

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**TRANSFORMASYON GRAFLARIN KOMŞU RUPTURE
DERECESİ**

Ekrem ÖZ

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN**



MANİSA-2015

TEZ ONAYI

Ekrem ÖZ tarafından hazırlanan "**Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi**" adlı tez çalışması 23/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN**
Celal Bayar Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ**
Ege Üniversitesi

.....

Jüri Üyesi **Yrd. Doç. Dr. Ersin ASLAN**
Celal Bayar Üniversitesi

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ekrem ÖZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	II
TABLO DİZİNİ	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT	VI
1. GİRİŞ	1
2. TRANSFORMASYON GRAFLAR	7
2.1. G^{---} Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi	7
2.1.1. C_n^{---} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	7
2.1.2. W_n^{---} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	8
2.1.3. K_n^{---} Grafinin Komşu Rupture Derecesi.....	11
2.2. G^{+--} Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi.....	12
2.2.1. P_n^{+--} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	12
2.2.2. C_n^{+--} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	13
2.2.3. W_n^{+--} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	14
2.2.4. K_n^{+--} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	16
2.2.5. $K_{m,n}^{+--}$ Grafinin Komşu Rupture Derecesi	17
2.3. G^{-+-} Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi	18
2.3.1. P_n^{-+-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	18
2.3.2. C_n^{-+-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	19
2.3.3. W_n^{-+-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	20
2.3.4. K_n^{-+-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	21
2.3.5. $K_{m,n}^{-+-}$ Grafinin Komşu Rupture Derecesi	22
2.4. G^{++-} Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi	23
2.4.1. P_n^{++-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi.....	23
2.4.2. C_n^{++-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi.....	24
2.4.3. W_n^{++-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi.....	25
2.4.4. K_n^{++-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi	27
2.4.5. $K_{m,n}^{++-}$ Grafinin Komşu Rupture Derecesi	28
3. SONUÇ	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	32

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. 9 tepeli G_1 grafi	2
Şekil 1.2. 9 tepeli G_2 grafi	2
Şekil 1.3. 9 tepeli G grafi.....	4
Şekil 1.4. 5 tepeli bir G grafi	5
Şekil 2.1. C_6 çevre grafi	8
Şekil 2.2. C_6^{---} transformasyon grafi	8
Şekil 2.3. $W_n^{---} \setminus S$ geriye kalan altgrafi	9
Şekil 2.4. $W_n^{---} \setminus S$ geriye kalan altgrafi	10
Şekil 2.5. C_6 çevre grafi.....	12
Şekil 2.6. C_6^{+--} transformasyon grafi	12
Şekil 2.7. $W_n^{+--} \setminus S$ geriye kalan altgrafi	15
Şekil 2.8. C_6 çevre grafi.....	18
Şekil 2.9. C_6^{-+-} transformasyon grafi	18
Şekil 2.10. $W_n^{-+-} \setminus S$ geriye kalan altgrafi	20
Şekil 2.11. C_6 çevre grafi.....	23
Şekil 2.12. C_6^{++-} transformasyon grafi	23
Şekil 2.13. $W_n^{++-} \setminus S$ geriye kalan altgrafi	26

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 1.1. P_n yol grafinin komşu rupture derecesi.....	6
Tablo 1.2. C_n çevre grafinin komşu rupture derecesi.....	6

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince danışmanlığımı yapan, çalışmalarım sırasında beni yönlendiren ve desteğini esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN'a, hayatımın her safhasında bana destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ekrem ÖZ
Manisa, 2015

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi

Ekrem ÖZ

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Gökşen BACAK TURAN

Günümüzün en önemli problemlerinden biri iletişim hatlarının zarar gördükten sonra oluşan zararın en kısa sürede tespit edilmesi ve sorunun mümkün olan en düşük maliyetle giderilmesidir. Bir iletişim ağında bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar gösterdiği dayanma gücünün ölçümüne ağın zedelenebilirlik değeri denir. Zedelenebilirlik değerinin hesaplanması için iletişim ağı merkezleri grafin tepeleri, bu merkezler arasındaki bağlantılar grafin ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde graflar ile modellenenir.

Bu tezin birinci bölümünde zedelenebilirlik ile ilgili temel tanım ve bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde G^{xyz} transformasyon graflarında komşu rupture dereceleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf Teorisi, Zedelenebilirlik, Komşu Rupture Derecesi.

2015, 41 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Neighbor Rupture Degree of Transformation Graphs

Ekrem ÖZ

**Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Gökşen BACAK TURAN

One of the most important problems of our time, communication networks to be identified as soon as possible after the failure and overcome the problem at the lowest a cost. The vulnerability measures of a communication network shows the resistance of the network after the disruption of some centers or connection lines until a communication breakdown. A communication network is modelled by a graph to measure the vulnerability as stations corresponding to the vertices and communication links corresponding to the edges.

In the first part of this thesis about the basic definitions of vulnerability measures and theorems. The second section has investigated the neighbor rupture degree of G^{xyz} transformation graphs.

Keywords: Graph Theory, Vulnerability, Neighbor Rupture Degree.

2015, 41 pages

1. GİRİŞ

Bir iletişim ağı merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bir iletişim ağının merkezleri veya bağlantı hatları zarara uğradığında bu ağda bazı sorunların ortaya çıkması hatta iletişimin durması söz konusudur. Burada en çok merak edilen soru ise ağda iletişim durana kadar ağın ne kadar ve nasıl dayanacağıdır. Bir iletişim ağında bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar gösterdiği dayanma gücünün ölçümüne ağın zedelenebilirlik değeri denir.

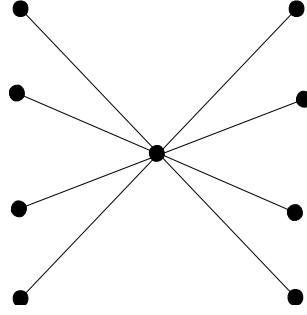
Karayolları trafiği, havayolu ulaşımı, elektrik dağıtımı ve su şebekeleri gibi iletişim hatlarını bir graf ile modellediğimizde oluşan zararın incelenmesi bize kolaylık sağlamaktadır.

Küçük yerleşim birimlerinde genel olarak bir depodan beslenen tek bir su şebekesi ihtiyacı karşılar. Bununla birlikte büyük şehirlerde çeşitli depolardan beslenen farklı bölgeler söz konusudur. Örneğin bir ilin su şebekesi depolar ile bu depoları birbirine bağlayan borulardan oluşmaktadır. Bu şebekede bazı depolarda arıza meydana geldiğinde oluşan zararın araştırılması için arıza sonrasında geriye kalan şebekenin incelenmesi gereklidir. Böylece oluşan zararın boyutu görülebilir. Zarar görmüş bir ağda kalan ağ için sorulabilecek bazı sorular şunlardır:

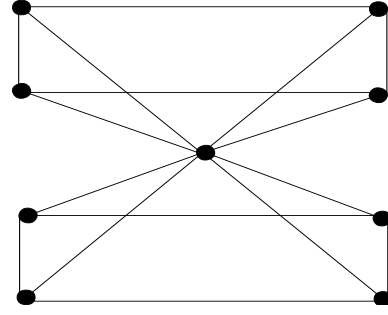
1. İşlevini yerine getirmeyen depo sayısı kaçtır?
2. Su şebekesi kaç alt şebekeye ayrılmıştır?
3. Su dağıtımının kendi içerisinde devam ettiği alt şebekelerin sayısı nedir?
4. Su dağıtımının kendi içerisinde devam ettiği en çok elemana sahip alt şebekelerin eleman sayısı nedir?
5. Su şebekesini eski haline getirmek için ne kadar süre gereklidir?
6. Zarar gören depolara komşu depo sayısı nedir?

Buradaki herbir sorunun yanıtı ağın uğradığı zarar hakkında bilgi verecektir. Bir graf bir ağın modeli olarak düşünülürse ağın zedelenebilirliğini incelemek için pek çok parametre tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları: bağlantılılık sayısı (connectivity), tepe bütünlük değeri (integrity), toughness değeri, tenacity değeri, scattering sayısı, rupture derecesi ve bu parametrelerin komşuluklarını da inceleyen komşu bütünlük değeri (neighbor integrity), komşu scattering sayısı (neighbor scattering number) ve komşu rupture derecesi (neighbor rupture degree) olmaktadır.

Yukarıdaki birinci soru bizi en eski parametre olan bağlantılılık sayısına götürür. Bir grafta her bir tepe çifti arasında en az bir ayırıt varsa bu graf birleştirilmiş graf adını alır. Böyle bir grafın birleştirilmişliğini bozmak için çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir [1]. Bağlantılılık sayısı ağ zedelandikten sonra 1. soru hariç diğer sorulara cevap oluşturmamaktadır. Ayrıca bağlantılılık sayısına bakarak bu değerin graflar için ayırt edici bir parametre olduğunu söyleyemeyebiliriz. Örneğin, Şekil 1.1 de 9 tepeli G_1 grafi ve Şekil 1.2 de 9 tepeli G_2 grafi gösterilmiştir.



Şekil 1.1. 9 tepeli G_1 grafi



Şekil 1.2. 9 tepeli G_2 grafi

G_1 ve G_2 graflarından derecesi 8 olan tepeler atıldığında grafların birleştirilmişliği bozulmuş olur. Bu nedenle $\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = 1$ dir. Her iki grafında bağlantılılık sayısı 1 olmasına rağmen çıkarılan tepelerin graflarda oluşturduğu etkiler farklıdır. G_1 grafi izole tepelerden oluşmakta ve bileşen sayısı 8'dir. G_2 grafi ise 2 bileşenden oluşmakta olup iletişimini devam ettiren tepeler vardır. Bazı durumlarda bağlantılılık sayısı ayırt edici bir ölçü olmayabilir. Bu durumda yeni bir ölçüme ihtiyacımız vardır. 1 ve 4 numaralı sorulara cevap arayan bütünlük değeri tanımlanmıştır. Bütünlük değeri tanımında 1 ve 4 numaralı soruların yanıtlar toplamının en küçük olması istenir. Bütünlük değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [2] :

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\} \quad (1.1)$$

Burada $m(G - S)$, herhangi bir G grafından $S \subseteq V(G)$ tepeler kümesi atıldığında geriye kalan $G - S$ grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısıdır. İki grafın bağlantılılık sayıları ve bütünlük değerleri aynı olmasına rağmen çıkarılan tepelerin graflarda meydana getirdikleri etkiler farklı olabilir. Bu durumda bütünlük değeri de ayırt edici bir zedelenebilirlik parametresi olmayabilir. Ayrıca bu verilen sorulara cevap vermek için scattering sayısı, tenacity değeri ve toughness değeri gibi parametreler de tanımlanmıştır. Bir G grafının scattering sayısı, S bir kesim küme ve S kümesi graftan atıldıktan sonra geriye kalan graftaki bileşen sayısı $w(G - S)$ olmak

üzere aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [3] :

$$sc(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G-S) - |S| : w(G-S) > 1\} \quad (1.2)$$

Bağlantılılık sayısı başta verilen sorulardan bir tanesine, bütünlük değeri ise iki tanesine cevap oluşturmaktadır. Bu nedenle 1, 2 ve 4 numaralı sorulara yanıt vererek bize daha fazla bilgi veren rupture derecesi tanımlanmıştır. Rupture derecesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [4] :

$$r(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G-S) - |S| - m(G-S) : w(G-S) > 1\} \quad (1.3)$$

Şimdiye kadar bahsedilen parametreler sadece merkezlerin zedelenmesiyle ilgilenmektedir. Bu parametreler, çıkarılan merkezlerin komşuları üzerindeki etkilerini dikkate almamaktadır. Bir ağdaki merkezlerin bozulması sonucunda, bu merkezlere komşu olan merkezlerin de etkilendiği ağ, casus ağı (spy network) olarak adlandırılır. Eğer ajanlardan biri açığa çıkarsa veya yakalanırsa onunla iletişimde olan ajanlar da güvenilirliklerini yitirecektir. Bu nedenle bütün ağ içerisinde kullanılamaz duruma geleceklerinden graftan sadece tepeleri çıkarmak yerine tepeleri ve onlara komşu olan tepeleri de çıkarmak gerekir. Bu düşünceyle komşu bütünlük değeri bir zedelenebilirlik parametresi olarak tanımlanmıştır.

G bir graf ve u , G 'nin herhangi bir tepesi olsun. u tepesinin açık komşuluğu $N(u) = \{v \in V(G) : d(u,v) = 1\}$ ve u tepesinin kapalı komşuluğu $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ olur. Herhangi bir u tepesinin graftan çıkarılmasıyla graftan silinen tepeler kümesi de $N[u]$ olsun. $N[u]$ kapalı komşuluğu graftan atılan u tepesine subverted tepe denir.

Tüm tepeleri subverted olan $S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ kümesine G grafının subverted stratejisi denir. G/S , S kümesinin tüm tepeleri graftan atıldıktan sonra geriye kalan grafi, $m(G-S)$ ise geriye kalan bu graftaki en büyük bileşenin tepe sayısını ifade eder. S kümesindeki tüm tepeler ve komşuları graftan atıldığında geriye kalan graf bağlantısız graf, bir klik veya boş graf olabilir. Bu durumda $S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ kümesi için $N[S]$ graftan çıkarıldığında kalan en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G/S)$ olsun.

Casus ağlarıyla ilgili en yaygın zedelenebilirlik parametreleri komşu bağlantılılık sayısı, komşu bütünlük değeri, komşu scattering sayısı ve komşu rupture derecesidir.

G grafının komşu bağlantılılık sayısı, S subverted stratejisi olmak üzere

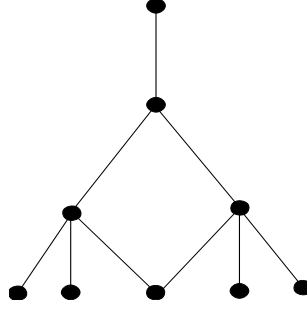
aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [5] :

$$K(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\} \quad (1.4)$$

G grafinın komşu bütünlük değeri, herhangi bir tepe subversion stratejisi S ve $c(G/S)$, G/S grafindaki en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [6] :

$$NI = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + c(G/S)\} \quad (1.5)$$

Örnek: Şekil 1.3 deki G grafi için $K(G) = 1$ ve $NI(G) = 2$ dir.



Şekil 1.3. 9 tepeli G grafi

Bir G grafinın komşu scattering sayısı, S bir subversion strajesi olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [7] :

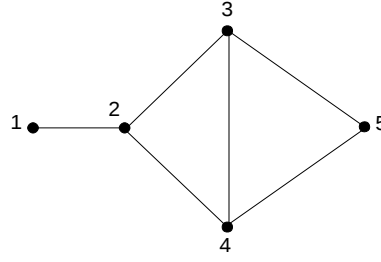
$$S(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G/S) - |S| : w(G/S) > 1\} \quad (1.6)$$

Komşulukla ilgilenen bu parametreler aynı anda çıkarılan tepe sayısı, bileşen sayısı ve en büyük bileşenin tepe sayısı hakkında bilgi vermemektedir. Bu nedenle yeni bir parametre olan komşu rupture derecesi tanımlanmıştır.

S , G 'nin bir subversion stratejisi, $w(G/S)$, G/S 'deki bileşen sayısı, $c(G/S)$, G/S 'nin en büyük bileşeninin tepe sayısı olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [8] :

$$Nr(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G/S) - |S| - c(G/S), w(G/S) \geq 1\} \quad (1.7)$$

Örnek: Şekil 1.4 de verilen G grafinin Nr değeri aşağıdaki gibi bulunur:



Şekil 1.4. 5 tepeli bir G grafi

S , G grafinin bir kesim kümesi olmak üzere, kesim kümesinin eleman sayısı 1 olsun.

$S = \{1\}$ için $w(G/S) = 1$, $|S| = 1$ ve $c(G/S) = 3$ olduğundan $Nr_1 = 1 - 1 - 3 = -3$.

$S = \{2\}$, $S = \{3\}$ ve $S = \{4\}$ için $w(G/S) = 1$, $|S| = 1$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan $Nr_2 = 1 - 1 - 1 = -1$.

$S = \{5\}$ için $w(G/S) = 1$, $|S| = 1$ ve $c(G/S) = 2$ olduğundan $Nr_3 = 1 - 1 - 2 = -2$.

Kesim kümesinin eleman sayısı 2 olsun.

$S = \{1, 2\}$ için $w(G/S) = 1$, $|S| = 2$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan $Nr_4 = 1 - 2 - 1 = -2$.

$S = \{3, 5\}$, $S = \{4, 5\}$ için $w(G/S) = 1$, $|S| = 2$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan $Nr_5 = 1 - 2 - 1 = -2$.

Kesim kümesinin eleman sayısı 3 olsun.

$S = \{3, 4, 5\}$ için $w(G/S) = 1$, $|S| = 3$ ve $c(G/S) = 1$ olduğundan $Nr_6 = 1 - 3 - 1 = -3$.

Eğer kesim kümesi $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, ve $\{3, 4, 5\}$ haricinde iki veya daha çok elemana sahip olursa $w(G/S) = 0$ olacağından dolayı tanım gereği Nr değeri hesaplanamaz.

Bu durumda G grafinin komşu rupture derecesi:

$Nr(G) = \max\{Nr_1, Nr_2, Nr_3, Nr_4, Nr_5, Nr_6\} = -1$ olarak bulunur.

Bilinen bazı grafların komşu rupture dereceleri aşağıda verilmiştir [8, 14] :

(a) P_n , n tepeli bir yol graf ve $n \geq 12$ olmak üzere,

$$Nr(P_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Aşağıdaki tabloda, $n < 12$ için P_n yol grafinin komşu rupture dereceleri verilmiştir.

Tablo 1.1. P_n yol grafinin komşu rupture derecesi

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Nr(P_n)$	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1

(b) C_n , n tepeli bir çevre graf ve $n \geq 15$ olmak üzere,

$$Nr(C_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Aşağıdaki tabloda, $n < 15$ için C_n yol grafinin komşu rupture dereceleri verilmiştir.

Tablo 1.2. C_n çevre grafinin komşu rupture derecesi

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$Nr(C_n)$	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-2	-2

(c) $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, k -parçalı bir tam graf olmak üzere,

$$Nr(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - 3.$$

(d) n tepeli P_n yol grafinin transformasyon grafi P_n^{---} olmak üzere,

$$Nr(P_n^{---}) = 0.$$

(e) $m \geq n$ ve $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafın transformasyon grafi $K_{m,n}^{---}$ olmak üzere,

$$Nr(K_{m,n}^{---}) = m - 4.$$

Merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşan bir iletişim ağının merkezleri veya bağlantı hatları zarara uğradığında bu ağda bazı sorunların ortaya çıkması hatta iletişimin durması söz konusudur. Ağda iletişim durana kadar ne kadar ve nasıl dayanacağı oldukça önemli bir konudur. Bir iletişim hattının graf ile modellenmesi oluşan zararın araştırılmasında kolaylık sağlamaktadır. Bu çalışmada, iletişim hatlarının zarar gördükten sonra oluşan zararın incelenmesi için kullanılan bazı zedelenebilirlik parametreleri verilmiş ve bir iletişim ağının genişletilebilmesi için kullanılan transformasyon işlemleri ile elde edilen bazı grafların komşu rupture dereceleri hesaplanmıştır.

2. TRANSFORMASYON GRAFLAR

Bu bölümde öncelikle G^{xyz} transformasyon grafinin tanımı verilmiştir. Daha sonra G^{---} , G^{+--} , G^{-+-} ve G^{++-} transformasyon graflarının yol graf, çevre graf, tekerlek graf, tam graf ve iki parçalı tam graf ele alınarak komşu rupture dereceleri hesaplanmıştır.

Tanım 1. $G = (V(G), E(G))$ bir graf ve $x, y, z +$ veya $-$ değerlerini alabilen üç değişken olsun. G^{xyz} transformasyon grafi tepeler kümesi $V(G) \cup E(G)$ olan ve $\alpha, \beta \in V(G) \cup E(G)$ olmak üzere α ve β nin G^{xyz} de komşu olması için gerek ve yeter koşul:

1. $\alpha, \beta \in V(G)$ olmak üzere α ve β , $x = +$ ise G de komşudur; α ve β , $x = -$ ise G de komşu değildir.
2. $\alpha, \beta \in E(G)$ olmak üzere α ve β , $y = +$ ise G de komşudur; α ve β , $y = -$ ise G de komşu değildir.
3. $\alpha \in V(G)$, $\beta \in E(G)$ olmak üzere α ve β , $z = +$ ise G de ilişkilidir; α ve β $z = -$ ise G de ilişkili değildir.

2.1. G^{---} Transformasyon Grafların Komşu Rupture Derecesi

2.1.1. C_n^{---} Grafının Komşu Rupture Derecesi

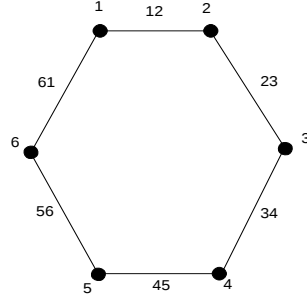
Bu bölümde çevre graf, tekerlek graf ve tam grafın G^{---} transformasyon graflarının komşu rupture derecesi araştırılmıştır. Wu ve Meng basit bağlantılı bir G grafının üçgen veya yıldız grafa izomorf olmadığı sürece G^{---} transformasyon grafinin her zaman bağlantılı olduğunu ispatlamıştır [13]. Genelliği bozmaksızın, çalıştığımız grafların bağlantılı olduğu kabul edilmiştir. G^{---} transformasyon grafi $V(\overline{G}) \cup V(\overline{L(G)})$ tepeler kümesi ve ayrıtlar kümesi $\overline{G}$ nin ayrıtları, $\overline{L(G)}$ line grafının tümleyeninin ayrıtları ve eğer G de komşu değilse $\overline{G}$ ve $\overline{L(G)}$ tepeleri arasındaki ayrıtlardan oluşur [10, 11]. Şekil 2.1 de 6 tepeli C_6 çevre grafi ve Şekil 2.2 de transformasyon grafi C_6^{---} gösterilmiştir.

Teorem 1. n tepeli C_n çevre grafının transformasyon grafi C_n^{---} olmak üzere,

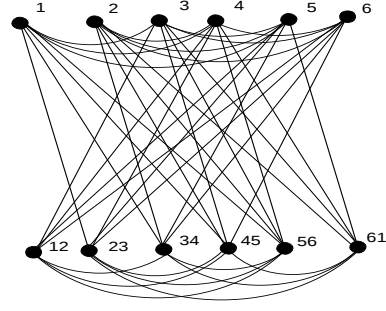
$$Nr(C_n^{---}) = -2.$$

İspat 1. S , C_n^{---} grafının subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $S = \{u : u \in V(\overline{C_n})\}$ olsun. C_n grafında x ve y , u ya komşu olan tepeler, xu ve uy , u ile ilişkili ayrıtlar olmak üzere $N[S] = V(\overline{C_n}) \setminus \{x, y\} \cup V(\overline{L(C_n)}) \setminus \{xu, uy\}$.



Şekil 2.1. C_6 çevre grafi



Şekil 2.2. C_6^{---} transformasyon grafi

x ve y , C_n grafinde komşu olmadığından C_n^{---} grafinde komşudur. x ve uy , y ve xu C_n grafinde ortak bir bitiş tepesine sahip olmadığından C_n^{---} grafinde komşudur. Böylece geriye kalan graf P_4 grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(C_n^{---}) = Nr(P_4) - 1 = -2 \quad (2.1)$$

olarak bulunur.

Durum 2: $S = \{uv : uv \in V(\overline{L(C_n)})\}$ olsun. u ve v , $uv \in E(C_n)$ in uç tepeleri, xu ve vy , C_n grafinde u ve v ile ilişkili olan ayrıtlar olmak üzere $N[S] = V(\overline{C_n}) \setminus \{u, v\} \cup V(\overline{L(C_n)}) \setminus \{xu, vy\}$ dir. u ve v , C_n grafinde komşu olduğundan C_n^{---} grafinde komşu değildir. xu ve vy , C_n grafinde ortak bitiş tepesine sahip olmadığından C_n^{---} grafinde komşudur. u ve vy , v ve xu C_n grafinde ilişkili olmadığı için C_n^{---} grafinde komşudur. Böylece geriye kalan graf P_4 grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(C_n^{---}) = Nr(P_4) - 1 = -2 \quad (2.2)$$

olarak bulunur.

(2.1) ve (2.2) nin maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.1.2. W_n^{---} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda W_n^{---} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 2. n tepeli W_n tekerlek grafının transformasyon grafi W_n^{---} olmak üzere,

$$Nr(W_n^{---}) = n - 5.$$

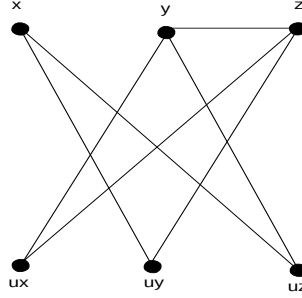
İspat 2. S , W_n^{---} grafının subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $\deg_{W_n}(u) = 3$ olmak üzere $S = \{u : u \in V(\overline{W_n})\}$ olsun. $\deg_{W_n}(x) = n - 1$ ve $xu, yu, zu \in E(W_n)$ olmak üzere $N(u) = \{x, y, z\}$ olduğunu kabul edelim. Buradan geriye kalan Şekil 2.3 deki gibi olur.

Bu nedenle,

$$Nr(W_n^{---}) = -3 \quad (2.3)$$

olarak bulunur.



Şekil 2.3. $W_n^{---} \setminus S$ geriye kalan altgrafı

Durum 2: $\deg_{W_n}(u) = n - 1$ olmak üzere $S = \{u : u \in V(\overline{W_n})\}$ olsun. Sadece u tepesini çıkarmak grafin bağlantısız olmasını sağlamaz. Çevreye ait $n - 1$ tepe vardır. Çevreye ait her tepe üç tepe hariç W_n^{---} grafindeki bütün tepeler ile bağlantılıdır. Geriye kalan graf pek çok ayrıta sahip olduğundan birden fazla tepe çıkarılmalıdır.

Altdurum 1: $\deg_{W_n}(v) = 3$ ve $\deg_{W_n}(u) = n - 1$ olmak üzere $S = \{u, v : u, v \in V(\overline{W_n})\}$ olsun. x ve y tepeleri W_n grafinde, u ve v 'nin ortak komşusu olup birbirleriyle komşu olmadığından W_n^{---} grafinde komşudur. uv , W_n grafinde ilişkili olmadığı için W_n^{---} grafinde x ve y ile komşudur. Böylece geriye kalan graf K_3 grafına izomorf olur.

Bu nedenle, $Nr(W_n^{---}) = Nr(K_3) - 2 = -4$ olarak bulunur.

Altdurum 2: uv , W_n grafinde spoke ve $\deg_{W_n}(u) = n - 1$ olmak üzere $S = \{u, uv : u \in V(\overline{W_n}), uv \in V(L(W_n))\}$ olsun. uv , W_n grafinde bir spoke olduğu için, uv , W_n^{---} grafindeki v ve diğer spokelara karşılık gelen tepeler hariç bütün tepeler ile komşudur. Spoke'lara karşılık gelen tepeler kendi aralarında bağlantısızdır fakat hepsi v ile bağlantılıdır. Bu sebeple geriye kalan graf $K_{1,n-2}$ grafına izomorftur.

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{---}) = Nr(K_{1,n-2}) - 2 = n - 7 \quad (2.4)$$

elde edilir.

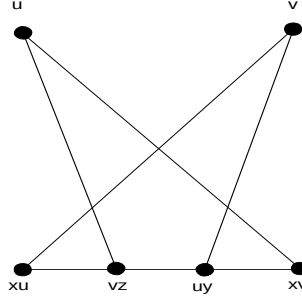
Durum 3: uv , W_n garfinde spoke olmamak üzere $S = \{uv : uv \in V(L(W_n))\}$ olsun. xu ve xv spoke, uy and vz spoke olmamak üzere $\deg_{W_n}(x) = n - 1$ ve $xu, xv, uy, vz \in$

$E(W_n)$ olduğunu kabul edelim. Böylece geriye kalan graf Şekil 2.4 deki gibi olur ve $Nr(W_n^{---} \setminus S) = 0$ dir.

Bu nedenle,

$$Nr(W_n^{---}) = -1 \quad (2.5)$$

olarak bulunur.



Şekil 2.4. $W_n^{---} \setminus S$ geriye kalan altgrafı

Durum 4: uv , W_n grafında spoke ve $\deg_{W_n}(u) = n - 1$ olmak üzere $S = \{uv : uv \in V(\overline{L(W_n)})\}$ olsun. W_n grafında bütün spokelar komşu olduğu için S kümesinin kapalı komşuluğundaki karşılık gelen tepeleri içermez, bu tepelere $ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-2}$ diyelim. Buna ek olarak uv nin bitim tepeleri olan u ve v , W_n grafındaki komşu ayrıtlar vx_1 ve vx_2 e karşılık gelen tepeler de $N[S]$ de yoktur. Bu nedenle geriye kalan grafın tepeleri $V(W_n^{---} \setminus S) = \{u, v, vx_1, vx_2, ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-2}\}$ dir. u ve v tepeleri arasında W_n grafında komşu oldukları için bir ayrıt yoktur ve geriye kalan tepelerden iki tanesi arasında yukarıdaki etiketlemeye göre ortak bir karakter olmadığı sürece bir ayrıt vardır. Durum 2 ile benzer şekilde birden fazla tepe çıkarmamız gerekir.

Altdurum 1: uv , W_n grafında bir spoke ve $\deg_{W_n}(v) = 3$ olmak üzere $S = \{uv, v : uv \in V(\overline{L(W_n)}), v \in V(\overline{W_n})\}$ olsun. Böylece $V(W_n^{---} \setminus S) = \{u, vx_1, vx_2\}$ ve $W_n^{---} \setminus S \cong P_3$ dir. Bu sebeple, $Nr(W_n^{---}) = -3$ elde edilir.

Altdurum 2: uv , W_n grafında bir spoke ve vx_1 spoke olmamak üzere $S = \{uv, vx_1 : uv, vx_1 \in V(\overline{L(W_n)})\}$ olsun. Böylece $V(W_n^{---} \setminus S) = \{v, vx_2, ux_1\}$ ve $W_n^{---} \setminus S \cong P_3$ dir. Bu sebeple, $Nr(W_n^{---}) = -3$ elde edilir.

Altdurum 3: uv ve ux_1 , W_n grafında birer spoke ve $d_{W_n}(v, x_1) > 1$ olmak üzere $S = \{uv, ux_1 : uv, ux_1 \in V(\overline{L(W_n)})\}$ olsun. Böylece $V(W_n^{---} \setminus S) = \{u, vx_1, ux_2, ux_3, \dots, ux_{n-2}\}$ ve $W_n^{---} \setminus S \cong K_{1, n-2}$ dir. Bu sebeple, $Nr(W_n^{---}) = n - 7$ elde edilir.

Altdurum 4: uv ve ux_3 , W_n grafında birer spoke ve $d_{W_n}(v, x_3) > 1$ olmak üzere $S = \{uv, ux_3 : uv, ux_3 \in V(\overline{L(W_n)})\}$ olsun.

Böylece $V(W_n^{---} \setminus S) = \{u, ux_1, ux_2, ux_4, \dots, ux_{n-2}\}$ ve $W_n^{---} \setminus S \cong (n-2)K_1$ elde edilir.

Bu nedenle,

$$Nr(W_n^{---}) = n - 5 \quad (2.6)$$

olarak bulunur.

(2.3), (2.4), (2.5) ve (2.6) nın maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.1.3. K_n^{---} Grafinın Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda K_n^{---} grafinın komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 3. n tepeli K_n tam grafinın transformasyon grafi K_n^{---} olmak üzere,

$$Nr(K_n^{---}) = n - 6.$$

İspat 3. S, K_n^{---} grafinın bir subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $S = \{u : u \in V(\overline{K_n})\}$ olsun. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \in V(K_n)$ ve $B = \{ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-1}\} \in E(K_n)$ olmak üzere geriye kalan grafin tepeler kümesi $V(K_n^{---} \setminus S) = A \cup B$ dir. B kümesinin bütün elemanları ortak bir bitim tepesine sahip değilse A kümesinin diğer elemanlarıyla K_n^{---} grafinda komşudur. S kümesini çıkarmak $2n - 2$ tepeli bir birleşen bırakır ve oldukça küçük bir rupture derecesi oluşur: $Nr = 1 - 2n$. Bu sebeple S kümesi en azından iki eleman içermelidir.

Altdurum 1: $x_1 \in V(\overline{K_n})$ olmak üzere $S = \{u, x_1\}$ olduğunda

$N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \cup V(\overline{L(K_n)}) \setminus \{ux_1\}$ olur. Böylece geriye kalan graf bir yıldıza izomorf olur; $K_n^{---} \setminus S \cong K_{1, n-2}$.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{---}) = Nr(K_{1, n-2}) - 2 = n - 7 \quad (2.7)$$

elde edilir.

Altdurum 2: $x_1 y \in V(\overline{L(K_n)})$ olmak üzere $S = \{u, x_1 y\}$ olsun.

Eğer $u = y$ ise, $N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{x_1\} \cup V(\overline{L(K_n)}) \setminus \{ux_2, ux_3, \dots, ux_{n-1}\}$ olur. Böylece $K_n \setminus S \cong K_{1, n-2}$ dir. Bu sebeple $Nr(K_n^{---}) = Nr(K_{1, n-2}) - 2 = n - 7$.

Eğer $u \neq y$ ise, $N[S] = V(K_n) \setminus \{x_1, y\} \cup E(K_n) \setminus \{ux_1, uy\}$ olur. Böylece $K_n^{---} \setminus S \cong 2K_2$ olur ve $Nr(K_n^{---}) = -2$.

Durum 2: $ux_1 \in V(\overline{L(K_n)})$ olmak üzere $S = \{ux_1\}$ olsun. Böylece

$N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{u, x_1\} \cup V(\overline{L(K_n)}) \setminus \{ux_2, ux_3, \dots, ux_{n-1}, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_{n-1}\}$. Geriye kalan graf Durum 1 deki gibi olur. Bu sebeple birden fazla tepeli çıkarmamız gerekir. $ux_1, ux_2 \in V(\overline{L(K_n)})$ olmak üzere $S = \{ux_1, vx_2\}$ olsun.

Eğer $u = v$ ise, $N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{u\} \cup V(\overline{L(K_n)}) \setminus \{x_1x_2, ux_3, ux_4, \dots, ux_{n-1}\}$ olur. Geriye kalan graf iki tepeli bir bileşen ve $n - 3$ izole tepeden oluşur.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{---}) = n - 6 \quad (2.8)$$

olarak bulunur.

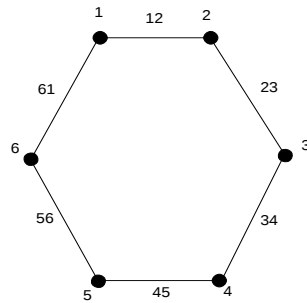
Eğer $u \neq v$ ise, $N[S] = V(\overline{K_n}) \cup V(\overline{L(K_n)}) \setminus \{uv, ux_2, vx_1, x_1x_2\}$ ve $K_n^{---} \setminus S \cong 2K_2$ olur. Böylece $Nr(K_n^{---}) = -2$ dir.

(2.7) ve (2.8) in maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

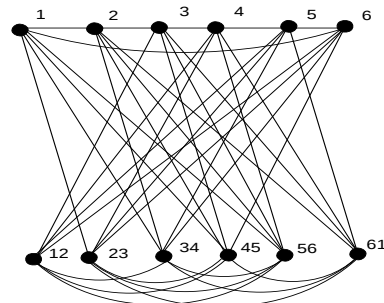
2.2. G^{+---} Transformasyon Graflarının Komşu Rupture Derecesi

2.2.1. P_n^{+---} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu bölümde yol graf, çevre graf, tekerlek graf, tam graf ve iki parçalı tam grafın G^{+---} transformasyon graflarının komşu rupture dereceleri incelenecektir. G^{+---} transformasyon grafi $V(G) \cup V(\overline{L(G)})$ tepeler kümesi ve G nin ayrıtları, $\overline{L(G)}$ line grafının ayrıtları ve G de ilişkili değiller ise G ve $\overline{L(G)}$ nin tepeleri arasındaki ayrıtları içeren ayrıtlar kümesinden oluşur [12]. Şekil 2.5 de altı tepeli C_6 çevre grafı ve Şekil 2.6 da transformasyon grafi gösterilmiştir.



Şekil 2.5. C_6 çevre grafı



Şekil 2.6. C_6^{+---} transformasyon grafi

Teorem 4. n tepeli P_n yol grafinin transformasyon grafi P_n^{+--} olmak üzere,

$$Nr(P_n^{+--}) = -1.$$

İspat 4. S, P_n^{+--} grafinin subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $S = \{u : u \in V(P_n)\}$ olsun.

Altdurum 1: $\deg(u) = 2$ ve u tepesinin, P_n grafinde x ve y ile komşu olduğunu kabul edelim. ux ve uy , P_n grafinde ortak bir tepeye sahip olduğu için P_n^{+--} grafinde komşu değildir.

$S = \{u, ux\}$ olsun. ux tepesini $V(\overline{L(P_n)})$ den çıkarırsak P_{n-3} grafini siler; böylece $w(G/S) = 1$, $|S| = 2$ ve $c(G/S) = 1$ olur.

Bu nedenle,

$$Nr(P_n^{+--}) = -2 \quad (2.9)$$

olarak bulunur.

Altdurum 2: $\deg_{P_n}(u) = 1$ olduğunu kabul edelim. $Nr(P_n^{+--} \setminus \{u\}) = Nr(P_{n-2})$.

Durum 2: u ve v , $uv \in E(P_n)$ ayrıtının bitim tepeleri, ux ve vy ayrıtları uv ayrıtından başka u ve v ile ilişkili olmak üzere $S = \{uv : uv \in V(\overline{L(P_n)})\}$ olsun. Bu durumda $P_n^{+--} \setminus S \cong C_4$ olur.

Bu sebeple,

$$Nr(P_n^{+--}) = -1 \quad (2.10)$$

elde edilir.

(2.9) ve (2.10) un maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.2.2. C_n^{+--} Grafinin Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda C_n^{+--} grafinin komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 5. n tepeli C_n çevre grafinin transformasyon grafi C_n^{+--} olmak üzere,

$$Nr(C_n^{+--}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

İspat 5. S, C_n^{+--} grafinin bir subversion stratejisi olsun.

Durum 1: u ve v , $uv \in E(C_n)$ nin uç tepeleri, ux ve vy sırasıyla u ve v ile ilişkili ayrıtlar olmak üzere $S = \{uv : uv \in V(\overline{L(C_n)})\}$ ve $N[S] = V(G) \setminus \{u, v\} \cup V(\overline{L(C_n)}) \setminus \{ux, vy\}$ olduğunu kabul edelim. u ve v tepeleri, C_n grafinde komşu oldukları için C_n^{+--} grafinde komşudur ve ux ve vy , C_n grafinde ortak bir bitim tepesine sahip olmadıkları

için C_n^{+--} grafında komşudur. u ve vy , v ve ux C_n grafında ilişkili olmadığı için C_n^{+--} grafında komşudur. Böylece, $c(C_n^{+--} \setminus S) = 4$ ve $w(C_n^{+--} \setminus S) = 1$. $C_n^{+--} \setminus S \cong C_4$ ve $Nr(C_4) = -1$ olduğundan,

$$Nr(C_n^{+--}) = Nr(C_4) - 1 = -2 \quad (2.11)$$

olarak bulunur.

Durum 2: $S = \{u : u \in V(C_n)\}$ olsun. ux ve uv , C_n grafında u ile ilişkili ayrıtlar ve $ux, uv \in V(\overline{L(C_n)})$ olmak üzere $C_n \setminus S \cong P_{n-3} + \{ux, uv\}$ dir. P_{n-3} den herhangi bir tepeyi çıkardığımızda $V(\overline{L(C_n)})$ deki ux ve uv silinmiş olur ve

$$\begin{aligned} N(C_n^{+--}) &= Nr(P_{n-3} + \{ux, uv\}) \\ &= Nr(P_{n-3}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ifadesi elde edilir.

(2.11) ve (2.12) nin maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.2.3. W_n^{+--} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda W_n^{+--} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 6. W_n^{+--} n tepeli W_n tekerlek grafının transformasyon grafi W_n^{+--} olmak üzere,

$$Nr(W_n^{+--}) = n - 3.$$

İspat 6. S , W_n^{+--} grafının subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $\deg_{W_n}(u) = n - 1$ olmak üzere $S = \{u : u \in V(W_n)\}$ olsun. u , W_n grafının merkez tepesi olduğundan W_n grafının bütün tepeleri ve spokelar hariç W_n in ayrıtlarına karşılık gelen bütün tepeler W_n^{+--} grafında u ya komşudur. Böylece geriye kalan graf sadece W_n^{+--} grafında birbirinden bağımsız olan spokelara karşılık gelen tepelerden oluşur. Böylece $w(W_n^{+--} \setminus S) = n - 1$, $c(W_n^{+--} \setminus S) = 1$.

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{+--}) = n - 3 \quad (2.13)$$

olarak bulunur.

Durum 2: $\deg_{W_n}(u) = 3$ olmak üzere $S = \{u : u \in V(W_n)\}$ olsun. $\deg_{W_n}(x) = n - 1$ ve $A = \{ux, uy, uz\}$ olmak üzere $N(u) = x, y, z$ olsun. Böylece $W_n^{+--} \setminus S = P_{n-4} + A$.

Altdurum 1: $S_1 = a \in A$, W_n^{+--} grafının subversion stratejisi olmak üzere $S^* = S \cup S_1$ olsun. Böylece $w(W_n^{+--} \setminus S^*) = 2$ ve $c(W_n^{+--} \setminus S^*) = 1$ dir.

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{+--}) = -1 \quad (2.14)$$

olarak bulunur.

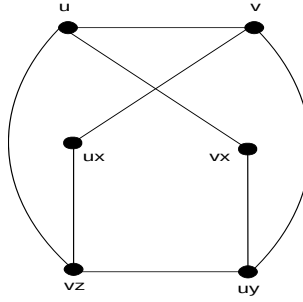
Altdurum 2: S_2 , P_4 ün Nr -kümesi olmak üzere $S^* = S \cup S_2$ olsun. A kümesindeki bütün tepeler S_2 deki tepelere komşu olduğundan $Nr(W_n^{+--} \setminus S) = Nr(P_{n-4})$ dir. Böylece $|S| = 1$ olduğundan $Nr(W_n^{+--}) = Nr(P_{n-4}) - 1$ elde edilir.

Durum 3: uv , W_n grafinda spoke olmamak üzere $S = \{uv : uv \in E(W_n)\}$ olsun. ux ve vx spoke, uy ve vz spoke olmamak üzere $\deg_{W_n}(x) = n - 1$ ve $ux, vz, ux, vx \in E(W_n)$ olsun. Dolayısıyla geriye kalan graf Şekil 2.7 de gösterilmiştir ve $Nr(W_n^{+--} \setminus S) = 0$ dir.

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{+--}) = -1 \quad (2.15)$$

olarak bulunur.



Şekil 2.7. $W_n^{+--} \setminus S$ geriye kalan altgrafi

Durum 4: uv spoke olmak üzere $S = \{uv : uv \in E(W_n)\}$ olsun. $\deg_{W_n}(u) = n - 1$ ve W_n grafinın bütün spoke'ları $uv, ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-2} \in E(W_n)$ olsun.

Bu sebeple,

$$S = \{u\}, w(G/S) = n - 2, c(G/S) = 1 \text{ ve}$$

$$Nr(W_n^{+--}) = n - 4 \quad (2.16)$$

olarak bulunur.

$$S = \{v\}, w(G/S) = 2, c(G/S) = 1 \text{ ve } Nr = 0$$

$$S = \{ux_1\}, G \setminus S \cong K_{1,n-1} \text{ ve } Nr = n - 5$$

$$S = \{ux_2\}, w(G/S) = n - 2, c(G/S) = 1 \text{ ve } Nr = n - 4$$

$$S = \{vx_1\}, w(G/S) = 1, c(G/S) = 3 \text{ ve } Nr = -2 \text{ dir.}$$

(2.13), (2.14), (2.15) ve (2.16) nın maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.2.4. K_n^{+--} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda K_n^{+--} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 7. n tepeli K_n tam grafının transformasyon grafi K_n^{+--} olmak üzere

$$Nr(K_n^{+--}) = n - 3.$$

İspat 7. S, K_n^{+--} grafının subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $S = \{u : u \in V(K_n)\}$ olsun.

$V(K_n)$ kümesinden u tepesini çıkarırsak $ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-1} \in V(\overline{L(K_n)})$ izole tepelerini elde ederiz.

Bu sebeple,

$$w(K_n^{+--} \setminus S = n - 1), c(K_n^{+--} \setminus S = 1), |S| = 1 \text{ ve}$$

$$Nr(K_n^{+--}) = n - 3 \quad (2.17)$$

olarak bulunur.

Durum 2: Bir tepeyi çıkardığımızda sadece izole tepeler kaldığından başka bir tepeyi çıkarmaya ihtiyaç yoktur. Bu nedenle S, K_n grafının bir ayrıtını veya ayrıtılarını içermelidir.

Altdurum 1: $S = \{uv : uv \in V(\overline{L(K_n)})\}$ olsun. $A = \{u, v\} \in V(K_n)$ ve

$B = \{ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-2}, vx_1, vx_2, \dots, vx_{n-2}\} \in E(K_n)$ olmak üzere geriye kalan grafın tepeler kümesi $V(K_n^{+--} \setminus S) = A \cup B$ dir.

B kümesinin her bir elemanı A veya B kümesindeki diğer tepeler ile ortak bitim tepesine sahip değil ise komşudur ve A kümesinin her bir elemanı diğerleri ile komşudur. S kümesinin çıkarılması $2n - 2$ tepeli bir bileşen ortaya çıkaracağı açıktır ve oldukça küçük komşu rupture derecesi oluşturur, $Nr = 2 - 2n$. Bu nedenle S en az iki eleman içermelidir.

Altdurum 2: $uv, xy \in V(\overline{L(K_n)})$ olmak üzere $S = \{uv, xy\}$ olsun. Eğer uv ve xy ortak bitim tepesine sahip ise, $N[S] = V(K_n) \cup V(\overline{L(K_n)}) \setminus \{vy, uz_1, uz_2, \dots, uz_{n-3}\}$ olur.

Böylece geriye kalan graf yıldız grafa izomorf olur, $K_n^{+--} \setminus S \cong K_{1, n-2}$.

Bu nedenle,

$$Nr(K_n^{+--}) = Nr(K_{1, n-2}) - 2 = n - 7 \quad (2.18)$$

olarak bulunur.

(2.17) ve (2.18) nin maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.2.5. $K_{m,n}^{+--}$ Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda $K_{m,n}^{+--}$ grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 8. $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafın transformasyon grafi $K_{m,n}^{+--}$ olmak üzere,

$$Nr(K_{m,n}^{+--}) = \max\{m, n\} - 3.$$

İspat 8. $m \geq n$ ve S , $K_{m,n}^{+--}$ grafının subversion stratejisi olsun.

Durum 1: $\deg_{K_{m,n}}(u) = n$ olmak üzere $S = \{u : u \in V(K_{m,n})\}$ olsun. Bu durumda geriye kalan graf $K_{m-1,n}$ grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(K_{m,n}^{+--}) = m - 4 \quad (2.19)$$

elde edilir.

Durum 2: $\deg_{K_{m,n}}(u) = m$ olmak üzere $S = \{u : u \in V(K_{m,n})\}$ olsun. Bu durumda geriye kalan graf $K_{m,n-1}$ grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(K_{m,n}^{+--}) = m - 3 \quad (2.20)$$

elde edilir.

Durum 3: $S = \{uv : uv \in E(K_{m,n})\}$ olsun. Sadece uv tepesini çıkarmak grafi bağlantısız yapmaz. $m + n$ tepe ve $m.n + m + n - 2$ ayrıt olur. Böylece geriye kalan graf pek çok ayrıta sahip olduğundan birden fazla tepe çıkarılmalıdır.

Altdurum 1: $ux \in E(K_{m,n})$ olmak üzere $S = \{ux, uv\}$ olsun. Geriye kalan graf $n - 1$ tane izole tepeden oluşur. Böylece $w(K_{m,n}^{+--} \setminus S) = n - 1$, $|S| = 2$ ve $c(K_{m,n}^{+--} \setminus S) = 1$.

Bu sebeple,

$$Nr(K_{m,n}^{+--}) = n - 4 \quad (2.21)$$

olarak bulunur.

Altdurum 2: $vy \in E(K_{m,n})$ olmak üzere $S = \{uv, vy\}$ olsun. Geriye kalan graf $m - 1$ tane izole tepeden oluşur. Böylece $w(K_{m,n}^{+--} \setminus S) = m - 1$, $|S| = 2$ ve $c(K_{m,n}^{+--} \setminus S) = 1$.

Bu sebeple,

$$Nr(K_{m,n}^{+--}) = m - 4 \quad (2.22)$$

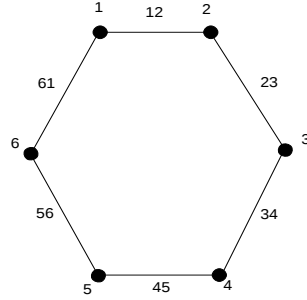
olarak bulunur.

(2.19), (2.20), (2.21) ve (2.22) nin maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

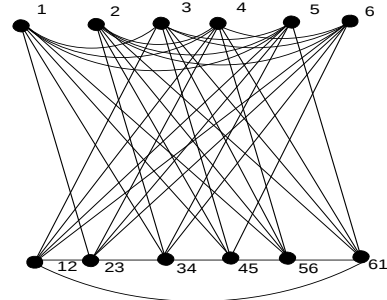
2.3. G^{-+-} Transformasyon Graflarının Komşu Rupture Derecesi

2.3.1. P_n^{-+-} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu bölümde yol graf, çevre graf, tekerlek graf, tam graf ve iki parçalı tam grafın G^{-+-} transformasyon graflarının komşu rupture derecelerini incelenecektir. G^{-+-} transformasyon grafi $V(\overline{G}) \cup V(L(G))$ tepeler kümesi ve ayrıtlar kümesi $\overline{G}$ grafının ayrıtları, $L(G)$ grafının ayrıtları ve G grafında ilişkili değilse $\overline{G}$ ve $L(G)$ tepeleri arasındaki ayrıtları içerir [9]. Şekil 2.8 de altı tepeli C_6 çevre grafı ve Şekil 2.9 da transformasyon grafi gösterilmiştir.



Şekil 2.8. C_6 çevre grafı



Şekil 2.9. C_6^{-+-} transformasyon grafi

Teorem 9. n tepeli P_n yol grafın transformasyon grafi P_n^{-+-} olmak üzere,

$$Nr(P_n^{-+-}) = 0.$$

İspat 9. S , P_n^{-+-} grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre üç durum söz konusudur.

Durum 1: $S = S_1 \subset V(\overline{P_n})$, $\overline{P_n}$ grafının Nr -kümesi olsun. Böylece $Nr(\overline{P_n}) = w(\overline{P_n} \setminus S_1) - |S_1| - c(\overline{P_n} \setminus S_1)$ dir. $w(P_n^{-+-} \setminus S) = w(\overline{P_n} \setminus S_1) + 1$, $|S| = |S_1|$ ve $c(P_n^{-+-} \setminus S) = c(\overline{P_n} \setminus S_1)$ dir.

Bu sebeple,

$$\begin{aligned} Nr(P_n^{-+-}) &= w(P_n^{-+-} \setminus S) - |S| - c(P_n^{-+-} \setminus S) \\ &= w(\overline{P_n} \setminus S_1) + 1 - |S_1| - c(\overline{P_n} \setminus S_1) \\ &= Nr(\overline{P_n}) + 1 = -1 + 1 = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir.

Durum 2: $S = S_2 \subset V(L(P_n))$, $\overline{P_{n-1}}$ grafinin Nr-kümesi olsun. Böylece $Nr(P_{n-1}) = w(P_{n-1} \setminus S_2) - |S_2| - c(P_{n-1} \setminus S_2)$. Bu nedenle $w(P_n^{--} \setminus S) = w(P_{n-1} \setminus S_2)$, $|S| = |S_2|$ ve $c(P_n^{--} \setminus S) = c(P_{n-1} \setminus S_2)$.

Bu sebeple,

$$\begin{aligned} Nr(P_n^{--}) &= w(P_n^{--} \setminus S) - |S| - c(P_n^{--} \setminus S) = w(P_{n-1} \setminus S_2) - |S_2| - c(P_{n-1} \setminus S_2) \\ &= Nr(P_{n-1}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 2(mod 4); \\ -1, & n \equiv 0, 1, 3(mod 4). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir.

Durum 3: $S \subset V(\overline{P_n}) \cup V(L(P_n))$ olsun. Böylece $w(P_n^{--} \setminus S) = 1$, $c(P_n^{--} \setminus S) \geq 1$ dir.

Bu sebeple,

$$Nr(P_n^{--}) = w(P_n^{--} \setminus S) - |S| - c(P_n^{--} \setminus S) \leq 1 - |S| - 1 \leq -1. \quad (2.25)$$

elde edilir.

(2.23), (2.24) ve (2.25) in maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.3.2. C_n^{--} Grafinın Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda C_n^{--} grafinin komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 10. n tepeli C_n çevre grafin transformasyon grafi C_n^{--} olmak üzere,

$$Nr(C_n^{--}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases}$$

İspat 10. S , C_n^{--} grafinın subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre iki durum vardır.

Durum 1: $S = \{u\}$ where $u \in V(\overline{C_n})$ olsun. $d(u, x) = d(u, y) = 1$ olmak üzere $N[S] = V(C_n) \setminus \{x, y\} \cup V(L(C_n)) \setminus \{ux, uy\}$. Böylece geriye kalan graf C_4 grafına izomorf olur.

$$Nr(C_4) = -1 olduğundan$$

$$Nr(C_n^{--}) = -2. \quad (2.26)$$

elde edilir.

Durum 2: $uv \in V(L(C_n))$ olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf $P_{n-3} + \{u, v\}$ grafına izomorf olur.

Bu sebeple,

$$Nr(C_n^{-+-}) = Nr(P_{n-3} + \{u, v\}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases} \quad (2.27)$$

ifadesi elde edilir.

(2.26) ve (2.27) nin maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.3.3. W_n^{-+-} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda W_n^{-+-} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 11. n tepeli W_n tekerlek grafın transformasyon grafi W_n^{-+-} olmak üzere,

$$Nr(W_n^{-+-}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases}$$

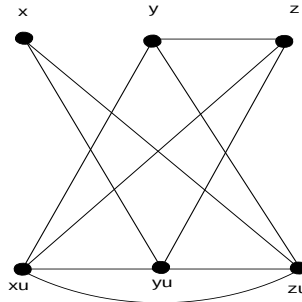
İspat 11. S, W_n^{-+-} grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre dört durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(\overline{W_n})$ ve $deg_{W_n}(u) = 3$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. $deg_{W_x}(u) = n - 1$ ve $xu, yu, zu \in E(W_n)$ olmak üzere $N(u) = \{x, y, z\}$ olduğunu kabul edelim. Böylece geriye kalan graf Şekil 2.10 daki gibi olur ve $Nr(W_n^{-+-} \setminus S) = -1$.

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{-+-}) = -2. \quad (2.28)$$

elde edilir.



Şekil 2.10. $W_n^{-+-} \setminus S$ geriye kalan altgrafi

Durum 2: $x \in V(\overline{W_n})$ ve $deg_{W_n}(x) = n - 1$ olmak üzere $S = \{x\}$ olsun. Sadece x tepesini çıkarmak grafi bağlantısız yapmaz, $2n - 2$ tepe ve pek çok ayrıt oluşur. Bu yüzden birden fazla tepe çıkarılmalıdır. $uv \in E(W_n)$ olmak üzere $S = \{x, uv\}$ olsun. Eğer $x \neq u$ ise geriye kalan grafın bileşen sayısı sıfırdır. Bu durum komşu rupture derecesinin tanımı ile çelişir. Eğer $x = u$ ise uv, W_n grafında bir spokedur. uv, W_n garfında spoke olduğundan v hariç diğer tepeler ile komşudur. Bu yüzden geriye kalan graf bir izole tepeden oluşur.

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{-+-}) = -2. \quad (2.29)$$

elde edilir.

Durum 3: uv , W_n grafında spoke olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun.

Bu durumda altgraf $P_{n-3} + \{u, v\}$ grafına izomorf olur. Bu yüzden,

$$Nr(W_n^{-+-}) = Nr(P_{n-3} + \{u, v\}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (2.30)$$

ifadesi elde edilir.

Durum 4: uv , W_n grafında spoke olmamak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Bu durumda geriye kalan graf şekildeki gibi olur ve $Nr(W_n^{-+-} \setminus S) = \begin{cases} -1, & n \equiv 2 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}. \end{cases}$

Bu sebeple,

$$Nr(W_n^{-+-}) = \begin{cases} -2, & n \equiv 2 \pmod{4}; \\ -3, & n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (2.31)$$

elde edilir.

(2.28), (2.29), (2.30) ve (2.31) in maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.3.4. K_n^{-+-} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda K_n^{-+-} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 12. n tepeli K_n tam grafın transformasyon grafi K_n^{-+-} olmak üzere,

$$Nr(K_n^{-+-}) = n - 7.$$

İspat 12. S , K_n^{-+-} grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre iki durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(\overline{K_n})$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \in V(\overline{K_n})$ ve $B = \{ux_1, ux_2, \dots, ux_{n-1}\} \in V(L(K_n))$ olmak üzere geriye kalan grafın tepeler kümesi $V(K_n^{-+-} \setminus S) = A \cup B$ dir. B kümesinin her bir elemanı ortak bitim tepesine sahip olmadığı sürece diğer tepelere komşudur. S kümesini çıkarmak $2n - 2$ tepeli bir bileşen ve oldukça küçük rupture derecesine sahiptir, $Nr = 2 - 2n$. Bu yüzden S kümesi en az iki eleman içermelidir.

Altdurum 1: $u, x_1 \in V(\overline{K_n})$ olmak üzere $S = \{u, x_1\}$ olsun.

Sonra $N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{x_2, x_3, \dots, x_{n-2}\} \cup V(L(K_n)) \setminus \{ux_1\}$.

Böylece geriye kalan graf yıldız grafa izomorf olur, $K_n^{-+-} = K_{1,n-2}$.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{-+-}) = n - 7 \quad (2.32)$$

elde edilir.

Altdurum 2: $u \in V(\overline{K_n})$ ve $yx_1 \in V(L(K_n))$ olmak üzere $S = \{u, yx_1\}$ olsun.

Eğer $u = y$ ise $N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{x_1\}$. Böylece $K_n^{-+-} = K_1$.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{-+-}) = -2 \quad (2.33)$$

elde edilir.

Eğer $u \neq y$ ise $N[S] = V(\overline{K_n}) \setminus \{x_1, y\} \cup V(L(K_n)) \setminus \{ux_1, uy\}$ ve $K_n^{-+-} = P_3$.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{-+-}) = -3 \quad (2.34)$$

elde edilir.

Durum 2: $ux_1 \in V(L(K_n))$ olmak üzere $S = \{ux_1\}$ olsun. Sadece ux_1 tepesini çıkarmak grafi bağlantısız yapmaz. S kümesinin eleman sayısını arttırsak bile bileşen sayısı her zaman bir olacaktır. Bu nedenle komşu rupture derecesi durum 1 den daha küçük olacaktır.

(2.32), (2.33) ve (2.34) ün maksimum değeri alındığında, sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.3.5. $K_{m,n}^{-+-}$ Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda $K_{m,n}^{-+-}$ grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 13. $m \geq n$ olmak üzere $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafın transformasyon grafi $K_{m,n}^{-+-}$ olmak üzere,

$$Nr(K_{m,n}^{-+-}) = -2.$$

İspat 13. S , $K_{m,n}^{-+-}$ grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre iki durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(\overline{K_{m,n}})$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. Eğer $\deg_{K_{m,n}}(u) = n$ ise geriye kalan graf $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\} \in V(\overline{K_{m,n}})$ ve $B = \{uy_1, uy_2, \dots, uy_n\} \in V(L(K_{m,n}))$ olmak üzere $V(K_{m,n}^{-+-} \setminus S) = A \cup B$ dir. $A \cup B$ kümesinin her bir elemanı ortak bir bitim tepesine sahip değilse diğer tepeler ile komşudur.

Böylece $V(K_{m,n}^{+-} \setminus S) \cong K_{m-1,n} - (1 - \text{factor})$. Bu sebeple

$$Nr(K_{m,n}^{+-}) = -2 \quad (2.35)$$

olarak bulunur.

Eğer $\deg_{K_{m,n}}(u) = m$ ise $\deg_{K_{m,n}}(u) = n$ e benzer şekilde komşu rupture derecesi

$$Nr(K_{m,n}^{+-}) = -2 \quad (2.36)$$

elde edilir.

Durum 2: $uv \in V(L(K_{m,n}))$ olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Bu durumda geriye kalan graf $K_{m-1} \times K_{n-1}$ grafına izomorf olur. Böylelikle

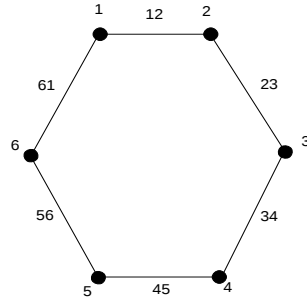
$$Nr(K_{m,n}^{+-}) = Nr(K_{m-1} \times K_{n-1}) - 1 = 1 - (n-1) - 1 = 1 - n. \quad (2.37)$$

(2.35), (2.36) ve (2.37) nin maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

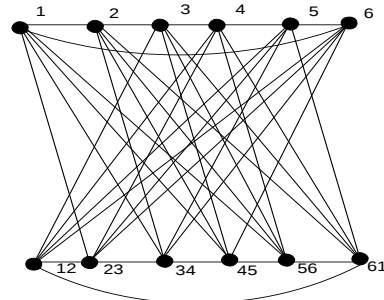
2.4. G^{+-} Transformasyon Graflarının Komşu Rupture Derecesi

2.4.1. P_n^{+-} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu bölümde yol graf, çevre graf, tekerlek graf, tam graf ve iki parçalı tam grafın G^{+-} transformasyon graflarının komşu rupture derecelerini incelenecektir. G^{+-} transformasyon grafının tepeler kümesi $V(G) \cup V(L(G))$ ve ayrıt kümesi G grafının ayrıtlarını, $L(G)$ line grafın ayrıtlarını ve G grafında ilişkili değıller ise G and $L(G)$ nin tepelerinin arasındaki ayrıtları içerir [13]. Şekil 2.11 de altı tepeli C_6 çevre grafı ve şekil 2.12 de transformasyon grafı gösterilmiştir.



Şekil 2.11. C_6 çevre grafı



Şekil 2.12. C_6^{+-} transformasyon grafı

Teorem 14. n tepeli P_n yol grafın transformasyon grafı P_n^{+-} olmak üzere,

$$Nr(P_n^{+-}) = \max\{Nr(P_n), Nr(P_{n-1})\}.$$

İspat 14. S, P_n^{++-} grafinin subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre üç durum söz konusudur.

Durum 1: $S = S_1 \subset V(P_n)$, P_n grafinin Nr -kümesi olsun.

Böylece $Nr(P_n) = w(P_n \setminus S_1) - |S_1| - c(P_n \setminus S_1)$.

Bu yüzden $w(P_n^{++-} \setminus S) = w(P_n \setminus S_1)$, $|S| = |S_1|$ ve $c(P_n^{++-} \setminus S) = c(P_n \setminus S_1)$.

$$\begin{aligned} Nr(P_n^{++-}) &= w(P_n^{++-} \setminus S) - |S| - c(P_n^{++-} \setminus S) \\ &= w(P_n \setminus S_1) - |S_1| - c(P_n \setminus S_1) \\ &= Nr(P_n). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Durum 2: $S = S_2 \subset V(L(P_n))$, P_{n-1} grafinin Nr -kümesi olsun.

Böylece $Nr(P_{n-1}) = w(P_{n-1} \setminus S_2) - |S_2| - c(P_{n-1} \setminus S_2)$.

Bu yüzden $w(P_n^{++-} \setminus S) = w(P_{n-1} \setminus S_2)$, $|S| = |S_2|$ ve

$c(P_n^{++-} \setminus S) = c(P_{n-1} \setminus S_2)$.

$$\begin{aligned} Nr(P_n^{++-}) &= w(P_n^{++-} \setminus S) - |S| - c(P_n^{++-} \setminus S) \\ &= w(P_{n-1} \setminus S_2) - |S_2| - c(P_{n-1} \setminus S_2) \\ &= Nr(P_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Durum 3: $S \subset (V(P_n) \cup V(L(P_n)))$ olsun. Böylece

$w(P_n^{++-} \setminus S) = 1$, $|S| = x$ and $c(P_n^{++-} \setminus S) \leq 4$.

$$\begin{aligned} Nr(P_n^{++-}) &= w(P_n^{++-} \setminus S) - |S| - c(P_n^{++-} \setminus S) \\ &\leq 1 - x - 4 \leq -3 - x \leq -4. \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2.38), (2.39) ve (2.40) ın maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.4.2. C_n^{++-} Grafinin Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda C_n^{++-} grafinin komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 15. n tepeli C_n çevre grafin transformasyon grafi C_n^{++-} olmak üzere,

$$Nr(C_n^{++-}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases}$$

İspat 15. S, C_n^{++-} grafinin subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre iki durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(C_n)$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. Böylece

$\{x_1, x_2, \dots, x_{n-3}\} \in V(C_n)$ ve $ux, uy \in V(L(C_n))$ olmak üzere

$N[S] = V(C_n) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-3}\} \cup V(L(C_n)) \setminus \{ux, uy\}$ dir. Sonra ux ve uy , C_n grafında u ile ilişkili ayrıtlardır. Böylelikle geriye kalan graf $P_2 + P_{n-3}$ grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(C_n^{++-}) = Nr(P_2 + P_{n-3}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases} \quad (2.41)$$

Durum 2: $uv \in V(L(C_n))$ olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf $P_2 + P_{n-3}$ grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(C_n^{++-}) = Nr(P_2 + P_{n-3}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases} \quad (2.42)$$

(2.41) ve (2.42) nin maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.4.3. W_n^{++-} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda W_n^{++-} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 16. $n \geq 15$ için n tepeli W_n tekerlek grafın transformasyon grafi W_n^{++-} olmak üzere,

$$Nr(W_n^{++-}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0, 1(mod 4); \\ -2, & n \equiv 2, 3(mod 4). \end{cases}$$

İspat 16. S, W_n^{++-} grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre dört durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(W_n)$ ve $deg_{W_n}(u) = n - 1$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. u , W_n grafının merkez tepesi olduğundan, W_n grafının bütün tepeleri ve spokelar hariç W_n grafının ayrıtlarına karşılık gelen tepeler W_n^{++-} grafında u ile komşudur. Böylelikle geriye kalan graf W_n^{++-} grafında hepsi birbiriyle komşu olan spokelara karşılık gelen tepeleri içerir.

Bu yüzden,

$$W_n^{++-} \setminus S \cong K_{n-1}, Nr(W_n^{++-}) = Nr(K_{n-1}) - 1 = 2 - n. \quad (2.43)$$

Durum 2: $u \in V(W_n)$ ve $deg_{W_n}(u) = 3$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun.

Böylece ux, uy ve uz , W_n grafında u ile ilişkili ayrıtlar olmak üzere,

$N[S] = V(W_n) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-4}\} \cup V(L(W_n)) \setminus \{ux, uy, uz\}$ dir. Böylece geriye kalan graf $K_3 + P_{n-4}$ grafına izomorf olur.

Bu nedenle,

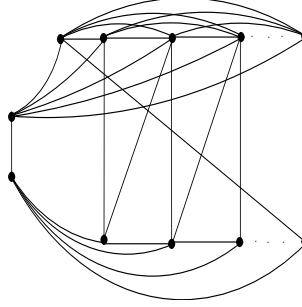
$$Nr(W_n^{++-}) = Nr(K_3 + P_{n-4}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 1(mod 4); \\ -2, & n \equiv 0, 1, 2(mod 4). \end{cases} \quad (2.44)$$

Durum 3: uv , W_n grafinda spoke olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf $P_2 + P_{n-3}$ grafinin izomorf olur.

Bu nedenle,

$$Nr(W_n^{++-}) = Nr(P_2 + P_{n-3}) - 1 = \begin{cases} -1, & n \equiv 0(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3(mod 4). \end{cases} \quad (2.45)$$

Durum 4: uv , W_n grafinda spoke olmamak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf Şekil 2.13 de gösterilmiştir.



Şekil 2.13. $W_n^{++-} \setminus S$ geriye kalan altgrafı

Altdurum 1: $S = \{uv, u\}$ veya $S = \{uv, v\}$ olmak üzere $w(G/S) = 0$ olduğundan N_r değeri hesaplanamaz.

Altdurum 2: xy spoke olmak üzere $S = \{uv, xy\}$ olsun. Bu durumda xy ile u ve v tepeleri W_n grafinda ortak bir bitim tepesine sahip olmadıklarından W_n^{++-} grafinda komşudur. Bütün spokelar W_n grafinda ilişkili olduğundan W_n^{++-} grafinda komşudur. u , v ve tüm spokelar kapalı komşulukta yer alır. Böylece geriye kalan graf n sayısının tek veya çift olmasına göre iki yol grafitan oluşacaktır.

Bu graflar P_1 ve P_2 olsun. $N_r(P_1 \cup P_2) \geq N_r(P_1) + N_r(P_2)$ dir. P_1 ve P_2 graflarının aynı sayıda tepeye sahip olduğu kabul edildiğinde P_1 ve P_2 grafları $P_{\frac{n}{2}-3}$ grafinin izomorf olur.

$$\begin{aligned} N_r(P_1 \cup P_2) &\geq N_r(P_1) + N_r(P_2) \\ N_r(W_n^{++-}) &\geq 2N_r(P_{\frac{n}{2}-3}) - 2 \\ N_r(W_n^{++-}) &\geq 2 \begin{cases} -1, & n \equiv 2(mod 4) \\ 0, & n \equiv 0(mod 4) \end{cases} - 2 \end{aligned}$$

$$Nr(W_n^{++-}) \geq \begin{cases} -4, & n \equiv 2(mod 4); \\ -2, & n \equiv 0(mod 4). \end{cases}$$

n sayısı tek olduğunda benzer şekilde P_1 ve P_2 grafları $P_{\frac{n+1}{2}-4}$ grafına izomorf olur.

$$\begin{aligned} Nr(P_1 \cup P_2) &\geq Nr(P_1) + Nr(P_2) \\ Nr(W_n^{++-}) &\geq 2Nr(P_{\frac{n+1}{2}-4}) - 2 \\ Nr(W_n^{++-}) &\geq 2 \begin{cases} -1, & n \equiv 3(mod 4) \\ 0, & n \equiv 1(mod 4) \end{cases} - 2 \\ Nr(W_n^{++-}) &\geq \begin{cases} -4, & n \equiv 3(mod 4); \\ -2, & n \equiv 1(mod 4). \end{cases} \end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$Nr(W_n^{++-}) \geq \begin{cases} -2, & n \equiv 0, 1(mod 4); \\ -4, & n \equiv 2, 3(mod 4). \end{cases} \quad (2.46)$$

(2.43), (2.44), (2.45) ve (2.46) nin maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.4.4. K_n^{++-} Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda K_n^{++-} grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 17. n tepeli K_n tam grafin transformasyon grafi K_n^{++-} olmak üzere,

$$Nr(K_n^{++-}) = Nr(L(K_{n-2})) - 1.$$

İspat 17. S , K_n^{++-} grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre iki durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(K_n)$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf K_{n-1} grafına izomorf olur.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{++-}) = Nr(K_{n-1}) - 1 = 1 - n \quad (2.47)$$

elde edilir.

Durum 2: $uv \in V(L(K_n))$ olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf $L(K_{n-2}) + \{u, v\}$ grafına izomorf olur.

Bu sebeple,

$$Nr(K_n^{++-}) = Nr(L(K_{n-2})) - 1 \quad (2.48)$$

olarak bulunur.

(2.47) ve (2.48) in maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.4.5. $K_{m,n}^{++-}$ Grafının Komşu Rupture Derecesi

Bu kısımda $K_{m,n}^{++-}$ grafının komşu rupture derecesi hesaplanmıştır.

Teorem 18. $m \geq n$ ve $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafın transformasyon grafi $K_{m,n}^{++-}$ olmak üzere,

$$Nr(K_{m,n}^{++-}) = m - 5.$$

İspat 18. $S, K_{m,n}^{++-}$ grafının subversion stratejisi olsun. S kümesinin elemanlarına göre iki durum söz konusudur.

Durum 1: $u \in V(K_{m,n})$ olmak üzere $S = \{u\}$ olsun. Eğer $\deg_{K_{m,n}}(u) = n$ ise geriye kalan graf $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\} \in V(K_{m,n})$ ve $B = \{uy_1, uy_2, \dots, uy_n\} \in V(L(K_{m,n}))$ olmak üzere $V(K_{m,n}^{++-} \setminus S) = A \cup B$ dir. A kümesinin her bir elemanı B kümesinin elemanlarıyla komşudur. B kümesinin her bir elemanı birbirleriyle komşudur. u tepesini çıkarmak grafi bağlantısız yapmaz, $m - 1 + n$ tepe ve pek çok ayrıt olur. Bu yüzden birden fazla tepe çıkarılmalıdır.

Eğer $\deg_{K_{m,n}}(u) = m$ ise yukarıdaki duruma benzer şekilde bir bileşen ve pek çok ayrıt elde ederiz.

Altdurum 1: $\deg_{K_{m,n}}(u) = n$ olmak üzere $S = \{u, x_1\}$ olsun. Eğer $\deg_{K_{m,n}}(x_1) = n$ ise geriye kalan graf $m - 2$ izole tepeye sahip olur. Bu yüzden

$$Nr(K_{m,n}^{++-}) = m - 5 \quad (2.49)$$

olarak bulunur.

Eğer $\deg_{K_{m,n}}(x_1) = m$ ise yukarıdakine benzer şekilde

$$Nr(K_{m,n}^{++-}) = n - 5 \quad (2.50)$$

olarak bulunur.

Altdurum 2: $\deg_{K_{m,n}}(u) = n$ olmak üzere $S = \{u, y_1\}$ olsun.

Eğer $\deg_{K_{m,n}}(y_1) = m$ ise geriye kalan graf $K_{m-1} \times K_{n-1}$ grafına izomorf olur.

Bu sebeple,

$$Nr(K_{m,n}^{++-}) = Nr(K_{m-1} \times K_{n-1}) - 2 = 1 - (m - 1) - 2 = -m \quad (2.51)$$

elde edilir.

Durum 2: $uv \in V(L(K_{m,n}))$ olmak üzere $S = \{uv\}$ olsun. Böylece geriye kalan graf $K_{m-1} \times K_{n-1}$ grafına izomorf olsun. Bu nedenle

$$Nr(K_{m,n}^{++-}) = Nr(K_{m-1} \times K_{n-1}) - 1 = 1 - (m-1) - 1 = 1 - m \quad (2.52)$$

(2.49), (2.50), (2.51) ve (2.52) nin maksimum değeri alındığında sonuç elde edilmiş olur. $\square$

3. SONUÇ

Bu çalışmada, iletişim hatlarının zarar gördükten sonra oluşan zararın en kısa sürede tespit edilmesi ve sorunun mümkün olan en düşük maliyetle giderilmesi amacıyla kullanılan graf modellemesinde yer alan zedelenebilirlik parametrelerinden bazıları verilmiştir. Bir iletişim ağının genişletilebilmesi için kullanılan transformasyon işlemleri ile elde edilen dört farklı transformasyon grafının yol graf, çevre graf, tekerlek graf, tam graf ve iki parçalı tam graf için komşu rupture değerleri hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Harary, F. , Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1972, 274s.
- [2] Barefoot, C.A. , Entringer, R. , Swart, H. , Vulnerability in graphs: a comparative survey, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 1987, 13-22 s.
- [3] Jung, H. A. , On a Class of Posets and The corresponding Comparability Graphs, J. Combinatorial Theory Ser. B 24 , 1978, 125-123 s.
- [4] Li, Y. , Zhang, S. , Li, X. , Rupture degree of graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(7), 2005, 793-803 s.
- [5] Gunther, G., Neighbor connectivity in regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 11, 1985, 233-243 s.
- [6] Cozzens, M. B. , Wu, S. Y. , *Vertex-neighbor-integrity of trees*, Ars Combinatoria 43, 1996, 169-180 s.
- [7] Wei, Z. T. , *On the reliability parameters of networks*. Northwestern Polytechnical University, 2003, 30-40 s.
- [8] Bacak-Turan, G. , Kirlangic, A. *Neighbor Rupture Degree and the Relations between other Paramaters*, ARS Combinatoria 102, 2011, 333-352 s.
- [9] Wu, B., Zhang, L., Zhang, Z. *Transformation graph G^{-+-}* , Discrete Mathematics 296, 2005, 263-270 s.
- [10] Xu, L. , Wu, B. *The transformation graph G^{xyz} when $xyz = -++$* , Discrete Mathematics 308, 2008, 5144-5148 s.
- [11] Janakiraman, T.N. , Muthammai, S. , Bhanumathi, M. *On the Boolean function graph of a graph and on its complement*, Mathematica Bohemica 130, 2005, 113-134 s.
- [12] Chen, J. , Meng, J. *Maximally Edge-Connectivity of a Transformation Graph G^{+-}* , Journal of East China Normal University (Natural Science)5, 2006, 83-85 s.
- [13] Wu, B. , Meng, J. *Basic properties of total transformation graphs*, Journal of Mathematical Study 34, 2001, 109-116 s.
- [14] Kandilci, S. *Graf İşlemlerinde Zedelenebilirlik Parametreleri*. Yaşar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, 2012, 34 s. (Yüksek Lisans Tezi)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ekrem ÖZ

Doğum Yeri ve Yılı : Manisa, 1979

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ekremoz@ogr.cbu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Manisa Lisesi(Y.D.A.L.), 1997

Lisans : Anadolu Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2002

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, 2015

Mesleki Deneyim

Demirci Necip Fazıl Kısakürek Anadolu Lisesi

2014-Halen