için $G_\lambda \triangleleft G$ ($\lambda \leq \beta$) ve her $\alpha < \beta$ için $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$ oluyorsa bu seriye *artan merkez seri* denir. Bir artan merkez seriye sahip olan gruba *hipermerkez grup* denir.

Eğer n bir doğal sayı olmak üzere G nin $G_j \triangleleft G$ ($j \leq n$) ve her $0 \leq i < n$ için $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ şartlarını sağlayan

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

serisi varsa G ye *nilpotent grup* denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin *nilpotentlik sınıfı* denir.

Nilpotent gruplar aşağıda tanımlarda belirtilen artan ve azalan merkez serileri ile de karakterize edilebilirler.

2.27. Tanım

G bir grup olsun. $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olarak tanımlansın. $\alpha > 1$ bir ordinal sayı olmak üzere her $\beta < \alpha$ için $Z_\beta(G)$ tanımlanmış olsun.

Eğer α limit ordinal ise

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinalitesi aşılamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \dots$ olacak şekilde bir en küçük λ ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin *hipermerkezi* denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir. Böylece

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \dots$$

serisine G nin *genelleştirilmiş yukarı merkez serisi* denir. $Z_\infty(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir $n \geq 0$ tamsayısı için $Z_n(G) = G$ ise G ye bir *nilpotent grup* denir. Bu eşitliği sağlayan n tamsayılarının en küçüğüne G nin *nilpotentlik sınıfı* denir. Burada açıkça görülür ki her abelyan grup nilpotenttir. Birimden farklı bir abelyan grubun nilpotentlik sınıfı birdir. Birim grubunun nilpotentlik sınıfı ise sıfırdır.

2.28. Tanım

G bir grup ve $\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse

$$\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$$

şeklinde tanımlansın.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) = G$$

serisine G nin *genelleştirilmiş aşağı merkez serisi* denir. Eğer bir n doğal sayısı için $\gamma_{n+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü $n + 1$ ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir.

2.29. Sonuç

Her nilpotent grup çözülebilirdir. Gerçekten G nilpotent ise bir $n \geq 0$ için

$$1 = Z_0(G) \triangleleft Z_1(G) \triangleleft Z_2(G) \triangleleft \dots \triangleleft Z_n(G) = G$$

ve her $0 \leq i < n$ için $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ abelyan olduğundan G çözülebilirdir.

Bunun karşıtı doğru değildir [16].

2.30. Teorem

Nilpotent grubun her altgrubu, her homomorfik görüntüsü ve sonlu direkt çarpımları nilpotenttir [18].

2.31. Teorem

Bir G nilpotent grubunun her H altgrubu G de altnormaldir ve üstelik H , G nin bir normal serisinin bir elemanıdır [19].

2.32. Teorem

G ve H birer grup olsun. Aşağıdakiler sağlanır [16].

(i) $\phi : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizma olsun. O zaman $G/\text{Ker}(\phi) \cong \phi(G)$ dir.

(ii) $K \leq G$ ve $L \triangleleft G$ olsun. O zaman $KL/L \cong K/K \cap L$ dir.

(iii) M ve N , G nin normal altgrupları ve $N \leq M$ olsun. O zaman $(G/N)/(M/N) \cong G/M$ dir.

2.33. Teorem

G bir grup ve K , G nin bir normal altgrubu olsun. Aşağıdakiler sağlanır [20].

(i) $x, y \in G$ ise o zaman G/K da,

$$[xK, yK] = [x, y]K$$

dır.

(ii) $H, J \leq G$ ise o zaman

$$[HK/K, JK/K] = [H, J]K/K \text{ ve } (G/K)' = G'K/K$$

olur.

2.34. Tanım

$\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{Y}$ iki grup sınıfı olsun. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ genişlemesi veya sınıf çarpımı şu şekilde tanımlanır: Bir G grubunun $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart G nin bir N normal altgrubu vardır öyle ki $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/N \in \mathfrak{Y}$ dir. Burada G grubuna $\mathfrak{X}$ tipindeki bir grubun $\mathfrak{Y}$ tipindeki bir grupla genişlemesi ($\mathfrak{X}$ -by- $\mathfrak{Y}$) denir.

Örneğin; $\mathfrak{X}$ torsiyon (sırasıyla, abelyan, nilpotent, sonlu, nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent, torsiyon) grup sınıfı ve $\mathfrak{Y}$ nilpotent (sırasıyla nilpotent, torsiyon, nilpotent, torsiyon, nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent) grup sınıfı ise o zaman G ye torsiyon-by-nilpotent ($\mathcal{TN}$) (sırasıyla, abelyan-by-nilpotent ($\mathcal{AN}$), nilpotent-by-torsiyon ($\mathcal{NT}$), sonlu-by-nilpotent ($\mathcal{FN}$), nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent-by-torsiyon ($\mathcal{N}_k\mathcal{T}$), torsiyon-by-nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent ($\mathcal{TN}_k$)) grup denir.

2.35. Tanım

G, L ve M birer grup olmak üzere eğer $K \cong L$ ve $G/K \cong M$ olacak şekilde bir $K \triangleleft G$ varsa G grubuna L grubunun M grubu ile bir genişlemesi denir.

2.36. Tanım

$\mathfrak{X}$ grupların bir sınıfı olsun. $G \in \mathfrak{X}$ ve H, G grubunun bir altgrubu olsun. Eğer $H \in \mathfrak{X}$ ise $\mathfrak{X}$ altgrup kapalıdır denir.

2.37. Tanım

$\mathfrak{X}$ grupların bir sınıfı olsun. G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Eğer $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/N \in \mathfrak{X}$ olduğunda $G \in \mathfrak{X}$ oluyorsa $\mathfrak{X}$ genişlemeye göre kapalıdır denir.

2.38. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grupların sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer her $1 \neq g \in G$ için $g \notin N_g$ ve $G/N_g \in \mathfrak{X}$ olacak şekilde G nin N_g normal altgrubu varsa G ye *residually $\mathfrak{X}$ -grup* denir. Dolayısıyla her $1 \neq x \in G$ için $x \notin H$ olacak şekilde $H \triangleleft G$ var ve G/H sonlu ise G ye *residually sonlu* denir.

2.39. Tanım

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer G nin her sonlu altkümesi G nin $\mathfrak{X}$ sınıfına ait bir altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye *lokal $\mathfrak{X}$ -grup* denir. Eğer $\mathfrak{X}$ - grubunun her altgrubu $\mathfrak{X}$ -grupsa G nin lokal $\mathfrak{X}$ -grup olması için G nin sonlu üreteçli her altgrubunun bir $\mathfrak{X}$ -grup olması yeterlidir. Böylece lokal sonlu bir grup, sonlu üreteçli her altgrubu sonlu olan gruptur. Lokal nilpotent bir grup, sonlu üreteçli her altgrubu nilpotent olan gruptur.

2.40. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin aşıkâr olmayan her sonlu üreteçli altgrubunun sonlu indeksli bir öz altgrubu varsa G ye *lokal dereceli (locally graded) grup* denir. Diğer bir deyişle G nin her aşıkâr olmayan sonlu üreteçli altgrubunun aşıkâr olmayan sonlu görüntüsü varsa G ye lokal dereceli grup denir.

2.41. Tanım

$$G = \langle c_i \mid c_1^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1, 2, \dots \rangle$$

şeklinde tanımlı G grubuna bir lokal devirli p -grubu veya prüfer tipli grup veya quasidevirli grup denir ve C_{p^∞} ile gösterilir. C_{p^∞} her öz altgrubu sonlu ve devirli grup olan sonsuz bir p -grubudur.

Eğer bir grup sonlu sayıda quasidevirli grubun direkt çarpımının bir sonlu genişlemesi ise o zaman gruba bir *Chernikov grup* denir.

2.42. Teorem

G bir sonlu üreteçli grup ve H , G nin sonlu indeksli bir altgrubu olsun. O zaman H altgrubu da sonlu üreteçlidir [18].

2.43. Teorem

G bir sonlu üreteçli abelyan grup olsun. Eğer G bir torsiyon grup ise G sonlu gruptur [18].

2.44. Teorem

Sonlu üreteçli çözülebilir torsiyon bir grup sonludur [18].

İspat

G bir sonlu üreteçli çözülebilir torsiyon grup olsun. Kabul edelim ki G nin çözülebilirlik uzunluğu d olsun. d üzerine tümevarımla G nin sonlu olduğu gösterilecektir.

Eğer $d = 0$ ise $G = 1$ olduğundan ispat açıktır. Böylece $d > 0$ ve çözülebilirlik uzunluğu d den küçük olan gruplar için iddia doğru olsun.

$G^{(d-1)} = A$ olsun. O halde G/A nun çözülebilirlik uzunluğu $d - 1$ olduğundan tümevarım hipotezinden dolayı G/A sonludur. G sonlu üreteçli ve G/A sonlu grup olduğundan Teorem 2.42 den dolayı A sonlu üreteçlidir. A sonlu üreteçli, abelyan ve torsiyon grup olduğundan Teorem 2.43 ten dolayı A sonlu bir gruptur. Dolayısıyla G/A ile A sonlu bir grup ve sonlu grup genişlemeye göre kapalı olduğundan G sonludur.

2.45. Lemma

Her sonsuz lokal sonlu grup bir sonsuz abelyan altgruba sahiptir [18].

2.46. Teorem

G lokal çözülebilir bir grup ve H da G nin bir normal altgrubu olsun. Eğer G/H' ve H torsiyon-by-nilpotent ise o zaman G torsiyon-by-nilpotenttir [21].

2.47. Teorem

G bir grup öyle ki $G/Z(G)$ lokal sonlu bir grubun nilpotent genişlemesi olsun. O zaman G lokal sonlu bir grubun nilpotent genişlemesidir [21].

2.48. Lemma

G , c sınıflı nilpotent grubun torsiyon grup genişlemesi olan torsiyonsuz lokal nilpotent bir grup olsun. O zaman G , c sınıflı nilpotent bir gruptur [22].

2.49. Teorem

Periyodik merkezli bir sonlu üreteçli nilpotent G grubu sonludur [23].

2.50. Teorem

Eğer bir G grubu normalleyen şartını sağlarsa o zaman G lokal nilpotenttir [18].

2.51. Teorem

G bir hipermerkez grupsa normalleyen şartını sağlar ve böylece G lokal nilpotenttir [18].

2.52. Teorem

Eğer bir G grubunun merkezi G de sonlu indeksli ve $|G:Z(G)| = n$ ise G' sonlu ve $(G')^n = 1$ dir [23].

2.53. Sonuç

G bir grup öyle ki $G/Z(G)$ lokal sonlu bir grup olsun. O zaman G' lokal sonlu bir gruptur [23].

2.54. Sonuç

$\mathfrak{X}$ bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer i sonlu olmak üzere G grubu $G/Z_i(G) \in \mathfrak{X}$ şartını sağlıyorsa o zaman $\gamma_{i+1}(G) \in \mathfrak{X}$ dir [23].

Özel olarak;

G bir grup öyle ki $G/Z_i(G)$ sonlu ise o zaman $\gamma_{i+1}(G)$ sonludur [18].

2.55. Teorem

G bir grup öyle ki bir i tamsayısı için $\gamma_{i+1}(G)$ sonlu ise o zaman $|G:Z_{2i}(G)|$ sonludur [23].

2.56. Sonuç

G bir grup olsun. G grubunun sonlu-by-nilpotent olması için gerek ve yeter şart bir $i \geq 0$ tamsayısı için $|G:Z_i(G)|$ sonlu olmasıdır [23].

İspat

G bir sonlu-by-nilpotent grup olsun. G nin normal sonlu bir F altgrubu vardır öyle ki G/F nilpotenttir. O halde bir $i \geq 0$ tamsayısı için $\gamma_{i+1}(G/F) = 1$ dir. Teorem 2.33 ten

$$\gamma_{i+1}(G/F) = [\gamma_i(G/F), G/F] = [\gamma_i(G), G]F/F = \gamma_{i+1}(G)F/F = 1$$

olduğundan $\gamma_{i+1}(G) \leq F$ dir. O halde $\gamma_{i+1}(G)$ sonludur. Dolayısıyla Teorem 2.55 ten dolayı $|G:Z_i(G)|$ sonlu olur.

Karşıt olarak; $|G:Z_i(G)|$ sonlu olsun. Sonuç 2.54 ten dolayı $\gamma_{i+1}(G)$ sonludur. O halde

$$\gamma_{i+1}(G/\gamma_{i+1}(G)) = 1 \Rightarrow G/\gamma_{i+1}(G) \in \mathcal{N}$$

dir. Böylece G grubu sonlu-by-nilpotenttir.

2.57. Tanım

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. $H \leq G$ ve $H < K \leq G$ iken $K = G$ elde edilirse H altgrubuna G nin *maksimal altgrubu* denir.

G bir grup ve H , G nin aşikar olmayan bir altgrubu olsun. Eğer H in aşikar olmayan altgrubu yoksa H ya G nin bir *minimal altgrubu* denir.

2.58. Tanım

X kısmi sıralı bir küme olsun. X in boştan farklı her X_0 altkümesi en az bir maksimal eleman içerirse bu kümeye *maksimallik şartını sağlar* denir. Kısaca, normal altgruaplarda maksimallik şartı max- n , altnormal altgruaplarda maksimallik şartı max- s , abelyan altgruaplarda maksimallik şartı max- ab ile gösterilir.

G bir grup olsun. Eğer G nin altgruplarının boş olmayan her kümesi bir minimal eleman bulunduruyorsa G ye *altgrupları üzerinde minimal şartını sağlar* denir. Kısaca, normal altgruaplarda minimal şartı min- n , altnormal altgruaplarda minimal şartı min- s ile gösterilir.

2.59. Teorem

Normal altgruaplarda maksimal şartını sağlayan bir çözülebilir G grubu sonlu üreteçlidir [18].

2.60. Sonuç

G bir grup olsun. G grubunun maksimal şartını sağlaması için gerek ve yeter şart G nin ve G nin her altgrubunun sonlu üreteçli olmasıdır [24].

2.61. Teorem

G normal altgruaplarda maksimal şartını sağlayan lokal nilpotent bir grup ise o zaman G sonlu üreteçli bir nilpotent gruptur [18].

2.62. Teorem

Sonlu üreteçli bir nilpotent grup maksimal şartını sağlar [24].

2.63. Teorem

Max, max-s, min, min-s özelliklerinin her biri genişlemeye göre kapalıdır [18].

2.64. Tanım

G bir grup ve $g \in G$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $[g, {}_n x] = 1$ olacak şekilde bir pozitif $n = n(g, x)$ tamsayısı varsa g ye bir *sağ Engel elemanı* denir. Eğer n, x den bağımsız olarak seçilebiliyorsa o zaman g, G nin bir *sınırlı sağ Engel elemanı* veya daha kesin olarak bir *sağ n -Engel elemanıdır*. G nin sağ Engel elemanlarının kümesi $R(G)$ ile sınırlı sağ Engel elemanlarının kümesi de $\bar{R}(G)$ ile gösterilir.

$g \in G$ olmak üzere eğer her $x \in G$ için $[x, {}_n g] = 1$ olacak şekilde bir pozitif $n = n(g, x)$ tamsayısı varsa g ye bir *sol Engel elemanı* denir. Eğer n, x den bağımsız olarak seçilebiliyorsa o zaman g, G nin bir *sınırlı sol Engel elemanı* veya daha kesin olarak bir *sol n -Engel elemanıdır*. G nin sol Engel elemanlarının kümesi $L(G)$ ile sınırlı sol Engel elemanlarının kümesi de $\bar{L}(G)$ ile gösterilir.

Herhangi bir G grubu için $G = L(G)$ ve $G = R(G)$ durumları aşıkarak denktir ve bu özelliği sağlayan bir gruba Engel grup denir. Eğer her $x, y \in G$ için $[x, {}_n y] = 1$ ise yani, her eleman hem sol hem de sağ n -Engel eleman ise G ye bir *n -Engel grup* denir.

2.65. Teorem

G bir grup ve H ve K, G nin normal lokal nilpotent altgrupları olsun. O zaman $J = HK$ çarpımı da lokal nilpotenttir. Bu teoreme Hirsch Plotkin Teoremi de denir [18].

2.66. Tanım

$\mathfrak{X}$ grupların bir sınıfı ve G bir grup olsun. G nin normal $\mathfrak{X}$ -altgruplarının çarpımına G nin $\mathfrak{X}$ -radikali denir. Özel olarak bir grubun her normal lokal nilpotent altgrubunun çarpımına

Hirsch-Plotkin radikali denir. Dolayısıyla Hirsch Plotkin radikali tek en büyük maksimal normal lokal nilpotent altgruptur.

2.67. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin faktörleri lokal nilpotent olan azalan bir serisi varsa G ye *radikal grup* denir.

2.68. Tanım

G bir grup olsun. G nin her devirli altgrubu artan ise G ye *Gruenberg grup* denir. Eğer G nin her devirli altgrubu altnormal ise G ye *Baer grup* denir.

2.69. Sonuç

Bir grubun her devirli altgrubu artan ise o zaman her sonlu üreteçli altgrubu artan ve nilpotenttir [18].

Buradan açıktır ki her Gruenberg grup lokal nilpotent gruptur.

2.70. Sonuç

Bir grubun her devirli altgrubu altnormal ise o zaman her sonlu üreteçli altgrubu altnormal ve nilpotenttir [18].

Buradan açıktır ki her Baer grup aynı zamanda lokal nilpotenttir.

2.71. Teorem

G bir çözülebilir grup olsun. Aşağıdakiler sağlanır [18].

(i) $L(G)$, Hirsch-Plotkin radikaline eşittir ve $L(G)$ bir Gruenberg gruptur.

Böylece bir çözülebilir Engel grup, bir Gruenberg gruptur.

(ii) $\bar{L}(G)$, Baer radikaline eşittir.

Böylece bir çözülebilir sınırlı Engel grup, bir Baer gruptur.

2.72. Teorem

G maksimal şartını sağlayan bir grup olsun. O zaman $L(G)$ ve $\bar{L}(G)$, G nin Hirsch-Plotkin radikaline eşittir ve G nin Hirsch-Plotkin radikali nilpotenttir. $R(G)$ ve $\bar{R}(G)$, G nin bir sonlu m için $Z_m(G)$ ye eşit olan hipermerkezine eşittir. Özel olarak G bir Engel grup ise nilpotenttir [18].

2.73. Tanım

G bir grup olsun. Her $x \in G$ için $\langle x \rangle^{asc} \langle x, a^G \rangle$ olacak şekildeki G nin a elemanlarının kümesi $\varrho(G)$ ile gösterilir. Bir $n = n(a)$ pozitif tamsayısı olmak üzere her $x \in G$ için $\langle x \rangle \triangleleft^n \langle x, a^G \rangle$ olacak şekildeki G nin a elemanlarının kümesi $\bar{\varrho}(G)$ ile gösterilir.

2.74. Teorem

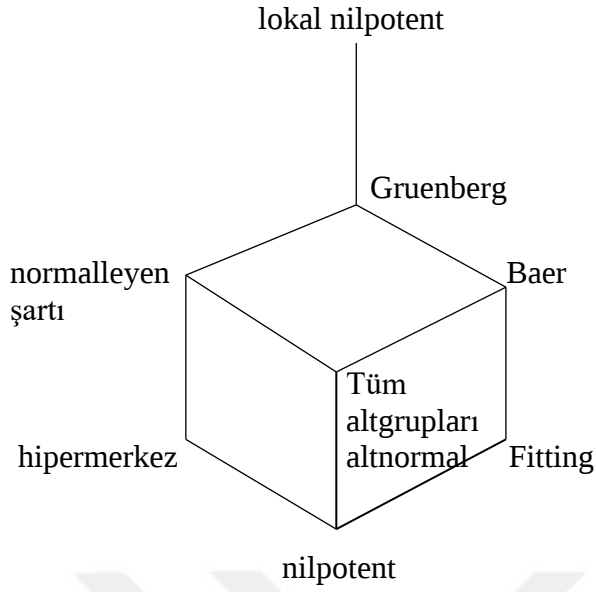
G bir radikal grup olsun. $L(G)$, G nin Hirsch-Plotkin radikaliyle çakışır ve $R(G)$ bir lokal nilpotent altgruptur. Dolayısıyla $R(G) = \varrho(G)$ dir ancak ve ancak $R(G)$ bir Gruenberg gruptur [22].

2.75. Sonuç

G bir grup olmak üzere, G nin Hirsch-Plotkin radikali bütün artan lokal nilpotent altgrupları içerir [18].

2.76. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün normal nilpotent altgrupları tarafından üretilen altgruba G nin *Fitting altgrubu* denir ve $Fit(G)$ ile gösterilir. Eğer G sonlu ise $Fit(G)$ nilpotent ve $Fit(G)$, G nin tek en büyük normal nilpotent alt grubudur. Eğer $G = Fit(G)$ ise G ye *Fitting grup* denir.



Şekil 2.1. Grup sınıflarının diyagramı

2.77. Sonuç

G bir grup olsun. G bir Fitting gruptur ancak ve ancak G nin her elemanı G nin bir normal nilpotent alt grubunun elemanıdır [18].

2.78. Teorem

G , $\max-ab$ koşulunu sağlayan bir grup olsun. O zaman $L(G)$ ve $\bar{L}(G)$, G nin Fitting alt grubu ile çakışır ve $R(G)$ ve $\bar{R}(G)$, G nin hipermerkezi ile çakışır [22].

2.79. Tanım

G bir grup ve $\mathcal{P}$ bir grup-teorik özellik olsun. Eğer G grubunun her öz bölüm grubu $\mathcal{P}$ özelliğini sağlarsa ancak G sağlamazsa G ye *just-non- $\mathcal{P}$ grup* (kısaca *JNP-grup*) denir.

2.80. Tanım

G bir grup olsun. Her $x \in G$ ve her $n > 0$ tamsayısı için öyle bir $e > 0$ tamsayısı vardır öyle ki $C_G(x^n) \leq C_G(x^e)$ ise G ye centrally eremitic grup denir [25].

2.81. Teorem

Her sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent grup centrally eremitic gruptur [25].

2.82. Tanım

G bir grup olsun. G_{i+1}/G_i devirli olacak şekilde G nin

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

altgruplarının bir zinciri varsa G ye *polydevirli (polycyclic) grup* denir.

2.83. Sonuç

Sonlu üreteçli nilpotent gruplar polydevirlidir [23].

2.84. Teorem

Bir sonlu üreteçli abelyan-by-polydevirli grup normal altgruplar üzerinde maksimal şartını sağlar [23].

2.85. Gözlem

Bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent grup normal altgruplar üzerinde maksimal şartını sağlar.

G bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent grup olsun. O halde G nin normal abelyan bir A altgrubu vardır öyle ki G/A sonlu üreteçli ve nilpotenttir. Dolayısıyla Sonuç 2.83 ten G/A polydevirli gruptur. Böylece G sonlu üreteçli abelyan-by-polydevirli gruptur. Teorem 2.84 ten dolayı G grubu normal altgruplar üzerinde maksimal şartını sağlar.

2.86. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin her sonlu üreteçli H altgrubu sonlu taksime sahip ise G ye *Coherent grubu* denir.

2.87. Tanım

$\mathfrak{X}$ grupların bir sınıfı olsun. Her sonsuz altkümesi $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{X}$ (sırasıyla, $\langle x, x^y \rangle \in \mathfrak{X}$) olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını içeren grupların sınıfı $(\mathfrak{X}, \infty)$ (sırasıyla, $(\mathfrak{X}, \infty)^*$) şeklinde gösterilir.

2.88. Tanım

k bir pozitif tamsayı olsun. Her sonsuz altkümesi $[x, {}_k y] = 1$ olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını kapsayan grupların sınıfı $\mathcal{E}_k(\infty)$ şeklinde ifade edilir.

2.89. Tanım

Her sonsuz altkümesi bir $n = n(x, y)$ tamsayısı için $[x, {}_n y] = 1$ olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını içeren grupların sınıfı $\mathcal{E}(\infty)$ şeklinde ifade edilir.

3. YARDIMCI LEMMALAR VE ÖNERMELER

Bu çalışmada yararlandığımız bazı lemmaların ispatı aşağıda verilmiştir.

3.1. Teorem

G bir grup ve $x, y, z \in G$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [18].

$$i) [x, y] = [y, x]^{-1}$$

$$ii) [xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z] \text{ ve}$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$$

$$iii) [x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1} \text{ ve } [x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$$

$$iv) [x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$$

İspat

$$(i) [y, x]^{-1} = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1}xy = [x, y]$$

$$(ii) [x, z]^y [y, z] = y^{-1}[x, z]y[y, z]$$

$$= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz$$

$$= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$$

$$= (xy)^{-1}z^{-1}(xy)z$$

$$= [xy, z]$$

$$[x, z][x, z, y][y, z] = [x, z][[x, z], y][y, z]$$

$$= [x, z][x, z]^{-1}y^{-1}[x, z]y[y, z]$$

$$\begin{aligned}
[x, z][x, z]^{-1}y^{-1}[x, z]y[y, z] &= y^{-1}[x, z]y[y, z] \\
&= [x, z]^y[y, z]
\end{aligned}$$

$[x, z][x, z, y][y, z] = [x, z]^y[y, z]$ ve $[x, z]^y[y, z] = [xy, z]$ olduğundan

$$[x, z][x, z, y][y, z] = [xy, z]$$

dir. Böylece $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
[x, z][x, y]^z &= [x, z]z^{-1}[x, y]z \\
&= x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz \\
&= x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz \\
&= x^{-1}(yz)^{-1}x(yz) \\
&= [x, yz]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x, z][x, y][x, y, z] &= [x, z][x, y][[x, y], z] \\
&= [x, z][x, y][x, y]^{-1}z^{-1}[x, y]z \\
&= [x, z]z^{-1}[x, y]z \\
&= [x, z][x, y]^z
\end{aligned}$$

$[x, z][x, y][x, y, z] = [x, z][x, y]^z$ ve $[x, z][x, y]^z = [x, yz]$ olduğundan

$$[x, z][x, y][x, y, z] = [x, yz]$$

dir. Böylece $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$ elde edilir.

$$(iii) ([x, y]^{y^{-1}})^{-1} = (y[x, y]y^{-1})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
(y[x, y]y^{-1})^{-1} &= (yx^{-1}y^{-1}xyy^{-1})^{-1} \\
&= (yx^{-1}y^{-1}x)^{-1} \\
&= (x^{-1}yxy^{-1}) \\
&= [x, y^{-1}]
\end{aligned}$$

Böylece $([x, y]y^{-1})^{-1} = [x, y^{-1}]$ dir.

$$\begin{aligned}
([x, y]x^{-1})^{-1} &= (x[x, y]x^{-1})^{-1} \\
&= (xx^{-1}y^{-1}xyx^{-1})^{-1} \\
&= (y^{-1}xyx^{-1})^{-1} \\
&= xy^{-1}x^{-1}y \\
&= [x^{-1}, y]
\end{aligned}$$

Böylece $([x, y]x^{-1})^{-1} = [x^{-1}, y]$ dir.

(iv) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ olduğunu gösterelim.

$u = xzx^{-1}yx, v = yxy^{-1}zy$ ve $w = zyz^{-1}xz$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
[x, y^{-1}, z]^y &= y^{-1}[[x, y^{-1}], z]y \\
&= y^{-1}[x, y^{-1}]^{-1}z^{-1}[x, y^{-1}]zy
\end{aligned}$$

(i) den $y^{-1}[x, y^{-1}]^{-1}z^{-1}[x, y^{-1}]zy = y^{-1}[y^{-1}, x]z^{-1}[x, y^{-1}]zy$ dir.

$$\begin{aligned}
y^{-1}[y^{-1}, x]z^{-1}[x, y^{-1}]zy &= y^{-1}yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy \\
&= (xzx^{-1}yx)^{-1}yxy^{-1}zy
\end{aligned}$$

$$(xzx^{-1}yx)^{-1}yxy^{-1}zy = u^{-1}v$$

$$\begin{aligned} [y, z^{-1}, x]^z &= z^{-1}[[y, z^{-1}], x]z \\ &= z^{-1}[y, z^{-1}]^{-1}x^{-1}[y, z^{-1}]xz \end{aligned}$$

$$(i) \text{ den } z^{-1}[y, z^{-1}]^{-1}x^{-1}[y, z^{-1}]xz = z^{-1}[z^{-1}, y]x^{-1}[y, z^{-1}]xz \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} z^{-1}[z^{-1}, y]x^{-1}[y, z^{-1}]xz &= z^{-1}zy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz \\ &= (yxy^{-1}zy)^{-1}zyz^{-1}xz \\ &= v^{-1}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [z, x^{-1}, y]^x &= x^{-1}[[z, x^{-1}], y]x \\ &= x^{-1}[z, x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z, x^{-1}]yx \end{aligned}$$

$$(i) \text{ den } x^{-1}[z, x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z, x^{-1}]yx = x^{-1}[x^{-1}, z]y^{-1}[z, x^{-1}]yx \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} x^{-1}[x^{-1}, z]y^{-1}[z, x^{-1}]yx &= x^{-1}xz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx \\ &= (zyz^{-1}xz)^{-1}xzx^{-1}yx \\ &= w^{-1}u \end{aligned}$$

dir. O halde

$$[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = u^{-1}vv^{-1}ww^{-1}u = 1 \text{ dir.}$$

3.2. Lemma

G bir grup ve $x, y, z \in G$ olsun. O zaman $[x^z, y^z] = [x, y]^z$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}
[x^z, y^z] &= (x^z)^{-1}(y^z)^{-1}x^zy^z \\
&= (z^{-1}xz)^{-1}(z^{-1}yz)^{-1}(z^{-1}xz)(z^{-1}yz) \\
&= z^{-1}x^{-1}zz^{-1}y^{-1}zz^{-1}xzz^{-1}yz \\
&= z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz \\
&= z^{-1}[x, y]z \\
&= [x, y]^z
\end{aligned}$$

3.3. Lemma

H bir grup ve A , H in bir normal altgrubu olsun. Her $a \in A$ ve her $h \in H$ için,

i) $[a, h] \in A$ dır.

ii) Her $c \in \mathbb{Z}^+$ için $[a, {}_c h] \in A$ dır.

İspat

(i) $[a, h] = a^{-1}h^{-1}ah$ ve $A \triangleleft H$ olduğundan $[a, h] \in A$ dır.

(ii) Her $c \in \mathbb{Z}^+$ için $[a, {}_c h] \in A$ olduğunu c üzerine tümevarım uygulayarak gösterelim.

$c = 1$ için (i) den iddia sağlanır.

$c \geq 2$ olmak üzere $c - 1$ için doğru olsun. c için iddianın doğru olduğunu gösterelim. $c - 1$ için iddia doğru ise $[a, {}_{c-1} h] \in A$ dır.

$$[a, {}_c h] = [[a, {}_{c-1} h], h]$$

$$[[a_{,c-1} h], h] = [a_{,c-1} h]^{-1} h^{-1} [a_{,c-1} h] h$$

$[a_{,c-1} h] \in A$ ve $A \triangleleft H$ olduğundan $h^{-1} [a_{,c-1} h] h \in A$ dır.

$$\Rightarrow [a_{,c} h] = \underbrace{[a_{,c-1} h]^{-1}}_{\in A} \underbrace{h^{-1} [a_{,c-1} h] h}_{\in A}$$

$$\Rightarrow [a_{,c} h] \in A$$

dır. Böylece tümevarım hipotezi gereği ispatımız tamamlanmış olur.

3.4. Lemma

H bir grup ve A , H ın bir normal abelyan altgrubu olsun. Her $a \in A$ ve her $h \in H$ olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $[a, h]^{a^n} = [a, h]$ olur.

İspat

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $[a, h]^{a^n} = [a, h]$ olduğunu n üzerine tümevarım uygulayarak gösterelim.

$n = 1$ için

$$[a, h]^a = a^{-1} [a, h] a$$

Lemma 3.3 (i) den $[a, h] \in A$ ve A , H ın abelyan bir altgrubu olduğundan

$$[a, h]^a = [a, h]$$

dır. $n > 1$ olmak üzere iddia $n - 1$ için doğru olsun. n için iddianın doğru olduğunu gösterelim. $n - 1$ için iddia doğru ise $[a, h]^{a^{n-1}} = [a, h]$ dır.

$$[a, h]^{a^n} = ([a, h]^{a^{n-1}})^a$$

$$= [a, h]^a$$

$n = 1$ için iddia doğru olduğundan $[a, h]^a = [a, h]$ dır. Böylece tümevarım hipotezi gereği $[a, h]^{a^n} = [a, h]$ dır.

3.5. Lemma

H bir grup ve A , H ın normal abelyan bir altgrubu olsun. Her $a \in A$ ve her $h \in H$ olsun.

i) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[a^n, h] = [a, h]^n \text{ ve } [h, a^n] = [h, a]^n \text{ dır.}$$

ii) Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[a^m h, a^n h] = ([a, h]^{(m-n)})^h \text{ dır.}$$

iii) Her $m, n, c \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[[a^m h, a^n h]_c a^n h] = ([a_{c+1} h]^{(m-n)})^h \text{ dır.}$$

iv) Eğer A torsiyonsuz bir grup ise her $m, n, c \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[[a^m h, a^n h]_c a^n h] = 1 \text{ iken } [a_{c+1} h] = 1 \text{ dır.}$$

İspat

(i) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n üzerine tümevarımla $[a^n, h] = [a, h]^n$ olduğunu gösterelim.

$n = 2$ için

$$[a^2, h] = [aa, h] \text{ ve Teorem 3.1 (ii) den } [aa, h] = [a, h]^a [a, h] \text{ dır.}$$

$$[a, h]^a [a, h] = a^{-1} [a, h] a [a, h]$$

dır. Lemma 3.3 (i) den $[a, h] \in A$ ve A abelyan olduğundan

$$\begin{aligned}
a^{-1}[a, h]a[a, h] &= a^{-1}a[a, h][a, h] \\
&= [a, h]^2
\end{aligned}$$

dir. $n > 1$ olmak üzere iddia $n - 1$ için doğru olsun. n için iddianın doğru olduğunu gösterelim. $n - 1$ için iddia doğru ise $[a^{n-1}, h] = [a, h]^{n-1}$ dir.

$$[a^n, h] = [a^{n-1}a, h] \text{ ve Teorem 3.1 (ii) den } [a^{n-1}a, h] = [a^{n-1}, h]^a[a, h] \text{ dir.}$$

$$[a^{n-1}, h]^a[a, h] = a^{-1}[a^{n-1}, h]a[a, h] \text{ ve } [a^{n-1}, h] = [a, h]^{n-1} \text{ olduğundan}$$

$$a^{-1}[a^{n-1}, h]a[a, h] = a^{-1}[a, h]^{n-1}a[a, h]$$

dır. Lemma 3.3 (i) den $[a, h] \in A$ ve A abelyan olduğundan

$$\begin{aligned}
a^{-1}[a, h]^{n-1}a[a, h] &= a^{-1}a[a, h]^{n-1}[a, h] \\
&= [a, h]^n
\end{aligned}$$

dır. Böylece tümevarım hipotezi gereği ispatımız tamamlanmış olur.

Benzer şekilde n üzerine tümevarımla $[h, a^n] = [h, a]^n$ olduğu gösterilir.

(ii) Her $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
[a^m h, a^n h] &= (a^m h)^{-1}(a^n h)^{-1}(a^m h)(a^n h) \\
&= h^{-1}a^{-m}h^{-1}a^{-n}a^m h a^n h \\
&= h^{-1}a^{-m}a^n a^{-n}h^{-1}a^{-n}a^m h a^n h \\
&= h^{-1}a^{-m+n}a^{-n}h^{-1}a^{m-n}h a^n h \\
&= h^{-1}(a^{m-n})^{-1}(h a^n)^{-1}a^{m-n}(h a^n)h
\end{aligned}$$

$$h^{-1}(a^{m-n})^{-1}(ha^n)^{-1}a^{m-n}(ha^n)h = h^{-1}[a^{m-n}, ha^n]h$$

Teorem 3.1 (ii) den $[a^{m-n}, ha^n] = [a^{m-n}, a^n][a^{m-n}, h]^{a^n}$ olduğundan

$$h^{-1}[a^{m-n}, ha^n]h = h^{-1}[a^{m-n}, a^n][a^{m-n}, h]^{a^n}h$$

dır. A abelyan olduğundan $[a^{m-n}, a^n] = 1$ dir. Böylece

$$h^{-1} \underbrace{[a^{m-n}, a^n]}_1 [a^{m-n}, h]^{a^n}h = h^{-1}[a^{m-n}, h]^{a^n}h$$

dır. (i) den

$$h^{-1}[a^{m-n}, h]^{a^n}h = h^{-1}([a, h]^{(m-n)})^{a^n}h$$

dır. Lemma 3.4 ten

$$\begin{aligned} h^{-1}([a, h]^{(m-n)})^{a^n}h &= h^{-1}[a, h]^{(m-n)}h \\ &= ([a, h]^{(m-n)})^h \end{aligned}$$

dır. Böylece $[a^m h, a^n h] = ([a, h]^{(m-n)})^h$ elde edilir.

(iii) Her $m, n, c \in \mathbb{Z}^+$ için c üzerine tümevarımla $[a^m h, a^n h]_c = ([a_{c+1} h]^{(m-n)})^h$ olduğunu gösterelim.

$c = 1$ için (ii) den

$$[a^m h, a^n h] = ([a, h]^{(m-n)})^h, a^n h$$

dır. Teorem 3.1 (ii) den $[([a, h]^{(m-n)})^h, a^n h] = [([a, h]^{(m-n)})^h, h][([a, h]^{(m-n)})^h, a^n]^h$

dır. Lemm 3.3 (i) den $[a, h] \in A$ ve A abelyan olduğundan $[([a, h]^{(m-n)})^h, a^n]^h = 1$ dir.

Böylece

$$\left[([a, h]^{(m-n)})^h, h\right] \left[([a, h]^{(m-n)})^h, a^n\right]^h = \left[([a, h]^{(m-n)})^h, h\right]$$

dir. $h^h = h$ olduğundan $\left[([a, h]^{(m-n)})^h, h\right] = \left[([a, h]^{(m-n)})^h, h^h\right]$ dir.

Lemma 3.2 den

$$\left[([a, h]^{(m-n)})^h, h^h\right] = \left[[a, h]^{(m-n)}, h\right]^h$$

ve (i) den

$$\left[[a, h]^{(m-n)}, h\right]^h = \left([a, h], h\right)^{(m-n)h} = ([a, {}_2h]^{(m-n)})^h$$

dir. Böylece $\left[[a^m h, a^n h], a^n h\right] = ([a, {}_2h]^{(m-n)})^h$ dir.

$c > 1$ olmak üzere iddia $c - 1$ için doğru olsun. c için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$c - 1$ için iddia doğru ise $\left[[a^m h, a^n h]_{c-1}, a^n h\right] = ([a, {}_c h]^{(m-n)})^h$ dir.

$$\left[[a^m h, a^n h]_{c-1}, a^n h\right] = \left[[a^m h, a^n h]_{c-1}, a^n h\right]$$

dir. $\left[[a^m h, a^n h]_{c-1}, a^n h\right] = ([a, {}_c h]^{(m-n)})^h$ olduğundan

$$\left[[a^m h, a^n h]_{c-1}, a^n h\right] = \left([a, {}_c h]^{(m-n)})^h, a^n h\right]$$

dir. $([a, {}_c h]^{(m-n)})^h = x$ olsun. Lemma 3.3 (ii) den $[a, {}_c h] \in A$ olduğundan $x \in A$ dir. O halde

$$\left([a, {}_c h]^{(m-n)})^h, a^n h\right] = [x, a^n h]$$

dir. Teorem 3.1 (ii) den $[x, a^n h] = [x, h][x, a^n]^h$

ve A abelyan olduğundan

$[x, h] \underbrace{[x, a^n]}_1^h = [x, h] = \left[([a, c] h)^{(m-n)} \right]^h, h$ dir. Böylece $h^h = h$ olduğundan

$$\left[([a, c] h)^{(m-n)} \right]^h, h = \left[([a, c] h)^{(m-n)} \right]^h, h^h$$

dir. Lemma 3.2 den

$$\left[([a, c] h)^{(m-n)} \right]^h, h^h = \left[([a, c] h)^{(m-n)}, h \right]^h$$

ve (i) den

$$\left[([a, c] h)^{(m-n)}, h \right]^h = \left(\left[[a, c] h, h \right]^{(m-n)} \right)^h = ([a, c+1] h)^{(m-n)}^h \text{ dir.}$$

Böylece tümevarım hipotezi gereği $\left[[a^m h, a^n h],_c a^n h \right] = ([a, c+1] h)^{(m-n)}^h$ dir.

(iv) Eğer $\left[[a^m h, a^n h],_c a^n h \right] = 1$ ise (iii) den dolayı,

$$\left[[a^m h, a^n h],_c a^n h \right] = ([a, c+1] h)^{(m-n)}^h = 1$$

dir. $m = n$ ise iddia açıktır. O halde $m \neq n$ olsun. Böylece $[a, c+1] h)^{(m-n)} = 1$ dir. Lemma 3.3 (ii) den dolayı $[a, c+1] h \in A$ dir. $m \neq n$ için A torsiyonsuz olduğundan $[a, c+1] h = 1$ dir.



4. ÜRETEÇ SAYISI İKİ OLAN TORSİYON GRUBUN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN ALTGRUPLARA SAHİP ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR

Bu kısımda Nadir Trabelsi'nin "Soluble groups with many 2-generator torsion-by-nilpotent subgroups" başlıklı makalesi incelenerek bu makaledeki önemli sonuçlar ayrıntılı bir şekilde verilecektir. Bu bölümde elde ettiğimiz sonuçlardan diğer bölümde yararlanılacaktır.

B. H. Neuman, [1] de bir grubun, merkezinin sonlu genişlemesi (merkez-by-sonlu) olması için gerek ve yeter şart her sonsuz altkümesinin değişmeli olan farklı iki eleman çiftini içerdiğini göstermiştir. Bu sonuçtan dolayı, benzer yapıdaki problemler birçok makalenin konusu olmuştur (örneğin; [2-14]). Özellikle, [9] da Lennox ve Wiegold, $\mathfrak{X}$ belirli bir grup sınıfı olmak üzere her sonsuz altkümesinin bir $\mathfrak{X}$ -grubunu üreten iki farklı elemanı içeren, grupların (bu gruplar kısaca $(\mathfrak{X}, \infty)$ ile gösterilir) sınıfını incelemiştir. Buradaki $\mathfrak{X}$ grup sınıfı, polycyclic veya nilpotent veya coherent grupların sınıfı olduğunda $(\mathfrak{X}, \infty)$ sınıfına ait olan sonlu üreteçli çözülebilir gruplar karakterize edilmiştir.

Bu çalışmada ise $\mathfrak{X}$ torsiyon grubun nilpotent genişlemesi olan grupların (torsiyon-by-nilpotent grup) (kısaca $\mathcal{TN}$ ile gösterilir) sınıfı ya da Chernikov grubun nilpotent genişlemesi olan grupların (Chernikov-by-nilpotent grup) (kısaca $\mathcal{CN}$ ile gösterilir) sınıfı olduğunda $(\mathfrak{X}, \infty)$ sınıfı çalışılacaktır.

Bu makalede $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından elde edilen sonuçlar, Tarek Rouabhi ve Nadir Trabelsi'nin "A note on Torsion-by-Nilpotent Groups" başlıklı makalesinde $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfına genişletilecektir. Bu nedenle öncelikle $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından elde edilen sonuçlar incelenecek ve daha sonra da $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfları ele alınacaktır.

Bu makaledeki ana sonuç ispatı daha sonra verilmek üzere aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

4.1. Teorem

G , $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. O zaman G grubu bir torsiyon grubun nilpotent genişlemesidir (torsiyon-by-nilpotenttir) [12].

k bir pozitif tamsayı ve $\mathcal{N}_k$ nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfı olsun. [3] de Abdollahi ve Taeri, bir sonlu üreteçli metabelyan G grubunun $(\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $G/Z_k(G)$ nun sonlu olduğunu göstermiştir. Abdollahi ve Taeri yine aynı çalışmada bir sonlu üreteçli çözülebilir G grubunun $(\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$ sonlu grupların sınıfı ve $\mathcal{N}_k^{(2)}$, 2-üreteçli ve nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfı olmak üzere G nin $\mathcal{FN}_k^{(2)}$ sınıfına ait olduğunu göstermiştir.

Ayrıca $\mathcal{E}_k$, k -Engel grupların sınıfı olsun. [10] da; Longobardi G , $(\mathcal{E}_k, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli lokal dereceli bir grup ise o zaman G grubunun $\mathcal{FE}_k$ sınıfına ait olduğunu göstermiştir. [3] ve [10] un sonuçları ve Teorem 4.1 birleştirildiğinde ispatı daha sonra verilmek üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

4.2. Sonuç

k bir pozitif tam sayısı olsun.

- (i) Sonlu üreteçli çözülebilir bir G grubunun $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G grubunun $\mathcal{TN}_k^{(2)}$ sınıfına ait olmasıdır.
- (ii) Sonlu üreteçli metabelyan bir G grubunun $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G grubunun $\mathcal{TN}_k$ sınıfına ait olmasıdır.
- (iii) Sonlu üreteçli çözülebilir bir G grubunun $(\mathcal{TE}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G grubunun $\mathcal{TE}_k$ sınıfına ait olmasıdır [12].

Bu bölümde öncelikle $\mathfrak{X}$ herhangi bir grup sınıfı olmak üzere, $(\mathfrak{X}, \infty)$ grup sınıfıyla ilgili bazı sonuçlar incelendikten sonra yukarıda verilen Teorem 4.1 ve Sonuç 4.2 nin ispatında kullanılacak lemmalar ve ispatları verilecektir. Teoremin ispatı için [21] de Endimioni ve Traustasson'un "On Torsion-by-Nilpotent Groups" başlıklı makalesindeki sonuçlar kullanılacaktır.

Şimdi $(\mathfrak{X}, \infty)$ grup sınıfıyla ilgili sonuçlar verilecektir.

4.3. Teorem

G bir grup olsun. G nin $(\mathcal{A}, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G nin merkez-by-sonlu grup olmasıdır [26].

4.4. Sonuç

G sonlu üreteçli metabelyan bir grup olsun. O zaman G grubunun $(\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $G/Z_k(G)$ grubunun sonlu olmasıdır. Bu sonuç, çözülebilirlik uzunluğu ≥ 3 olan sonlu üreteçli çözülebilir gruplar için doğru değildir [3].

4.5. Teorem

G , $(\mathcal{N}, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. O zaman G sonlu üreteçli, çözülebilir, sonlu-by-nilpotent bir gruptur [9].

4.6. Lemma

$G = \langle x, y \rangle$ grubu $(\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfından torsiyonsuz nilpotent bir grup olsun. O zaman $G = Z_k(G)$ dir [3].

4.7. Teorem

G sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. G nin $(\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G nin bir sonlu-by- $\mathcal{N}_k^{(2)}$ grup olmasıdır [3].

4.8. Teorem

G sonlu üreteçli lokal dereceli bir grup olsun. Eğer G grubu $(\mathcal{E}_k, \infty)$ sınıfından ise G grubu sonlu-by- $\mathcal{E}_k$ dir [10].

4.9. Teorem

G sonlu üreteçli residually sonlu bir grup olsun. Eğer G grubu $(\mathcal{E}_k, \infty)$ sınıfından ise G sonlu-by- $\mathcal{E}_k$ dir [10].

4.10. Teorem

Bir sonlu üreteçli torsiyonsuz nilpotent G grubu bir p asalı için bir residually sonlu p -grubudur [18].

4.11. Lemma

$c > 0$ bir tamsayı ve $G, \mathcal{N}_c\mathcal{T}$ sınıfından bir grup olsun. Eğer $G, (\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfına ait ise o zaman $G, (\mathcal{TN}_c, \infty)$ sınıfındandır [12].

İspat

$c > 0$ bir tamsayı ve $G, \mathcal{N}_c\mathcal{T}$ sınıfından bir grup olsun. Ayrıca G grubu $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından olsun. G grubu $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından ise G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TN}$ dir. Böylece $\langle x, y \rangle$ nin normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki $\langle x, y \rangle/T$ torsiyonsuz nilpotent gruptur. $G \in \mathcal{N}_c\mathcal{T}$ olduğundan G nin nilpotentlik sınıfı en fazla c olan normal nilpotent bir N altgrubu vardır öyle ki G/N torsiyon gruptur. $\langle x, y \rangle \leq G$ olduğundan $\langle x, y \rangle \cap N$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı en fazla c olduğundan $\langle x, y \rangle \cap N \in \mathcal{N}_c$ dir. Teorem 2.32 (ii) den

$$\langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap N \cong \langle x, y \rangle N / N \leq G / N$$

olduğundan $\langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap N$ torsiyon gruptur. Böylece $\langle x, y \rangle$ grubu $\mathcal{N}_c\mathcal{T}$ sınıfındandır. $\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_c\mathcal{T}$ olduğundan $\langle x, y \rangle$ nin nilpotentlik sınıfı en fazla c olan normal nilpotent bir M altgrubu vardır öyle ki $\langle x, y \rangle / M$ torsiyon gruptur.

Teorem 2.32 (ii) den $TM/T \cong M/T \cap M$ dir. $TM/T \cong M/T \cap M$ nilpotentlik sınıfı en fazla c olan bir nilpotent grup ve Teorem 2.32 (iii) den

$$(\langle x, y \rangle / T) / (TM / T) \cong \langle x, y \rangle / TM$$

torsiyon grup olduğundan $(\langle x, y \rangle / T) / (TM / T)$ torsiyon gruptur. Böylece $\langle x, y \rangle / T \in \mathcal{N}_c \mathcal{T}$ dır. O zaman $\langle x, y \rangle / T$, $\mathcal{N}_c \mathcal{T}$ sınıfından torsiyonsuz nilpotent grup olduğundan Teorem 2.48 den $\langle x, y \rangle / T \in \mathcal{N}_c$ ve böylece $\langle x, y \rangle \in \mathcal{T} \mathcal{N}_c$ dir.

Sonuç olarak,

G , $(\mathcal{T} \mathcal{N}, \infty)$ sınıfına ait ise o zaman G , $(\mathcal{T} \mathcal{N}_c, \infty)$ sınıfındandır.

4.12. Lemma

G , $(\mathcal{T} \mathcal{N}, \infty)$ sınıfından çözülebilir bir grup olsun. G , abelyan-by-torsiyon grup ise o zaman G , torsiyon-by-abelyan gruptur [12].

İspat

G , $(\mathcal{T} \mathcal{N}, \infty)$ sınıfından çözülebilir abelyan-by-torsiyon bir grup olsun. $\mathcal{A}$ abelyan grupların sınıfı olmak üzere G grubu $\mathcal{AT}$ sınıfındandır. Bir abelyan grup nilpotentlik sınıfı 1 olan bir grup olduğundan $\mathcal{A} = \mathcal{N}_1$ ve dolayısıyla G grubu $\mathcal{N}_1 \mathcal{T}$ sınıfındandır. Lemma 4.11 den G , $(\mathcal{T} \mathcal{N}_1, \infty)$ sınıfına yani G , $(\mathcal{T} \mathcal{A}, \infty)$ sınıfına ait bir gruptur. G nin torsiyon-by-abelyan grup olduğunu kanıtlamak için öncelikle G nin torsiyon elemanlarının kümesinin bir altgrup olduğunu göstereceğiz.

x, y , G nin sonlu mertebeli iki elemanı ve $H = \langle x, y \rangle$ olsun. G grubu $\mathcal{AT}$ sınıfından olduğundan G nin normal abelyan bir A altgrubu vardır öyle ki G/A torsiyon gruptur. $H \cap A$ abelyan bir grup olduğundan ikinci izomorfizma teoreminden $H/H \cap A \cong AH/A$ dır.

$$H/H \cap A \cong AH/A \leq G/A \in \mathcal{T}$$

oldüğundan $H/H \cap A$ torsiyon gruptur. Böylece $H = \langle x, y \rangle$ grubu $\mathcal{AT}$ sınıfına aittir. Aynı zamanda G çözülebilir olduğundan Teorem 2.25 (i) den H sonlu üreteçli çözülebilir bir gruptur. Ayrıca $H/H \cap A$ grubu da sonlu üreteçli çözülebilir torsiyon gruptur. Dolayısıyla Teorem 2.44 ten dolayı $H/H \cap A$ sonludur. Böylece $H = \langle x, y \rangle$ abelyan-by-sonlu bir gruptur.

Kabul edelim ki $H = \langle x, y \rangle$ sonsuz olsun. O zaman Lemma 2.45 ten H sonlu indeksli torsiyonsuz normal abelyan bir A altgrubuna sahiptir. Eğer A, H ın sonlu indeksli torsiyonlu normal abelyan bir altgrubu ise o zaman H sonlu üreteçli ve A, H ın sonlu indeksli altgrubu olduğundan Teorem 2.42 den A , sonlu üreteçli gruptur. O zaman A , sonlu üreteçli abelyan bir torsiyon grup olduğundan Teorem 2.43 ten A sonludur. H/A ve A sonlu olduğundan H sonludur. Bu ise H ın sonsuz olması ile çelişir. Dolayısıyla A, H ın sonlu indeksli torsiyonsuz normal abelyan bir altgrubudur.

$1 \neq a \in A$ ve $h \in H$ olsun. O zaman $\{a^i h \mid i > 0\}$ altkümesini alalım. Her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $i > j$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $a^i h = a^j h$ ise $a^{i-j} h = h$ ve $a^{i-j} = 1$ dir. A torsiyonsuz olduğundan $i - j = 0$ ve $i = j$ dir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $a^i h \neq a^j h$ dir. Böylece $\{a^i h \mid i > 0\}$ sonsuz bir altkümedir.

G grubu $(\mathcal{TA}, \infty)$ sınıfından olduğundan G nin her sonsuz altkümesi $i \neq j$ için $i, j \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^i h, a^j h$ elemanlarını içerir öyle ki $\langle a^i h, a^j h \rangle \in \mathcal{TA}$ dir.

$$i > j \text{ olmak üzere } i - j > 0 \text{ için } a^i h (a^j h)^{-1} = a^{i-j}$$

$$\Rightarrow a^{i-j} \in \langle a^i h, a^j h \rangle$$

$$\Rightarrow \langle a^{i-j}, a^i h \rangle \leq \langle a^i h, a^j h \rangle \in \mathcal{TA}$$

oldüğundan $\langle a^{i-j}, a^i h \rangle \in \mathcal{TA}$ dir.

$K = \langle a^{i-j}, a^i h \rangle$ olsun. O halde $K \in \mathcal{TA}$ olduğundan K grubunun normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki K/T abelyandır. O zaman Teorem 2.22 den $K' \leq T$ ve T torsiyon olduğundan K' torsiyon gruptur. $a^{i-j}, a^i h \in K$ olduğundan $[a^{i-j}, a^i h] \in K'$ dir. O halde K' torsiyon grup olduğundan pozitif bir m tamsayısı için $[a^{i-j}, a^i h]^m = 1$ dir. Böylece Teorem 3.1 (ii) den

$$[a^{i-j}, a^i h]^m = ([a^{i-j}, h][a^{i-j}, a^i]^h)^m$$

ve A, H ın abelyan ve normal altgrubu olduğundan

$$[a^{i-j}, h]^m (\underbrace{[a^{i-j}, a^i]^h}_1)^m = [a^{i-j}, h]^m$$

dır. Lemma 3.5 (i) den dolayı $[a^{i-j}, h]^m = [a, h]^{(i-j)m}$ dır. Dolayısıyla pozitif bir m tamsayısı için $[a, h]^{(i-j)m} = 1$ dir. Ayrıca Lemma 3.3 ten $[a, h] \in A$ dır. O halde A torsiyonsuz bir grup ve $[a, h]^{(i-j)m} = 1$ olduğundan $[a, h] = 1$ dir. Buradan $[a, h] = a^{-1}h^{-1}ah = 1$ ve $ah = ha$ olur. Her $h \in H$ için $ah = ha$ olduğundan $a \in Z(H)$ dir. Böylece A, H ın merkezi tarafından içerilir. Yani $A \leq Z(H)$ dır. O zaman H/A sonlu olduğundan $H/Z(H)$ sonludur. Böylece H merkez-by-sonlu bir gruptur.

Sonuç 2.53 ten Schur'un bir sonucu olarak H' sonlu bir gruptur. Ayrıca x, y sonlu mertebeden olmak üzere $H = \langle x, y \rangle$ ve H/H' abelyan olduğundan periyodiktir. O halde H/H' bir sonlu üreteçli abelyan ve periyodik grup olduğundan Teorem 2.43 ten H/H' sonludur. H' ve H/H' sonlu olduğundan H sonludur. Bu ise H nın sonsuz olmasıyla çelişir. Sonuç olarak H sonlu bir gruptur. Yani xy^{-1} sonlu mertebelidir. İddia edildiği gibi G de sonlu mertebeli elemanlar bir T altgrubu oluşturur.

T, G de torsiyon grup olduğundan G/T torsiyonsuz bir gruptur. O halde her $xT, yT \in G/T$ olsun. $x, y \in G$ ve $G \in (\mathcal{TA}, \infty)$ olduğundan $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TA}$ dır. Böylece $\langle x, y \rangle \cap T$ torsiyon grup olduğundan $\langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T$ abelyan gruptur.

$$\langle xT, yT \rangle = \langle x, y \rangle T \in G/T \text{ ve Teorem 2.32 (ii) den } \langle x, y \rangle T / T \cong \langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T$$

oldüğundan $\langle x, y \rangle T / T$ abelyandır. Buradan $\langle x, y \rangle T \in \mathcal{TA}$ olduğundan $G/T \in (\mathcal{TA}, \infty)$ dır. Böylece G/T grubu $(\mathcal{A}, \infty)$ sınıfına aittir. Lemma 4.3 ten dolayı G/T grubu merkez-by-sonludur. Dolayısıyla Sonuç 2.53 ten Schur'un bir sonucu olarak $(G/T)'$ sonlu bir gruptur. O halde $G/T / (G/T)'$ abelyan olduğundan G/T grubu sonlu-by-abelyandır. G/T nin normal sonlu bir F/T altgrubu vardır öyle ki $(G/T) / (F/T)$ abelyandır. Böylece Teorem 2.32 (iii) den $(G/T) / (F/T) \cong G/F$ olduğundan G/F abelyandır. F/T sonlu olduğundan her $fT \in F/T$ ve pozitif bir n tamsayısı için $(fT)^n = T$ dır. $f^n \in T$ ve T torsiyon grup olduğundan pozitif bir m tamsayısı için $(f^n)^m = f^{nm} = 1$ olur. Böylece $f \in T$ olduğundan F torsiyon gruptur. Dolayısıyla G , torsiyon-by-abelyan gruptur.

4.13. Lemma

G bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent grup, A , G nin abelyan Fitting altgrubu ve $x \in G$ olsun. Kabul edelim ki her $a \in A$ için $n \geq 0$, $m_1 > 0$ ve $m_2 > 0$ tamsayıları vardır öyle ki $[a, x^{m_1}, x^{m_2}] = 1$ olsun. O zaman sadece G ye bağlı olarak pozitif bir d tamsayısı vardır öyle ki $x^d \in A$ dır [12].

İspat

G bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent grup olduğundan [25] te Lennox ve Roseblade'nin bir sonucu olarak, Teorem 2.81 den bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent G grubu centrally eremitic grup olduğundan sadece G ye bağlı pozitif bir d tamsayı vardır öyle ki her $i > 0$ ve her $g \in G$ için $C_G(g^i) \leq C_G(g^d)$ kapsamalı geçerlidir.

İlk olarak a elemanı, lemmanın hipotezini sağlayan A nın bir elemanı ise $[a, x^{m_1}, x^{m_2}] = 1$ olduğunu n üzerine tümevarım uygulayarak göstereceğiz.

Eğer $n = 0$ ise $[a, x^{m_1}, x^{m_2}] = 1$ olduğundan $[a, x^{m_1}] = 1$ dir.

$C_G(x^{m_1}) = \{g \in G \mid [g, x^{m_1}] = 1\}$ ve $[a, x^{m_1}] = 1$ olduğundan $a \in C_G(x^{m_1})$ dir. G grubu centrally eremitic grup olduğundan $a \in C_G(x^{m_1}) \leq C_G(x^d)$ dır. Buradan $a \in C_G(x^d)$ olur. Dolayısıyla $[a, x^d] = 1$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $n > 0$ için $[a, x^{m_1}, x^{m_2}] = 1$ olsun. İddianın $n + 1$ için doğruluğunu gösterelim. $[a, x^{m_1}, x^{m_2}] = 1$ olduğundan

$$[a, x^{m_1}, x^{m_2}] = [a, x^{m_1}, \underbrace{x^{m_2}, \dots, x^{m_2}}_n] = [a, x^{m_1}, \underbrace{x^{m_2}, \dots, x^{m_2}}_{n-1}, x^{m_2}] = 1$$

$$\Rightarrow [a, x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_2}] = 1$$

$$\Rightarrow [[a, x^{m_1}, x^{m_2}], x^{m_2}] = 1$$

$$\Rightarrow [a, x^{m_1}, x^{m_2}] \in C_G(x^{m_2})$$

Böylece G centrally eremitic grup olduğundan $[a, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}] \in C_G(x^{m_2}) \leq C_G(x^d)$ dır. Buradan $[a, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}] \in C_G(x^d)$ dır. Böylece

$$[[a, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}], x^d] = [a, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}, x^d] = 1$$

olur. Şimdi $\langle a, x \rangle$ metabelyan ve Teorem 3.1 den dolayı her i, j tamsayıları için

$$\begin{aligned} [a, x^i x^j] &= [a, x^j x^i] \Rightarrow [a, x^j][a, x^i]^{x^j} = [a, x^i][a, x^j]^{x^i} \\ &\Rightarrow [a, x^i]^{-1} [a, x^i]^{x^j} = [a, x^j]^{-1} [a, x^j]^{x^i} \\ &\Rightarrow [a, x^i]^{-1} [a, x^i][a, x^i, x^j] = [a, x^j]^{-1} [a, x^j][a, x^j, x^i] \\ &\Rightarrow [a, x^i, x^j] = [a, x^j, x^i] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} [a, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}, x^d] &= [[a, x^{m_1}],_{n-2} x^{m_2}, x^{m_2}, x^d] \\ &= [[a, x^{m_1}],_{n-2} x^{m_2}, x^d, x^{m_2}] \end{aligned}$$

dir. Bu işlem ard arda uygulanırsa

$$[a, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}, x^d] = [[a, x^{m_1}], x^d]_{n-1} x^{m_2} = [a, x^d, x^{m_1},_{n-1} x^{m_2}] = 1$$

elde edilir. Tümevarım hipotezi tarafından gerektiği gibi $[a,_{n+1} x^d] = 1$ dir.

Şimdi $K = \langle A, x \rangle$ altgrubunu göz önüne alalım. A abelyan Fitting altgrup ve G abelyan-by-nilpotent grup olduğundan G/A nilpotent gruptur. O halde Teorem 2.31 den G/A nun her K/A altgrubu G/A grubunda altnormaldir. Dolayısıyla K, G grubunda altnormaldir.

$K = \langle A, x \rangle$ olduğundan her $y \in K$ için $a \in A$ ve bir r tamsayısı vardır öyle ki $y = x^r a$ dir. Yukarıda gösterildiği gibi negatif olmayan bir n tamsayısı için $[a,_{n+1} x^d] = 1$ olacak şekilde pozitif bir d tamsayısı vardır.

$$[y,_{n+1} x^d] = [x^r a,_{n+1} x^d] = [[x^r a, x^d],_n x^d]$$

ve Teorem 3.1 (ii) den $[x^r a, x^d] = [x^r, x^d]^a [a, x^d]$ dir.

$$[x^r a, x^d] = \underbrace{[x^r, x^d]^a}_1 [a, x^d] = [a, x^d]$$

olduğundan

$$[y,_{n+1} x^d] = [[x^r a, x^d],_n x^d] = [[a, x^d],_n x^d] = [a,_{n+1} x^d] = 1 \text{ dir.}$$

Böylece $[y,_{n+1} x^d] = 1$ olur.

Dolayısıyla x^d , K nın bir sol Engel elemanıdır. K çözülebilir olduğundan Teorem 2.71 den dolayı K nın sol engel elemanlarının kümesi ile K nın Hirsch-Plotkin radikali olan A_1 eşit olur. Böylece x^d , K nın bir sol Engel elemanı olduğundan $x^d \in A_1$ dir. K , G de altnormal ve $A_1 \leq K$ olduğundan A_1 , G nin bir altnormal lokal nilpotent altgrubudur. Böylece Sonuç 2.75 ten A_1 , G nin Hirsch-Plotkin radikali tarafından içerilir. Dolayısıyla x^d , G nin Hirsch-Plotkin radikalinin bir elemanıdır.

G bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent gruptur. Böylece Gözlem 2.85 ten G normal altgrupları üzerinde maksimal şartını sağlar. Bu nedenle Teorem 2.72 ve Teorem 2.78 den dolayı G nin Hirsch-Plotkin radikali Fitting altgrubuyla aynı olur. Dolayısıyla iddia edildiği gibi $x^d \in A$ dır.

Şimdi Teorem 4.1 in ve Sonuç 4.2 nin ispatını verelim.

4.1. Teorem

$G, (\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. O zaman G grubu torsiyon-by-nilpotenttir [12].

İspat

$G, (\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. G nin çözülebilirlik uzunluğu d olsun. d üzerine tümevarımla G nin torsiyon-by-nilpotent grup olduğu gösterilecektir.

Eğer $d = 1$ ise $G/1 \cong G$ olduğundan G nilpotenttir ve ispat açıktır.

$d > 1$ olduğunu varsayabiliriz. Çözülebilirlik uzunluğu $d - 1$ olan gruplar torsiyon-by-nilpotent olsun. O halde $G/G^{(d-1)}$ nun çözülebilirlik uzunluğu $d - 1$ olduğundan tümevarım hipotezinden dolayı $G/G^{(d-1)}$ torsiyon-by-nilpotenttir. $G/G^{(d-1)}$ torsiyon-by-nilpotent grup olduğundan $G/G^{(d-1)}$ nun normal torsiyon bir $T/G^{(d-1)}$ altgrubu vardır öyle ki $(G/G^{(d-1)})/(T/G^{(d-1)})$ nilpotent gruptur. O zaman Teorem 2.32 (iii) den $(G/G^{(d-1)})/(T/G^{(d-1)}) \cong G/T$ olduğundan G/T nilpotenttir. Ayrıca $T/G^{(d-1)}$ torsiyon ve $G^{(d-1)}$ abelyan olduğundan T abelyan-by-torsiyon gruptur. Dolayısıyla $T \in \mathcal{AT}$ ve G/T nilpotent olduğundan $G \in (\mathcal{AT})\mathcal{N}$ dir.

$T \in \mathcal{AT}$ olduğundan Lemma 4.12 den dolayı $T \in \mathcal{TA}$ dır. O zaman $T \in \mathcal{TA}$ olduğundan T nin normal torsiyon bir K altgrubu vardır öyle ki $T/K \in \mathcal{A}$ dır. Teorem 2.32 (iii) den

$$(G/K)/(T/K) \cong G/T \in \mathcal{N}$$

oldüğundan $G/K \in \mathcal{AN}$ dır. Dolayısıyla $G \in \mathcal{T}(\mathcal{AN})$ dır. $G/K \in \mathcal{AN}$ olduğundan normal abelyan bir A/K altgrubu vardır öyle ki Teorem 2.32 (iii) den $(G/K)/(A/K) \cong G/A \in \mathcal{N}$ dır. Buradan G bir sonlu üreteçli abelyan-by-nilpotent gruptur. Gözlem 2.85 ten dolayı G normal altgruplarda maksimal şartını karşılar ve $(\mathcal{TN}, \infty)$ bölüm kapalı bir sınıftır.

G nin just-non-(torsiyon-by-nilpotent) grup olduğunu kabul edebiliriz, yani $G \notin \mathcal{TN}$ fakat G nin her öz bölüm grubu torsiyon-by-nilpotenttir. Lokal çözülebilir bir G grubunun bir normal H altgrubu olmak üzere H ve G/H' torsiyon-by-nilpotent ise o zaman Teorem 2.46 dan G grubu torsiyon-by-nilpotenttir. O halde H torsiyon-by-nilpotent ise o zaman H abelyan olmalıdır. Çünkü H abelyan olursa $H' = 1$ dir. $G/H' \cong G \notin \mathcal{TN}$ olur ve G/H' , G nin öz bölüm grubu olamaz. $H \in \mathcal{TN}$ ve H abelyan olmazsa $G/H' \in \mathcal{TN}$ olduğundan Teorem 2.46 dan dolayı $G \in \mathcal{TN}$ çelişkisi oluşur. Bundan dolayı G nin her normal torsiyon-by-nilpotent altgrubu abelyandır. Özel olarak G nin A Fitting altgrubu abelyandır. G nin normal torsiyon bir M altgrubu olsun. G nin her öz bölüm grubu torsiyon-by-nilpotent olduğundan $G/M \in \mathcal{TN}$ dir. O halde G/M nin normal torsiyon bir N/M altgrubu vardır öyle ki Teorem 2.32 (iii) den $(G/M)/(N/M) \cong G/N$ nilpotenttir. N/M ve M torsiyon grup olduğundan N grubu da torsiyondur. Böylece $G \in \mathcal{TN}$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde G nin herhangi normal torsiyon altgrubu aşıkardır. Böylece A torsiyonsuz bir gruptur.

$1 \neq a \in A$ ve $x \in G$ için xA , G/A da sonsuz mertebeli bir eleman olsun. O zaman $\{x^i a \mid i > 0\}$ altkümesini alalım. $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $i > j$ olsun. Eğer $x^i a = x^j a$ için $x^{i-j} a = a$ ve $x^{i-j} = 1$ dır. A torsiyonsuz olduğundan $i - j = 0$ ve $i = j$ dir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $x^i a \neq x^j a$ dır. Böylece $\{x^i a \mid i > 0\}$ sonsuz bir altkümedir.

G grubu $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfına ait ve $(\mathcal{TN}, \infty)$ bölüm kapalı bir sınıf olduğundan G/A nun her sonsuz altkümesi $i \neq j$ için $i, j \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^i a, x^j a$ elemanlarının içerir öyle ki $\langle x^i a, x^j a \rangle \in \mathcal{TN}$ olur.

$$i > j \text{ olmak üzere } i - j > 0 \text{ için } x^{i-j} = x^i a (x^j a)^{-1}$$

$$\Rightarrow x^{i-j} \in \langle x^i a, x^j a \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x^i a, x^{i-j} \rangle \leq \langle x^i a, x^j a \rangle \in \mathcal{TN}$$

oldüğundan $\langle x^i a, x^{i-j} \rangle \in \mathcal{TN}$ dır.

$K = \langle x^i a, x^{i-j} \rangle$ olsun. O halde $K \in \mathcal{TN}$ olduğundan K nin normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki $K/T \in \mathcal{N}$ dir. K/T nilpotent olduğundan bir $n \geq 0$ tamsayısı için $\gamma_{n+1}(K/T) = 1$ dir. Teorem 2.33 ten

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}(K/T) &= [\gamma_n(K/T), K/T] \\ &= [\gamma_n(K), K] T/T \\ &= \gamma_{n+1}(K)T/T\end{aligned}$$

olduğundan $\gamma_{n+1}(K)T/T = 1$ olur. Buradan $\gamma_{n+1}(K) \leq T$ dır. O halde

$$\gamma_{n+1}(K) = \gamma_{n+1}(\langle x^i a, x^{i-j} \rangle)$$

torsiyon gruptur. Eğer $n = 0$ ise $\langle x^i a, x^{i-j} \rangle$ torsiyon gruptur. Böylece pozitif bir m tamsayısı için $(x^i a)^m = 1$ dir. Dolayısıyla $x^{im} \in A$ olduğundan bu bir çelişkidir. Eğer $n > 0$ ise $[x^i a, x^{i-j}] \in \gamma_{n+1}(\langle x^i a, x^{i-j} \rangle)$ olduğundan pozitif bir m tamsayısı için $[a_m x^{i-j}]^m = 1$ dir. Lemma 3.3 (ii) den $[a_m x^{i-j}] \in A$ dır. A torsiyonsuz grup olduğundan $[a_m x^{i-j}] = 1$ dir. Bunu Lemma 4.13 ten şu takip eder. Pozitif bir d tamsayısı vardır öyle ki $x^d \in A$ dır. $(xA)^d = x^d A = A$ olduğundan çelişki elde edilir. Böylece xA , G/A da sonlu mertebeli bir elemandır. O halde G/A grubu sonludur. Dolayısıyla G/A bir torsiyon grup olduğundan G abelyan-by-torsiyon gruptur. Lemma 4.12 den G grubu torsiyon-by-abelyandır. Böylece bir çelişki ile ispat tamamlanmış olur.

4.2. Sonuç

k bir pozitif tam sayı olsun.

(i) Sonlu üreteçli çözülebilir bir G grubunun $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G grubunun $\mathcal{TN}_k^{(2)}$ sınıfına ait olmasıdır.

(ii) Sonlu üreteçli metabelyan bir G grubunun $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G grubunun $\mathcal{TN}_k$ sınıfına ait olmasıdır.

(iii) Sonlu üreteçli çözülebilir bir G grubunun $(\mathcal{TE}_k, \infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G grubunun $\mathcal{TE}_k$ sınıfına ait olmasıdır [12].

İspat

i) $(\Rightarrow)$ $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup ise o zaman Teorem 4.1 den G torsiyon-by-nilpotenttir. Dolayısıyla G normal torsiyon bir T altgrubuna sahiptir. G grubu $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından ise G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TN}_k$ dir. O halde $\langle x, y \rangle \cap T$ torsiyon grup olduğundan $\langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T \in \mathcal{N}_k$ dir.

$\langle xT, yT \rangle = \langle x, y \rangle T \in G/T$ ve Teorem 2.32 (ii) den $\langle x, y \rangle T/T \cong \langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T$

olduğundan $\langle x, y \rangle T/T \in \mathcal{N}_k$ dir. Buradan $\langle x, y \rangle T \in \mathcal{TN}_k$ olduğundan $G/T, (\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfındandır. Böylece $G/T, (\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfından bir gruptur. Ayrıca G/T sonlu üreteçli çözülebilir torsiyonsuz bir gruptur. Böylece Teorem 4.7 den G/T grubu $\mathcal{FN}_k^{(2)}$ sınıfındandır. G/T nin normal sonlu bir F/T altgrubu vardır öyle ki $(G/T)/(F/T) \in \mathcal{N}_k^{(2)}$ dir. Teorem 2.32 (iii) den $(G/T)/(F/T) \cong G/F$ dir. Dolayısıyla $G \in \mathcal{FN}_k^{(2)}$ dir. F/T sonlu olduğundan her $fT \in F/T$ ve pozitif bir n tamsayısı için $(fT)^n = T$ dir. $f^n \in T$ ve T torsiyon grup olduğundan pozitif bir m tamsayısı için $(f^n)^m = f^{nm} = 1$ olur. Böylece $f \in T$ olduğundan F torsiyon gruptur. Sonuç olarak gerektiği gibi $G \in \mathcal{TN}_k^{(2)}$ dir.

$(\Leftarrow)$ G grubu $\mathcal{TN}_k^{(2)}$ sınıfına ait ise o zaman G grubunun her altgrubu da $\mathcal{TN}_k^{(2)}$ sınıfına ait olduğundan G nin $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfına ait olduğu kolayca görülür.

ii) $(\Rightarrow)$ $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli metabelyan bir grup olsun. $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup ise o zaman Teorem 4.1 den dolayı G grubu torsiyon-by-nilpotenttir. Dolayısıyla G normal torsiyon bir T altgrubuna sahiptir. G grubu $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfından ise G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TN}_k$ vardır. O halde $\langle x, y \rangle \cap T$ torsiyon grup olduğundan $\langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T \in \mathcal{N}_k$ dir.

$\langle xT, yT \rangle = \langle x, y \rangle T \in G/T$ ve Teorem 2.32 (ii) den $\langle x, y \rangle T/T \cong \langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T$

olduğundan $\langle x, y \rangle T/T \in \mathcal{N}_k$ dır. Buradan $\langle x, y \rangle T \in \mathcal{TN}_k$ olduğundan G/T , $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfındandır. Böylece G/T grubu $(\mathcal{N}_k, \infty)$ sınıfındandır. Ayrıca G/T sonlu üreteçli torsiyonsuz metabelyan bir gruptur. Sonuç 4.4 ten $(G/T)/Z_k(G/T)$ sonludur. O halde Sonuç 2.54 ten $\gamma_{k+1}(G/T)$ sonludur. $\gamma_{k+1}((G/T)/\gamma_{k+1}(G/T)) = 1$ olduğundan

$$(G/T)/\gamma_{k+1}(G/T) \in \mathcal{N}_k$$

dır. Böylece G/T grubu $\mathcal{FN}_k$ sınıfına aittir. Buradan G/T nin sonlu bir F/T altgrubu vardır öyle ki $(G/T)/(F/T) \in \mathcal{N}_k$ dır. Teorem 2.32 (iii) den $(G/T)/(F/T) \cong G/F$ dır. Dolayısıyla $G \in \mathcal{FN}_k$ dır. F/T sonlu olduğundan her $fT \in F/T$ ve pozitif bir n tamsayısı için $(fT)^n = T$ dır. $f^n \in T$ ve T torsiyon grup olduğundan pozitif bir m tamsayısı için $(f^n)^m = f^{nm} = 1$ olur. Böylece $f \in T$ olduğundan F torsiyon gruptur. Dolayısıyla $G \in \mathcal{TN}_k$ dır.

($\Leftarrow$) Sonlu üreteçli metabelyan bir G grubu $\mathcal{TN}_k$ sınıfına ait ise o zaman G grubunun her altgrubu da $\mathcal{TN}_k$ sınıfına aittir. O halde G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TN}_k$ dır. Dolayısıyla G grubu $(\mathcal{TN}_k, \infty)$ sınıfındandır.

iii) ($\Rightarrow$) G , $(\mathcal{TE}_k, \infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. G grubu $(\mathcal{TE}_k, \infty)$ sınıfından ise G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TE}_k$ dir. Buradan $\langle x, y \rangle$ grubunun normal torsiyon bir H altgrubu vardır öyle ki $\langle x, y \rangle / H \in \mathcal{E}_k$ olur. Teorem 2.25 (i) den $\langle x, y \rangle / H$ bir çözülebilir gruptur. Dolayısıyla $\langle x, y \rangle / H$ çözülebilir Engel bir grup olduğundan Teorem 2.71 (i) den $\langle x, y \rangle / H$ bir Guenberg gruptur. Her Guenberg grup lokal nilpotent olduğundan Sonuç 2.69 dan $\langle x, y \rangle / H$ lokal nilpotent gruptur. Böylece $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TN}$ dır. O halde G grubu $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfına aittir. Teorem 4.1 den G torsiyon-by-nilpotent gruptur. Dolayısıyla G nin normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki G/T nilpotenttir. Ayrıca $\langle x, y \rangle \cap T$ torsiyon grup ve $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TE}_k$ olduğundan $\langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T \in \mathcal{E}_k$ dır.

$\langle xT, yT \rangle = \langle x, y \rangle T \in G/T$ ve Teorem 2.32 (ii) den $\langle x, y \rangle T/T \cong \langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle \cap T$

olduğundan $\langle x, y \rangle T/T \in \mathcal{E}_k$ dır. Buradan $\langle x, y \rangle T \in \mathcal{TE}_k$ olduğundan G/T grubu $(\mathcal{TE}_k, \infty)$ sınıfındandır. Böylece G/T , $(\mathcal{E}_k, \infty)$ sınıfından torsiyonsuz bir gruptur. G/T , $(\mathcal{E}_k, \infty)$ sınıfından torsiyonsuz nilpotent grup olduğundan Teorem 4.10 dan G/T bir p asalı için bir residually sonlu p -gruptur. O halde Teorem 4.9 dan G/T grubu sonlu-by- $\mathcal{E}_k$ dır. O zaman G/T nin normal sonlu bir F/T altgrubu vardır öyle ki $(G/T)/(F/T) \in \mathcal{E}_k$ dır. Teorem 2.32 (iii) den $(G/T)/(F/T) \cong G/F \in \mathcal{E}_k$ dır. Böylece G grubu sonlu-by- $\mathcal{E}_k$ dır. F/T sonlu olduğundan her $fT \in F/T$ ve pozitif bir n tamsayısı için $(fT)^n = T$ dır. $f^n \in T$ ve T torsiyon grup olduğundan pozitif bir m tamsayısı için $(f^n)^m = f^{nm} = 1$ olur. Böylece $f \in T$ olduğundan F torsiyon gruptur. Dolayısıyla gerektiği gibi G grubu $\mathcal{TE}_k$ sınıfındandır.

($\Leftarrow$) Sonlu üreteçli metabelyan bir G grubu $\mathcal{TE}_k$ sınıfına ait ise o zaman G grubunun her altgrubu da $\mathcal{TE}_k$ sınıfına aittir. O halde G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle \in \mathcal{TE}_k$ dır. Dolayısıyla G grubu $(\mathcal{TE}_k, \infty)$ sınıfındandır.

5. TORSİYON GRUPLARIN NİLPOTENT GENİŞLEMESİ OLAN GRUPLAR

Tezimizin bu bölümünde Tarek Rouabhi ve Nadir Trabelsi'nin "A note on Torsion-by-Nilpotent Groups" başlıklı makalesi üzerinde çalışılmıştır.

$\mathfrak{X}$ grupların bir sınıfı olsun. Her sonsuz altkümesi $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{X}$ (sırasıyla, $\langle x, x^y \rangle \in \mathfrak{X}$) olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını içeren grupların sınıfı $(\mathfrak{X}, \infty)$ (sırasıyla, $(\mathfrak{X}, \infty)^*$) şeklinde gösterilir. $\mathcal{N}$ (sırasıyla, $\mathcal{C}, \mathcal{T}$) nilpotent (sırasıyla, Chernikov, torsiyon) grupların sınıfını göstermek üzere [12] de Nadir Trabelsi, $(\mathcal{TN}, \infty)$ (sırasıyla, $(\mathcal{CN}, \infty)^*$) sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grubun, torsiyon grubun nilpotent genişlemesi (torsiyon-by-nilpotent grup) (sırasıyla sonlu grubun nilpotent genişlemesi (sonlu-by-nilpotent grup)) olduğunu göstermiştir.

Çeşitli $\mathfrak{X}$ grup sınıfları için $(\mathfrak{X}, \infty)$ grup sınıfı üzerinde birçok sonuç elde edilmiştir. Örneğin; 4. bölümde, Nadir Trabelsi'nin "Soluble groups with many 2-generator torsion-by-nilpotent subgroups" başlıklı makalesinde $\mathfrak{X}$, torsiyon-by-nilpotent grupların sınıfı olduğunda, $(\mathfrak{X}, \infty)$ sınıfının yapısı incelenmiş ve $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfıyla ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu kısımda $(\mathcal{TN}, \infty)$ sınıfıyla ilgili elde edilen bu sonuçlar $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfına genişletilecektir. Bu tür problemlerin kaynağı; B. H. Neumann'ın [1] de bir grubun, merkezinin sonlu genişlemesi (merkez-by-sonlu) olması için gerek ve yeter şart her sonsuz altkümesinin değişmeli olan farklı iki eleman çiftini içerdiğini ileri sürdüğü bir sonuçtur.

Bu makaledeki ana sonuç ispatı daha sonra verilmek üzere aşağıdaki gibidir.

5.1. Teorem

$(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup torsiyon-by-nilpotent gruptur [13].

Teorem 5.1 herhangi bir grup için doğru değildir. Gerçekten [15, Sonuç 4.2] de her $d \geq 2$ tamsayısı için herhangi $d - 1$ üreteçli bir nilpotent grup olacak şekilde d üreteçli nilpotent olmayan residually nilpotent torsiyonsuz grup olduğu ispat edilmiştir.

k pozitif bir tamsayı olsun. Her sonsuz altkümesi $[x, {}_k y] = 1$ olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını kapsayan grupların sınıfı $\mathcal{E}_k(\infty)$ şeklinde ifade edilir. [2] de Abdollahi bir sonlu üreteçli metabelyan G grubunun $\mathcal{E}_k(\infty)$ grup sınıfından olması için gerek ve yeter şart $G/Z_k(G)$ nun sonlu olduğunu göstermiştir.

Abdollahi yine aynı çalışmada eğer $G, \mathcal{E}_k(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup ise o zaman $G/Z_c(G)$ sonlu olacak şekilde yalnızca k ya bağlı $c = c(k)$ tamsayısı olduğunu göstermiştir. Nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grupların sınıfı $\mathcal{N}_k$ olsun. $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından her grup $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfındandır. [2] deki sonuçlar Teorem 5.1 ile birleştirildiğinde ispatı daha sonra verilmek üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

5.2. Sonuç

k bir pozitif tamsayı olsun.

(i) Eğer $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup ise o zaman sadece k ya bağlı $c = c(k)$ tamsayısı vardır öyle ki $G, \mathcal{TN}_c$ ye aittir.

(ii) Sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu bir grubun $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart bu grubun $\mathcal{TN}_{k+1}$ ye ait olmasıdır [13].

[11, Teorem 1] de Longobardi ve Maj, $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grubun sonlu-by-nilpotent olduğunu ispatlamışlardır. Burada her sonsuz altkümesi bir $n = n(x, y)$ tamsayısı için $[x, {}_n y] = 1$ olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını içeren grupların sınıfı $\mathcal{E}(\infty)$ olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada Teorem 5.1 ispatlanarak bu sonuç sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu gruplara genişletilecektir.

Bu bölümde öncelikle $\mathcal{E}_k(\infty)$ grup sınıfıyla ilgili bazı önemli sonuçlar incelendikten sonra yukarıda belirttiğimiz Teorem 5.1 ve Sonuç 5.2 nin ispatında kullanılacak lemmalar ve ispatları verilecektir.

5.3. Teorem

Sonlu üreteçli metabelyan bir G grubu olsun. G grubunun $\mathcal{E}_k(\infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $G/Z_k(G)$ nun sonlu olmasıdır [2].

5.4. Teorem

G , $\mathcal{E}_k(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup ise o zaman $G/Z_c(G)$ sonlu olacak şekilde yalnızca k ya bağlı bir $c = c(k)$ tamsayısı vardır [2].

5.5. Teorem

G sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olsun. G nin $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart G nin sonlu-by-nilpotent olmasıdır [11].

5.6. Lemma

$(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından her grup $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfındandır [13].

İspat

G , $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından bir grup olsun. O zaman G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{N}_k$ dır.

$$\langle x, x^y \rangle = \langle x, x[x, y] \rangle = \langle x, [x, y] \rangle$$

altgrubu nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent grup olduğundan

$$[[y, x],_k x] = [y,_{k+1} x] = 1$$

dir. O halde G nin her sonsuz altkümesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $[y,_{k+1} x] = 1$ olduğundan G grubu $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfındandır.

5.7. Lemma

$\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup sonlu-by-nilpotenttir [13].

İspat

G , $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından sonsuz ve sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup olsun. H , G nin sonlu indeksli normal çözülebilir bir altgrubu olsun. Teorem 2.42 den dolayı H sonlu üreteçlidir. H , $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir grup olduğundan Teorem 5.5 ten dolayı H sonlu-by-nilpotent gruptur. O zaman H ın normal sonlu bir F altgrubu vardır öyle ki H/F nilpotenttir. O zaman pozitif bir c tamsayısı için $\gamma_{c+1}(H/F) = 1$ ve Teorem 2.33 ten $\gamma_{c+1}(H/F) = [\gamma_c(H/F), H/F] = \gamma_{c+1}(H)F/F$ dir.

$$\Rightarrow \gamma_{c+1}(H)F/F = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_{c+1}(H) \leq F$$

olur. O halde $\gamma_{c+1}(H)$ sonludur. Böylece Teorem 2.55 ten dolayı $H/Z_{2c}(H)$ sonludur. G çözülebilir-by-sonlu bir grup ve H , G nin normal çözülebilir bir altgrubu olduğundan G/H sonludur.

$$|G:Z_{2c}(H)| = |G:H||H:Z_{2c}(H)|$$

dir. G/H ve $H/Z_{2c}(H)$ sonlu olduğundan $G/Z_{2c}(H)$ sonludur. Buradan $Z_{2c}(H)$ nilpotent olduğundan G sonlu üreteçli nilpotent-by-sonlu gruptur. O halde G nin normal nilpotent bir N altgrubu vardır öyle ki G/N sonludur. Ayrıca Teorem 2.42 den N sonlu üreteçli nilpotent gruptur. N sonlu üreteçli nilpotent grup olduğundan Teorem 2.62 den N maksimal şartını sağlar. G/N sonlu olduğundan maksimal şartını sağlar ve Teorem 2.63 ten maksimal şartı genişlemeye göre kapalı olduğundan G grubu da maksimal şartını sağlar. Böylece Sonuç 2.60 dan G nin her altgrubu sonlu üreteçlidir.

Lemmayı H ın d çözülebilirlik uzunluğunda tümevarım uygulayarak ispata devam edeceğiz.

Eğer $d = 1$ ise o zaman H abelyandır. G/H sonlu olduğundan G grubu sonlu üreteçli abelyan-by-sonlu gruptur. Böylece G , sonlu indeksli torsiyonsuz normal abelyan bir A altgrubuna sahiptir. Eğer A, G nin sonlu indeksli torsiyonlu normal bir abelyan altgrubu ise G sonlu üreteçli ve A, G nin sonlu indeksli altgrubu olduğundan Teorem 2.42 den A sonlu üreteçli gruptur. O zaman A , sonlu üreteçli abelyan bir torsiyon grup olduğundan Teorem 2.43 ten A sonludur. G/A ve A sonlu olduğundan G sonludur. Bu ise G nin sonsuz olması ile çelişir. Dolayısıyla A, G nin sonlu indeksli torsiyonsuz normal abelyan bir altgrubudur.

$1 \neq a \in A$ ve $g \in G$ olsun. $\{a^i g \mid i > 0\}$ altkümesini alalım. Her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $i > j$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $a^i g = a^j g$ ise $a^{i-j} g = g$ ve $a^{i-j} = 1$ dir. A torsiyonsuz olduğundan $i - j = 0$ ve $i = j$ dir. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $a^i g \neq a^j g$ dir. Böylece $\{a^i g \mid i > 0\}$ sonsuz bir altkümedir.

G grubu $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından olduğundan G nin her sonsuz altkümesi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m \neq n$ için $a^m g, a^n g$ elemanlarını içerir öyle ki her $c \in \mathbb{Z}^+$ için $[a^m g, {}_c a^n g] = 1$ dir. A normal ve abelyan olduğu için Lemma 3.5 (iii) den $[a, {}_c g]^{(m-n)} = 1$ dir. Lemma 3.3 (ii) den $[a, {}_c g] \in A$ dir. A torsiyonsuz bir grup olduğundan Lemma 3.5 (iv) den $[a, {}_c g] = 1$ dir. Buradan a, G nin sağ Engel elemanıdır. Teorem 2.72 den G altgruplarda maksimal şartını sağladığı için sağ Engel elemanlarının kümesi G nin hipermerkezi ile çakışır. Dolayısıyla her $i > 0$ tamsayısı için $A \leq Z_i(G)$ dir. $A \leq Z_i(G)$ ve G/A sonlu olduğundan $G/Z_i(G)$ sonlu olur. Sonuç 2.54 te Baer'in sonucundan $G/Z_i(G)$ sonlu olduğundan $\gamma_{i+1}(G)$ sonlu olur.

$$\gamma_{i+1}(G/\gamma_{i+1}(G)) = \gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+1}(G) = 1$$

olduğundan $G/\gamma_{i+1}(G)$ nilpotenttir. Böylece G grubu sonlu-by-nilpotenttir.

Şimdi kabul edelim ki $d > 1$ olsun. İddia $d - 1$ için doğru olsun. O halde $G/H^{(d-1)}$ nun çözülebilirlik uzunluğu $d - 1$ olduğundan tümevarım hipotezi gereği $G/H^{(d-1)}$ grubu sonlu-by-nilpotenttir. O halde $G/H^{(d-1)}$ nun normal sonlu bir $M/H^{(d-1)}$ altgrubu vardır öyle ki $(G/H^{(d-1)})/(M/H^{(d-1)})$ nilpotenttir. Birinci izomorfizma teoreminden

$$(G/H^{(d-1)})/(M/H^{(d-1)}) \cong G/M$$

olduğundan G/M nilpotent gruptur. $M/H^{(d-1)}$ sonlu ve $H^{(d-1)}$ abelyan olduğundan M abelyan-by-sonludur. Bu durumda G grubu $(\mathcal{AF})\mathcal{N}$ sınıfına aittir. Burada $\mathcal{A}$ (sırasıyla, $\mathcal{F}$) abelyan (sırasıyla, sonlu) grupların sınıfıdır.

Dolayısıyla ispatın ilk bölümünde G nin her altgrubu sonlu üreteçli olduğundan M altgrubu da sonlu üreteçlidir ve $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfındandır. Ayrıca Teorem 2.25 (i) den M bir çözülebilir gruptur. O halde M , $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olduğundan Teorem 5.5 ten M sonlu-by-nilpotenttir. Böylece M grubu $\mathcal{FN}$ sınıfına aittir. $M \in \mathcal{FN}$ ve G/M nilpotent olduğundan G grubu $(\mathcal{FN})\mathcal{N}$ sınıfındandır. $M \in \mathcal{FN}$ olduğundan M nin normal sonlu bir K altgrubu vardır öyle ki $M/K \in \mathcal{N}$ dir. O halde Teorem 2.32 (iii) den $(G/K)/(M/K) \cong G/M$ dır. M/K ve G/M nilpotent olduğundan Sonuç 2.29 dan M/K ve G/M çözülebilirdir. Böylece Teorem 2.25 (ii) den G/K çözülebilirdir. Dolayısıyla G sonlu üreteçli sonlu-by-çözülebilir bir gruptur.

G , $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından ise G nin her sonsuz altkütmesi bir $n = n(x, y)$ tamsayısı için $[x_n y] = 1$ olacak şekilde birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir. Her $xK, yK \in G/K$ için $[xK_n yK] = [x_n y]K$ ve $[x_n y] = 1$ olduğundan $[xK_n yK] = K$ dır. Böylece G/K grubu $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfındandır. G/K , $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir bir grup olduğundan Teorem 5.5 ten G/K sonlu-by-nilpotenttir. O halde G/K nun normal sonlu bir N/K altgrubu vardır öyle ki $(G/K)/(N/K)$ nilpotenttir. Teorem 2.32 (iii) den $(G/K)/(N/K) \cong G/N$ olduğundan G/N nilpotenttir. Ayrıca N/K ve K sonlu olduğundan N sonlu bir gruptur. Sonuç olarak gerektiği gibi G grubu sonlu-by-nilpotenttir.

5.8. Lemma

G , $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından çözülebilir-by-sonlu bir grup olsun. G abelyan-by-torsiyon grup ise G torsiyon-by-abelyan gruptur [13].

İspat

G , $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından çözülebilir-by-sonlu bir grup olsun. G nin abelyan-by-torsiyon grup olduğunu kabul edelim. G grubunun torsiyon-by-abelyan olduğunu kanıtlamak için öncelikle G nin bir torsiyon altgruba sahip olduğunu gösterelim.

x, y, G nin sonlu mertebeli iki elemanı ve $H = \langle x, y \rangle$ olsun. $G, \mathcal{AT}$ sınıfından bir grup olduğundan G nin normal abelyan bir A altgrubu vardır öyle ki G/A torsiyon gruptur. A abelyan olduğundan $H \cap A$ grubu da abelyandır. İkinci izomorfizma teoreminden $H/H \cap A \cong AH/A$ dır.

$$H/H \cap A \cong AH/A \leq G/A \in \mathcal{T}$$

olduğundan $H/H \cap A$ torsiyon gruptur. Böylece $H = \langle x, y \rangle$ grubu $\mathcal{AT}$ sınıfındandır. G çözülebilir-by-sonlu grup olduğundan H sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir gruptur. Buradan $H \cap A$ abelyan grubu çözülebilir grup olduğundan $H/H \cap A$ sonludur. Böylece $H = \langle x, y \rangle$ grubu abelyan-by-sonludur.

Kabul edelim ki $H = \langle x, y \rangle$ sonsuz olsun. O zaman Lemma 2.45 ten H sonlu indeksli torsiyonsuz normal abelyan bir A altgrubuna sahiptir. Eğer A, H ın sonlu indeksli torsiyonlu normal abelyan bir altgrubu ise H sonlu üreteçli ve A, H ın sonlu indeksli altgrubu olduğundan Teorem 2.42 den A, H sonlu üreteçlidir. O zaman A, H sonlu üreteçli abelyan bir torsiyon grup olduğundan Teorem 2.43 ten A sonlu bir gruptur. H/A ve A sonlu olduğundan H sonludur. Bu ise H ın sonsuz olması ile çelişir. Dolayısıyla A, H ın sonlu indeksli torsiyonsuz normal abelyan bir altgrubudur.

$1 \neq a \in A$ ve $h \in H$ olsun. O zaman $\{a^i h \mid i > 0\}$ altkümesini alalım. Her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $i > j$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $a^i h = a^j h$ ise $a^{i-j} h = h$ ve $a^{i-j} = 1$ dır. A torsiyonsuz olduğundan $i - j = 0$ ve $i = j$ dır. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde Her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $a^i h \neq a^j h$ dır. Böylece $\{a^i h \mid i > 0\}$ sonsuz bir altkümedir.

G grubu $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından olduğundan G nin her sonsuz altkümesi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m \neq n$ için $a^n h, a^m h$ elemanlarını içerir öyle ki $\langle a^n h, (a^n h)^{a^m h} \rangle \in \mathcal{TN}$ dır. Buradan

$$\langle a^n h, (a^n h)^{a^m h} \rangle = \langle a^n h, a^n h[a^n h, a^m h] \rangle$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$(a^n h[a^n h, a^m h])^{-1} a^n h = [a^n h, a^m h]^{-1} (a^n h)^{-1} (a^n h)$$

$$[a^n h, a^m h]^{-1} (a^n h)^{-1} (a^n h) = [a^n h, a^m h]^{-1}$$

ve Teorem 3.1 (i) den $[a^n h, a^m h]^{-1} = [a^m h, a^n h]$ dır. Böylece

$$[a^m h, a^n h] \in \langle a^n h, (a^n h)^{a^m h} \rangle$$

dır. Dolayısıyla

$$\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle \leq \langle a^n h, (a^n h)^{a^m h} \rangle$$

dır. Buradan $\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle \in \mathcal{TN}$ dır. $\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle$ grubunun normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki $\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle / T$ nilpotent gruptur. $K = \langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle$ olsun. K/T nilpotent olduğundan pozitif bir c tamsayısı için $\gamma_{c+1}(K/T) = 1$ dır. Teorem 2.33 ten

$$\gamma_{c+1}(K/T) = [\gamma_c(K/T), K/T] = [\gamma_c(K), K]T/T = \gamma_{c+1}(K)T/T$$

elde edilir. O halde $\gamma_{c+1}(K)T/T = 1$ ve $\gamma_{c+1}(K) \leq T$ dır. O halde

$$\gamma_{c+1}(K) = \gamma_{c+1}(\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle)$$

torsiyon gruptur. Böylece

$$[[a^m h, a^n h]_c, a^n h] \in \gamma_{c+1}(\langle [a^m h, a^n h], a^n h \rangle)$$

olduğundan pozitif bir d tamsayısı için $[[a^m h, a^n h]_c, a^n h]^d = 1$ dır. A abelyan ve normal olduğundan Lemma 3.5 (iii) den $[a_{c+1} h]^{(m-n)d} = 1$ dır. Lemma 3.3 (ii) den $[a_{c+1} h] \in A$ dır. A torsiyonsuz grup olduğundan Lemma 3.5 (iv) den $[a_{c+1} h] = 1$ dır. Bu ise a nın H in bir sağ Engel elemanı olduğunu gösterir. Dolayısıyla A nın elemanları H in sağ Engel elemanlarının kümesi olan $R(H)$ da içerilir.

H sonlu üreteçli abelyan-by-sonlu grup ve A , H in sonlu indeksli normal abelyan bir altgrubu olduğundan H/A sonludur. O halde Teorem 2.42 den A sonlu üreteçli bir gruptur. Ayrıca abelyan grup nilpotent olduğundan A nilpotent gruptur. Dolayısıyla Teorem 2.62

den A maksimal şartını sağlar. H/A sonlu olduğundan maksimal şartını sağlar ve Teorem 2.63 ten maksimal şartı genişlemeye göre kapalı olduğundan H grubu da maksimal şartını sağlar. H altgruplarda maksimal koşulunu sağladığından Teorem 2.72 den, $R(H)$ ile her $i > 0$ tamsayısı için $Z_i(H)$ çakışır. Dolayısıyla her $i > 0$ tamsayısı için $A \leq Z_i(H)$ dır. Böylece H/A sonlu olduğundan $H/Z_i(H)$ sonludur. Sonuç 2.54 te Baer'in sonucundan $\gamma_{i+1}(H)$ sonlu olur.

$$\gamma_{i+1}(H/\gamma_{i+1}(H)) = \gamma_{i+1}(H)/\gamma_{i+1}(H) = 1$$

olduğundan $H/\gamma_{i+1}(H)$ nilpotenttir. Dolayısıyla H sonlu mertebeli iki eleman tarafından üretilen sonlu-by-nilpotent bir gruptur.

Her $i > 0$ tamsayısı için $H/Z_i(H)$ sonlu olduğundan H merkez-by-sonlu bir gruptur. Dolayısıyla Sonuç 2.53 te Schur'un bir sonucu olarak H' sonlu bir gruptur. Ayrıca x, y sonlu mertebeden olmak üzere $H = \langle x, y \rangle$ ve H/H' abelyan olduğundan periyodiktir. H/H' bir sonlu üreteçli abelyan ve periyodik grup olduğundan Teorem 2.43 ten H/H' sonludur. H' ve H/H' sonlu olduğundan H sonludur. Bu ise H nın sonsuz olmasıyla çelişir. Sonuç olarak H sonlu bir grup ve iddia edildiği gibi G grubu torsiyon bir T altgrubuna sahiptir.

Buradan G/T grubu $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından torsiyonsuz bir gruptur. Her $xT, yT \in G/T$ olsun. O zaman $G \in (\mathcal{TN}, \infty)^*$ olduğundan $x, y \in G$ için $\langle x, x^y \rangle \in \mathcal{TN}$ dır. O halde $\langle x, x^y \rangle \cap T$ torsiyon grup olduğundan $\langle x, x^y \rangle / \langle x, x^y \rangle \cap T \in \mathcal{N}$ dir. Böylece

$$\langle xT, xT^{yT} \rangle = \langle xT, xT[xT, yT] \rangle = \langle x, x[x, y] \rangle T = \langle x, x^y \rangle T \in G/T$$

dir. Teorem 2.32 (ii) den

$$\langle x, x^y \rangle T / T \cong \langle x, x^y \rangle / \langle x, x^y \rangle \cap T \in \mathcal{N}$$

olduğundan $\langle x, x^y \rangle T / T \in \mathcal{N}$ dir. Dolayısıyla $\langle x, x^y \rangle T \in \mathcal{TN}$ olduğundan G/T grubu $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından torsiyonsuz bir grup olur. Böylece G/T grubu $(\mathcal{N}, \infty)^*$ sınıfına aittir.

$$(xT[xT, yT])^{-1}xT = [yT, xT] \in \langle xT, xT^{yT} \rangle \text{ ve } \langle xT, xT^{yT} \rangle = \langle x, x^y \rangle T$$

dır. Böylece $\langle [yT, xT], xT \rangle \leq \langle x, x^y \rangle T \in \mathcal{N}$ olur. Buradan $\langle [yT, xT], xT \rangle \in \mathcal{N}$ dir. $\langle [yT, xT], xT \rangle = N$ olsun. Teorem 2.32 (ii) den $NT/T \cong N/T \cap N$ dir. Teorem 2.30 dan $NT/T \cong N/T \cap N$ nilpotent gruptur. Böylece NT/T nilpotent gruptur. O halde pozitif bir n tamsayısı için $\gamma_{n+1}(NT/T) = 1$ dir. Teorem 2.33 ten

$$\gamma_{n+1}(NT/T) = [\gamma_n(NT/T), NT/T] = [\gamma_n(NT), NT]T/T$$

dir. O halde $\gamma_{n+1}(NT)T/T = 1$ olduğundan $\gamma_{n+1}(NT) \leq T$ dir. Böylece

$$\gamma_{n+1}(NT) = \gamma_{n+1}(\langle [yT, xT], xT \rangle T) = \gamma_{n+1}(\langle [yT, xT], xT \rangle)$$

torsiyon gruptur. Buradan $[yT, xT] = 1$ dir. O halde $G/T \in \mathcal{E}(\infty)$ dir. Dolayısıyla $G/T, \mathcal{E}(\infty)$ sınıfından çözülebilir-by-sonlu bir gruptur. O halde sonlu üreteçli her altgrubu $\mathcal{E}(\infty)$ sınıfından çözülebilir-by-sonlu bir grup olur. Böylece Lemma 5.7 den G/T lokal sonlu-by-nilpotent grup olur. Bu nedenle G/T grubu $\mathcal{AT}$ sınıfından torsiyonsuz bir lokal nilpotent gruptur. Böylece Lemma 2.48 den G/T abelyandır. İddia edildiği gibi G torsiyon-by-abelyan gruptur.

Şimdi Teorem 5.1 ve Sonuç 5.2 nin ispatlarını verelim.

5.1. Teorem

$(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup torsiyon-by-nilpotent gruptur [13].

İspat

$G, (\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup ve H, G nin sonlu indeksli normal çözülebilir bir altgrubu olsun. H in çözülebilirlik uzunluğunu d alalım. d üzerine tümevarımla G nin torsiyon-by-nilpotent grup olduğu gösterilecektir.

Eğer $d = 1$ ise H abelyandır. Abelyan bir grup çözülebilir ve G çözülebilir-by-sonlu olduğundan G/H sonludur. Her sonlu grup torsiyon olduğundan G/H torsiyon gruptur. Buradan G abelyan-by-torsiyon gruptur. Lemma 5.8 den G torsiyon-by-abelyan olduğundan G nin normal torsiyon bir M altgrubu vardır öyle ki G/M abelyandır. Abelyan

grup nilpotent olduğundan G/M nilpotent gruptur. O halde G grubu torsiyon-by-nilpotenttir.

Kabul edelim ki $d > 1$ olsun. İddia çözülebilirlik uzunluğu $d - 1$ olan gruplar için doğru olsun. O halde tümevarım hipotezinden $G/H^{(d-1)}$ nun çözülebilirlik uzunluğu $d - 1$ olduğundan $G/H^{(d-1)}$ torsiyon-by-nilpotent gruptur. Böylece $G/H^{(d-1)}$ nun normal torsiyon bir $N/H^{(d-1)}$ altgrubu vardır öyle ki $(G/H^{(d-1)})/(N/H^{(d-1)})$ nilpotenttir. Teorem 2.32 (iii) den $(G/H^{(d-1)})/(N/H^{(d-1)}) \cong G/N$ olduğundan G/N nilpotenttir. Ayrıca $N/H^{(d-1)}$ torsiyon ve $H^{(d-1)}$ abelyan olduğundan N abelyan-by-torsiyon gruptur. $N \in \mathcal{AT}$ ve $G/N \in \mathcal{N}$ olduğundan $G \in (\mathcal{AT})\mathcal{N}$ dır. Lemma 5.8 den $N \in \mathcal{TA}$ dır. O zaman $G \in (\mathcal{TA})\mathcal{N}$ sınıfına aittir. G nin normal torsiyon-by-abelyan bir N altgrubu vardır öyle ki G/N nilpotenttir. O halde N nin normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki $N/T \in \mathcal{A}$ dır. N/T bir torsiyonsuz abelyan gruptur. Teorem 2.32 (iii) den $(G/T)/(N/T) \cong G/N \in \mathcal{N}$ olduğundan $G/T \in \mathcal{AN}$ dır. Buradan G/T grubu (torsiyonsuz abelyan)-by-nilpotenttir. $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ bölüm kapalı bir grup sınıfı olduğundan G grubunun (torsiyonsuz abelyan)-by-nilpotent olduğunu kabul edelim. Böylece G nin normal torsiyonsuz abelyan bir A altgrubu vardır öyle ki G/A nilpotenttir.

$1 \neq a \in A$ ve $g \in G$ olsun. O zaman G nin $\{a^i g \mid i > 0\}$ altkümesini alalım. Her $i, j > 0$ ve $i \neq j$ için $i > j$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $a^i g = a^j g$ ise $a^{i-j} g = g$ ve $a^{i-j} = 1$ dır. A torsiyonsuz olduğundan $i - j = 0$ ve $i = j$ dır. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde her $i, j > 0$ için $i \neq j$ için $a^i g \neq a^j g$ dır. Böylece $\{a^i g \mid i > 0\}$ sonsuz bir altkümedir.

G grubu $(\mathcal{TN}, \infty)^*$ sınıfından olduğundan G nin her sonsuz altkümesi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $m \neq n$ için $a^n g, a^m g$ elemanlarını içerir öyle ki $\langle a^n g, (a^n g)^{a^m g} \rangle \in \mathcal{TN}$ dir. Buradan

$$\langle a^n g, (a^n g)^{a^m g} \rangle = \langle a^n g, a^n g[a^n g, a^m g] \rangle$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} (a^n g[a^n g, a^m g])^{-1} a^n g &= [a^n g, a^m g]^{-1} (a^n g)^{-1} a^n g \\ &= [a^n g, a^m g]^{-1} \end{aligned}$$

Teorem 3.1 (i) den $[a^n g, a^m g]^{-1} = [a^m g, a^n g]$ dir. Böylece

$$[a^m g, a^n g] \in \langle a^n g, (a^n g)^{a^m g} \rangle$$

dır. Dolayısıyla

$$\langle [a^m g, a^n g], a^n g \rangle \leq \langle a^n g, (a^n g)^{a^m g} \rangle$$

dır. $K = \langle [a^m g, a^n g], a^n g \rangle$ olsun. Böylece $\langle a^n g, (a^n g)^{a^m g} \rangle \in \mathcal{TN}$ olduğundan $K \in \mathcal{TN}$ dır. O halde K nın normal torsiyon bir M altgrubu vardır öyle ki K/M nilpotenttir. Böylece pozitif bir c tamsayısı için $\gamma_{c+1}(K/M) = 1$ dir. Teorem 2.33 ten

$$\gamma_{c+1}(K/M) = [\gamma_c(K/M), K/M] = [\gamma_c(K), K]M/M = \gamma_{c+1}(K)M/M$$

olduğundan $\gamma_{c+1}(K)M/M = 1$ dir. Böylece $\gamma_{c+1}(K) \leq M$ olur. O halde

$$\gamma_{c+1}(K) = \gamma_{c+1}(\langle [a^m g, a^n g], a^n g \rangle)$$

torsiyon gruptur. Böylece

$$[[a^m g, a^n g]_c, a^n g] \in \gamma_{c+1}(\langle [a^m g, a^n g], a^n g \rangle)$$

olduğundan $[[a^m g, a^n g]_c, a^n g]^d = 1$ olacak şekilde pozitif bir d tamsayısı vardır. A abelian ve normal olduğundan Lemma 3.5 (iii) den $[a_{c+1} g]^{(m-n)d} = 1$ dir. Lemma 3.3 (ii) den $[a_{c+1} g] \in A$ dır. A torsiyonsuz grup olduğundan Lemma 3.5 (iv) den $[a_{c+1} g] = 1$ dir. Bu ise a nın G nin bir sağ Engel elemanı olduğunu gösterir. Dolayısıyla A nın elemanları G nin sağ Engel elemanlarının kümesinde içerilir. Gözlem 2.85 ten G sonlu üreteçli (torsiyonsuz abelian)-by-nilpotent bir grup olduğundan G normal altgruplar üzerinde maksimal şartını sağlar. G normal atgruplar üzerinde maksimal şartını sağladığından Teorem 2.72 den sağ Engel elemanlarının kümesi G nin hipermerkezine eşittir. Sonuç olarak $A \leq \bar{Z}(G)$ dır. O halde G/A nilpotent olduğundan $G/\bar{Z}(G)$ nilpotenttir. Böylece G hipermerkezdir. Teorem 2.51 den dolayı G lokal nilpotenttir. Böylece G sonlu üreteçli olduğundan G nilpotent gruptur.

5.2. Sonuç

k bir pozitif tam sayı olsun.

(i) Eğer $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup ise o zaman sadece k ya bağlı $c = c(k)$ tamsayısı vardır öyle ki G grubu $\mathcal{TN}_c$ ye aittir.

(ii) Sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu bir grubun $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart bu grubun $\mathcal{TN}_{k+1}$ ye ait olmasıdır [13].

İspat

(i) $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli çözülebilir-by-sonlu bir grup olsun. O zaman Teorem 5.1 den dolayı G grubu torsiyon-by-nilpotentdir. Böylece G nin normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki G/T nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent gruptur. Teorem 2.30 dan nilpotent grubun her altgrubu da nilpotent olduğundan G/T nin her altgrubu nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent gruptur. O halde G/T faktör grubunun birbirinden farklı iki xT, yT elemanını içeren her sonsuz kümesi için

$$\langle xT, xT^{yT} \rangle = \langle xT, x^yT \rangle = \langle x, x^y \rangle T \leq G/T$$

olduğundan $\langle xT, xT^{yT} \rangle = \langle x, x^y \rangle T$ nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent gruptur. Böylece G/T faktör grubu da $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından gruptur. Lemma 5.6 dan $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından her grup $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfından olduğundan G/T faktör grubu $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfından bir gruptur. O halde Teorem 5.4 ten sadece k ya bağlı bir $c = c(k)$ tamsayısı vardır öyle ki $(G/T) / Z_c(G/T)$ sonludur. O zaman Sonuç 2.54 ten dolayı $\gamma_{c+1}(G/T)$ sonludur. Fakat G/T torsiyonsuz grup olduğundan $\gamma_{c+1}(G/T) = 1$ dir. Böylece G/T nilpotent ve nilpotentlik sınıfı en fazla c dir. Böylece G grubu $\mathcal{TN}_c$ sınıfından bir gruptur.

(ii) $(\Rightarrow)$ $G, (\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfından sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu grup ise Teorem 5.1 den $G \in \mathcal{TN}_k$ dir. O halde G nin normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki G/T nilpotentlik sınıfı en fazla k olan torsiyonsuz nilpotent gruptur. Teorem 2.30 dan nilpotent grubun her altgrubu nilpotent olduğundan G/T nin her altgrubu nilpotentlik sınıfı en fazla k

olan nilpotent gruptur. O halde G/T faktör grubunun birbirinden farklı iki xT, yT elemanını içeren her sonsuz kümesi için

$$\langle xT, xT^{yT} \rangle = \langle xT, x^yT \rangle = \langle x, x^y \rangle T \leq G/T$$

olduğundan $\langle xT, xT^{yT} \rangle = \langle x, x^y \rangle T$ nilpotentlik sınıfı en fazla k olan nilpotent gruptur. Böylece G/T faktör grubu da $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından gruptur. Lemma 5.6 dan $(\mathcal{N}_k, \infty)^*$ sınıfından her grup $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfından olduğundan G/T faktör grubu $\mathcal{E}_{k+1}(\infty)$ sınıfındandır. Teorem 5.3 ten $(G/T) / Z_{k+1}(G/T)$ sonludur. O halde Sonuç 2.54 ten dolayı $\gamma_{k+2}(G/T)$ sonludur. Fakat G/T torsiyonsuz grup olduğundan $\gamma_{k+2}(G/T) = 1$ dir. Böylece G/T nilpotent ve nilpotentlik sınıfı en fazla $k + 1$ dir. Böylece G grubu $\mathcal{TN}_{k+1}$ sınıfındandır.

($\Leftarrow$) Karşıt olarak sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu G grubu $\mathcal{TN}_{k+1}$ sınıfına ait olsun. O zaman G nin her altgrubu da $\mathcal{TN}_{k+1}$ sınıfına aittir. O halde G grubu $(\mathcal{TN}_{k+1}, \infty)$ sınıfındandır. Dolayısıyla G nin her sonsuz altkütmesi birbirinden farklı iki x, y elemanını içerir öyle ki $\langle x, y \rangle$ grubu $\mathcal{TN}_{k+1}$ sınıfından ve

$$\langle x, x^y \rangle = \langle x, x[x, y] \rangle \leq \langle x, \langle x, y \rangle' \rangle = \langle x \rangle \langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle}$$

dır. O zaman $\langle x, y \rangle$ grubunun normal torsiyon bir T altgrubu vardır öyle ki $\langle x, y \rangle / T$ grubu $\mathcal{N}_{k+1}$ sınıfındandır.

$\langle x, y \rangle / T$ grubu $\mathcal{N}_{k+1}$ sınıfından olduğundan $[\langle x, y \rangle / T,_{k+1} \langle x, y \rangle / T] = 1$ dir.

Teorem 2.33 ten $[\langle x, y \rangle / T,_{k+1} \langle x, y \rangle / T] = [\langle x, y \rangle,_{k+1} \langle x, y \rangle] T / T$ dir.

$$\begin{aligned} [\langle x, y \rangle / T,_{k+1} \langle x, y \rangle / T] &= [\langle x, y \rangle,_{k+1} \langle x, y \rangle] T / T \\ &= [[\langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle],_k \langle x, y \rangle] T / T \\ &= [\langle x, y \rangle',_k \langle x, y \rangle] T / T = 1 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $\left[\langle x \rangle_k \langle x \rangle \langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle} \right] T/T = 1$, $\left[\langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle}_k \langle x \rangle \right] T/T = 1$ ve $\left[\langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle}_k \langle x \rangle \langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle} \right] T/T = 1$

olduğundan

$$1 = \left[\langle x \rangle \langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle}_k \langle x \rangle \langle x, y \rangle'^{\langle x \rangle} \right] T/T = [\langle x, \langle x, y \rangle' \rangle_k \langle x, \langle x, y \rangle' \rangle] T/T$$

$$\Rightarrow [\langle x, \langle x, y \rangle' \rangle_k \langle x, \langle x, y \rangle' \rangle] T/T \geq [\langle x, x^y \rangle_k \langle x, x^y \rangle] T/T$$

$$\Rightarrow [\langle x, x^y \rangle_k \langle x, x^y \rangle] T/T = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_{k+1}(\langle x, x^y \rangle T/T) = 1$$

dir. Böylece $\langle x, x^y \rangle$ grubu $\mathcal{TN}_k$ sınıfındandır. Dolayısıyla sonlu üreteçli metabelyan-by-sonlu bir G grubu $(\mathcal{TN}_k, \infty)^*$ sınıfındandır.



KAYNAKLAR

1. Neumann, B. H. (1976). A problem of Paul Erdős on groups. *Journal of the Australian Mathematical Society (series A)*, 21(4), 467-472.
2. Abdollahi, A. (2000). Some Engel conditions on infinite subsets of certain groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 62(1), 141-148.
3. Abdollahi, A. and Taeri, B. (1999). A condition on finitely generated soluble groups. *Communications in Algebra*, 27(11), 5633-5638.
4. Abdollahi, A. and Trabelsi, N. (2002). Quelques extensions d'un problème de Paul Erdős sur les groupes. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 9(2), 205-215.
5. Delizia, C., Rhemtulla, A. H., and Smith, H. (2000). Locally graded groups with a nilpotency condition on infinite subsets. *Journal of the Australian Mathematical Society (series A)*, 69(3), 415-420.
6. Endimioni, G. (1994). Groups covered by finitely many nilpotent subgroups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 50(3), 459-464.
7. Endimioni, G. (2001). Groups in which certain equations have many solutions. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 106, 77-82.
8. Groves, J. R. J. (1983). A conjecture of Lennox and Wiegold concerning supersoluble groups. *Journal of the Australian Mathematical Society (series A)*, 35(2), 218-220.
9. Lennox, J. C. and Wiegold, J. (1981). Extensions of a problem of Paul Erdős on groups. *Journal of the Australian Mathematical Society (series A)*, 31(4), 459-463.
10. Longobardi, P. (2001). On locally graded groups with an Engel condition on infinite subsets. *Archiv der Mathematik*, 76(2), 88-90.
11. Longobardi, P. and Maj, M. (1993). Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 89, 97-102.
12. Trabelsi, N. (2005). Soluble groups with many 2-generator torsion-by-nilpotent subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 67(1-2), 93-102.
13. Rouabhi, T. and Trabelsi, N. (2007). A note on torsion-by-nilpotent groups. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 117, 175-179.
14. Trabelsi, N. (2003). Centre-by-metabelian groups with a condition on infinite subsets. *Publicacions Matemàtiques*, 47(2), 451-457.
15. Hammoudi, L. (2004). Burnside and Kuroch Problems. *International Journal of Algebra and Computation*, 14(2), 197-211.
16. Asar, A. O., Arkan A., Arkan, A. (2012). *Cebir*. (2. Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi, 108-153.

17. Hungerford, T. W. (1974). *Graduate Text in Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 102-103.
18. Robinson, D. J. S. (1991). *A course in the theory of groups*. New York: Springer-Verlag.
19. Bechtell, H. (1971). *The theory of groups*. Addison Wesley Publishing Company, 52.
20. Rose, J. S. (1978). *A course on Group Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 60.
21. Endimioni, G. and Traustasson, G. (2001). On torsion-by-nilpotent groups. *Journal of Algebra*, 241(2), 669-676.
22. Robinson, D. J. S. (1972). *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Part 2. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
23. Robinson, D. J. S. (1972). *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Part 1. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
24. Hall, M. Jr. (1959). *The theory of groups*. New York: The Machillan Company, 16-153.
25. Lennox, J. C. and Roseblade, J. E. (1970). Centrality in finitely generated soluble groups. *Journal of Algebra*, 16(3), 399-435.
26. Chelgham, M., Kerada, M., and Noui, L. (2018). On finite extension and conditions on infinite subsets of finitely generated FC and FN_k -groups. *Journal of New York*, 23, 22-30.
27. Brookes, C. J. B. (1986). Engel elements of soluble groups, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 18(1), 7-10.
28. Hall, P. (1954). Finiteness conditions for soluble groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4(1), 419-436.





GAZİ GELECEKTİR..