

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Metin KOÇ

TRANSFORMASYON YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI VE RANKI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2005

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRANSFORMASYON YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI VE RANKI

Metin KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza.....
Doç.Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

İmza.....
Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TRANSFORMASYON YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI VE RANKI

Metin KOÇ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç.Dr. Hayrullah AYIK

Yıl: 2005, Sayfa: 43

Jüri: Doç.Dr. Hayrullah AYIK

Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ

Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada yarıgrup teoride önemli yer tutan transformasyon yarıgruplarının doğurayları hakkında önemli tanım ve teoremler bir araya toplanmıştır. Örneğin sonlu tüm transformasyon yarı grubunun en küçük doğuray kümesi ve rankı verilmiştir. Ayrıca transformasyon yarı grubunu kapsayan kısmi dönüşümler yarı grubunun yapısı verilmiştir. Sonlu transformasyon yarı gruplarının idempotentleri tarafından doğurulan alt yarı gruplar ve bu idempotent elemanların özellikleri sunulmuştur. Son olarak transformasyon yarı grubunun alt yarı grubu olan sırakoruyan dönüşümler tanımlanmış, bu dönüşümlerin yapısı ve doğurayları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Transformasyon yarı grupları, idempotent doğuraylar, rank.

ABSTRACT

MSc THESIS

GENERATORS AND RANK OF TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Metin KOÇ

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA**

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Hayrullah AYIK

Year: 2005, Pages: 43

Jury: Assoc.Prof.Dr. Hayrullah AYIK

Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ

Assist.Prof.Dr. Ersin KIRAL

In this study, we gather some theorems about the generators of some transformation semigroups playing an important role in semigroup theory. Such as we gave a minimal generating set and the rank of finite full transformation semigroup. Also the structure of partial transformation semigroup which includes the transformation semigroup was given. The subsemigroup generated by idempotent elements of finite transformation semigroup and properties of this idempotent elements are presented. Finally, order preserving transformation semigroup which is a subsemigroup of the transformation semigroup was defined, the structure and some generators of these transformations were given.

Key Words: Transformation semigroups, idempotent generators, rank.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Hayrullah AYIK 'a, lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince bana destek olan Yrd. Doç. Dr. Gonca AYIK 'a ve bu çalışmanın latex versiyonunun hazırlanmasında büyük emeği olan Orhan SÖNMEZ'e en içten saygı ve sevgilerimi sunar teşekkür ederim.

Ayrıca hayatımın her aşamasında bana destek olan aileme ve lisans, yüksek lisans eğitimim süresince yardım ve teşviklerinden dolayı tüm matematik bölümü elemanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1 TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR	1
2 KİSMİ DÖNÜŞÜMLERİN YAPISI	10
2.1 Kısmi Bire-Bir Dönüşümlerin Parçalanışı	10
2.2 Kısmi Bire-Bir Dönüşümlerin Patika Ve Dairelere Parçalanışı	11
2.3 Kısmi Bire-Bir Dönüşümlerde Bileşke	15
2.4 Değişmeli Kısmi Bire-Bir Dönüşümler	16
2.5 Kısmi Dönüşümlerin Parçalanışı	19
3 TÜM DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN DOĞURAYLARI	24
3.1 Tüm Dönüşüm Yarıgrubunun İdempotentleri Tarafından Doğurulan Alt- yarıgruplar	24
3.2 Sonlu Tüm Dönüşüm Yarıgruplarının Idempotent Doğurayları	29
3.3 Eksikliği 1 Olan İdempotentler	30
4 SIRAKORUYAN DÖNÜŞÜMLER	35
4.1 Sırakoruyan Dönüşümlerin Oluşturduğu Yarıgrupların Doğurayları	35
4.2 Kombinatorik Sonuç	40
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

1. TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde ileride kullanacağınız tanımlar vebazı önemli sonuçları vereceğiz.

Tanım 1.1 S boş olmayan bir küme olsun. O zaman

$$\circ : S \times S \rightarrow S$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyona S üzerinde bir *ikili işlem* ve $(S, \circ)$ ikilisine *grupoid* denir. Her $a, b \in S$ için (a, b) nin $\circ$ ikili işlemi altındaki görüntüsünü $a \circ b$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.2 $(S, \circ)$ bir grupoid olsun. Her $a, b, c \in S$ için

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

ise $(S, \circ)$ ikilisine *yarıgrup* denir.

$(S, \circ)$ bir yarıgrup olsun. Eğer S üzerindeki $\circ$, ikili işleminin karıştırılması söz konusu değil ise $(S, \circ)$ ikilisi yerine sadece S ve her $a, b \in S$ için $a \circ b$ yerine de ab yazacağız.

Tanım 1.3 S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Her $a \in S$ için $ea = a$ ise e ye S nin bir *sol birim*, her $a \in S$ için $ae = a$ ise e ye S nin bir *sağ birim* denir. Hem sol hem de sağ birim olan bir elemana sadece *birim eleman* denir.

Bir yarıgrupta birim eleman varsa *kolayca gösterilir ki* birim eleman tektir ve biz bu elemanı genellikle 1 ile göstereceğiz. Bir yarıgrupta birden fazla sol veya sağ birim eleman olabilir.

Tanım 1.4 Birim elemanlı yarıgruplara *monoid* denir.

Tanım 1.5 S bir yarıgrup ve $z \in S$ olsun. Her $a \in S$ için $za = z$ ise z ye S nin bir *sol sıfır elemanı*, eğer her $a \in S$ için $az = z$ ise z ye S nin bir *sağ sıfır elemanı* denir. Hem sol hem de sağ sıfır olan bir elemana sadece *sıfır eleman* denir.

Kolayca gösterilir ki bir yarıgrupta sıfır eleman var ise tektir ve biz bu elemanı genellikle 0 ile göstereceğiz. Bir yarıgrupta birden fazla sol veya sağ sıfır eleman olabilir.

Örnek 1.6 S boş olmayan herhangi bir küme olsun. Her $a, b \in S$ için

$$ab = a$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile S bir yarıgruptur. Bu yarıgrubun her elemanı, hem sol sıfır hem de sağ birim elemandır. Biz bu yarıgruba sol sıfır yarıgrubu diyeceğiz.

Benzer şekilde sağ sıfır yarıgrubu ve sıfır yarıgrubu da tanımlanabilir.

Tanım 1.7 S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = e$ ise e ye S nin bir idempotent elemanı denir. Ayrıca her elemanı bir idempotent olan yarıgruplara *band* denir.

Sol sıfır, sağ sıfır, sıfır, sol birim, sağ birim ve birim elemanların idempotent olduğu kolayca gösterilir.

S herhangi bir yarıgrup olsun.

$$S^1 = \begin{cases} S, & 1 \in S \text{ ise} \\ S \cup \{1\}, & 1 \notin S \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Eğer S^1 üzerindeki, ikili işlemi her $s, t \in S^1$ için

$$st = \begin{cases} st, & s, t \in S \text{ ise} \\ s, & t = 1 \text{ ise} \\ t, & s = 1 \text{ ise} \\ 1, & s = t = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak S^1 bir yarıgrup olup, buna gerekirse birim eleman eklenerek S den elde edilen monoid denir

Tanım 1.8 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ var ise a ya S nin bir *regüler* eleman denir. Her elemanı regüler olan yarıgruba da *regüler yarıgrup* denir.

Örnek 1.9 A ve B boş olmayan iki küme ve $S = A \times B$ olsun. Her $(a, b), (c, d) \in S$ için

$$(a, b)(c, d) = (a, d)$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile S bir yarıgruptur.

S nin her elemanının hem bir idempotent hem de regüler olduğu kolayca görülür. Biz bu yarıgruba *dikdörtgensel band* diyeceğiz.

Tanım 1.10 S bir yarıgrup ve $T \subseteq S$ olsun. Her $a, b \in T$ için $ab \in T$ ise T ye S nin bir *altarıgrubu* denir ve $T \leq S$ yazılır.

Tanım 1.11 S bir yarıgrup ve $U \subseteq S$ olsun. Eğer her $a \in U$ ve $x \in S$ için

- (i) $ax \in U$ ise U ya sağ ideal,
- (ii) $xa \in U$ ise U ya sol ideal ve
- (iii) U hem sağ hemde sol ideal ise U 'ya bir ideal denir.

Tanım 1.12 X boş olmayan bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. X üzerinde ki tüm bağıntıların oluşturduğu kümeyi $\mathcal{B}_X$ ile göstereceğiz.

Ayrıca, her $\rho, \sigma \in \mathcal{B}_X$ için

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{en az bir } z \in X \text{ için } (x, z) \in \rho \text{ ve } (z, y) \in \sigma\}$$

şeklinde $\mathcal{B}_X$ üzerinde bir ikili işlem tanımlayalım.

Önerme 1.13 Yukarıda tanımlanan işlem ile $\mathcal{B}_X$ bir yarıgruptur.

Ayrıca $\mathcal{B}_X$, birim elemanı

$$1_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

olan bir monoiddir. Eğer $\rho \in \mathcal{B}_X$ ise ρ nun görüntü kümesi, tanım kümesi ve tersi sırasıyla

$$\begin{aligned} \text{im}(\rho) &= \{y \in X \mid (x, y) \in \rho\} \\ \text{dom}(\rho) &= \{x \in X \mid (x, y) \in \rho\} \\ \rho^{-1} &= \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in \rho\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\rho \in \mathcal{B}_X$ ve $x \in X$ için

$$\begin{aligned} x\rho &= \{y \in X \mid (x, y) \in \rho\} \\ x\rho^{-1} &= \{y \in X \mid (y, x) \in \rho\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Herhangi bir A kümesinin eleman sayısını $|A|$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.14 $\theta \in \mathcal{B}_X$ olsun. Her $x \in X$ için $|x\theta| \leq 1$ ise θ ya bir kısmi dönüşüm denir. Ayrıca X üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesini $\mathcal{PT}_X$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.15 Tüm kısmi dönüşümlerin kümesi $\mathcal{PT}_X$, tüm bağıntılar yarıgrubu $\mathcal{B}_X$ in bir altarıgrubudur.

İspat: $\phi, \psi \in \mathcal{PT}_X$ ve $(x, y_1), (x, y_2) \in \phi\psi$ olsun. Bu durumda

$$(x, z_1) \in \phi, (z_1, y_1) \in \psi \text{ ve } (x, z_2) \in \phi, (z_2, y_2) \in \psi$$

olacak şekilde $z_1, z_2 \in X$ vardır. $\phi \in \mathcal{PT}_X$ olduğundan $z_1 = z_2$ ve ayrıca da $\psi \in \mathcal{PT}_X$ olduğundan $y_1 = y_2$ dir. Dolayısıyla $\phi\psi \in \mathcal{PT}_X$ olur.

Tanım 1.16 $\mathcal{PT}_X$ e kısmi dönüşümler yarıgrubu denir. $\alpha \in \mathcal{PT}_X$ olmak üzere, her $x \in \text{dom}(\alpha)$ için $|\alpha x^{-1}| = 1$, ise α ya bir kısmi bire-bir dönüşüm denir. Ayrıca X üzerindeki tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesini $\mathcal{PI}_X$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.17 Tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi $\mathcal{PI}_X$, tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{PT}_X$ in bir altarıgrubudur.

İspat: $\phi, \psi \in \mathcal{PI}_X$ ve $(x_1, y), (x_2, y) \in \phi\psi$ olsun. Bu durumda

$$(x_1, z_1) \in \phi, (z_1, y) \in \psi \text{ ve } (x_2, z_2) \in \phi, (z_2, y) \in \psi$$

olacak şekilde $z_1, z_2 \in X$ vardır. $\psi \in \mathcal{PI}_X$ olduğundan $z_1 = z_2$ ve $\phi \in \mathcal{PI}_X$ olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Dolayısıyla $\phi\psi \in \mathcal{PI}_X$ olur.

Tanım 1.18 $\alpha \in \mathcal{PT}_X$ olsun. Her $x \in X$ için $|\alpha x| = 1$ ise α ya bir (tüm) dönüşüm denir. Ayrıca X üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesini $\mathcal{T}_X$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.19 Tüm dönüşümlerin kümesini $\mathcal{T}_X$, tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{PT}_X$ in bir altarıgrubudur.

İspat: $\phi, \psi \in \mathcal{T}_X$ olsun. Her $x \in X$ için $\phi \in \mathcal{T}_X$ olduğundan $|x\phi| = 1$ ve $\psi \in \mathcal{T}_X$ olduğunda $|(x\phi)\psi| = 1$ olur. Ayrıca, $(x, y_1), (x, y_2) \in \phi\psi$ ise

$$(x, z_1) \in \phi, (z_1, y_1) \in \psi \text{ ve } (x, z_2) \in \phi, (z_2, y_2) \in \psi$$

olacak şekilde $z_1, z_2 \in X$ vardır. Bu durumda $\phi \in \mathcal{T}_X$ olduğundan $z_1 = z_2$ ve $\psi \in \mathcal{T}_X$ olduğundan $y_1 = y_2$ dir. Dolayısıyla $\phi\psi \in \mathcal{T}_X$ olur.

Tanım 1.20 $\mathcal{T}_X$ yarıgrubuna X üzerindeki tüm dönüşümler yarıgrubu denir. $\mathcal{T}_X$ in herhangi bir altarıgrubuna da dönüşümler yarıgrubu denir. Eğer $\alpha \in \mathcal{T}_X$ olmak üzere, her $x \in X$

için $|x\alpha^{-1}| = 1$ ise, α ya *permütasyon* denir. Ayrıca X üzerindeki tüm permütasyonların kümesini $\mathcal{S}_X$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.21 Tüm permütasyonların kümesi $\mathcal{S}_X$, tüm dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{T}_X$ in bir alt-yarıgrubudur.

İspat: $\phi, \psi \in \mathcal{S}_X$ ve $(x_1, y), (x_2, y) \in \phi\psi$ olsun. Bu durumda

$$(x_1, z_1) \in \phi, (z_1, y) \in \psi \text{ ve } (x_2, z_2) \in \phi, (z_2, y) \in \psi$$

olacak şekilde $z_1, z_2 \in X$ vardır. $\psi \in \mathcal{S}_X$ olduğundan $z_1 = z_2$ ve $\phi \in \mathcal{S}_X$ olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Dolayısıyla $\phi\psi \in \mathcal{S}_X$ olur.

Ayrıca kolayca gösterilir ki $\mathcal{S}_X$ bir gruptur.

Önerme 1.22 i) $\phi \in \mathcal{PT}_X$ ise $\phi^{-1} \in \mathcal{PT}_X \Leftrightarrow \phi$ birebir dönüşümdür.

ii) $\phi \in \mathcal{T}_X$ ise $\phi^{-1} \in \mathcal{T}_X \Leftrightarrow \phi$ bir permütasyondur.

Teorem 1.23 S bir yarıgrup olsun. O zaman S bir dönüşüm yarıgrubuna izomorftir.

İspat: $X = S^1$ olmak üzere $\mathcal{T}_X$ tüm dönüşüm yarıgrubunu alalım. $a \in S$ için

$$\rho_a : X \rightarrow X$$

$$x\rho_a = xa$$

olarak tanımlarsak $\rho_a \in \mathcal{T}_X$ 'tir. Ayrıca, her $x \in X$ için

$$x(\rho_a\rho_b) = (xa)\rho_b = x(ab) = x\rho_{ab}$$

dir. Şimdi $\psi : S \rightarrow \mathcal{T}_X$ dönüşümünü

$$\psi(a) = \rho_a$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\psi(ab) = \rho_{ab} = \rho_a\rho_b = \psi(a)\psi(b)$$

olup ψ bir homomorfizmadır. Ayrıca

$$\psi(a) = \psi(b) \implies \rho_a = \rho_b$$

$$\implies x\rho_a = x\rho_b \quad (\forall x \in X)$$

$$\implies xa = xb \quad (x = 1 \text{ alınırsa})$$

$$\implies a = b$$

olup ψ bir-birdir. ψ 'nin görüntüsü $\mathcal{T}_X$ 'in bir altyarıgrubu, dolayısıyla bir dönüşüm yarıgrubu olduğundan istenilen gösterilmiş olur.

Eğer $|X| = n$ ise biz $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kabul edip, $\mathcal{B}_X, \mathcal{PT}_X, \mathcal{PI}_X, \mathcal{T}_X, \mathcal{S}_X$ yerine sırasıyla $B_n, PT_n, PI_n, T_n, S_n$ yazacağız. Bu durumda

$$S_n \leq T_n \leq PT_n \leq B_n$$

$$S_n \leq PI_n \leq PT_n \leq B_n$$

olur. Ayrıca $T_n \cap PI_n = S_n$ dir.

Tanım 1.24 S bir yarıgrup ve $X \subseteq S$ olsun. S nin X içeren en küçük altyarıgrubuna X in *doğurduğu yarıgrup* denir. Bu yarıgrup $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $S = \langle X \rangle$ ise X e S nin bir *doğurayı* denir.

Kolayca gösterilir ki S bir yarıgrup ve $X \subseteq S$ ise

$$\langle X \rangle = \bigcap \{T \mid T \leq S \text{ ve } X \subseteq T\}$$

Tanım 1.25 S bir yarıgrup olsun. Eğer sonlu $X \subseteq S$ için $S = \langle X \rangle$ ise S ye sonlu doğuraylı yarıgrup denir. S sonlu doğuraylı yarıgrup olsun.

$$\text{rank}(S) = \min \{|X| : X \subseteq S, S = \langle X \rangle\}$$

sayısına S 'nin *rankı* denir.

Tanım 1.26 S bir yarıgrup ve $E(S)$ de S nin tüm idempotentlerinin oluşturduğu kümeyi gösterebilir. Eğer bir $X \subset E(S)$ için $S = \langle X \rangle$ ise X e bir idempotent *doğuray* denir.

Önerme 1.27 S bir yarıgrup ve $X \subseteq S$ olsun. O zaman

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

şeklindedir.

İspat: $T = \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$ olsun. Her

$$a = x_1 x_2 \cdots x_m, b = y_1 y_2 \cdots y_k \in T$$

için

$$ab = x_1 x_2 \cdots x_m y_1 y_2 \cdots y_k \in T$$

olup $T \leq S$ dir. $\langle X \rangle$ bir altıyarıgrup ve X i içerdiğinden her $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için

$$x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle$$

olup $T \leq \langle X \rangle$ olur. Ayrıca tanım gereği $\langle X \rangle \leq T$ olup, $T = \langle X \rangle$ elde edilir.

Teorem 1.28 S bir yarıgrup ve $T \leq S$ olsun. Eğer $S \setminus T$, S nin bir ideali ise S nin her X doğurayı için öyle bir $Y \subseteq X$ vardır ki Y de T nin bir doğurayıdır.

İspat: $S = \langle X \rangle$ olsun. $Y = T \cap X$ alalım. $T = \langle Y \rangle$ olduğunu gösterelim. $t \in T$ için $t \in S$ olduğundan, öyle $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ vardır ki

$$t = x_1 x_2 \cdots x_n$$

dir. Eğer en az bir x_i için $x_i \in S \setminus T$ olsaydı $S \setminus T$ ideal olduğundan

$$(x_1 x_2 \cdots x_{i-1}) x_i (x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n) \in S \setminus T$$

olup $t \in T$ olması ile çelişir. O halde $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$ olup $T = \langle Y \rangle$ elde edilir.

Permütasyon olmayan dönüşümlere singüler dönüşüm diyeceğiz, ve $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerindeki tüm singüler dönüşümlerin kümesini ST_n ile göstereceğiz. Bu durumda $ST_n = T_n \setminus S_n$ olur.

Önerme 1.29 ST_n , T_n nin bir idealidir.

İspat: $\alpha \in T_n$ ve $\beta \in ST_n$ olsun. Her $\gamma, \delta \in T_n$ ve $\rho \in ST_n$ için

$$im(\gamma\delta) \subseteq im(\delta) \text{ ve } |im(\rho)| \leq n-1$$

oldüğundan

$$|im(\alpha\beta)| \leq |im(\beta)| \leq n-1$$

r.O halde $\alpha\beta \in ST_n$ olur. Ayrıca $|im(\beta)| \leq n-1$ ve $\alpha \in T_n$ olduğundan $|im(\beta\alpha)| \leq n-1$ olup $\beta\alpha \in ST_n$ olur. Böylece ST_n nin bir ideal olduğu gösterilmiş olur.

$Y = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\alpha \in T_n$ ($\alpha \in S_n$) olsun. Eğer $x_i\alpha = x_{i+1}$ ($1 \leq i \leq r-1$), $x_r\alpha = x_1$ ve $x\alpha = x$ ($\forall x \in X_n \setminus Y$) ise α 'ya bir r -devir denir ve $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ yazılır. Örneğin;

$$(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \quad (1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Ayrıca bir $\beta \in T_n$ için $i, j \in X_n$ ve $i \neq j$ olmak üzere

$$x\beta = \begin{cases} j & x = i \text{ veya } x = j \\ x & \text{diğer} \end{cases}$$

($x \in X_n$) şeklinde tanımlı ise $\beta = \|ij\|$ yazacağız. Örneğin;

$$\|12\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$S_n = \langle \{(1, 2, \dots, n), (1, 2)\} \rangle$ ifadesine sahibiz (Rotman, 1994 'den). Biz aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 1.30 $\alpha = (1, 2, \dots, n)$, $\beta = (1, 2)$ ve $\gamma = \|12\|$ olmak üzere $T_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ dir.

İspat: $S_n = \langle \{\alpha, \beta\} \rangle$ olduğundan $i, j \geq 3$ için $(1, i), (2, j) \in \langle \{\alpha, \beta\} \rangle$ olup, kolayca kontrol edilir ki

$$(1i) \|12\| (1i) = \|i2\| \quad (i \geq 3)$$

$$(2j) \|12\| (2j) = \|1j\| \quad (j \geq 3),$$

yani $\|i2\|, \|1j\| \in \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ ($i, j \geq 3$) olur. Ayrıca

$$(1, i) (2, j) \|12\| (2, j) (1, i) = \|ij\| \quad (i, j \geq 3, \quad i \neq j)$$

olduğuda kolayca kontrol edilebilir.

$$(i, j) \|ij\| (i, j) = \|ji\| \quad (i, j \geq 1, \quad i \neq j)$$

olduğundan, her $i, j \geq 1$ ve $i \neq j$ için $\|ij\| \in \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ olduğu gösterilmiş olur.

$\phi \in T_n$ ve $|im(\phi)| = r \leq n-1$ olsun. O zaman $|im(\phi)| \leq n-1$ olduğundan öyle $i \neq j \in X_n$ ve $k \in X_n$ vardır ki $i\phi = j\phi$ ve $k \notin im(\phi)$ dir. Şimdi biz θ dönüşümünü

$$x\theta = \begin{cases} k & x = i \text{ ise} \\ x\phi & x \neq i \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsak kolayca gösterilir ki

$$\phi = \|ij\| \theta$$

ve $|im(\theta)| = r+1$ dir. Eğer $|im(\theta)| = r+1 = n$, yani θ bir permütasyon ise $\theta \in \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ olduğu gösterilmiş olur, aksi halde ϕ yerine θ alır ve benzer şekilde devam ederiz. Böylece

ϕ 'yi belli sayıda $\|ij\|$ 'lerin ve bir permütasyonun çarpımı şeklinde yazabiliriz. O halde $T_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ olduğunda ispatlanmış olur.

$n \geq 3$ için S_n devirli olmadığından en az iki eleman tarafından doğurulur, yani $S_n = \langle X \rangle$ ise $|X| \geq 2$ dir. Ayrıca $S_n = \langle \{(1, 2, \dots, n), (1, 2)\} \rangle$ olduğundan, $\text{rank}(S_n) = 2$ olduğu görülür.

Sonuç 1.31 $\text{rank}(T_n) = 3$.

İspat: Bir $X \subseteq T_n$ için $T_n = \langle X \rangle$ olsun. ST_n , T_n nin bir ideali olduğundan $S_n \cap X$, S_n nin bir doğuray kümesidir, dolayısıyla $|S_n \cap X| \geq 2$ olur. $S_n \cap X = X$ olsaydı $\langle X \rangle = S_n$ olacağından bu $\langle X \rangle = T_n$ olması ile çelişir. O halde $|X| \neq 2$ yani $|X| \geq 3$ olur. Öte yandan $T_n = \langle \{\alpha, \beta, \gamma\} \rangle$ olup $\text{rank}(T_n) = 3$ eşitliği elde edilir.

2. KISMİ DÖNÜŞÜMLERİN YAPISI

Bu bölümde kısmi dönüşümlerin yapısı ve patika ve dairelerin çarpımı olarak yazılabileceğini göstereceğiz.

2.1 Kısmi Bire-Bir Dönüşümlerin Parçalanışı

Eğer $\alpha \in PI_n (\subseteq PT_n)$ için $dom(\alpha) = \emptyset$ ise biz α ya sıfır dönüşüm diyeceğiz ve bu dönüşümü 0 ile göstereceğiz, yani

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix}.$$

Herhangi $\alpha, \beta \in PI_n$ için, eğer $im(\alpha) \cap dom(\beta) = \emptyset$ ise $\alpha\beta = 0$ olduğu kolayca görülür.

Örneğin $\alpha, \beta \in PI_7$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & - & 5 & 6 & - & 7 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & - & - & 6 & - & - & - \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı ise $im(\alpha) \cap dom(\beta) = \emptyset$ olup $\alpha\beta = 0$ olduğu görülür. Ayrıca

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

olup, $\alpha\beta = 0$ olması $\beta\alpha = 0$ olmasını gerektirmez.

$A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset X_n$, $\alpha \in PI_n$ ve $dom(\alpha) = A$ olsun. Ayrıca

$$i_1\alpha = i_2, i_2\alpha = i_3, \dots, i_{k-1}\alpha = i_k$$

ve $i_k\alpha = q \in X_n$ olsun. Eğer $q = i_1$ ise α bir daire olup $j_1, j_2, \dots, j_{n-k} \in X_n \setminus A$ için, α yı

$$\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k)(j_1](j_2] \cdots (j_{n-k}]$$

şeklinde yazacağız ve buna k -daire diyeceğiz. Eğer $q \neq i_1 \in X_n \setminus dom(\alpha)$ ise α yı

$$\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k, q](m_1](m_2] \cdots (m_{n-k-1}]$$

$(m_1, m_2, \dots, m_{n-k-1} \in X \setminus (A \cup \{q\}))$ şeklinde yazacağız ve $(k+1)$ -patika diyeceğiz. Sıfır dönüşümü ise

$$(1](2](3] \cdots (n] = 0 \in PI_n$$

şeklinde göstereceğiz.

Şimdiye kadar yaptığımız tanımlarla kısmi bire-bir dönüşümlerin nasıl kodlanabileceği konusunda bir temel atmış olduk.

Tanım 2.1 $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\alpha, \beta \in PI_n$ olsun. Eğer $dom(\alpha) \cup im(\alpha)$ ve $dom(\beta) \cup im(\beta)$ ayrık ise α ve β ya *ayrık dönüşümler* diyeceğiz. Ayrıca $\gamma = \alpha\beta$ ise $dom(\gamma) = dom(\alpha) \cup dom(\beta)$ olup, γ ya α ile β nın *bileşkesi* denir

Eğer α ve β ayrık dönüşümler ise $\alpha\beta = \beta\alpha$ olduğu kolayca gölürölür. $\gamma, x \in dom(\gamma)$ için

$$x\gamma = \begin{cases} x\alpha, & x \in dom(\alpha) \\ x\beta, & x \in dom(\beta) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Örneğin;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & - & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ise $\alpha, \beta \in PI_4$ elemanları ayrık olup

$$\gamma = \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 4 & 3 \end{pmatrix} = \beta\alpha$$

olur. Ayrıca

$$\alpha = (12](3](4],$$

$$\beta = (1](2](34)$$

$$\gamma = (12](34)$$

şeklinde yazılabiliriz. Aslında $\gamma = (12](3](4](1](2](34)$ olarak da yazabiliriz. Fakat $(3](4](1](2]$ kısmı gereksiz bilgi olduğundan sadece gereken bilgileri yazacağız.

2.2 Kısmi Bire-Bir Dönüşümlerin Patika Ve Dairelere Parçalanışı

Bu bölümde yukarıda tanım ve özelliklerini verdiğimiz kısmi bire-bir dönüşümlerin patika ve dairelerin çarpımı olarak yazılabileceğini göstereceğiz.

$\alpha \in PI_n$ ve $x \in dom(\alpha)$ olsun. Eğer $x\alpha \neq x$ ise

$$\eta_x = (x, x\alpha]$$

olarak tanımlanır. Eğer $x\alpha = x$ ise

$$\gamma_x = (x)$$

olarak tanımlanır. Örneğin;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & - & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ise $\text{dom}(\alpha) = \{1, 2, 4, 5\}$ olmak üzere

$$\gamma_1 = (1, 2], \quad \gamma_2 = (2, 1], \quad \gamma_4 = (4), \quad \gamma_5 = (5, 3]$$

şeklindedir.

$\alpha \in PI_n$ yi $k \leq n$ defa uyguladığımızda $x, x\alpha, \dots, x\alpha^k$ elemanları birbirinden farklı ise

$$\eta_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k]$$

şeklinde k -patika veya $k \leq n$ defa uyguladığımızda $x, x\alpha, \dots, x\alpha^k$ elemanları birbirinden farklı fakat $x\alpha^k = x$ ise

$$\gamma_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k)$$

şeklinde k -daire ye genelleyebiliriz.

Tanım 2.2 $\eta_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k]$ patikasında x e *sol-bitiş noktası*, $x\alpha^k$ ya ise *sağ-bitiş noktası* diyeceğiz. Eğer η_x in sol-bitiş noktası olan $x \in \text{dom}(\alpha) \setminus \text{im}(\alpha)$ ve sağ-bitiş noktası olan $x\alpha^k \in \text{im}(\alpha) \setminus \text{dom}(\alpha)$ şeklinde ise $(x, x\alpha, \dots, x\alpha^k]$ patikasına bir *maksimal-patika* denir.

Örneğin

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & - & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

için $\text{dom}(\alpha) = \{1, 2, 4, 5\}$ ve $\text{im}(\alpha) = \{2, 3, 4, 5\}$ dir. $1 \in \text{dom}(\alpha) \setminus \text{im}(\alpha)$ ve $3 \in \text{im}(\alpha) \setminus \text{dom}(\alpha)$ olduğundan $\eta_1 = (1, 4, 5, 2, 3]$ bir maximal-patika dir.

Önerme 2.3 $\alpha \in PI_n$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) α daki maximal-patikalar η ve η' için ya $\eta = \eta'$ yada η ile η' ayrıktır.
- (ii) α daki γ ve γ' daireleri için ya $\gamma = \gamma'$ yada γ ile γ' ayrıktır.

(iii) α daki hiçbir maksimal-patika ile hiçbir dairenin ortak elemanı yoktur.

(iv) Her $y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ için $x\alpha^k = y$ ve $\eta_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k, y]$ bir maksimal patika olacak şekilde $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ ve $k \geq 1$ vardır.

İspat: $\alpha : dom(\alpha) \rightarrow im(\alpha)$ dönüşümü bire-bir ve örten dönüşüm olduğundan (i), (ii), (iii) ifadelerinin doğruluğu açıkça görülür. Biz (iv) ifadesini tümevarım ile ispatlayalım.

$y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ ise öyle bir $x_1 \in dom(\alpha)$ vardır ki $x_1\alpha = y$ ve $x_1 \neq y$ dir. O zaman $(x_1, y]$ olur. Eğer $x_1 \notin im(\alpha)$ ise $(x_1, y]$ bir maksimal patikadır. Eğer $x_1 \in im(\alpha)$ ise benzer şekilde $x_2\alpha = x_1$ olacak şekilde $x_2 \in dom(\alpha)$ vardır. α bire-bir olduğundan $x_2 \neq x_1$ dir. Ayrıca $y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ olup $x_2 \neq y$ dir. Bu durumda $(x_2, x_1, y]$ şeklinde patika elde ederiz. Bu şekilde devam edersek X_n kümesi sonlu ve α bire-bir olduğundan $(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, y]$ şeklinde bir maksimal-patika elde ederiz.

Teorem 2.4 Her $\alpha \in PI_n \setminus \{0\}$

$$\alpha = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_u \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_v$$

şeklinde η_i ayrık patikalarının ve γ_j ayrık dairelerinin bileşkesi şeklinde yazılabilir. Bu yazılışta dairelerin sırası önemli değildir.

İspat: Eğer $\alpha \in PI_n \setminus \{0\}$ ise ya $dom(\alpha) = im(\alpha)$ veya $dom(\alpha) \neq im(\alpha)$ dir. $dom(\alpha) = im(\alpha)$ ise α bir permütasyon olup ayrık dairelerin çarpımı olarak yazılabildiğini biliyoruz. $dom(\alpha) \neq im(\alpha)$ ve $dom(\alpha) \setminus im(\alpha) = \{1, \dots, u\}$ olsun. $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ alalım ve x e mümkün olan en yüksek dereceye kadar α yı uygulayalım. O zaman $K = \{x, x\alpha, x\alpha^2, \dots\}$ şeklinde bir küme elde ederiz. X_n sonlu olduğundan $x\alpha^k \notin dom(\alpha)$ veya $x\alpha^k = x\alpha^m$ ve $m > k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ vardır. Fakat $x\alpha^k = x\alpha^m$ olması imkansızdır. Çünkü α tanım kümesi üzerinde birebirdir. Her $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ için $x\alpha^k \notin dom(\alpha)$ olacak şekilde bir k vardır. Bu maximal-patika yı $\eta_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k]$ olarak tanımlayabiliriz. Öneğin

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & - & 8 & 5 & - & 7 \end{pmatrix}$$

için $dom(\alpha) \setminus im(\alpha) = \{1, 6\}$ ve $im(\alpha) \setminus dom(\alpha) = \{4, 7\}$ olup $\eta_1 = (1, 2, 3, 4]$ $\eta_6 = (6, 5, 8, 7]$ dir. Bu bulduğumuz η_i ler yukardaki önermeden dolayı ayrık olup istediğimiz gibi sıralayabileceğimizden $\beta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdots \eta_u$ şeklinde yazabiliriz. $\alpha = \beta$ ise ispat biter. $\alpha \neq \beta$ olsun. $\alpha' = \gamma_1 \cdots \gamma_v$ için $\alpha = \beta\alpha'$ olduğunu göstermeliyiz. $\alpha' = \alpha|_{dom(\alpha) \setminus dom(\beta)}$

kısıtlama dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda α nün bir permütasyon olduğunu göstermeliyiz. Bunu yapabilmek için aşağıdaki özelliklere ihtiyacımız var.

1. $im(\alpha) \setminus dom(\alpha) = im(\beta) \setminus dom(\beta)$ dır. ($y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha) \Leftrightarrow$ maximal $\eta_x = (x, \dots, y]$, bir $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha) \Leftrightarrow y \in im(\beta) \setminus dom(\beta)$)
2. $dom(\beta) \setminus im(\beta) = dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ (Her ikisinde $\{1, 2, \dots, u\}$ kümesine eşit).
3. $im(\alpha') \cup im(\beta) = im(\alpha)$
4. $y \in dom(\alpha')$ ise $y \notin im(\beta)$ olduğunu söyleyebiliriz.
(Bunun için $dom(\alpha') \subset im(\alpha')$ olduğunu göstermeliyiz. Bu ise $y \in dom(\alpha)$ ise $y \notin im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ dır. (2).ve (1). den $y \notin dom(\beta)$ olup istenilen elde edilir.)
5. $y \in im(\alpha)$ olduğunu söyleyebiliriz. (Benzer şekilde(2), $y \notin dom(\beta) \setminus im(\beta)$ ve $y \in dom(\alpha)$ olup (5) doğrudur.)

Böylece (4), (5) ve (3) özelliklerinden $y \in im(\alpha')$ olup $dom(\alpha') = im(\alpha')$ dir. Yani α' bir permütasyondur. O zaman bir $x \in dom(\alpha')$ için α uygulanırsa $K = \{x, x\alpha, x\alpha^2, \dots\}$ elde edilir. Bir $k \geq 1$ için $x = x\alpha^k$ olup her $x \in dom(\alpha')$ için $\gamma_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha')$ olarak tanımlayabiliriz. Dolayısıyla $\alpha = \beta\alpha' = \eta_1 \cdots \eta_u \gamma_1 \cdots \gamma_v$ dir. Şimdi bu yazılışın tekliğini görelim. α nın iki türlü yazıldığını kabul edelim. Yani

$$\alpha = \eta_1 \cdots \eta_u \gamma_1 \cdots \gamma_v = \eta_1' \cdots \eta_w' \gamma_1' \cdots \gamma_t'$$

olsun. Eğer $u = 0$ ise $dom(\alpha) = im(\alpha)$ olur. Bu durumda

$$\alpha = \gamma_1 \cdots \gamma_v = \gamma_1' \cdots \gamma_t'$$

olup yukardaki önerme (ii) den her γ_i her γ_i' ile aynıdır. $u \geq 1$ olsun. Bu durumda $u = w$ olduğunu göstermeliyiz her patika için

$$\eta = (1, 2, \dots, k] \Rightarrow \{1\} = dom(\eta) \setminus im(\eta)$$

olur. Yani $\eta_1 \cdots \eta_u$ olduğundan $dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ kümesinde u tane eleman vardır. $\eta_1 \cdots \eta_w$ de $dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ kümesinde w tane eleman vardır. Dolayısıyla $u = w$ dir. Yukardaki önermedeki (i) den dolayı her bir η_i nin sol-bitiş noktası her bir η_i' nin sol-bitiş noktasına eşittir. O zaman η_i ler ve η_i' ler maksimal olduklarından ve yukardaki önermede (i) den dolayı $\eta_i = \eta_i'$ elde edilir. Benzer sonucun γ_i ler içinde doğru olduğu gösterilebilir.

Örnek 2.5 $\alpha \in PI_7$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & - & 5 & 4 & - & 7 \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman $\alpha = (1, 2, 3] (6] (4, 5) (7)$ şeklinde yazılabilir.

2.3 Kısmi Bire-Bir Dönüşümlerde Bileşke

PI_n de bileşke işleminin değişmeli olması için gerekli bazı özellikleri inceleyeceğiz. Önce S_n ve PI_n için bazı basit örnekleri verip daha sonra bunları karakterize etmeye çalışacağız.

Tanım 2.6 $\alpha \in PI_n$ olsun. $0 = (1] (2] \dots (n] \in PI_n$ nin sıfır elemanı olmak üzere $\alpha^k = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ var ise α ya bir *nilpotent eleman* denir.

$\alpha \in S_n$ ve α ayrık devirlerin çarpımı olarak $\alpha = \gamma_1 \cdots \gamma_v$ şeklinde yazılsın. O zaman

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

olacak şekilde bir $\beta \in S_n$ vardır. Bu β , α daki her γ_i yi aynı uzunluktaki bir γ' ye götürür ve bu devirlerin yazılış sırasını etkiler.

Tanım 2.7 $k \geq 2$ ve $\eta = (i_1, i_2, \dots, i_k]$ bir patika olsun. Bu durumda η ;

Başlangıç kümeleri: $\{i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_1, \dots, i_k\}$

Bitiş kümeleri: $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \{i_2, \dots, i_k\}, \dots, \{i_k\}$

Başlangıç parçası: $(i_1], (i_1 i_2], \dots, (i_1, \dots, i_k]$

Bitiş parçası: $(i_1, i_2, \dots, i_k], (i_2, i_3, \dots, i_k], \dots, (i_k]$

lara sahiptir.

Örnek 2.8 $\alpha = (1, 2, 3) (4, 5) (6, 7, 8)$ ve $\beta = (1, 7, 3, 6, 2, 8) (4) (5) \in S_8$ olsun.

$$\alpha \circ \beta = (1, 8, 2, 6, 3, 7) (4, 5) = \beta \circ \alpha$$

dır. Burada β sadece ayrık 3–devirleri dönüştürmüyor, aynı zamanda bu devirlerin yazılış sırasını da etkiliyor.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & (& 1 & 2 & 3 &) & (& 4 & 5 &) & (& 6 & 7 & 8 &) \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \beta \\ \alpha & = & (& 7 & 8 & 6 &) & (& 4 & 5 &) & (& 2 & 3 & 1 &) \end{array}$$

$$\alpha, \beta \in PI_n \text{ ve}$$

$$\alpha = \eta_1 \cdots \eta_u \gamma_1 \cdots \gamma_v$$

şeklinde patikaların ve devirlerin çarpımı şeklinde yazılsın. O zaman

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

olacak şekildeki β nın bir γ_i yi (eğer varsa) aynı uzunluktaki bir γ_j ye yazış sırasını etkileyerek dönüştürür ve bir η_i nin (eğer varsa) başlangıç parçası, η_j nin bir bitiş parçasına götürür.

Örnek 2.9 $\alpha = (1, 2, 3] (4, 5, 6, 7, 8]$ ve $\beta = (1, 7] (2, 8]$ ise $\alpha\beta = \beta\alpha = (1, 8]$ dir.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & = & (& 1 & 2 & 3 &] & (& 4 & 5 & 6 & 7 & 8 &] \\ & & & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & \\ \alpha & = & (& 4 & 5 & 6 & 7 & 8 &] & (& 1 & 2 & 3 &] \end{array}$$

Burada $(1, 2, 3]$ ün başlangıç parçası olan $(1, 2]$, $(4, 5, 6, 7, 8]$ nin bitiş parçası olan $(7, 8]$ e dönüşmüştür.

2.4 Değişmeli Kısmi Bire-Bir Dönüşümler

Bu bölümde yukarıda tanımlayıp bazı özelliklerini verdiğimiz kısmi bire-bir dönüşümlerin değişmeli olması durumunda elde edilen sonuçları vereceğiz.

Uzunluğu bir olan

$$(1] = (2] = \cdots = (n] = 0 \in PI_n$$

patikalar için başlangıç ve bitiş parçası $[i]$ dir.

$$\beta, \eta \in PI_n$$

kısmi bire-bir dönüşümleri ile bir k -patika düşünelim. Eğer bir $w \leq k$

$$\text{dom}(\beta) \cap \{i_1, i_2, \dots, i_w, \dots, i_k\} = \{i_1, i_2, \dots, i_w\}$$

ise $i_1\beta = l_1, \dots, i_w\beta = l_w$ olmak üzere

$$\eta' = (j_1 \dots j_v l_1 \dots l_w]$$

olacak şekilde bir η' patikası varsa β, η nın başlangıç parçasını η' nin bitiş parçasına dönüştürür diyeceğiz.

Teorem 2.10 $\alpha, \beta \in PI_n$ ve

$$\alpha = (a_{11} \cdots a_{1r_1}) (a_{21} \cdots a_{2r_2}) \cdots (a_{v1} \cdots a_{vr_v}) (c_{11} \cdots c_{1p_1}] \cdots (c_{u1} \cdots c_{up_u}]$$

şeklinde yazılsın. $\alpha\beta = \beta\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $a_{ij} \in \text{dom}(\beta)$ ise $a_{i1}, \dots, a_{ir_i} \in \text{dom}(\beta)$ ve $a_{i1}\beta = b_{i1}, \dots, a_{ir_i}\beta = b_{ir_i}$ ve

(ii) $c_{ij} \in \text{dom}(\beta)$ ise bir $1 \leq p \leq p_i$ ve bir $1 \leq q \leq q_i$ için

$$\begin{aligned} \{c_{i1}, \dots, c_{ip}\} &= \text{dom}(\beta) \cap \{c_{i1}, \dots, c_{ip_i}\} \\ c_{i1}\beta &= d_{iq}, c_{i2}\beta = d_{i\ q+1}, \dots, c_{ip}\beta = d_{iq_i} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha = (b_{11} \dots b_{1r_1}) (b_{21} \dots b_{2r_2}) \cdots (b_{v1} \dots b_{vr_v}) (d_{11} \dots d_{1q_1}] \cdots (d_{u1} \dots d_{uq_u}]$$

olmasıdır.

İspat: $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\delta \in PI_n$ olsun. Biz $x \in \text{dom}(\delta)$ ve $x\delta = y$ olduğunda $x \xrightarrow{\delta} y$ yazacağız. İspatımızı $\alpha\beta = \beta\alpha$ eşitliğini aşağıdaki diyagramı kullanarak yapacağız.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & y \\ & \downarrow \beta & \\ & z & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & y \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ w & \xrightarrow{\alpha} & z \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} x & & \\ \beta \downarrow & & \\ w & \xrightarrow{\alpha} & z \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\alpha} & y \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ w & \xrightarrow{\alpha} & z \end{array}$$

Öncelikle varsayalım ki $x\beta = b_{11}$ yani $x\beta$, α nın bir dairesinde olsun. O zaman

$$(x\beta)\alpha, (x\beta)\alpha^2, \dots, (x\beta)\alpha^{r_1}$$

hepsi tanımlı olur. Yani

$$\begin{array}{c} x \\ \beta \downarrow \\ x\beta \xrightarrow{\alpha} (x\beta)\alpha \xrightarrow{\alpha} (x\beta)\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} \cdots (x\beta)\alpha^{r_1} \xrightarrow{\alpha} x\beta \end{array}$$

İlk diyagramı kullanarak yukarıdaki diyagramı aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha^2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha^{r_1} & \xrightarrow{\alpha} & x \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\
 x\beta & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha^2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha^{r_1} & \xrightarrow{\alpha} & x\beta
 \end{array}$$

β birebir olduğundan x, α da bir daire içindedir. O zaman genelliği kaybetmeksizin $x = a_{11}$ alabiliriz. Bu durumda v üzerinden tümevarım yapılarak (i) in doğru olduğu görülebilir.

Şimdi $x\beta, \alpha$ nın bir patikası içinde olduğunu varsayalım yani

$$x\beta = d_{1j} \in \{d_{11}, \dots, d_{1q_1}\}$$

olsun. Bu durumda bir $0 \leq k \leq q_1$ için

$$x\beta = (x\beta)\alpha^0 = d_{1j}, (x\beta)\alpha = d_{1j+1}, \dots, (x\beta)\alpha^k = d_{1q_1} \quad ((x\beta)\alpha^k = d_{1q_1} \notin \text{dom}(\alpha))$$

olup aşağıdaki diyagramı yazabiliriz.

$$\begin{array}{c}
 x \\
 \downarrow \beta \\
 x\beta \xrightarrow{\alpha} (x\beta)\alpha \xrightarrow{\alpha} (x\beta)\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} (x\beta)\alpha^{k-1} \xrightarrow{\alpha} (x\beta)\alpha^k
 \end{array}$$

Benzer şekilde bu diyagramıda $\alpha\beta = \beta\alpha$ nın diyagramı şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha^2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha^{k-1} & \xrightarrow{\alpha} & x\alpha^k \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\
 x\beta & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha^2 & \xrightarrow{\alpha} & \dots & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha^{k-1} & \xrightarrow{\alpha} & (x\beta)\alpha^k
 \end{array}$$

$x\alpha^k$ patikanın içinde olmalıdır. Eğer öyle olmasaydı yani bir daire içinde olsaydı

$$(x\alpha^k)\alpha^m = x\alpha^{k+m} = x$$

olacak şekilde bir $m \geq 1$ olurdu. O zaman

$$x\beta = (x\alpha^{k+m})\beta = (x\beta\alpha^k)\alpha^m$$

olup bu da $x\beta\alpha^k \notin \text{dom}(\alpha)$ olması ile çelişir. O halde $x \in \{c_{11}, \dots, c_{1p_1}\}$ alabiliriz. Eğer $x = c_{11}$ ise $p = k + 1$ için $x\beta = d_{1q}$ olarak tanımlarsak " $c_{11} \dots c_{1p}$ " başlangıç parçasının β ile " $d_{1q} \dots d_{1q_1}$ " bitiş parçasına dönüştüğü yukarıdaki diyagramdan kolayca görülür. Eğer $x = c_{1m}$ ($m > 1$) ise

$$\begin{array}{ccc} c_{1\ m-1} & \xrightarrow{\alpha} & c_{1\ m} = x \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ c_{1\ m-1}\beta & \xrightarrow{\alpha} & c_{1\ m}\beta = x\beta \end{array}$$

Diyagramında olduğu gibi $\alpha\beta = \beta\alpha$ dır. Bu durum β , $c_{1\ m-1}$ de de tanımlıdır.

Sonuç olarak elimizde başlangıç parçası ($c_{11} \dots c_{1p}$ yi bitiş parçası olan $d_{1q} \dots d_{1q_1}$) a dönüştüren β dönüşümü olacaktır. u üzerinde tümevarım yapılarak ve β nın bire-bir olduğu düşünülerek bütün patikalar için bunun doğru olduğu görülür.

Şimdi β nın (i). ve (ii). özelliklerini sağlayan bir kısmi bire-bir dönüşüm olduğunu varsayalım. Öncelikle $\text{dom}(\alpha\beta) = \text{dom}(\beta\alpha)$ olduğunu gösterelim. $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ alalım. O zaman ya $x\alpha = a_{ij}$ veya $x\alpha = c_{ij}$ ($i < j$) dir. Eğer $x\alpha = a_{ij}$ ise (i) den $x\beta \in \text{dom}(\alpha)$ dır. Eğer $x\alpha = c_{ij}$ ise $x = c_{ij-1}$ ve (ii) den $x\beta \in \text{dom}(\alpha)$ dır. O zaman her iki durumda da $x \in \text{dom}(\beta\alpha)$ olur. $x \in \text{dom}(\beta\alpha)$ olsun. O zaman ya $x\beta = b_{ij}$ veya $x\beta = d_{ij}$ dir. Eğer $x\beta = b_{ij}$ ise (i) den $x\alpha \in \text{dom}(\beta)$ dır. Eğer $x\beta = d_{ij}$ ise $j < q_i$, $x \in \text{dom}(\beta\alpha)$ ve (ii) den $x\alpha \in \text{dom}(\beta)$ dır. Dolayısıyla $\text{dom}(\alpha\beta) = \text{dom}(\beta\alpha)$ dır.

Son olarak $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ alalım ve $x(\alpha\beta) = x(\beta\alpha)$ olduğunu gösterelim. Eğer $x = a_{ij}$ ise

$$(a_{ij})\alpha\beta = a_{ij+1}\beta = b_{ij+1} = b_{ij}\alpha = (a_{ij})\beta\alpha$$

Eğer $x = c_{ij}$ ise $j < p_i$ ve

$$(c_{ij})\alpha\beta = c_{ij+1}\beta = d_{im} = d_{im-1}\alpha = (c_{ij})\beta\alpha$$

olduğundan $\alpha\beta = \beta\alpha$ olur.

2.5 Kısmi Dönüşümlerin Parçalanışı

Kısmi dönüşümlerin parçalanışını incelerken kısmi bire-bir dönüşümlerden yararlanacağız. PI_n nin parçalanışından PT_n nin parçalanışını elde etmek için " $\rangle$ " sembolünü kul-

lanacağız. Bu sembolü bir patika bir daire ile çakıştığı zaman kullanacağız. Örneğin

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün parçalanışı $\alpha = (3, 1)(4, 1)(5, 1)(1, 2)$ şeklinde,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün parçalanışı $\beta = (5, 6, 2)(7, 6, 2)(1, 2, 3, 4)$ şeklinde ve

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & - & 3 \end{pmatrix}$$

dönüşümünün parçalanışı $\gamma = (1, 2, 3)(4, 3)$ şeklindedir.

Yukarıda da görüldüğü gibi bu sembolü kullanmaktaki amacımız bire-bir olmayan dönüşümleride parçalanışta gösterebilmektir. Şimdi bu işlemin genelde nasıl yapıldığını inceleyelim.

$\alpha, \beta \in B_n$ alalım. $S_n \subset PI_n \subset PT_n \subset B_n$ olduğundan $\alpha\beta$ yı aşağıdaki gibi

$$\alpha, \beta \in PI_n \text{ ve } (dom(\alpha) \cup im(\alpha)) \cap (dom(\beta) \cup im(\beta)) = \emptyset \text{ ise } \alpha\beta \in PI_n,$$

$$\alpha, \beta \in PT_n \text{ ve } x \in dom(\alpha) \cap dom(\beta) \Rightarrow x\alpha = x\beta \text{ ise } \alpha\beta \in PT_n, .$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Her $x \notin dom(\alpha) \cup im(\alpha)$ için $(x]$ ifadesi α daki bir maksimal-patika olur. $x \in dom(\alpha)$ ve $k \geq 1$ için $\eta_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k]$ bir $(k+1)$ -patika, $x\alpha^k = x$ ise $\gamma_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k)$ bir k -dairedir.

Eğer $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ ve $x\alpha^k \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ ise η_x nın bir maksimal-patika olduğunu hatırlayalım. Bu durumda iki tip maksimal-patikadan bahsedebiliriz. Bunlar biri bir daire ile çakışmayan ve diğeri ise daire ile çakışan maksimal-patikadır.

Tanım 2.11 α, γ patikaları ayrık değil ise *çakışık* diyeceğiz. Eğer

$$(dom(\eta) \cup im(\eta)) \cap (dom(\gamma) \cup im(\gamma)) = \{y\}$$

ise η, γ ile y *de çakışır* diyeceğiz. Eğer η ve γ bitiş parçası σ olan bir patikaya sahiplerse η, γ yla σ *da çakışır* diyeceğiz.

Örnek 2.12 $\alpha \in PT_7$ dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 7 & - \end{pmatrix}$$

olarak tanımlarsak bu dönüşümün patika notasyonu $\alpha = (4, 3, 1)(5, 3, 1)(1, 2)(6, 7]$ şeklindedir.

Burada $\eta = (4, 3, 1]$, $\eta' = (5, 3, 1]$ ve $\eta'' = (6, 7]$, α da birer patikadır. Fakat burada sadece η'' maksimaldir. $\gamma = (1, 2)$ bir daire olup η ve η' ile bitiş parçası olan $\sigma = (3, 1]$ de çakışır.

Önerme 2.13 $\alpha \in PT_n$ olsun. η, η' de α da birer *maksimal-patika* ve γ, γ' de birer daire olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur

1. Eğer η ile η' çakışıyorsa ya $\eta = \eta'$ veya η ile η' bir ortak bitiş parçasında çakışır.
2. Ya $\gamma = \gamma'$ ya da γ ile γ' çakışmaz.
3. Her $y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ için $x\alpha^k = y$ olacak şekilde bir $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ ve $k \geq 1$ vardır, Yani her bir $y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ için $\eta_x = (x, x\alpha, \dots, x\alpha^k = y]$ maksimal-patikası vardır.

İspat: (1) ve (2) nin ispatı $\alpha : dom(\alpha) \rightarrow im(\alpha)$ fonksiyon olduğundan açıktır. (3) ün ispatını yapmak için tümevarım kullanacağız. $y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ olduğundan bir $x_1 \in dom(\alpha)$ için $x_1\alpha = y$ olmalı ve bu durumda $\{x, y\}$ iki elemanlı olur. Eğer $x_1 \notin im(\alpha)$ ise $x = x_1$ olup $\eta_x = (x_1, y]$ maksimal olur. Eğer $x_1 \in im(\alpha)$ ise $x_2\alpha = x_1$ olacak şekilde bir $x_2 \in dom(\alpha)$ vardır. O zaman $\{x_2, x_1, y\}$ üç elemanlı olup $x_2 \notin im(\alpha)$ ise $\eta_x = (x_2, x_1, y]$ maksimal-patikasını elde ederiz. N sonlu olduğundan sonunda $\{x_k, \dots, x_1, y\}$ elde edilir.

Teorem 2.14 $\alpha \in PT_n - \{0\}$ olsun. Uzunluğu iki ve ikiden büyük η_i patikaları ve γ_j daireleri aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde α elemanı

$$\alpha = \eta_1 \cdots \eta_u \gamma_1 \cdots \gamma_v$$

biçiminde η_i ve γ_j lerin çarpımı olarak tektürlü yazılır.

- (i) $i \neq j$ olmak üzere η_i, η_j ile ancak ortak bir bitiş parçası olması halinde çakışır,
- (ii) $i \neq j$ olmak üzere γ_i, γ_j ile çakışmaz ve

(iii) η_i ile γ_j sağ-bitiş noktasında çakışır.

İspat: $\alpha \in PT_n - \{0\}$ olsun. Eğer $|dom(\alpha) \setminus im(\alpha)| = 0$ ise α bire-bir örten dönüşüm olup ayrık dairelerin çarpımı olarak yazılır. Genelliği kaybetmeksizin $dom(\alpha) \setminus im(\alpha) = \{1, 2, \dots, u\}$ olsun. $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ alalım ve x e α yı uygulayalım. Bu durumda $X = \{x, x\alpha, x\alpha^2, \dots\}$ şeklinde bir küme elde ederiz. $X \subset N$ olduğundan $x\alpha^k \notin dom(\alpha)$ olacak şekilde ya bir $k \geq 1$ vardır yada $x\alpha^k = x\alpha^m$ ($m > k$) olacak şekilde m, k pozitif tamsayıları vardır.

Eğer $x\alpha^k = x\alpha^m$ olacak şekilde $m > k$ varsa bu durumda $\gamma_x = (x\alpha^k \dots x\alpha^{m-1})$ dairesine sahibiz. Genelliği kaybetmeksizin $x \in \{1, 2, \dots, w\} \subset \{1, 2, \dots, u\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda γ_x dairelerini elde etmeye çalışalım. β yı

$$\beta = \eta_1 \dots \eta_u \gamma_1 \dots \gamma_w$$

olarak tanımlayalım. β nın tanımından ve önermede (1) ve (2) den yukarıdaki patikalar ve devirler (i) ve (iii) koşullarını sağlar. Eğer $\alpha = \beta$ ise ispat biter.

$\alpha \neq \beta$ olsun. O zaman $\alpha' = \gamma_{w+1} \dots \gamma_v$ olmak üzere $\alpha = \beta\alpha'$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha' = \alpha|_{dom(\alpha) \setminus dom(\beta)}$$

kısıtlama dönüşümünü tanımlayalım. Şimdi α nın bir bire-bir örten dönüşüm olduğunu göstermeliyiz. Bunu yapmak için bazı özelliklere ihtiyacımız var.

(1) $im(\alpha) \setminus dom(\alpha) = im(\beta) \setminus dom(\beta)$. ($y \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha) \Leftrightarrow \eta_x = (x, \dots, y]$ bir $x \in dom(\alpha) \setminus im(\alpha) \Leftrightarrow y \in im(\beta) \setminus dom(\beta)$ dır.)

(2) $dom(\beta) \setminus im(\beta) = dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$. (Her iki tarfta $\{1, 2, \dots, u\}$ ya eşittir.)

(3) $im(\alpha') \cup im(\beta) = im(\alpha)$

(4) $y \in dom(\alpha')$ ise $y \notin im(\beta)$ dır.

(5) $y \in im(\alpha)$.

Yukarıda bahsettiğimiz (4),(5) ve (3) özelliklerini birleştirirsek $y \in im(\alpha')$ olup $dom(\alpha') \subset im(\alpha)$ dolayısıyla α' bire-bir örten dönüşüm olur. Dolayısıyla

$$\alpha' = \gamma_{w+1} \dots \gamma_v$$

ayrık dairelerin bir çarpımıdır.

Son olarak $\alpha = \beta\alpha' = \eta_1 \dots \eta_u \gamma_1 \dots \gamma_v$ çarpımı (i) ve (iii) ü sağladığını gösterelim. $im(\beta) \cap im(\alpha') = \emptyset$ olduğunu görmek yeterlidir. Aksi halde

$$z \in im(\beta) \cap im(\alpha') = im(\beta) \cap dom(\alpha') \subset im(\beta) \setminus dom(\beta)$$

olup (1) den dolayı bu ise $z \in im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ olduğunu söyler. $z \in im(\beta) \cap dom(\alpha')$ kabulümüzden $z \in dom(\alpha)$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi tekliği inceleyelim. α nın

$$\alpha = \eta_1 \dots \eta_u \gamma_1 \dots \gamma_v$$

$$\alpha = \eta_1' \dots \eta_w' \gamma_1' \dots \gamma_t'$$

şeklinde iki türlü yazıldığını kabul edelim. Eğer $u = 0$ ise $\alpha = \gamma_1 \dots \gamma_v = \gamma_1' \dots \gamma_t'$ olup buradaki teklik iyi bilinmektedir. Biz $u \geq 1$ alalım. Bu durumda $u = w$ olduğunu gösterelim. Uzunluğu ikiden büyük veya ikiye eşit olan bir patika için

$$\eta = (1, 2, \dots, k] \Rightarrow \{1\} = dom(\eta) \setminus im(\eta)$$

dir. O zaman (i). ve (iii) den dolayı $dom(\alpha) \setminus im(\alpha)$ nın u tane elemanı vardır. Bu durumda $\eta_1' \dots \eta_w'$ da w tane çarpan olup $w = u$ olur. O zaman i , η_i nin bir sol-bitiş noktası ise η' ninde bir sol-bitiş noktasıdır. Dolayısıyla α nın çarpımındaki patika η maksimal ise α daki hiçbir daire ile çakışmaz. η_i ve η_i' nün sol-bitiş noktaları için yukarıda söylediklerimiz nedeniyle iki durum ortaya çıkar:

(vi) η_i ve η_i' nün sağ-bitiş noktası $im(\alpha) \setminus dom(\alpha)$ kümesinin elemanıdır.

(vii) α nın öyle bir γ deviri vardır ki hem η_i hem de η_i' , γ ile onların sağ-bitiş noktasında çakışırlar.

Her iki durumda η_i ve η_i' nün sağ-bitiş noktası aynı olmak zorundadır. Eğer $y \in dom(\gamma_i)$ ise $y \notin dom(\eta_1 \dots \eta_u)$ olduğundan $y \in dom(\gamma_i')$ olmak zorundadır. Böylece $y\gamma_i = y\gamma_i'$ olup $\gamma_1 \dots \gamma_v = \gamma_1' \dots \gamma_t'$ elde edilir. Böylece istenen ispatlanmış olur.

3. TÜM DÖNÜŞÜMLER YARIGRUBUNUN DOĞURAYLARI

3.1 Tüm Dönüşüm Yarigrubunun İdempotentleri Tarafından Doğurulan Altyarigruplar

Bu kısımda $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerinde tanımlanan T_n tüm dönüşüm yarigrubunun bir altyarigrubu olan ST_n singüler dönüşümlerin oluşturduğu yarigrubun T_n deki idempotentler tarafından doğrulduğunu ve her sonlu yarigrubun idempotentler tarafından doğrulan sonlu regüler yarigrupların içine gömülebilir olduğunu söyleyeceğiz.

Teorem 3.1 T_n regüler yarigruptur.

İspat: $\alpha \in T_n$ ve $im(\alpha) = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ olsun. Her bir k ($k = 1, 2, \dots, m$) için bir tek j_k seçelim öyle ki $j_k \alpha = i_k$ olsun. O zaman $\beta \in T_n$

$$i\beta = \begin{cases} j_k, & i = i_k \in im(\alpha) \\ i, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, her $i \in X_n$ için $i\alpha \in im(\alpha)$ olduğundan bir $i_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ için $i\alpha = i_k$ olup

$$i\alpha\beta\alpha = i_k\beta\alpha = j_k\alpha = i_k = i\alpha$$

olur, yani $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olduğundan T_n regülerdir.

Eğer $\alpha \in ST_n$ yukarıda tanımlanan β da singüler olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.2 ST_n regüler yarigruptur.

T_n in regüler olduğunu gördükten sonra bazı tanımlar verelim:

$1 = 1_{T_n}$: Birim dönüşüm;

$E : 1_{T_n}$ hariç tüm idempotentlerin kümesi;

$E_1 : E \cup 1_{T_n}$;

$K = \{\alpha \in T_n \mid x\alpha \neq x\}$;

$S(\alpha) = \{x \in X_n \mid x\alpha \neq x\}$ (değişken);

$Z(\alpha) = X_n \setminus im(\alpha)$

$C(\alpha) = \cup \{t\alpha^{-1} \mid t \in im(\alpha), |t\alpha^{-1}| \geq 2\}$.

Ayrıca, $|S(\alpha)|$ sayısına α nın *değişkenliği*, $|Z(\alpha)|$ sayısına α nın *eksikliği* ve $|C(\alpha)|$ sayısına α nın *yığılması* diyeceyiz.

Tanım 3.3 Idempotentleri tarafından doğrulan bir yarıgruba *Idempotent doğuraylı* (IG) yarıgrup denir.

Örnek 3.4 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in ST_6$ alalım.

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

alınırsa $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olur.

$$\langle E \cup 1_{T_n} \rangle = 1_{T_n} \cup \langle E \rangle$$

S_n simetrik grup olmak üzere S_n in birim eleman olmayan hiçbir elemanı idempotentlerin çarpımı olarak yazılamaz. Dolayısıyla birim eleman olmayan idempotentlerin çarpımı olarak yazılan elemanlar $ST_n = T_n \setminus S_n$ de bulunur. Yani $\langle E \rangle \subseteq ST_n$ tir. Şimdi aşağıdaki teoremlerle bu durumu tam olarak ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.5 $E = \{\alpha \in T_n \mid \alpha^2 = \alpha \text{ ve } |Z(\alpha)| > 0\}$ olsun. O zaman $\langle E \rangle = ST_n$ tir. Aslında her $\alpha \in ST_n$ için

$$\alpha = \gamma_1 \cdots \gamma_n \quad \text{ve} \quad |Z(\gamma_i)| = 1$$

olacak şekilde $\gamma_i \in E$ ($i = 1, \dots, n$) vardır.

İspat: Teoremi iki aşamada ispatlayacağız. Önce eksikliği bir olan elemanların, eksikliği bir olan idempotentlerin çarpımı olarak yazıldığını göstereceğiz. Sonra eksikliği $r > 1$ olan elemanların, eksikliği bir olan bir idempotent ile eksikliği $r - 1$ olan bir elemanın çarpımı olarak yazılabileceğini göstereceğiz.

$$n = 1 \text{ ise } ST_n = \emptyset$$

$$n = 2 \text{ ise } ST_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ olup } n = 2 \text{ durumu için teorem ispatlanmış}$$

olur.

Biz $n \geq 3$ alalım. $\alpha \in ST_n$ için $|Z(\alpha)| = 1$ olsun. Eğer $|S(\alpha)| = 1$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} \dots & \dots & x & \dots & y & \dots & \dots \\ \dots & \dots & y & \dots & y & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, α eksikliği bir olan idempotent olduğundan ispat biter.

$|S(\alpha)| = r > 1$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (2 \leq r \leq n)$$

olarak yazalım. $|Z(\alpha)| = 1$ olduğundan bir $z \in X_n$ için $Z(\alpha) = \{z\}$ olur. O zaman, ortaya dört farklı durum çıkar bunlar:

1. $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ($1 \leq i \leq r$), $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$ ve $z \notin \{1, 2\}$;
2. $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ($1 \leq i \leq r$), $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$ ve $z = 1$;
3. $a_r = r+1$ ve $z \in \{1, 2, \dots, r-1\}$; ve
4. $a_r = r+1$ ve $z = r$.

Şimdi bu dört farklı durumu inceleyelim:

1. Durum: Bu durumda

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & 2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa ε bir idempotent ve β ise eksikliği 1 ve değişkeni $r-1$ olan elemanlardır.

Ayrıca

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & 2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca gösterilir.

2. Durum: Bu durumda

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa ε eksikliği 1 olan bir idempotent ve β eksikliği 1 ve değışkeni $r - 1$ olan bir eleman olup $\alpha = \beta\varepsilon$ dur.

3. Durum: Bu durumda

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & r+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa ε eksikliği 1 olan bir idempotent ve β eksikliği 1 ve değışkeni $r - 1$ olan bir eleman olup $\alpha = \varepsilon\beta$ dır.

4. Durum: Bu durumda

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & r+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ r & a_2 & a_3 & \dots & a_{r-1} & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & a_1 & r+1 & r+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa ε ve η eksikliği 1 olan idempotentler ve β ise eksikliği 1 ve değışkeni $r - 1$ olan bir eleman olup $\alpha = \varepsilon\beta\eta$ dır.

Şimdi r üzerinde tümevarımla değışkenliği 1 indirgeyip, α yı eksikliği 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazabiliriz.

Son olarak bir $\alpha \in T_n$ öyle ki $|Z(\alpha)| = r > 1$ alalım. Bu durumda öyle $i \neq j \in X_n$ vardır ki $i\alpha = j\alpha$ olur. Ayrıca bir $k \in X_n \setminus im\alpha$ vardır. Şimdi $\beta : X_n \rightarrow X_n$ yi

$$x\beta = \begin{cases} x, & x \neq j \\ i, & x = j \end{cases}$$

olarak tanımlarsak $im(\beta) = X_n \setminus \{j\}$ olup eksikliği 1 olan bir idempotenttir. Ayrıca $\gamma : X_n \rightarrow X_n$ ni

$$x\gamma = \begin{cases} x\alpha, & x \neq j \\ k, & x = j \end{cases}$$

olarak tanımlarsak $im(\gamma) = im(\alpha) \cup \{k\}$ olup eksikliği $r - 1$ olan bir dönüşüm olur. Her $x \in X_n$ için

$$x \neq j \text{ ise } x\beta = x\gamma = x\alpha \text{ olduğundan } x\beta\gamma = x\gamma = x\alpha$$

$$x = j \text{ ise } j\beta = i\gamma = i\alpha \text{ olduğundan } j\beta\gamma = i\gamma = i\alpha = j\alpha$$

olup $\alpha = \beta\gamma$ şeklinde yazılır. Benzer şekilde γ yı da eksikliği 1 olan bir idempotent ile eksikliği $r - 2$ olan bir dönüşüm çarpımı olarak yazabiliriz. Bu şekilde indirgeme yaparak α eksikliği 1 olan idempotentlerin bir çarpımı ile eksikliği 1 olan bir dönüşüm çarpımı olarak yazabiliriz. Biraz önce gösterdik ki eksikliği 1 olan dönüşümler eksikliği 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir, o halde teoremi tamamen ispatlamış olduk.

Örnek 3.6 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in ST_6$ alalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

olup,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

alınırsa α , eksikliği bir olan bir idempotent ε ve eksikliği bir olan β dönüşümünün bir çarpımıdır.

Teorem 3.7 Her sonlu yarıgrup sonlu regüler IG yarıgrubu içine gömülebilir.

İspat: S sonlu bir yarıgrup olsun ve S^1 de S ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen yarıgrup olsun. X te S^1 i içeren ve en az iki tane fazla eleman içeren bir küme olsun. Bu fazla elemanlardan birine z diyelim. Her bir $s \in S$ için $\rho_s \in T_X$ yi

$$x\rho_s = \begin{cases} xs & x \in S^1 \\ z & x \in X \setminus S^1 \end{cases}$$

dönüşümü tanımlayalım. Böylece, S yi T_X ye gömmüş oluruz. Aslında, her ρ_s nin eksikliği en az 1 olup (bu yüzden X e en iki eleman daha ekledik) S yi $ST_X = T_X \setminus S_X$ in içine gömmüş oluruz. Ayrıca ST_X bir önceki teorem nedeni ile bir IG yarıgrubu ve ST_X regüler olduğunu bu kısmın başında göstermiş olduğumuzdan, ispat tamamlanmış olur.

3.2 Sonlu Tüm Dönüşüm Yarigruplarının Idempotent Doğurayları

Bu kısımda $n \geq 3$ ve $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere ST_n in idempotent doğuraylarının yapısını ve nasıl yazılabileceğini inceleyeceğiz. Her $\alpha \in ST_n$ için

$$\ker(\alpha) = \alpha \circ \alpha^{-1} = \{(x, y) \in X_n \times X_n \mid x\alpha = y\alpha\}$$

bir denklik bağıntısıdır. Eğer α nın eksikliği 1 ise $(\alpha \circ \alpha^{-1})$ -denklik sınıflarının biri hariç diğer hepsi bir tek eleman içerir, biz bu bir tek eleman içermeye durumuna *singleton* diyeceğiz ve eğer tek singleton olmayan $(\alpha \circ \alpha^{-1})$ -denklik sınıfının elemanlarını belirleyebilirsek denklik bağıntısı tamamen tanımlanmış olacaktır. Eğer bu elemanlar, $(i \neq j)$ olmak üzere i, j ise denklik bağıntısını $[i j]$ ile göstereceğiz.

$\varepsilon \in T_n$ bir idempotent ve ε nın eksikliği 1 ise, ε , X_n deki bir eleman hariç diğer bütün elemanları kendisine götürmelidir. Yani eğer $\varepsilon \circ \varepsilon^{-1} = [i j]$ ise $i\varepsilon = j\varepsilon = i$ ya da $i\varepsilon = j\varepsilon = j$ ve diğer tüm $x \in X_n$ için $x\varepsilon = x$ dir. Bu sebeple eksikliği 1 olan idempotentlerin toplam sayısı, $[i j]$ formundaki denklik bağıntılarının sayısının iki katı, yani X_n nin iki elemanlı alt kümelerinin sayısının iki katı $n(n-1)$ dir.

$\varepsilon \circ \varepsilon^{-1} = [i j]$ olacak şekildeki iki ε idempotenti için standart gösterim

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & i & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Fakat biz birincisini $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$ ve ikincisini de $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ ile göstereceğiz.

X_n deki her $i \neq j$ için

$$Z\left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right) = \{i\} \text{ ve } \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}^{-1} = [i j] \quad (*)$$

olduğuna dikkat edelim.

Tanım 3.8 $i = 1, \dots, m-1$ için $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \neq \varepsilon_i$ ve $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \neq \varepsilon_{i+1}$ ise ST_n deki $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m$ çarpımına indirgenemez denir.

Burada boy olarak kısalıktan bahsetmiyoruz. $\alpha = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m$ nin indirgenemez olması $\alpha = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k$ ($k < m$) şeklinde daha kısa bir çarpım olamayacağı anlamına gelmez. Eğer α , idempotentlerin bir çarpımı ise α yı indirgenemez hale getirene kadar kısaltmalar/indirgemeler yapabiliriz.

3.3 Eksikliği 1 Olan İdempotentler

Önerme 3.9 Her $\alpha, \beta \in ST_n$ için

$$|Z(\alpha\beta)| \geq \max\{|Z(\alpha)|, |Z(\beta)|\}$$

olur.

İspat: $X_n\alpha \subseteq X_n$ ve $X_n\beta \subseteq X_n$ olduğundan $(X_n\alpha)\beta \subseteq X_n\beta$ olup, $Z(\beta) \subseteq Z(\alpha\beta)$ olur. Dolayısıyla $|Z(\beta)| \leq |Z(\alpha\beta)|$ dir. Ayrıca β bir dönüşüm olduğu için $|(X_n\alpha)\beta| \leq |X_n\alpha|$ olduğundan $|Z(\alpha)| \leq |Z(\alpha\beta)|$ olup istenilen

$$|Z(\alpha\beta)| \geq \max\{|Z(\alpha)|, |Z(\beta)|\}$$

eşitsizlik elde edilmiş olur.

Bunu önermeyi aşağıdaki şekilde genişletebiliriz.

Önerme 3.10 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in ST_n$ ise

$$|Z(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)| \geq \max\{|Z(\alpha_1)|, |Z(\alpha_2)|, \dots, |Z(\alpha_m)|\}$$

dir.

Önerme 3.11 $\alpha \in ST_n$ eksikliği 1 olsun. Eğer $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$ şeklinde eksikliği 1 olan elemanların bir çarpımı ise

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha_1 \circ \alpha_1^{-1} \quad \text{ve} \quad Z(\alpha) = Z(\alpha_m)$$

olur.

İspat: Her $i, j \in X_n$ için

$$i\alpha_1 = j\alpha_1 \implies i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m = j\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m \implies i\alpha = j\alpha$$

olduğundan $\alpha_1 \circ \alpha_1^{-1} \subseteq \alpha \circ \alpha^{-1}$ olur. Hem α hem de α_1 in eksikliği 1 olduğundan $\alpha_1 \circ \alpha_1^{-1}$, $\alpha \circ \alpha^{-1}$ in öz altkümesi olamaz. O halde $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha_1 \circ \alpha_1^{-1}$ olur. Ayrıca

$$X_n\alpha \subseteq X_n\alpha_m \implies Z(\alpha_m) \subseteq Z(\alpha)$$

olup, α ve α_m in eksikliği 1 olduğundan için $Z(\alpha_m)$, $Z(\alpha)$ nın öz altkümesi olamaz . O halde $Z(\alpha) = Z(\alpha_m)$ olur.

Teorem 3.12 α , ST_n nin eksikliği 1 olan bir elemanı olsun. Eğer

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_m \\ j_m \end{pmatrix} \quad (m \geq 2)$$

şeklinde eksikliği 1 olan idempotentlerin indirgenemez bir çarpımı ise, o zaman, her $r = 2, \dots, m$ için

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = [i_1 j_1], \quad Z(\alpha) = \{i_m\}, \quad i_{r-1} = j_r \text{ ve } j_{r-1} \neq i_r$$

olur.

İspat: Yukardaki önermeden ve (*) dan

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}^{-1} = [i_1 j_1] \text{ ve } Z(\alpha) = Z\left(\begin{pmatrix} i_m \\ j_m \end{pmatrix}\right) = \{i_m\}$$

olduğunu biliyoruz. Biz

$$\beta = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ j_r \end{pmatrix}$$

altçarpımında ortaya çıkabilecek değişik durumları ele alalım.

Durumları yazmaya başlamadan önce $i_{r-1} \neq j_{r-1}$ ve $i_r \neq j_r$ olduğuna dikkat edelim. Çarpım indirgenemez olduğu için $i_{r-1} = i_r$ ve $j_{r-1} = j_r$ durumunu göz ardı ediyoruz. Aksi belirtilmedikçe farklı adlandırılmış elemanları da farklı kabul edeceğiz. Herhangi üçünün birbirine eşit olması durumunun da olamayacağına dikkat edelim.

Durumlar: (a): $i_{r-1}, j_{r-1}, i_r, j_r$ nin hepsi birbirinden farklı olması durumu

(b): $i_{r-1} = i_r$ durumu

(c): $j_{r-1} = j_r$ durumu

(d): $i_{r-1} = j_r$ durumu

(e): $j_{r-1} = i_r$ durumu

(f): $i_{r-1} = j_r, j_{r-1} = i_r$ durumu

(a) durumu: Bu durumda $Z(\beta) = \{i_{r-1}, i_r\}$ olur. Bu ise $2 = |Z(\beta)| < |Z(\alpha)| = 1$ olduğunu gösterir ki bu da $|Z(\beta)| = 1$ olması gereği ile çelişir.

(b) durumu: $\beta = \begin{pmatrix} i \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j_{r-1} \end{pmatrix}$ olup, bu durum ise çarpımın indirgenemezliği ile çelişir.

(c) durumu: $\beta = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ j \end{pmatrix} \Rightarrow Z(\beta) = \{i_{r-1}, i_r\}$ benzer şekilde (a) durumda ki çelişki elde edilir.

(d) durumu: $\beta = \begin{pmatrix} i \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow Z(\beta) = \{i_r\}$, $\beta \circ \beta^{-1} = [ij_{r-1}]$ olup β nın eksiği 1 dir, fakat $i_r \beta = i$ ve $i_r \beta^2 = j_{r-1}$ olup β bir idempotent değildir.

(e) durumu: $\beta = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ j_r \end{pmatrix} \Rightarrow Z(\beta) = \{i_{r-1}, j\}$ benzer şekilde (a) durumda ki çelişki elde edilir.

(f) durumu: $\beta = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$ olup, bu durum da çarpımın indirgenemezliği ile çelişir.

O halde sadece (d) durumu mümkündür. Böylece ispat da bitmiş olur.

Yukardaki teoremin bir sonucu olarak:

Sonuç 3.13 ST_n de eksikliği 1 olan idempotentlerin bir indirgenemez çarpımının eksikliğinin 1 olması için, gerekli koşul, her $r = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $i_{r+1} \neq i_r$, ve her $r = 1, 3, 4, \dots, m-2$ için $i_{r+2} \neq i_r$, ve $i_4 \neq i_1$ olmak üzere bu çarpımın

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_{m-1} \\ i_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_m \\ i_{m-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olmasıdır.

Ayrıca, yukarda verilen koşullar ile

$$\beta = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_{m-1} \\ i_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_m \\ i_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_m \end{pmatrix}$$

ise

$$\beta = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \dots & i_{m-1} & i_m \\ i_m & i_m & i_1 & i_3 & \dots & i_{m-2} & i_{m-1} \end{pmatrix}$$

olup, aşağıdaki önerme yi verebiliriz:

Önerme 3.14 Eğer $i_1, i_2, \dots, i_m$ ($m \geq 3$), X_n nin farklı elemanları ise o zaman

$$\left(\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_{m-1} \\ i_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_m \\ i_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_m \end{pmatrix} \right)^{m-1} = \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

olur.

İspat: Göstermemiz gereken sadece

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_{m-1} & i_m \\ i_m & i_m & i_1 & i_3 & \cdots & i_{m-2} & i_{m-1} \end{pmatrix}^{m-1} = \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

olduğu ki bu ise basit bir hesaplama olup, ispat tamamlanır.

Bu bölüm başında gördüğümüz gibi eksikliği 1 olan idempotentler ST_n ni doğurur. Biz şimdi gördük ki ST_n ni doğurmak için tüm eksikliği 1 olan idempotentlere ihtiyacımız yok. Yukardaki önermeden de anlaşılacağı gibi bu idempotentlerin yarısı ST_n ni doğurmak için yeterlidir. Örneğin;

$$I = \left(\left\{ \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} : 1 \leq i < j \leq n \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right\} \right) \cup \left\{ \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

kümesini elemanları ve yukardaki önerme kullanılarak, diğer tüm eksikliği 1 olan idempotentleri elde edebiliriz. Dolayısıyla da I ile de ST_n doğururuz. Aslında aşağıdaki teorem bunun bir minimal doğuray kümesi olduğunu söylemektedir.

Teorem 3.15 $n \geq 3$ için $\text{rank}(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ dir.

İspatı için John M. Howie nin 1966 yaptığı çalışmaya bakınız.

Yukardaki teoremin ispatında kullanılan teknikler Grafik Teorisi (Çizge Kuramı) kavramları gerektirdiğinden, ve dolayısıyla konuyu da fazla dağıtmamak için verilmemiştir.

$$ST_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ olup, } \text{rank}(ST_2) = 2 \text{ olur.}$$

Biz örnek olarak $n = 4$ alalım:

Eğer

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ise, yukardaki önermenin bir uygulaması olarak, diğer tüm eksikliği 1 olan idempotentleri elde edelim:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ayrıca, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in ST_4$ de idempotentlerin çarpımı şeklinde yazacak olursak:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde indirgenemez idempotenlerin çarpımı şeklinde olur. Dikkat edilirse

$$Z(\alpha) = \{1\} = Z\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{ve} \quad \alpha \circ \alpha^{-1} = [24] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

dir.

4. SIRAKORUYAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde sırakoruyan dönüşüm kavramı, özellikleri ve önemli sonuçlar verilmiştir.

4.1 Sırakoruyan Dönüşümlerin Oluşturduğu Yarıgrupların Doğurayları

Bu bölümde sırakoruyan dönüşümler yarıgrubu Q_n inceleyeceğiz. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere X_n üzerinde doğal sıralamayı düşüneceğiz. Bu durumda her $\alpha \in Q_n$ için

$$1 \leq 1\alpha \leq 2\alpha \leq 3\alpha \leq \dots \leq n\alpha \leq n$$

şeklindedir. Kolayca görülürki Q_n tüm dönüşümler yarıgrubu T_n in bir altarı grubudur. İlk olarak Q_n in herhangi bir elemanın Q_n deki idempotentlerin çarpımı olarak yazılabileceğini göstereceğiz. Sonra Q_n in eleman sayısını veren bir formül vereceğiz.

Teorem 4.1 X_n üzerinde sırakoruyan dönüşümlerin kümesinin oluşturduğu yarıgrup Q_n in her elemanı, Q_n deki idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir.

Teoremin ispatı için aşağıdaki tanımlardan ve önermelerden yararlanacağız.

Tanım 4.2 $\alpha \in Q_n$ için $Z(\alpha) = X_n \setminus im(\alpha)$ kümesinin eleman sayısına α nın eksikliği diyeceğiz ve $def(\alpha)$ ile göstereceğiz. Yani

$$def(\alpha) = |Z(\alpha)| = |X_n \setminus im(\alpha)|$$

dir.

Önerme 4.3 $\alpha \in Q_n$ ve $def(\alpha) = k > 1$ olsun. O zaman

$$\alpha = \epsilon_1 \beta \epsilon_2 \dots \epsilon_r$$

ve $def(\epsilon_i) = 1$ ($1 \leq i \leq r$), $def(\beta) = k - 1$ olacak şekilde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_r \in Q_n$ idempotentleri ve $\beta \in Q_n$ vardır.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in Q_n$ için $def(\alpha) = k > 1$ olsun. O zaman

$$P(\alpha) = \{y \in im(\alpha) \mid |y\alpha^{-1}| \geq 2\}$$

kümesini tanımlayalım. α birebir olmadığından $P(\alpha) \neq \emptyset$ dir. Ayrıca

$$d_\alpha = \min \{|z - p| \mid z \in Z(\alpha), p \in P(\alpha)\}$$

tanımlayalım. O zaman da, $Z(\alpha) \cap P(\alpha) = \emptyset$ olduğundan, $d_\alpha \geq 1$. Şimdi ispata d_α üzerinden tümevarımla devam edelim.

$d_\alpha = 1$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin $p+1 \in Z(\alpha)$ olacak şekilde $p \in P(\alpha)$ olduğunu varsayalım (Aksi halde $p-1 \in Z(\alpha)$ olup benzer şekilde yapılır. Yani $|z-p|=1$ olduğunda ya $p+1$ veya $p-1 \in Z(\alpha)$ olur). Şimdi

$$q = \max \{x \in X_n \mid x\alpha = p\}$$

alalım. $p\alpha^{-1}$ birden fazla eleman içerdiğinden $q' \leq q-1$ için $q'\alpha = p$ dir.

$$p = q'\alpha \leq (q-1)\alpha \leq q\alpha = p$$

ve dolayısıyla $(q-1)\alpha = p$ olur. Ayrıca $\varepsilon : X_n \longrightarrow X_n$ dönüşümünü

$$x\varepsilon = \begin{cases} q-1, & \text{eğer } x = q \\ x, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak ε bir idempotentdir ve ayrıca eksikliği 1 dir.

$\beta : X_n \longrightarrow X_n$ dönüşümünü de

$$x\beta = \begin{cases} q+1, & \text{eğer } x = q \\ x\alpha, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak $\beta \in Q_n$ ve $|Z(\beta)| = |Z(\alpha)| - 1 = k-1$ ve $\alpha = \varepsilon\beta$ olur. ε ve β yı daha açık bir şekilde yazacak olursak

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q-1 & q & q+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & q-1 & q-1 & q+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ve

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q-1 & q & q+1 & \cdots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \cdots & (q-1)\alpha = p & q+1 & (q+1)\alpha & \cdots & n\alpha \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi $d_\alpha > 1$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin $z \in Z(\alpha)$ alalım.

$$z+1, \dots, z+d_\alpha-1 \in im(\alpha) \setminus P(\alpha), \quad z+d_\alpha \in P(\alpha)$$

olur.

(Şimdi $z < p$ için örnek verelim.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda $Z(\alpha) = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(\alpha) = \{8, 9\}$, $im(\alpha) = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $im(\alpha) \setminus P(\alpha) = \{5, 6, 7\}$ olup $d_\alpha = |8 - 4| = 4$, $z = 4 \in Z(\alpha)$ için $4 + 1, 4 + 2, 4 + 3 \in im(\alpha) \setminus P(\alpha)$ ve $4 + 4 = 8 \in P(\alpha)$.)

$(z + 1)\alpha^{-1}$ tek bir elemana sahip olup buna t dersek $(t + 1)\alpha = z + 2$ dir. $\gamma : X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü

$$x\gamma = \begin{cases} z, & \text{eğer } x = t \\ x\alpha, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak $\gamma \in Q_n$ olur, ve $|Z(\gamma)| = |Z(\alpha)| = k$ dır. Ayrıca,

$$z + 1 \in Z(\gamma), z + d_\alpha \in P(\gamma)$$

ve dolayısıyla $d_\gamma = d_\alpha - 1$ dir.

(Yukarda ki örnek için $4 + 4 = 8 \in P(\gamma) = \{8, 9\}$ ve $Z(\gamma) = \{1, 2, 3, 5\}$ olup $d_\gamma = d_\alpha - 1 = 4 - 1 = 3$ olur.)

Eğer $\eta : X_n \rightarrow X_n$ dönüşümü

$$x\eta = \begin{cases} z + 1, & \text{eğer } x = z \\ x, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$z\varepsilon = z + 1, \quad x\varepsilon = x \quad (x \neq z)$$

şeklinde tanımlarsak $\eta \in Q_n$ eksikliği 1 olan bir idempotent olup $\alpha = \gamma\eta$ dir.

Tümevarım hipotesinden, benzer şekilde

$$\gamma = \varepsilon_1 \beta \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_s$$

ve $def(\varepsilon_i) = 1$ ($1 \leq i \leq s$), $def(\beta) = k - 1$ olacak şekilde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_s \in Q_n$ idempotentleri ve $\beta \in Q_n$ vardır. Burdan da

$$\alpha = \gamma\eta = \varepsilon_1 \beta \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_s \eta$$

olup, ispat biter.

Ayrıca yukarıdaki önermenin ispatında aşağıdaki önermeyi de ispatlamış olduk.

Önerme 4.4 $\alpha \in Q_n$ ve $def(\alpha) = k > 1$ olsun. O zaman α , eksikliği bir olan bir tek eleman ile eksikliği bir olan bir kaç idempotentin çarpımı olarak yazılabilir.

Bir önceki bölümde de tanımladığımız gibi

$$S_\alpha = |S(\alpha)| = |\{x \in X_n \mid x\alpha \neq x\}|$$

sayısına α nın değişkeni denir.

Önerme 4.5 $\alpha \in Q_n$ için $\text{def}(\alpha) = 1$ ve $S_\alpha > 1$ ise

$$\alpha = \varepsilon\beta \quad \text{ve} \quad S_\beta = S_\alpha - 1$$

olacak şekilde eksikliği 1 olan bir $\varepsilon \in Q_n$ idempotenti ile eksikliği 1 olan bir $\beta \in Q_n$ vardır ve $S_\beta = S_\alpha - 1$ dir.

İspat: Eğer α nın eksikliği 1 ise, α sıra koruyan dönüşüm olduğundan, öyle bir tek $u \in X_n$ vardır ki

$$u\alpha = (u+1)\alpha$$

dir. Varsayalımki $Z(\alpha) = \{v\}$ olsun :

Eğer $u < v$ ise

$$\begin{aligned} x\alpha &= x & (x \leq u) \\ x\alpha &= x-1 & (u+1 \leq x \leq v) \\ x\alpha &= x & (x > v+1) \end{aligned}$$

dir. Eğer $u \geq v$ ise

$$\begin{aligned} x\alpha &= x & (x < v) \\ x\alpha &= x+1 & (v \leq x \leq u) \\ x\alpha &= x & (x \geq u+1) \end{aligned}$$

şeklinde iki durum oluşur.

Eğer $u < v$ ise $\varepsilon : X_n \longrightarrow X_n$ ve $\beta : X_n \longrightarrow X_n$ y1

$$x\varepsilon = \begin{cases} u, & \text{eğer } x = u+1 \\ x, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve

$$x\beta = \begin{cases} u+1, & \text{eğer } x = u+1 \\ x\alpha, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $\varepsilon, \beta \in Q_n$ olup, ε bir idempotent ve

$$\text{def}(\varepsilon) = \text{def}(\beta) = 1, \quad S_\beta = S_\alpha - 1 \quad \text{ve} \quad \alpha = \varepsilon\beta$$

dir.

Eğer $u \geq v$ ise

$$x\varepsilon = \begin{cases} u+1 & \text{eğer } x = u \\ x & \text{diğer} \end{cases}$$

ve

$$x\beta = \begin{cases} u, & \text{eğer } x = u \\ x\alpha, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak $\varepsilon, \beta \in Q_n$ olup, ε bir idempotent ve

$$\text{def}(\varepsilon) = \text{def}(\beta) = 1, \quad S_\beta = S_\alpha - 1 \quad \text{ve} \quad \alpha = \varepsilon\beta$$

dir, ve önermenin ispatı bitmiş olur.

Önerme 4.6 Eksikliği 1 olan $\alpha \in Q_n$, eksikliği 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $\alpha \in Q_n$ ve $\text{def}(\alpha) = 1$ olsun. Eğer $S_\alpha = 1$ ise α nın kendisi bir idempotent olup eksikliği 1 dir. (Gerçekten $S(\alpha) = \{u\}$ ise $x \neq u$ için $x\alpha = x$ olduğundan $x\alpha = x\alpha^2$ olur ve $u\alpha \neq u$ olduğundan $u\alpha \notin S(\alpha)$ olup, $u\alpha^2 = u\alpha$ dir.) Kabul edelim ki $S_\alpha \geq 2$ ve önerme $S_\alpha - 1$ için doğru olsun. O zaman, bir önceki önermeden

$$\alpha = \varepsilon\beta \quad \text{ve} \quad S_\beta = S_\alpha - 1$$

olacak şekilde eksikliği 1 olan bir $\varepsilon \in Q_n$ idempotentini ile eksikliği 1 olan bir $\beta \in Q_n$ vardır. ve $S_\beta = S_\alpha - 1$ dir. Tümevarım hipotesinden β ve dolayısıyla da α eksikliği 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir.

Yukarıdaki önermelerle ilk olarak $\alpha \in Q_n$ için $\text{def}(\alpha) = k, i = 1, 2, \dots, r$ için ε_i eksikliği 1 olan idempotent ve $\text{def}(\beta) = k - 1$ olmak üzere α nın

$$\alpha = \varepsilon_1\beta\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_r$$

şeklinde yazılabileceğini gösterdik. Sonra bir sonraki önermeyle indirgeme yapılarak $i = 1, 2, \dots, m$ için ε_i eksikliği 1 olan idempotent $\text{def}(\beta) = 1$ olmak üzere α nın

$$\alpha = \varepsilon_1 \cdots \beta \cdots \varepsilon_r \quad (1)$$

şeklinde yazılabileceğini gösterdik. Son iki önermeden $def(\beta) = 1$, ε eksikliği 1 olan idempotent ve $S_\sigma = S_\beta - 1$ olmak üzere β nın

$$\beta = \varepsilon\sigma$$

şeklinde yazılabileceğini gösterdik. Benzer şekilde devam edersek $i = 1, 2, \dots, k$ için ε_i eksikliği 1 olan idempotentler ve $S_\phi = 0$ olmak üzere

$$\beta = \varepsilon\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_k\phi \quad (2)$$

şeklinde yazılabildiği kolayca görülür. $S_\phi = 0$ olduğundan ϕ birim dönüşüm olup (1) ve (2) den

$$\alpha = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_k \cdots \varepsilon_r$$

şeklinde idempotentlerin çarpımı şeklinde yazılır. Yani bu bölüm başında ifade ettiğimiz teoremi ispat etmiş oluruz.

4.2 Kombinatorik Sonuç

Q_n in eleman sayısını veren formülü aşağıdaki teorem ifade edelim:

Teorem 4.7 $Q_n, X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde tüm sırakoruyan dönüşümler yarıgrubu gösterebilir.

O zaman Q_n eleman sayısı

$$|Q_n| = \binom{2n-1}{n-1}$$

dir.

İspat: $\alpha \in Q_n$ ise $1 \leq 1\alpha \leq 2\alpha \leq \cdots \leq n\alpha \leq n$ dir. $r = 0, 1, \dots, n-1, n$ için $g_r(\alpha)$ yani α nın r li mesafesini aşağıdaki gibi tanımlayalım. Burada $g_r(\alpha)$ her r için α nın tanım kümesindeki elemanların blok halinde nasıl gidebileceği hakkında bize bilgi verecektir:

$$g_0(\alpha) = 1\alpha - 1$$

$$g_r(\alpha) = (r+1)\alpha - r\alpha \quad 1 \leq r \leq n-1$$

$$g_n(\alpha) = n - n\alpha$$

Bu durumda

$$\sum_{r=0}^n g_r(\alpha) = n - 1$$

olduğu kolayca görülür. O zaman n tane noktanın ve $n - 1$ tane $\sum_{r=0}^n g_r(\alpha)$ den elde ettiğimiz toplam $2n - 1$ noktadan X_n kümesinde sıralı dönüşümleri aldığımızdan $n - 1$ tane noktanın seçimini düşünürsek bunu da

$$\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \binom{2n-1}{n-1}$$

formülü ile bulabiliriz.

KAYNAKLAR

- AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M., 2005. On factorisations and generators in transformation semigroups, *Semigroup Forum*, 70, 225-237.
- HIGGINS, P.M., 1992. *Techniques of semigroup theory*, Oxford Univ. Press.
- HIGGINS, P.M., HOWIE, J.M., RUSKUC, N. 1998. Generators and factorizations of transformation semigroups, *Proceed. Roy. Soc. Edinburgh*, 128A, 1355-1369.
- HOWIE, J.M., 1995. *Fundamentals of semigroup theory*, Oxford Univ. Press.
- HOWIE, J.M., 1966. The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup, *J. London Math. Soc.*, 41, 707-716
- HOWIE, J.M., 1978. Idempotent generators in finite full transformation semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 81, no. 3-4, 317-323
- HOWIE, J.M., 1970, Products of idempotents in certain semigroups of transformations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), 17, 223-236.
- HOWIE, J.M., MCFADDEN, R.B., 1990, Idempotent rank in finite full transformation semigroups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 114A, 161-167.
- LIPSCOMB, S., 1996, Symmetric inverse semigroups, *Mathematical surveys and monographs* 46, Amer. Math. Soc.
- ROTMAN, J.J., 1994. *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Diyarbakır'ın Bismil ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise eğitimimi Bismil'de tamamladıktan sonra 1997 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitime başladım. 2001 yılında lisans eğitimimi tamamladım. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitime başladım. 2004 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Adana ili Tufanbeyli ilçesindeki Tufanbeyli Lisesine Matematik öğretmeni olarak atandım. Halen bu görevime devam etmekteyim.