

TRANSONİK DIŞ AKIMIN SONLU HACİMLER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜLMESİ

Yüksek Lisans Tezi
Müh. Fırat Oğuz EDİS

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Haziran 1991

Tezin Savunulduğu Tarih : 3 Temmuz 1991

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Ülgen Gülçat

Diğer Jüri Üyeleri : Doç.Dr. Ruhi Kaykayoglu

Doç.Dr. Oktay Özcan

T. C.

**Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi**

ÖNSÖZ

Deneyisel yöntemlere göre çok düşük maliyetli araştırma olanakları sağlayan sayısal yöntemler son yıllarda ülkemizde de ilgi görmeye başladı. Bu konunun özellikle Türkiye gibi araştırmaya ayrılan kaynakları sınırlı olan ülkeler için ne kadar büyük olanaklar sağladığı, maliyet açısından deneyisel yöntemlerle karşılaştırıldığında daha kolay anlaşılabilir. Bu gelişime bir ölçüde katkıda bulunabilmek ümidiyle yaptığım çalışmaya temel olan program ve dökümanları sağlayan Yük.Müh. Nihat Kurtuluş'a ve bu çalışma süresince sürekli destek olan hocam Doç.Dr. Ülgen Gülçat'a burada teşekkür etmek isterim.

Fırat Oğuz Edis

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER	v
ÖZET	vii
SUMMARY	viii

BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
----------------------	---

BÖLÜM 2. AKIŞI YÖNETEN DENKLEMLER	7
---	---

2.1 Giriş	7
2.2 Euler Denklemleri	8
2.3 Boyutsuzlaştırma ve Vektör Şekli	10

BÖLÜM 3. UZAYSAL AYRIKLAŞTIRMA	13
--------------------------------------	----

3.1 Sonlu Alanlar Yöntemi	13
3.1.1 Heksagonal Kontrol Yüzeyi	14
3.1.2 Trapezoidal Kontrol Yüzeyi	14
3.1.3 Bitrapezoidal Kontrol Yüzeyi	15
3.2 Tutarlılık Analizi	16

BÖLÜM 4. ZAMANSAL AYRIKLAŞTIRMA	20
---------------------------------------	----

4.1 Giriş	20
4.2 Euler Şeması	21
4.2.1 Kararlılık Analizi	21
4.3 Lax Şeması	23
4.4 Düzeltilmiş Viskozite Şeması	24
4.4.1 Kararlılık Analizi	26

4.5	Courant–Friedrichs–Lewy Kararlılık Analizi	27
BÖLÜM 5.	BAŞLANGIÇ VE SINIR ŞARTLARI	29
5.1	Sınır Şartları	29
5.2	Başlangıç Şartları	31
BÖLÜM 6.	UYGULAMA VE SONUÇLAR	34
6.1	Profil Etrafında İnvisit Akış Problemi	34
6.2	Akışın Fiziksel Alanı	35
6.3	Akışın Sayısal Alanı	36
6.3.1	Bitrapezoidal Kontrol Yüzeyi	38
6.3.2	Sınır Şartları ve Yarım Elemanlar	41
6.4	NACA 0012 Üzerinde Uygulama Sonuçları	46
6.5	NACA 6548 (Modifiye edilmiş) Üzerinde Uygulama	48
BÖLÜM 7.	SONUÇ	70
KAYNAKLAR		71
EKLER		73
ÖZGEÇMİŞ		74

SEMBOLLER

a ses hızı

$A(\vec{\sigma})$ sanki—lineer Euler denklemlerine ait katsayılar matrisi

$B(\vec{\sigma})$ sanki—lineer Euler denklemlerine ait katsayılar matrisi

E toplam enerji

n kontrol yüzeyi sınırında birim normal

n_x, n_y birim normal bileşenleri

p statik basınç

p_{01} durma basıncı

R gaz sabiti

S bir kontrol yüzeyinin alanı

$t, \Delta t$ zaman ve zaman adımı

T sıcaklık

T_{01} durma sıcaklığı

u x-doğrultusunda hız bileşeni

v y-doğrultusunda hız bileşeni

$\vec{V}$ hız vektörü

$x, \Delta x$ akım doğrultusundaki koordinat ve bu doğrultudaki artış

$y, \Delta y$ akıma dik doğrultudaki koordinat ve bu doğrultudaki artış

α yapay viskozite katsayısı

$\vec{\epsilon}$ ayrık denklemlerin numerik çözümüyle tam çözümü arasındaki hata vektörü

γ özgül ısılar oranı

λ Euler denklem takımının özdeğerleri

ρ yoğunluk

$\vec{\sigma}$ bilinmeyen vektörü

$\vec{f}(\vec{\sigma})$ x-doğrultusunda akı vektörü

$\vec{g}(\vec{\sigma})$ y-doğrultusunda akı vektörü

Alt indisler

i, k uzaysal indisler

Üst indisler

* her N_v iterasyonda güncelleştirilen terimler

n zamansal indis

ÖZET

Profil etrafında transonik akış problemi, yüksek sesaltı hızlarda uçan uçakların tasarımı açısından önemli bir problemidir. Bu problemin çözümünde viskoz etkilerin çepere çok yakın dar bir bölgede etkin oldukları kabul edilirse, akış Euler denklemleri kullanılarak çözülebilir. Euler denklemlerinin korunumlu şekillerinin çözümü Rankine-Hugoniot bağıntılarını da içerir. Bu denklemler profil üzerinde oluşacak şokun yeri ve şiddeti hakkında kesin bilgi verir. Euler denklemlerinin daimi şekilleri sesaltı hızlarda parabolik sesüstü hızlarda hiperbolik karakterdedir. Bu nedenle hernekadar daimi çözümler aransa da, transonik akış probleminde daimi olmayan denklemlerin kullanılması uygun olur. Bunların çözümleri Zaman Adımlama yöntemleri kullanılarak yapılır. Kullanılan denklemler korunum ifadeleri olduğu için bunların diferansiyel şekilleri yerine integral şekillerinin ayrıklaştırılması daha uygundur. Bu tip bir ayrıklaştırma için en doğal yol ise Sonlu Alanlar (Hacimler) yöntemidir.

Bu çalışmada, profil üzerindeki transonik akımı inceleyebilmek amacıyla, Euler denklemlerini transonik akış hali için çözen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Geliştirilen bilgisayar programı, N.Kurtuluş ve T.Arts tarafından "Von Karman Institute For Fluid Dynamics" de hazırlanan bir bilgisayar programını temel almıştır. Adı geçen program kaskat akışı çözebilecek şekilde hazırlanmıştır. Bu çalışmada ise program, Kurtuluş ve Arts tarafından kullanılan yöntemle bağlı kalınarak dış akım problemini çözebilecek şekilde değiştirilmiştir.

Kullanılan yöntemler, zaman adımlama yöntemi olarak Düzeltilmiş Viskozite Şeması ve uzaysal ayrıklaştırma yöntemi olarak Sonlu Alanlar Yöntemi'dir. Uzaysal ayrıklaştırmada, kontrol yüzeyi olarak akım doğrultusunda örtüşen bitrapezoidal elemanlar kullanılmıştır.

Geliştirilen program önce kalibrasyon amacıyla NACA 0012 profil üzerindeki transonik akışın çözülmesinde kullanılmıştır. Daha sonra modifiye edilmiş NACA 6548 profili üzerinde akımın çözümü yapılmıştır.

Çözümler sonucunda yöntemin ve buna bağlı programın akımın incelenmesi, şokun yerinin ve şiddetinin bulunmasında başarılı olduğu anlaşılmıştır.

SUMMARY

TRANSONIC EXTERNAL FLOW CALCULATIONS USING A FINITE VOLUME METHOD

The role of Computational Fluid Dynamics in Aerodynamics researchs have become more and more strong, since mid of 1960's, when the Time-Dependent techniques were introduced and the computation coasts began to decrease due to the rapid development of the computer hardware. Since then, the CFD methods can be considered as a third dimension in Fluid Dynamics besides the two other, anlytical and experimental methods.

In the present study, by employing Finite Area Method for spatial discretization and Corrected Viscosity Scheme for time discretization, the Euler equations for transonic external flow problem over an airfoil are solved numerically. The feature of the problem is that both subsonic and supersonic flow regions exist together within the same domain in the case of the transonic flow and the Euler equations are of different character for these kind of flow regimes. The code applied here is based on the work of N.Kurtuluş and T.Arts at the VKI, that they developed this code for cascade flow calculations.

The principle of a time marching method is to consider the solution of a stationary problem as the solution after a long calculation time of instationary equations describing this problem. The physical interpretation is as follows: the computation

increased from the trailing edge to the outlet plane. The space between the pseudo stream lines is increased uniformly from the profile to the upward and downward boundaries as well. So there can be benefit from the computational expenses.

For spatial discretisation, a Finite Area method is used. It is based on a numerical representation of conservative equations written in an integral form. The physical domain of the flow is divided into bitrapesoidal control surfaces. These control surfaces overlap in flow direction. The accuracy of the discretization by this kind of surfaces is of the first order.

The different geometrical parameters needed for an analysis of the consistency and the order of accuracy of the discretization obtained with this kind of control surfaces were described in Fig. 4-3 .

In order to have a well-posed problem, the partial differential system of equations must be completed by a set of physical boundary conditions. Along the solid boundaries an impermeability condition must be fulfilled. Since the solution procedure uses the transport terms explicitly, this condition will be verified by setting zero to the mass and energy fluxes, and by taking into account only the static pressure acting on the surface. The flow angle on the profile is obtained by this way.

The stability of the numerical scheme is investigated using von Neumann stability analysis. The analysis of the Corrected Viscosity Scheme is handled in two stages. First, by taking into consideration that the artificial viscosity terms are constant during N_v time steps, amplification matrix is constructed for one time step only. By using this amplification matrix and taking the artificial viscosity terms into

The Corrected Viscosity Scheme is used for time-discretisation of these equations. This scheme is derived by adding a periodic correction term to the Lax scheme, which is spatially smoothed version of the Euler Scheme. The periodic correction term, which can be considered as an artificial viscosity term is updated every N_v iterations. For the two-dimensional Euler Equations, the scheme is as follows:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{i,k}^{n+1} &= \frac{\Delta t}{S} \Sigma(\text{Transport terms}) \\ &+ \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_{i-1,k}^{n+1} + \bar{\sigma}_{i,k+1}^n + \bar{\sigma}_{i+1,k}^n + \bar{\sigma}_{i,k-1}^n) \\ &- \frac{\alpha}{4}(\bar{\sigma}_{i-1,k}^* + \bar{\sigma}_{i,k+1}^* + \bar{\sigma}_{i+1,k}^* + \bar{\sigma}_{i,k-1}^* - 4\bar{\sigma}_{i,k}^*) \\ \alpha &= vc \left[1 - \frac{|\rho_{i-1,k}^* + \rho_{i+1,k}^* + \rho_{i,k-1}^* + \rho_{i,k+1}^* - 4\rho_{i,k}^*|}{4} \right]\end{aligned}$$

The physical domain of the flow was described in Fig.6-2. It is made up of a profile region an extends several cord lenghts perpendicular and parallel to the flow direction,

The lines AB, DC and EF are solid walls across which no mass and energy transport can exist. The lines AD and BC are inlet and outlet boundaries respectively. The space between the inlet plane and the leading adge is as twice or thrice much as chord lenght. The one between the trailing edge and the outlet plane is as thrice or five times much as the chord lenght. The reason of using such a long physical domain is that inlet and outlet conditions must be uniform in pitchwise direction.

The numerical domain of the flow was shown in Fig. 6-3. It is made up of lots of pseudo stream lines and pitchwise lines. The space between the successive pitchwise lines is regularly decreased from the inlet plane to the leading edge, and

starts from a rough approximation of the final solution, considered as a large perturbation and develops under certain boundary conditions until convergence. The conservative form of the stationary Euler equations is of parabolic character for subsonic regions, and of hyperbolic character for supersonic regions. The advantage of the Time Marching methods in transonic flow calculations lies on the use of the instationary Euler equations which are of the hyperbolic character for both flow regimes, supersonic and subsonic. By the use of the conservative Euler equations, it is also guaranteed that the shock will be captured correctly without any shock fitting effort. In that present work, Corrected Viscosity Scheme is used as the Time Marching method. This scheme is first proposed by Couston.

The vector form of the conservative instationary Euler equations is as follows:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} u \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}$$

account, an other one is constructed for N_v time steps. When the eigenvalues of the amplification matrix are analysed, it is observed that the scheme is stable, if the Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) condition is satisfied.

The program is applied on two different airfoils: the NACA 0012 airfoil and teh modified NACA 6548 airfoil. Results are obtained for $M=0.80$ and 0.00 and 1.25 incidence on NACA 0012 airfoil, $M=0.95$, 0.00 incidence on NACA 6548 airfoil. The results are satisfactory.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Son yıllarda akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde sayısal çözümleme yöntemlerinin kullanımı giderek yaygınlaşmaktadır. Bu yöntemlerin tarihçesine kısaca göz atılmak istenirse, bu konudaki ilk çalışmalardan birinin, Kopal tarafından yapılan koni etrafında süpersonik akışa ait çözümlerin derlendiği tablolar olduğu görülür. Bununla beraber gerçek anlamda Hesaplamalı Akışkanlar Mekaniği, 1950 ve 1960 arasında yüksek hız ve yüksek sıcaklık problemlerinde uygulanmaya başlanmıştır. Bu birinci kuşak çalışmaları, temel denklemlerin uygulamalı akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde kullanılması için yapılan ve bilgisayar kullanılmasını şart koşacak karmaşıklıkta problemlere yönelik ikinci kuşak çalışmalar izlemiştir. Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümüne gerek duyulduğunda, 1960 ların ortalarında, ' zamana bağlı teknik' ler ortaya çıkmış ve akış alanı hesaplamalarında bir devrim yaratmıştır. Bu noktadan başlayarak sayısal yöntemler akışkanlar mekaniğinde, teori ve deneyin yanında 3. boyut olarak yer almıştır.[1]

Tablo 1-1 [2]de sayısal yöntemlerle diğer yöntemler, avantaj ve dezavantajları açısından karşılaştırılmışlardır. Özellikle süper-bilgisayarların gelişmesiyle bu alandaki gelişmeler de hızlanmış ve sayısal yöntemler özellikle maliyet açısından deneysel yöntemlerden, geometrik sınırlamaların azlığı ve uygulama kolaylığı açısından analitik yöntemlerden üstün konuma gelmişlerdir.

Tablo 1-1 : Analitik, deneysel ve sayısal yöntemlerin karşılaştırılması.

	Analitik	Deneysel	Sayısal
A V A N T A J	Kapalı çözüm elde edilir. Hesap zamanı çok az.	Gerçek yapı temsil edilir. Temsili Aerodinamik veri elde edilir. Yeni olaylarla karşılaşılabılır.	Kolay uygulanır. Sınırlayıcı kabul çok az. Tüm alan tanımlanır Karmaşık konfigürasyonlara uygun. Ma, Re sınırlaması yok. Ucuz.
D E Z A V A N T A J	Sınırlayıcı basitleştirmeler. Basit konfigürasyonlar. Sınırlı Aerodinamik karakteristikler.	Yüksek model ve işletme gideri. Tünele bağlı akış şartları. Sınırlı sayıda veri. Elde edilen verilerin hassaslığı . Ölçekleme etkileri (Viskoz etkiler, Kimyasal dengesizlikler vs.).	Yetersiz türbülans modelleri. Bilgisayar hafıza ve hız sınırlaması. Ayrıklaştırmanın hassaslığı.

Yüksek sesaltı hızlarda uçan uçaklar üzerinde sesaltı ve sesüstü hız bölgelerinin birlikte bulunduğu transonik akış bölgelerine rastlanır. Bu bölgelerdeki akımın hesaplanması ve özellikle kanat üzerinde oluşan bu bölgelerin incelenmesi süperkritik profil tasarımı açısından da önemlidir.

Yüksek Reynolds sayılı akışlarda, viskoz etkiler katı cisim çeperlerine yakın çok ince bir bölgede etkindirler. Bu bölgenin dışında akım viskozite etkisiz kabul edilir ve viskozite etkisiz-rotasyonel akış için korunum yasalarını temsil eden Euler denklemleri ile çözülebilir. Euler denklemlerinin korunumlu ifadeleri aynı zamanda Rankine-Hugoniot bağıntılarını da kapsadıkları için akış alanı içerisinde oluşan şok da problemin çözümünde herhangi bir zorluk oluşturmaz. Bölüm 2 de Euler denklemleri, bunların korunumlu şekilleri, boyutsuzlaştırılmaları ve vektörel gösterimleri anlatılmıştır.

Korunum yasaları akış alanı içerisinde bulunan sonsuz küçük bir kontrol alanı (hacimi) için geçerlidir. Sayısal uygulamada bu mümkün olmayacağı için denklemler sonlu büyüklükte bir kontrol yüzeyi üzerinde uygulanır. Bu şekilde ayrıklaştırma yapılarak korunum yasalarının sonlu alanlar (hacimler) üzerinde uygulanması, Sonlu Alanlar (Hacimler) yöntemi olarak adlandırılmaktadır.

Sonlu Alanlar Yöntemi, kaskat akış veya çift cisim etkileşim problemlerinde olduğu gibi karmaşık geometrilerin söz konusu olduğu problemlerde diğer yöntemlere göre üstünlük göstermektedir. Bilindiği gibi Sonlu Farklar yönteminde akış alanı düzgün bir ağ ile örtülmek zorundadır. Bunun mümkün olmadığı durumlarda dönüşüm uygulamak gerekir. Bu ise geometri üzerine önemli sınırlamalar getirmektedir. Sonlu Alanlar yönteminde akış alanının düzgün bir ağ ile örtülmesi gerekmemektedir. Bu açıdan Sonlu Alanlar yönteminin Sonlu Elemanlar yöntemi kadar esnek olduğu söylenebilir. Kodlama açısından ise Sonlu Elemanlar yöntemine göre daha kolay

olması bir avantajdır. Sonsuz akış alanlarına uygulama kolaylığı Sonlu Elemanlar yöntemiyle aynı düzeydedir.

Sonlu Alanlar yöntemi uygulanırken, akış alanının sonlu büyüklükte kontrol yüzeylerine bölünmesinde kontrol yüzeylerinin şekillerinin ve akış değişkenlerinin hesaplanacağı ayrık noktaların bu yüzeyler üzerindeki konumlarının seçimi için çeşitli seçenekler vardır. Bu çalışmada akış alanı bitrapezoidal elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Bu ayrıklaştırmanın ayrıntıları ve bazı örnek kontrol yüzeyleri Bölüm 3 de açıklanmıştır.

Transonik viskozite etkisiz akışı tanımlayan Euler denklemleri daimi hal için yazıldıklarında, değişik akım durumları için farklı özellikler gösterir. Sesaltı bölgelerde parabolik karakterde olan bu denklemler, sesüstü bölgelerde hiperbolik karakterdedirler. Bu açıdan, farklı akış bölgelerini birarada bulunduran transonik akımın bu denklemlerle çözülmesi için, her bölge için ayrı fark operatörü kullanılması gerekir. Buna karşın zamana bağlı Euler denklemleri, sesaltı ve sesüstü bölgelerinin her ikisi için de hiperbolik karakterdedirler. Bu özellik, son yıllarda zaman adımlama yöntemlerinin giderek yaygınlaşmasının ve önem kazanmasının başlıca nedenidir.

Zaman adımlama yöntemleri, daimi bir akışın çözülmesi için zamana bağlı denklemlerin kullanılmasına dayanır. Başlangıç şartları daimi durumun büyük oranda bozuntuya uğramış hali olarak düşünülür ve bu bozuntuların zaman adımlama süreci içerisinde akım alanının dışına süpürüleceği ve daimi hale yakınsanacağı kabul edilir. Zaman adımlama yöntemlerinin tek sakıncası yeterli hassalık mertebesinde sonuçlara ulaşabilmek için uzun hesaplama zamanı gerektirmesidir. Ancak gelecekte bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler, zaman adımlama yöntemlerinin güncelliğini korumasını sağlayacaktır.

Bu çalışmada zaman adımlama yöntemi olarak ilk kez Couston tarafında 1976 da önerilen ve Arts [3] tarafından bazı değişiklikler yapılarak uygulanan [4] Düzeltilmiş Viskozite Şeması kullanılmıştır. Bu şema Lax şemasına periyodik bir düzeltme terimi eklenerek oluşturulmuştur. Bölüm 4 de Lax şemasına kaynak olan Euler şeması, Lax şeması ve Düzeltilmiş Viskozite şeması açıklanmaktadır. Zamansal ayrıklaştırmanın kararlılığının incelenmesinde kullanılan kriterlerden von Neumann analizi ve CFL şartı da bu bölümde açıklanmış ve uygulanmıştır.

Matematiksel olarak tam tanımlı bir problem oluşturulabilmesi için, problemi oluşturan denklemler kadar bu denklemlerin çözümünde yer alan başlangıç ve sınır şartlarının uygun olarak verilmesi de çok önemlidir. Bölüm 5 de sınır şartlarının sayısının belirlenmesi, uygulanması, ve çözüme yakınsama hızına etkileri açısından başlangıç şartları incelenmiştir.

Sonlu alanlar yöntemine dayalı bu çalışmada fiziksel domenin ayrıklaştırılmasında T.Arts ve W.van Howe [5] tarafından önerilen kontrol hacimleri seçilmiştir. Çalışma T.Arts ve N. Kurtuluş [6] tarafından hazırlanan bir bilgisayar programını temel almıştır. Adı geçen çalışmada hazırlanmış olan program türbin palaları üzerindeki akışın incelenmesi amacıyla kaskat akışı çözebilecek şekilde geliştirilmiş bir programdır.

Buradan yola çıkarak, akış alanının ayrıklaştırılmasında kullanılan elemanlara ve iterasyon prosedürüne bağlı kalınarak kanal içerisine yerleştirilmiş bir profil üzerindeki akışı hesaplayabilecek program geliştirilmiştir. Bu şekilde kanal yüksekliği yeterince büyük tutularak dış akım problemlerinin çözümü mümkün olmuştur.

Bölüm 6 da, ele alınan problemin fiziği incelenmiş, yukarıda anlatılan yöntemlerin uygulanmasında yapılan seçimler ve uygulama sonuçları belirtilmiştir. İki farklı profil üzerinde farklı şartlarda uygulamalar yapılmıştır. Bunlardan NACA 0012 profil, yöntemin sağlanması açısından tercih edilmiştir.

Bölüm 7 çalışmadan elde edilen sonuçların ve buna bağlı olarak yöntemin genel bir değerlendirmesini içermektedir.



BÖLÜM 2

AKIŞI YÖNETEN DENKLEMLER

2.1. Giriş

Navier–Stokes denklemlerinin çözümü her zaman mümkün değildir ve birçok uygulamada pratik değildir. Mesela sadece basıncın gerekli olduğu ön tasarım çalışmalarında viskozite etkisiz Euler denklemleri ile elde edilmiş sonuçlar yeterli olmaktadır. Isı transferi ve yüzey sürtünmeli hesaplarda sınır tabaka denklemlerini kullanmak gerekse de, çözüme başlamadan önce dış akıma ait basınç dağılımlarının bulunması gerekmektedir.

Profil etrafında transonik hava akışı örneğinde olduğu gibi, Reynolds sayısının yeterince yüksek olduğu akışlarda viskoz etkiler katı cisim cidarına yakın bir bölgede etkindirler. Bu bölgenin dışında akış viskozite etkisiz kabul edilir. Eğer bu bölgenin kalınlığı akış alanının karakteristik uzunluğu yanında çok küçük kalıyorsa viskozite etkisiz akış alanı sınır tabakadan bağımsız olarak çözülebilir.

Navier–Stokes denklemlerinden viskoz terimler çıkarılırsa viskozite etkisiz akış alanını çözmek için gerekli denklemlere ulaşılır. Bu denklemler Euler denklemleri olarak adlandırılmaktadır.

Euler denklemlerinin korunumlu şekillerinin çözümü, Rankine–Hugoniot bağıntılarını içerir ve Lax(1954) tarafından gösterilmiştir ki, Euler denklemlerinin korunumlu şekillerinin çözümüyle akış alanında oluşan şokun yeri ve hızı hakkında tam bilgi elde edilir [7]. Tabii sayısal çözümde sadece korunumlu denklemlerin kullanılması yeterli olmaz, denklemlerin korunumlu olarak ayrıklaştırılması da gerekir [8].

Euler denklemlerinin kullanılması bir yönden daha önemlidir. Profil etrafındaki transonik akışın hesaplanmasında Kutta şartının sınır şartı olarak empoze edilmesi gerekmez[9].

Bu çalışmada zamansal ve uzaysal olarak ayrıklaştırılacak olan denklemler Euler denklemleridir.

2.2 Euler Denklemleri

- Süreklilik Denklemi

Sonsuz küçük ve sabit bir kontrol hacmi içerisinde geçen akışa korunum yasaları uygulanarak aşağıdaki süreklilik denklemine ulaşılır.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

veya açık halde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

- Momentum Denklemi

İnvisit ve kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği akış hali için Navier–Stokes denklemlerinden viskozite içeren terimler çıkarılarak

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p \quad (2.3)$$

elde edilir. Bu ifadenin korunumlu şekli yazılmak istenirse sol taraftaki maddesel türev teriminin korunumlu hale getirilmesi gerekir. Bunun için sonsuz küçük kontrol hacmi için x – doğrultusunda momentum ifadesi olarak

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = \\ & u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ & = u \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) \right]}_{=0} + \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir. Bu ifade y – doğrultusu için de aynı şekilde düzenlenirse

$$\text{x-doğrultusu için} \quad \rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla [(\rho u) \vec{V}] \quad (2.5)$$

$$\text{y-doğrultusu için} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla [(\rho v) \vec{V}]$$

elde edilir. Bu iki terim (2.3) denkleminde yerleştirilerek

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \nabla [(\rho u) \vec{V}] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \nabla [(\rho v) \vec{V}]$$

elde edilir. Bunlar x ve y doğrultusunda korunumlu şekilde yazılmış viskozite etkisiz momentum ifadeleridir.

- Enerji denklemi

Enerji denkleminin korunumlu şekildeki ifadesi, ısı üretimsiz, viskozite etkisiz akış hali için ve termodinamik olarak mükemmel akışkan için şöyledir.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot [\vec{V}(E + p)] \quad (2.7)$$

burada E korunumlu özelliştir ve birim hacim için toplam enerjidir.

$$E = \rho \left[e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (2.8)$$

Burada e iç enerjidir ve termodinamik olarak ideal gaz için sadece sıcaklığın bir fonksiyonudur.

- Durum Denklemleri

Yukarıdaki denklemlere ek olarak termodinamik özellikler arasında ilişkiyi belirleyen durum denklemlerinin de kullanılması gerekir. Bunlar hal denklemi

$$p = \rho RT \quad e = c_v T \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad R = c_p - c_v \quad (2.9)$$

ve ses hızı ifadesidir.

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.10)$$

2.3 Boyutsuzlaştırma ve Vektör Şekli

Akışkanlar mekaniğinin temel denklemleri sıkça boyutsuz halde kullanılır. Bu şeklin avantajı, ilk olarak Mach sayısı, Reynolds sayısı gibi karakteristik parametrelerin birbirlerinden bağımsız olarak değişimlerinin görülebilmesi, ikinci olarak

da, normalize edilmiş değerlerin değişimlerinin önceden belirlenmiş sınırlar içerisinde olmasıdır.

Bu çalışmada Euler denklemleri aşağıdaki boyutsuz değişkenlerle ifade edilecektir. Burada referans değerleri olarak akımın üniform olduğu sonsuz şartlarındaki durma değerleri alınmıştır.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\bar{x}}{\bar{L}} \quad , \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}} \quad , \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}} \sqrt{RT_{01}} \\
 p &= \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{01}} \quad , \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{01}} \quad , \quad T = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_{01}} \\
 u &= \frac{\bar{u}}{\sqrt{RT_{01}}} \quad , \quad v = \frac{\bar{v}}{\sqrt{RT_{01}}} \quad , \quad a = \frac{\bar{a}}{\sqrt{RT_{01}}} \\
 e &= \frac{\bar{e}}{RT_{01}} \quad , \quad E = \frac{\bar{E}}{RT_{01}} \quad ,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Böylece hal denklemi, toplam durma enerjisi ve ses hızı ifadesi

$$p = \rho T \quad , \quad E = \frac{T}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad , \quad a = \sqrt{\gamma T} \tag{2.12}$$

haline gelir.

Euler denklemlerinin korunumlu ve boyutsuzlaştırılmış ifadeleri sıkça rastlanan ve ayrıklaştırma ve programlama için daha uygun görünen vektör şeklinde şöyle yazılabilir.

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \tag{2.13}$$

Burada

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} u \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \vec{f}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\vec{g}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}$$

dır.

Bazı teorik incelemeler için denklemlerin sanki-lineer ifadelerinin kullanılması daha uygundur.

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \mathcal{A}(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} + \mathcal{B}(\vec{\sigma}) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

Burada

$$\mathcal{A}(\vec{\sigma}) = \frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial \vec{\sigma}} \quad \mathcal{B}(\vec{\sigma}) = \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial \vec{\sigma}}$$

$$\mathcal{A}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)T & 0 & u \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{B}(\vec{\sigma}) = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & (\gamma - 1)T & v \end{bmatrix}$$

dır.

BÖLÜM 3

UZAYSAL AYRIKLAŞTIRMA

3.1. Sonlu Alanlar Yöntemi

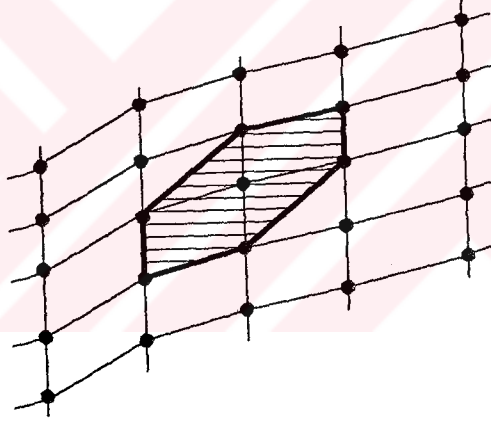
Bazı durumlarda, akışı yöneten denklemlerin diferansiyel şekilleri yerine integral şekilleri ile ele alınması gerekir. Daha önce belirtildiği gibi bu durumlar, şok veya profilin ardında oluşan kayma hattı örneğinde olduğu gibi, süreksizliklerin söz konusu olduğu ve dolayısıyla denklemlerin korunumlu şekillerinin kullanılmasının uygun olduğu durumlardır. Ayrıca korunum denklemlerinin fiziksel olarak en temel ifadeler olduğu da hesaba katılmalıdır. Bu tip durumlarda denklemlerin integral şekillerinin ayrıklaştırılması en doğal çözümdür.

Bu şekilde yapılan ayrıklaştırma sonlu alanlar (hacimler) yönteminin temelini oluşturur. Bu yöntem geçmişte kontrol hacmi yöntemi olarak da adlandırılmıştır. Yöntemin en basit uygulaması akış alanının örtüşmeyen hücrelere bölünmesidir. Aynı şekilde akış alanı sadece akış doğrultusunda veya sadece akışa dik doğrultuda veya her iki doğrultuda da örtüşen ve birkaç hücreden oluşan alanlarla (hacimlerle) kaplanabilir. Her hacim için korunum yasaları uygulanarak hacim üzerindeki ayrık noktalarda (düğümler) akış değişkenleri hesaplanır. Hücrelerin geometrisinin ve düğümlerin bu hücreler üzerindeki yerlerinin seçiminde büyük bir serbestlik vardır. Hücreler yapılı olan veya olmayan bir ağın elemanları olabilirler.

Aşağıda çeşitli araştırmacılar tarafından seçilmiş kontrol alanları ve bunlara ait bazı özellikler sıralanmıştır.

3.1.1 Heksagonal Kontrol Yüzeyi (Mc Donald-Couston)

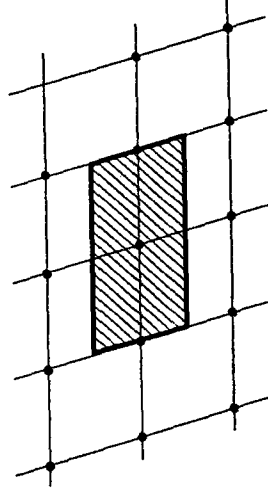
Taylor açılımının yapıldığı düğüm noktaları ağıın kesişim noktalarına gelecek şekilde heksagonun merkezinde seçilmektedir. Komşu kontrol yüzeyleri iki doğrultuda örtüşmektedirler.



Şekil 3-1 Heksagonal kontrol yüzeyi

3.1.2 Trapezoidal Kontrol Yüzeyi (Denton)

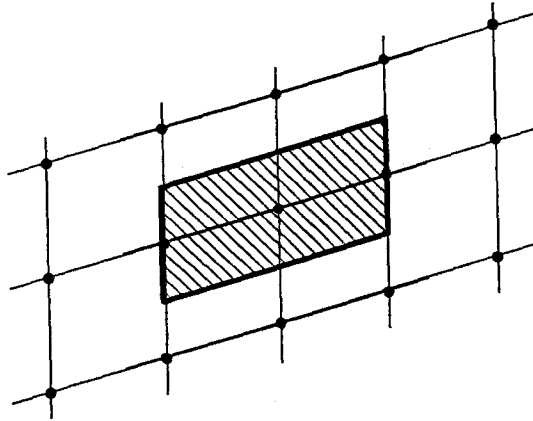
Düğümmler kontrol yüzeyinin merkezindedir. Komşu yüzeyler ile bir doğrultuda örtüşmektedirler. Bu şekilde hesaplama zamanından tasarruf edilmektedir.



Şekil 3-2 Trapezoidal kontrol yüzeyi

3.1.3 Bitrapezoidal Kontrol Yüzeyi

Bu tip kontrol yüzeyleri trapezoidal kontrol yüzeylerine benzer fakat bunlardan farklı olarak bunlar komşu yüzeylerle akış doğrultusunda örtüşürler. Bu tip elemanlar daha sonra göreceğimiz gibi, küt hücum kenarı gibi önemli uygulamalarda yeterli tamlığı sağlarlar.



Şekil 3-3 Bitrapezoidal kontrol yüzeyi

Bu kontrol alanları ile yapılan uzaysal ayrıklaştırmanın tutarlı olup olmadığının ve denklemlerin analitik çözümlerine hangi mertebeden yaklaştığının belirlenebilmesi için tutarlılık analizi yapılması gerekir.

3.2 Tutarlılık Analizi

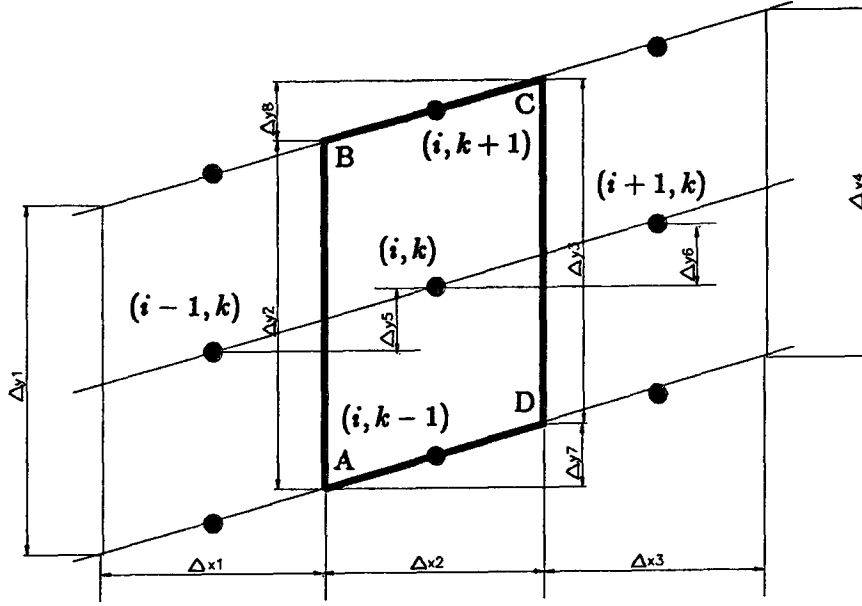
Kontrol yüzeyleri Sonlu Alanlar yönteminin temelini oluşturur. Oluşturulan ağ ile örtülmüş akış alanı, bu ağın gözlerinden bir veya birkaç tanesinin birleşiminden meydana gelen kontrol yüzeyleri ile ayrıklaştırılır. Akışı yönlendiren korunum denklemleri bu kontrol yüzeyi üzerine uygulanır ve bu yüzey üzerindeki belirli yerlerde bulunan ve düğüm noktası olarak adlandırılan ayrık noktalarda akış bilinmeyenleri hesaplanır.

Korunum denklemleri sonsuz küçük kontrol yüzeyi için geçerlidir. Ancak ayrıklaştırma sonlu alan üzerinde yapılmaktadır. Bu nedenle seçilen geometrinin ve düğümlerin alan üzerindeki yerlerinin önemi vardır. Bu seçimlerle ve sonlu uzunluklar kullanılarak çözüm yapıldığında elde edilen sonuçların, sonsuz küçük uzunluklar için yazılmış korunum denklemleri ile yapılan çözüme hangi mertebeye yakın olduğu tutarlılık analizi yapılarak anlaşılır. Bu analizle uzaysal ayrıklaştırmanın hangi mertebeden hassas olduğu belirlenir.

Aşağıda örnek olarak trapezoidal kontrol yüzeyi için yapılmış bir tutarlılık analizi verilmiştir.

- Trapezoidal Kontrol Yüzeyi İçin Tutarlılık Analizi

Denton tarafından kullanılmış olan trapezoidal kontrol yüzeyleri iki ağ gözünden oluşmaktadır ve akışa dik yönde birbirleri ile örtüşmektedirler. Kullanılacak geometrik parametreler Şekil (3-4) de görülmektedir.



Şekil 3-4 Trapezoidal kontrol yüzeyi

Burada $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$, ve Δy_4 mutlak değerler, $\Delta y_5, \Delta y_6, \Delta y_7, \Delta y_8$ cebrik değerlerdir ve şekilde pozitif tanımlanmışlardır. (i, k) düğümündeki bilinmeyenler, bu düğümü çevreleyen $(i, k+1), (i+1, k), (i, k-1)$ ve $(i-1, k)$ düğümlerindeki değerlere bağlı olarak hesaplanır.

Bu kontrol yüzeyinin aşağıda görülen daimi hal için yazılmış 2-boyutlu Euler denklemleriyle tutarlılığı incelenecektir.

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{\sigma})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{\sigma})}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

İşaret uyulaşımı olarak, kontrol yüzeyine giren akılar negatif, çıkanlar pozitif

alınacaktır. Şimdi bu uylarıma göre yüzeye giren ve çıkan akılar hesaplanırsa :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\vec{f}_{i-1,k} + \vec{f}_{i,k})\Delta y_2 && \text{AB kenarı} \\
& -\vec{f}_{i,k+1}(\Delta y_3 - \Delta y_2 + \Delta y_7) + \vec{g}_{i,k+1}\Delta x_2 && \text{BC kenarı} \\
& +\frac{1}{2}(\vec{f}_{i,k} + \vec{f}_{i+1,k})\Delta y_3 && \text{CD kenarı} \\
& +\vec{f}_{i,k-1}\Delta y_7 - \vec{g}_{i,k-1}\Delta x_2 && \text{DA kenarı} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ek A de verilen Taylor açılımları bu denkleme yerleştirilirse :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \left[\frac{1}{4}\Delta y_2(\Delta x_1 + \Delta x_2) + \frac{1}{4}\Delta y_3(\Delta x_2 + \Delta x_3) \right] + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \left(\frac{1}{2}\Delta x_2(\Delta y_2 + \Delta y_3) \right) \\
& + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \left(\frac{1}{4}\Delta y_2(2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{4}\Delta y_3(2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8) \right) \\
& + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} \left[\frac{1}{16}\Delta y_3(\Delta x_2 + \Delta x_3)^2 - \frac{1}{16}\Delta y_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 \right] \\
& + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{2}\Delta y_3\Delta y_6(\Delta x_2 + \Delta x_3) - \frac{1}{2}\Delta y_2\Delta y_5(\Delta x_1 + \Delta x_2) \right] \\
& + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} \left[-\frac{1}{4}(\Delta y_5^2\Delta y_2 - \Delta y_6^2\Delta y_3) + \frac{1}{32}(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2(\Delta y_2 - \Delta y_3) \right] \\
& + O(\Delta^4) = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Bu ifadeyi sadeleştirmek için oldukça katı bir şart olan

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 \tag{3.4}$$

kabul edilirse denklem

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right) \left[\frac{1}{2}\Delta x_2(\Delta y_2 + \Delta y_3) \right] \\
& + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \left[\frac{1}{4}\Delta y_2(2\Delta y_5 - \Delta y_7 - \Delta y_8) + \frac{1}{4}\Delta y_3(2\Delta y_6 - \Delta y_7 - \Delta y_8) \right] \\
& + [O(\Delta^3)\text{ikinci türev terimleri}] \\
& + O(\Delta^4) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

haline gelir. Eğer

$$\Delta y_5 = \Delta y_6 = \frac{1}{2}(\Delta y_7 + \Delta y_8) \tag{3.6}$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$$

veya

$$\begin{aligned}
 \Delta y_5 - \frac{1}{2}(\Delta y_7 + \Delta y_8) &= O(\Delta^2) \\
 \Delta y_6 - \frac{1}{2}(\Delta y_7 + \Delta y_8) &= O(\Delta^2) \\
 \Delta x_1 - \Delta x_2 &= O(\Delta^2) \\
 \Delta x_2 - \Delta x_3 &= O(\Delta^2)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

şartları uygulanırsa ve ilk terim (3.1) denklemini haline gelecek şekilde düzenlenirse görülecektir ki, yapılan ayrıklaştırma (3.1) denkleminin $O(\Delta)$ kadar sapmaktadır. Bu durumda bu tip yüzeylerle yapılan ayrıklaştırmanın (3.1) denklemine göre tutarlı ve 1.mertebeden hassas olduğu söylenebilir.

Burada belirtmek gerekir ki, cidarlar üzerindeki akıların hesaplanması sırasında alınan ortalamalar, mesela ağırlıklı ortalama şeklinde alınırsa, ayrıklaştırmanın tutarlılığı için konulan şartlarda değişiklikler olacaktır ve hatta hassaslık mertebesi de değişebilecektir. Fakat özel olarak bu tip yüzeylerde, böyle bir uygulama fazla bir değişiklik getirmemektedir.

BÖLÜM 4

ZAMANSAL AYRIKLAŞTIRMA

4.1. Giriş

Önceki bölümde korunumlu şekilde yazılmış Euler denklemlerinin uzaysal ayrıklaştırması, sonlu alanlar yöntemiyle gerçekleştirilmiştir. Bu yarı-ayrıklaştırma işlemi denklemlerde bulunan taşınım terimlerinin yani akıların ayrıklaştırılmasını kapsar.

Zaman adımlama yönteminin uygulanabilmesi için denklemde bulunan zamana göre türev içeren terimlerin de ayrıklaştırılması gerekir. Euler denklemlerinin korunumlu ifadesi Gauss teoremi yardımıyla

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} S = - \int_{\partial S} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) dl \quad (4.1)$$

haline getirildiğinde, zamana göre türev terimi olarak yalnızca eşitliğin solunda yer alan $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}$ terimi ile karşılaşılır. Bu terimin de ayrıklaştırılması ile Euler denklemlerinin ayrıklaştırılması tamamlanmış olur. Eşitliğin sağ tarafında yer alan integral $\vec{\sigma}$ nın ∂S eğrisi ile çevrelenmiş, alanı S olan kontrol yüzeyindeki $\vec{f}$ ve $\vec{g}$ akıları ile taşınımından doğan değişimini temsil eder. Buradan itibaren bu integralin ayrıklaştırılması ile ortaya çıkan terimler taşınım terimleri olarak adlandırılacaklardır.

Bu çalışmada Euler denklemlerinin zamana göre ayrıklaştırılması ilk, defa Couston [4] tarafından geliştirilen ve Lax metoduna periyodik bir düzeltme terimi eklenmesi şeklinde uygulanan, “Düzeltilmiş Viskozite Şeması” ile yapılmıştır. Lax şeması zamana göre türevin ileri farklar ile ayrıklaştırılması olan Euler şemasına bir uzaysal düzleştirme teriminin eklenmesiyle ortaya çıkar.

İzleyen paragraflarda 1-boyutlu hal için Euler şeması, Lax şeması ve Düzeltilmiş Viskozite şeması açıklanacak ve kullanılacak olan 2-boyutlu şema çıkarılacaktır.

4.2. Euler Şeması

Euler denklemlerinin korunumlu şekilde 1-boyutlu ifadesi

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{f}(\sigma)}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

ileri farklar ile ayrıklaştırılarak Euler şemasına ulaşılır.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k^{n+1} &= \bar{\sigma}_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\tilde{f}_{k+1}^n - \tilde{f}_{k-1}^n) \\ \bar{\sigma}_k^{n+1} &= \bar{\sigma}_k^n - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - \bar{\sigma}_{k-1}^n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bu ayrıklaştırma Roache [8] tarafından “Zamanda İleri, Uzayda Ortada (FTCS)” olarak da adlandırılmaktadır ve Von Neumann analizine göre koşulsuz kararsızdır[3]. Bu durumu inceleyebilmek için ayrıklaştırmaya kararlılık analizi uygulanması gerekir.

4.2.1 Kararlılık analizi

Ayrıklaştırılmış denklemler için uygulanan kararlılık analizlerinden en sık kullanılanı, 1944 de von Neumann tarafından Los Alamos'ta yapılan çalışmalara

dayanan von Neumann kararlılık analizidir. Bu analiz diferansiyel şekildeki denklemlerde uygulanan Fourier analizinin ayrık denklemlere uyarlanmış hali olarak düşünülebilir.

Ayrıklaştırılmış denklemin tam çözümü D , bilgisayarda elde edilen sonucu N ile gösterilirse, yuvarlamadan doğan hata

$$\varepsilon = D - N \quad (4.4)$$

Şeklinde gösterilebilir. Von Neumann analizi ile bu hatanın hesaplama süreci içerisinde büyüyüp büyümediği incelenir. Euler şemasında kullanılan denklemler lineer tipte oldukları için bu denklemlerin yuvarlama hatası ε için de geçerli olması gerekir.

$$\bar{\varepsilon}_k^{n+1} = \bar{\varepsilon}_k^n - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{\varepsilon}_{k+1}^n - \bar{\varepsilon}_{k-1}^n) \quad (4.5)$$

Zaman ve konuma bağlı hata vektörünün seriye açılmış ifadesinin bir terimi

$$\bar{\varepsilon}_k^n = \vec{V}^n e^{jm_x(k\Delta x)} \quad (4.6)$$

burada $\vec{V}^n$, n anında dalga numarası m_x olan bileşenin genlik vektörü, $j = \sqrt{-1}$ dir.

Faz açısı $\theta = m_x \Delta x$ şeklinde ifade edilirse

$$\bar{\varepsilon}_k^n = \vec{V}^n e^{jk\theta} \quad (4.7)$$

elde edilir. Bu ifade (4.5) de yerine konursa

$$\vec{V}^{n+1} e^{jk\theta} = \vec{V}^n e^{jk\theta} - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\vec{V}^n e^{j(k+1)\theta} - \vec{V}^n e^{j(k-1)\theta}) \quad (4.8)$$

eşitliğine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\vec{V}^{n+1} e^{jk\theta} = \left(I - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2} \right) \right) \vec{V}^n e^{jk\theta} \quad (4.9)$$

ve

$$\vec{V}^{n+1} = \underbrace{\left(I - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{\Delta x} j \sin \theta \right)}_{=g} \vec{V}^n \quad (4.10)$$

olduğu görülür ve yükseltme matrisi $\mathcal{G}$ belirlenmiş olur.

Hata ifadesinin genlik vektörü $\vec{V}^n$ nin zaman içerisinde büyümemesi yani, ayrıklaştırmanın kararlı olabilmesi için $\mathcal{G}$ nin özdeğerlerinin 1 den küçük olması gerekir. Bu özdeğerler belirlenirse

$$\begin{aligned} g_r &= 1 - ja_r \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta \\ |g|^2 &= 1 + |a_r|^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \theta > 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

olacaktır ve bu Euler şemasının hiç bir koşula bağlı olmaksızın kararsız olduğunu göstermektedir.

4.2. Lax Şeması

Euler şemasının kararsızlığı, (4.3) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terime bir uzaysal düzleştirme uygulanarak giderilebilir. Bu halde denklemler

$$\bar{\sigma}_k^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_k^{n+1} + \bar{\sigma}_k^{n-1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{f}_{k+1}^n - \bar{f}_{k-1}^n) \quad (4.12)$$

ve

$$\bar{\sigma}_k^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_k^{n+1} + \bar{\sigma}_k^{n-1}) - A \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - \bar{\sigma}_{k-1}^n) \quad (4.13)$$

olur.

Bu şekilde ayrıklaştırılmış denkleme von Neumann analizi uygulandığında, yükseltme matrisi olarak

$$\mathcal{G} = I \cos \theta - jA \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta \quad (4.14)$$

elde edilir. Özdeğerler ise

$$g_r = \cos \theta - ja_r \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta \quad (4.15)$$

şeklindedir.

$$|g|^2 = \cos^2 \theta + |a_r|^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \theta \leq 1 \quad (4.16)$$

şartının sağlanması CFL şartının sağlanmasına bağlıdır.[3]

4.4. Düzeltilmiş Viskozite Şeması

Lax Şeması ile elde edilmiş olan ayrıklaştırılmış denklem aşağıdaki şekilde düzenlenebilir :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k^{n+1} &= \bar{\sigma}_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{f}_{k+1}^n - \bar{f}_{k-1}^n) + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - 2\bar{\sigma}_k^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n) \\ \bar{\sigma}_k^{n+1} &= \bar{\sigma}_k^n - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - \bar{\sigma}_{k-1}^n) + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - 2\bar{\sigma}_k^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Lax şemasında görülen viskozite terimi, periyodik olarak düzeltilirse ikinci mertebeden hassas bir şemaya ulaşılır. Bu şema 1-boyutlu hal için şu şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k^{n+1} &= \bar{\sigma}_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{f}_{k+1}^n - \bar{f}_{k-1}^n) + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - 2\bar{\sigma}_k^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - 2\bar{\sigma}_k^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n) \\ \bar{\sigma}_k^{n+1} &= \bar{\sigma}_k^n - \mathcal{A} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - \bar{\sigma}_{k-1}^n) + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - 2\bar{\sigma}_k^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} (\bar{\sigma}_{k+1}^n - 2\bar{\sigma}_k^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Burada * ile işaretlenmiş olan terimler her Nv iterasyonda bir güncelleştirilirler. Bu şema ilk defa Mc Donald tarafından önerilmiştir ve literatürde sönümlleme yüzeyi yöntemi olarak da adlandırılmaktadır.

Bu şema tahmin edilebileceği gibi, Nv iterasyon boyunca Lax şemasının özelliklerini gösterir. Periyodik düzeltme yapıldıkça viskozite etkileri güçlenerek sonuçta ikinci mertebeden hassaslığa ulaşılır.

(4.16) eşitsizliğinde görülen α katsayısı, şokun doğru olarak yakalanabilmesi için gereken miktarda viskozitenin kaybedilmemesini sağlar. $\bar{\sigma}_k^{n+1} = \bar{\sigma}_k^n = \bar{\sigma}_k^*$ durumuna yakınsandıktan sonra, (4.16) denklemini aşağıda görülen daimi sistemin çözümüne yakınsar.

$$\mathcal{A} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} = (1 - \alpha) \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.19)$$

Bu ifade Lax şemasında elde edilen ifadeye benzemektedir. Eğer burada α , $(1 - \alpha) = O(\Delta x)$ olacak şekilde seçilirse şema ikinci mertebeden yakınsak hale gelir.

Viskozite etkilerinin şok civarında etkin olmasını sağlamak için pratik uygulamalarda α katsayısı yoğunluk gradyanının fonksiyonu olarak seçilebilir. Yani

$$\alpha = vc \left[1 - \frac{1}{2} |\rho_{k+1}^* - 2\rho_k^* + \rho_{k-1}^*| \right] \quad (4.20)$$

olur. Tahmin edilebileceği gibi burada görülen keyfi vc katsayısının değeri, beklenen şok şiddetine bağlı olarak seçilebilir.

Yapılan çalışmada bu şemayı daha kararlı hale getirebilecek şekilde bir yarı kapalılık özelliği eklenmiştir. Bu özellik 1-boyutlu hal için $\bar{\sigma}_{k-1}^{n+1}$ teriminden kaynaklanır. Bu terimler hesaplamalarda herhangi bir güçlük getirmezler. Çünkü $\bar{\sigma}_k^{n+1}$ hesaplanırken, hesaba giren $\bar{\sigma}_{k-1}^{n+1}$ terimi halihazırda hesaplanmıştır.

1- boyutlu hal için uygulanan ve incelenen ayrıklaştırma aynı şekilde 2 - boyutlu hal için de uygulanabilir. Bu durumda aynı yarı kapalılık özelliği sadece akış doğrultusunda uygulanırsa şu ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{i,k}^{n+1} &= \frac{\Delta t}{S} \Sigma(\text{taşınım terimleri}) \\ &+ \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_{i-1,k}^{n+1} + \bar{\sigma}_{i,k+1}^n + \bar{\sigma}_{i+1,k}^n + \bar{\sigma}_{i,k-1}^n) \\ &- \frac{\alpha}{4} (\bar{\sigma}_{i-1,k}^* + \bar{\sigma}_{i,k+1}^* + \bar{\sigma}_{i+1,k}^* + \bar{\sigma}_{i,k-1}^* - 4\bar{\sigma}_{i,k}^*) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Burada

$$\alpha = vc \left[1 - \frac{|\rho_{i-1,k}^* + \rho_{i+1,k}^* + \rho_{i,k-1}^* + \rho_{i,k+1}^* - 4\rho_{i,k}^*|}{4} \right]$$

dır.

4.4.1. Kararlılık Analizi

Düzeltilmiş viskozite şeması orijinal şekliyle ele alınırsa, 2-boyutlu akış hali için Euler denklemlerinin sanki-lineer şeklinin ayrıklaştırılması şu şekilde olur:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{i,k}^{n+1} = & -\mathcal{A} \frac{\Delta t}{2x} (\bar{\sigma}_{i+1,k}^n - \bar{\sigma}_{i-1,k}^n) - \mathcal{B} \frac{\Delta t}{2y} (\bar{\sigma}_{i,k+1}^n - \bar{\sigma}_{i,k-1}^n) \\ & + \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_{i-1,k}^n + \bar{\sigma}_{i,k+1}^n + \bar{\sigma}_{i+1,k}^n + \bar{\sigma}_{i,k-1}^n) \\ & - \frac{\alpha}{4} (\bar{\sigma}_{i-1,k}^* + \bar{\sigma}_{i,k+1}^* + \bar{\sigma}_{i+1,k}^* + \bar{\sigma}_{i,k-1}^* - 4\bar{\sigma}_{i,k}^*)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Burada * işaretli terimler her N_v iterasyonda bir güncelleştirilen ve N_v iterasyon boyunca sabit kabul edilen terimlerdir. Hata fonksiyonu daha öncekinden farklı olarak bu kez iki uzay koordinatına bağlıdır. Bu nedenle seri açılımının bir terimi

$$\bar{\epsilon}_{i,k}^n = \vec{V}^n e^{i j \theta} e^{k j \varphi} \quad (4.23)$$

şeklinde olacaktır. Burada faz açıları $\theta = m_x \Delta x, \varphi = m_y \Delta y$, m_x ve m_y sırasıyla x ve y yönündeki dalga numaraları, $\vec{V}^n$ zamana bağlı genlik vektörü ve $j = \sqrt{-1}$ dir. Bu hata ifadesi (4.22) de $\bar{\sigma}^n$ ve $\bar{\sigma}^*$ yerine yerleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\vec{V}^{n+1} = & \left[\frac{1}{2} I (\cos \theta + \cos \varphi) - \left(\mathcal{A} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta + \mathcal{B} \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin \varphi \right) \right] \vec{V}^n \\ & + \alpha \left(1 - \frac{\cos \theta + \cos \varphi}{2} \right) \vec{V}^*\end{aligned}\quad (4.24)$$

elde edilir. Bu ifadeden yükseltme matrisi $\mathcal{G}$ iki aşamada elde edilir. İlk önce * ile işaretlenmiş terimlerden oluşan yapay viskozite teriminin N_v iterasyon boyunca sabit olduğu gözönüne alınarak tek bir zaman adımı için yükseltme matrisi $\mathcal{H}$ hesaplanır. Daha sonra bu ifade kullanılarak N_v adım için geçerli yükseltme matrisi elde edilir.

İlk olarak tek bir adım yükseltme ifadesi olarak

$$\vec{V}^{n+1} = \mathcal{H} \vec{V}^n \quad (4.25)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} I (\cos \theta + \cos \varphi) - \left(\mathcal{A} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta + \mathcal{B} \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin \varphi \right)$$

elde edilir. Yükseltme matrisi $\mathcal{H}$ nın özdeğerleri olarak

$$h_r = \frac{1}{2} (\cos \theta + \cos \varphi) - j \left(a_r \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta + b_r \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin \varphi \right) \quad (4.26)$$

bulunur. N_v adım için genliğin yükseltme ifadesi ise

$$\vec{V}^{n+N_v} = \mathcal{G} \vec{V}^n \quad (4.27)$$

dir. Buradan yükseltme matrisi

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}^{N_v} - (\mathcal{H} - I)^{-1} (\mathcal{B}^{N_v} - I) \alpha \left(1 - \frac{\cos \theta + \cos \varphi}{2} \right) \quad (4.28)$$

olarak elde edilir. Bu matrisin özdeğerleri

$$g_r = h_r^{N_v} - \frac{h_r^{N_v} - 1}{h_r - 1} \alpha \left(1 - \frac{\cos \theta + \cos \varphi}{2} \right) \quad (4.29)$$

dir. θ ve φ ye hiç bir sınırlama getirilmezse

$$|g_r| \leq 1 \quad (4.30)$$

şartının sağlanamayacağı kolayca ispatlanabilir. Arts ve Hove çalışmalarında Couston ve Lechthaus tarafından yapılan incelemelere dayanarak yükseltme matrisi ve ayrıklaştırmanın kararlılığı için şu sonuca varmışlardır: ayrıklaştırılmış bir alan incelendiğinde dalga boylarının spektrumunda ayrık olacağından hatanın Fourier serilerine açılmasında sadece dalga boyu Δx in tam katları olan terimler kullanılacaktır. Bu şekilde $X/N_v < 1$ durumunda CFL şartı sağlanırsa şema kararlı olacaktır.[3]

4.5. Courant–Friedrichs–Lewy Kararlılık Kriteri

Açık tipte bir ayrıklaştırma şemasının kararlılığında CFL şartı gerek şarttır. CFL şartı, bir düğümün etkilerinin fiziksel olarak yayılabileceği alanın, aynı düğümün sayısal olarak etkilediği alanın içerisinde olması gerektiğini belirtir.

Hiperbolik karakterde bir denklemle tanımlanmış akış alanında akış bilgilerinin karakteristikler boyunca yayıldığı belirtilmişti. Euler denklemlerinin karakteristik doğrularının eğimi içinde en büyük eğim

$$\lambda = \left(\frac{dx}{dt} \right) = u + a \quad (4.31)$$

veya iki boyutlu hal için

$$\lambda = \left(\frac{ds}{dt} \right) = \sqrt{u^2 + v^2} + a \quad (4.32)$$

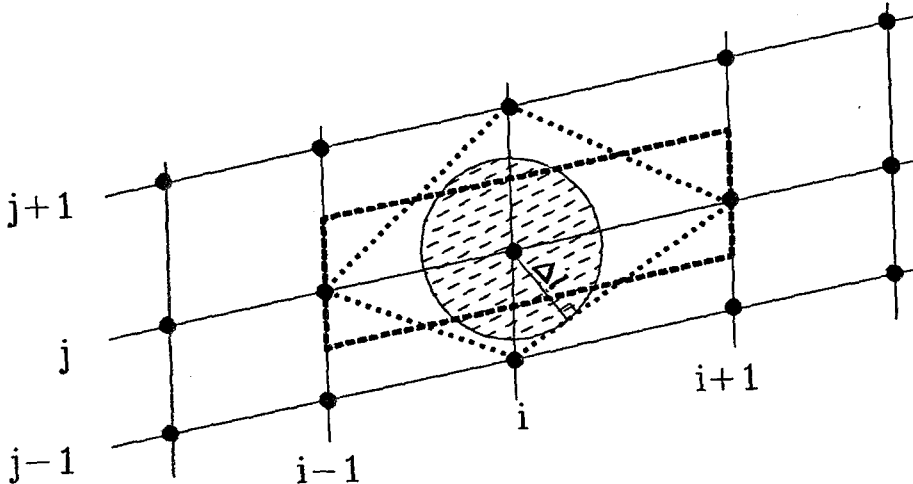
olarak belirlenir.

CFL şartının sağlanması için herhangi bir düğümden yayılan bilginin bir Δt adımı içerisinde, bu düğümün sayısal olarak etkilediği alanın dışına çıkmaması gerekir. Bu sınırın düğüme olan uzaklığı Δl ile gösterilirse CFL şartı

$$(V + a) \frac{\Delta t}{\Delta l} \leq 1 \quad (4.33)$$

olarak ifade edilebilir.

Şekil 4-1 de (i,k) düğümünün sayısal olarak etkilediği alan ve CFL şartının gerçekleşmesi için fiziksel olarak etkilemesine izin verilebilecek en büyük uzaklıklar gösterilmektedir.



Şekil 4-1 Bitrapezoidal Kontrol yüzeyi için CFL Şartı

BÖLÜM 5

BAŞLANGIÇ VE SINIR ŞARTLARI

Matematiksel olarak tam tanımlı bir problem, yani çözümü tek olan, başlangıç ve sınır şartlarına sürekli bağlı olan bir problem oluşturulabilmesi için, hesap yapılan alanın sınırlarındaki şartların uygun olarak probleme katılması gerekir. Bu sınır şartlarının sayısı karakteristikler metodu kullanılarak belirlenir.

5.1. Sınır Şartları

Bir akış alanında, alanın herhangi bir noktasındaki bozuntular karakteristikler boyunca akış alanının diğer bölgelerine yayılırlar. Bu, akışa ait bilgilerin karakteristikler üzerinde taşındığı anlamına gelir. Akış alanının sınırlarında verilen bilgiler akış alanının içine doğru yönelmiş karakteristikler boyunca ilerler. Alanın içerisinden gelen bilgiler de aynı şekilde dışarıya doğru yönelmiş karakteristikler üzerinde hareket ederler. Bu durumda uygulanması gereken sınır şartlarının sayısı akış alanına gönderilecek bilgilerin sayısına, yani akış alanının içine doğru yönelmiş karakteristiklerin sayısına eşittir. Bu sayı giriş ve çıkış kesitlerinde farklıdır. Bunların belirlenmesi ile giriş-çıkış şartlarının sayısı belirlenmiş olur.

Giriş ve çıkış kesitlerinde akım üniform olduğu, yani akış değişkenlerinde akıma dik doğrultuda herhangi bir değişim olmadığı için buralarda uygulanacak şartların sayısı belirlenirken 1-boyutlu akış denklemleri kullanılabilir.

1-boyutlu Euler denklemlerinin sanki-lineer şekli şudur:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x} = 0$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{T}{\rho} & u & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)T & 0 & u \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

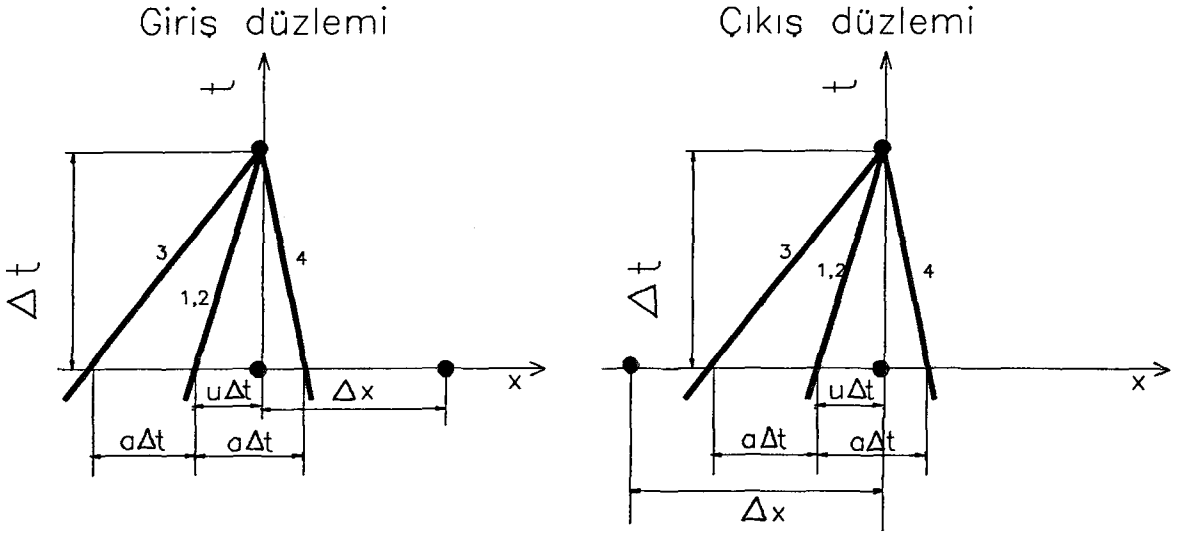
$\mathcal{A}$ matrisinin özdeğerleri hesaplanırsa

$$\lambda_1 = \lambda_2 = u \quad \lambda_3 = u + a \quad \lambda_4 = u - a \quad (5.2)$$

elde edilir. Buradan karakteristiklerin eğimleri için

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{1,2} = u \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_3 = u + a \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_4 = u - a \quad (5.3)$$

bulunur[7]. Görülmektedir ki, bu tip bir akışta (subsonik, $u < a$), akışa ait bilgilerden üç tanesi akış yönünde bir tanesi de akışa ters yönde yayılmaktadır. Giriş ve çıkış kesitleri gözönüne alınırsa giriş kesitinden akış alanının içine doğru üç farklı bilgi taşındığı, bir bilginin ise akım alanından dışarı taşındığı görülür. Çıkış kesitinde ise üç farklı bilgi alanın dışına, bir bilgi de içeri doğru taşınır. Giriş ve çıkış kesitlerindeki karakteristik eğriler şematik olarak Şekil 5-1 de gösterilmektedir.



Şekil 5-1 : 1-Boyutlu Euler denklemleri için karakteristik doğrular (subsonik giriş hali)

Katı cisim cidarlarında ise tek bir sınır şartı uygulanmaktadır. Bu şart, cidara dik hızın olmamasıdır. Dolayısı ile cidara dik akılar da sıfıra eşittir ve bu cidarlar üzerinde bulunan noktalarda yapılan hesaplamalarda sadece statik basıncın momentum denkleminde katkısı olur.

5.2. Başlangıç Şartları

Zaman adımlama yönteminde başlangıç şartlarının yakınsanacak olan daimi halin büyük oranda bozuntuya uğramış hali olarak düşünüldüğü daha önce belirtilmişti. Bu aynı zamanda akış alanı içinde bulunan bozuntu dalgalarının zaman içerisinde çıkış kesitinden dışarıya atılması olarak da düşünülebilir.

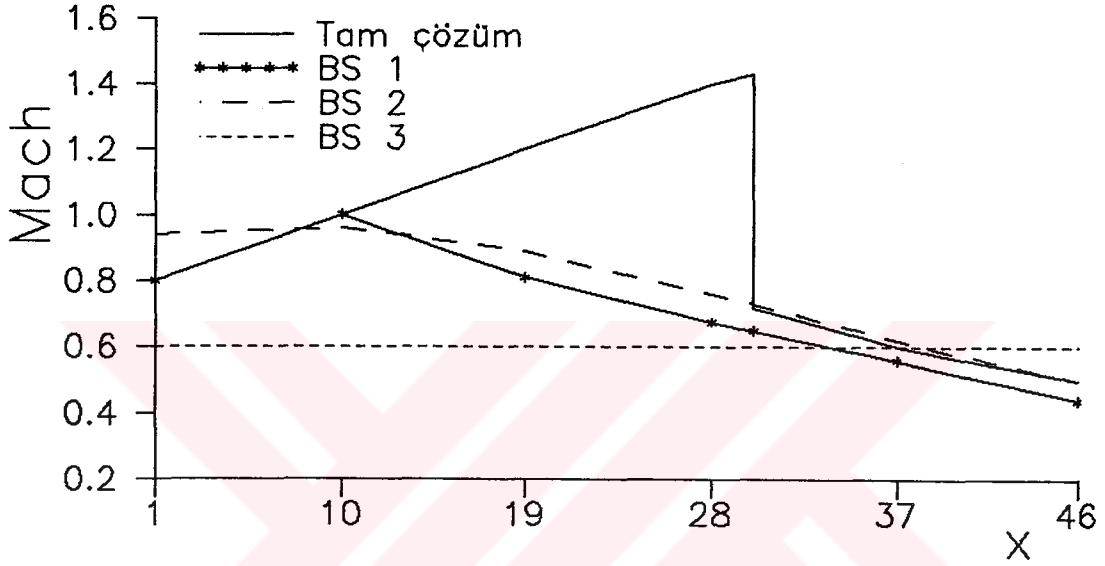
Bunlar gözönüne alındığında uygun, yani beklenen çözüme mümkün olduğunca yakın verilen başlangıç şartlarının yakınsama için gerekli iterasyon sayısını azaltacağı düşünülebilir. Fakat bu yolla iterasyon sayısında elde edilen azalma, başlangıç şartlarının çözüme yakınlığı ile doğru orantılı değildir.

Bunun nedeni şöyle açıklanabilir. Yakınsama işlemi, iki kısımda gerçekleşir. İlk kısımda büyük bozuntular elenir. Dolayısı ile bu kısmın tamamlanması için gereken iterasyon sayısı başlangıç şartlarına bağlıdır. İkinci kısım için gerekli olan iterasyon sayısı ise, disipatif (dağıtma) etkiler ile ters orantılıdır. Ancak bu disipatif etkiler hassaslığın yüksek olması için küçük seçilmelidir [3]. Bu kısım için gerekli iterasyon sayısı başlangıç şartlarından bağımsızdır.

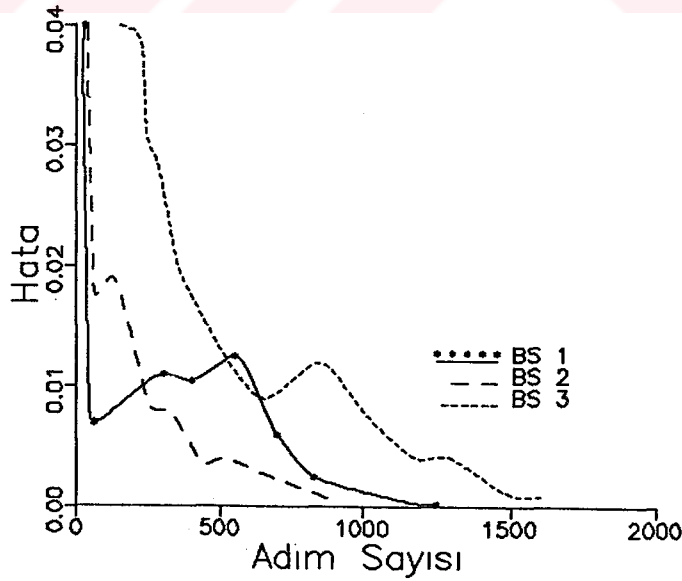
Şekil 5-3 de 1-boyutlu Euler denklemlerinin zaman adımlama yöntemi ile ayrıklaştırılmasıyla elde edilen şemanın kanal akışı problemine uygulanmasında, başlangıç şartlarının yakınsama hızını nasıl etkilediği görülmektedir. Şekilde üç farklı başlangıç şartı için yakınsama grafikleri görülmektedir.

Şekil 5-2 de görülen başlangıç şartlarından ilki (BS 1) boğaz kesitine kadar olan bölgede tam çözümle çakışmaktadır. İkinci şart (BS 2) ise subsonik giriş için izentropik bağıntılar kullanılarak parabolik bir basınç dağılımı için elde edilen bir çözümü temsil eder. (BS 3) ise sabit bir dağılımı göstermektedir. (BS 2) ile (BS 1) arasındaki en büyük fark (BS 1) in tam çözüme oldukça yakın olması ve hatta bazı bölgelerde çakışması, ama süreksiz bir dağılım göstermesi, (BS 2) nin ise çözüme çok yakın olmamamakla beraber sürekli bir dağılım göstermesidir.

Şekil 5-3 den görülebileceği gibi karmaşık ve çözüme oldukça yakın başlangıç şartlarının kullanılması ile iterasyon sayısında beliren azalma , bunların elde edilebilmesi için gereken hesap süresine değmemektedir. Başlangıç şartlarının seçiminde en önemli nokta, dağılımın sürekli olmasıdır.



Şekil 5-2 Değişik başlangıç şartları



Şekil 5-3 Değişik başlangıç şartları için elde edilen yakınsama hızları [3]

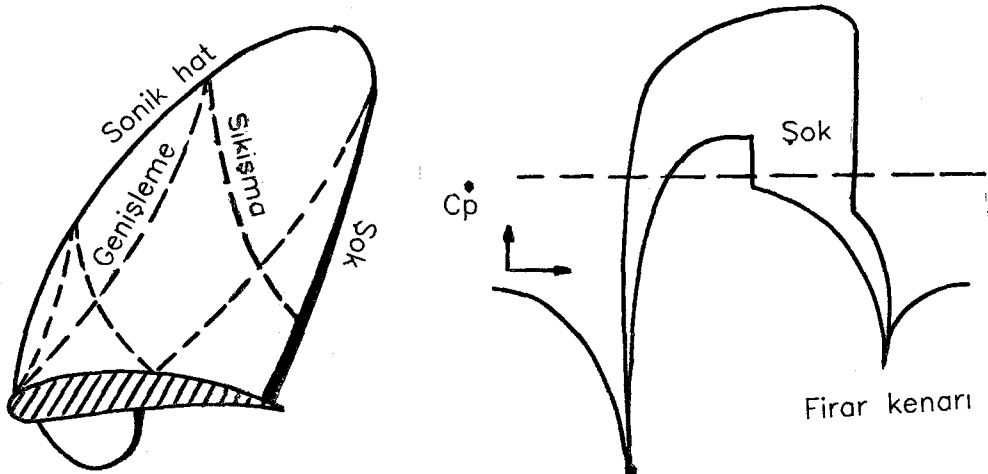
BÖLÜM 6

UYGULAMA VE SONUÇLAR

6.1. Profil Etrafında Transonik Akış Problemi

Transonik akış problemi ile birçok uygulamada karşılaşılır. Bu akış halinin en önemli özelliği sesaltı ve sesüstü hız bölgelerinin yanyana bulunabilmesidir. Bu özelliğe sahip üç farklı akış hali söz konusu olabilir. Bunlar $M_\infty < 1$, $M_\infty = 1$ ve $M_\infty > 1$ dir [10]. Bu çalışmada $M_\infty < 1$ durumu gözönüne alınacaktır.

Profil etrafındaki Transonik akışa ait tipik bir basınç dağılımı ve akış bölgeleri Şekil 6-1 de görülmektedir.[10]

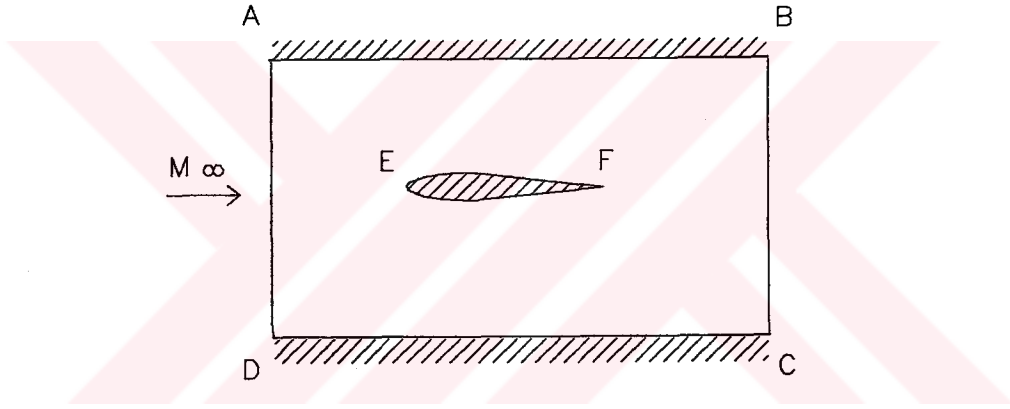


Şekil 6-1 : Profil etrafındaki transonik akışa ait akış bölgeleri ve basınç dağılımı

Burada şok, profil yüzeyinde yüzeye diktir. Ancak yüzeyden uzaklaştıkça eğikleşir ve sonik hatla birleşir.

6.2. Akışın Fiziksel Alanı

Problem bir dış akım problemi olarak düşünülmektedir. Akışın fiziksel alanı Şekil 6-2 de görülmektedir.



Şekil 6-2 : Akışın fiziksel alanı

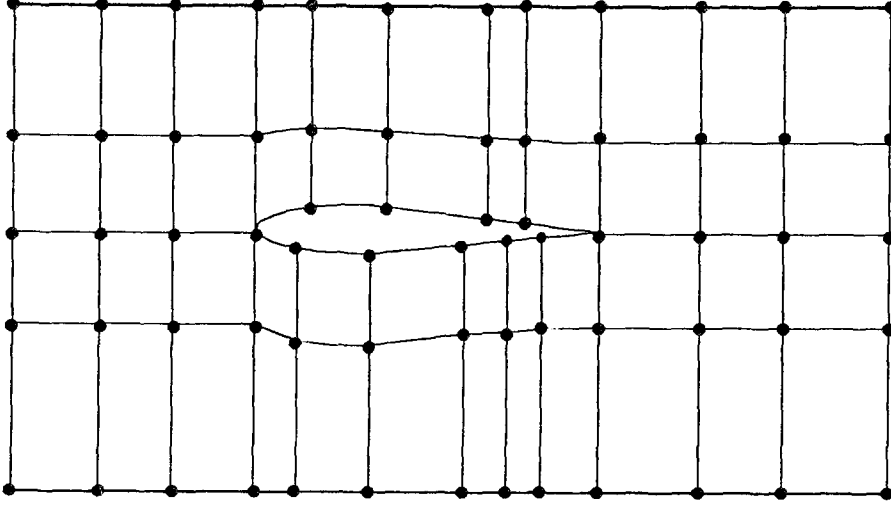
A-B ve C-D arası katı cisim çeperi olarak alınmıştır. Problemin dış akım problemi olarak düşünülebilmesi için bu çeperler boyunca akış özelliklerinde değişim olmaması veya çok küçük kalması gerekmektedir. Bu nedenle alt ve üst sınırlar profilden oldukça uzağa yerleştirilmiştir. Bunların profile olan uzaklıkları veterin 3-5 katı olarak seçilmiştir. Profil yüzeyinde ve çeperlerde yüzeye dik hızın olmaması şartı uygulanmıştır. Bu yüzeylerde herhangi bir taşınım yoktur. Yüzey üzerindeki noktalarda sadece statik basıncın momentum denklemlerine etkisi vardır. A-D giriş düzlemini, B-C ise çıkış düzlemini göstermektedir. Giriş ve çıkışta uygulanacak sınır şartı sayısının belirlenmesinde karmaşıklığın önlenmesi için bu kesitlerde akış uniform kabul edilmiştir. Bu, giriş kesitinde herhangi bir zorluk çıkarmamaktadır.

Ancak çıkış kesitinde bu şartın sağlanabilmesi için bu kesitin profilden oldukça uzakta olması gerekir. Bu amaçla F ile C-D kesiti arasındaki uzaklık veterin 3.5 ile 5 katı alınmıştır.

6.3. Akışın Sayısal Alanı

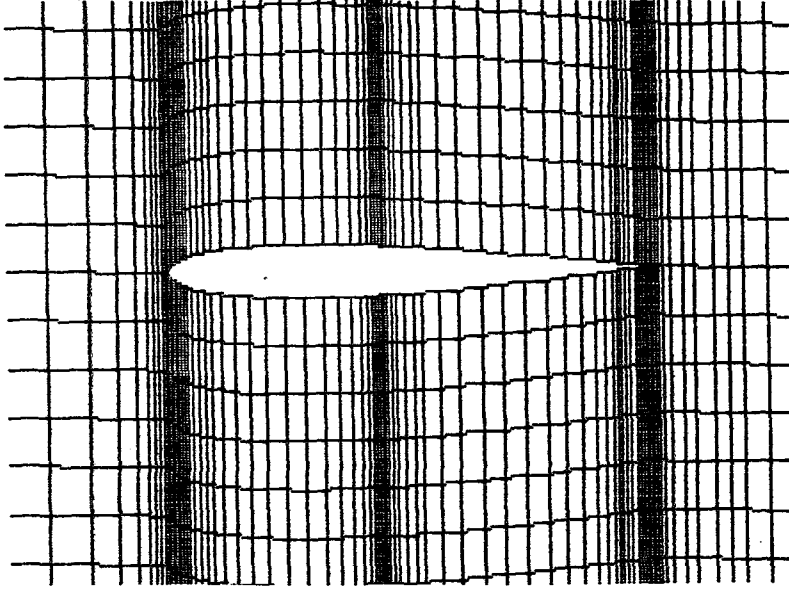
Akışın sayısal alanı şekil 6-3 de görülmektedir. Akış alanı akım doğrultusunda ve akıma dik doğrultuda çizgilerden oluşan bir ağ ile örtülmüştür. Akış değişkenlerinin hesaplandığı düğümler bu çizgilerin kesişim noktalarında yer almaktadırlar. Çizgilerin, dolayısıyla düğümlerin sıklığı, akış değişkenlerinde büyük değişimlerin beklendiği bölgelerde arttırılmıştır. Bu bölgelerden biri profil yüzeyi civarındaki bölgedir. Bu bölgede akış doğrultusundaki çizgiler sık ve eşit aralıklı olarak yerleştirilmiştir. Buradan alt ve üst yüzeylere doğru ilerledikçe çizgiler arasındaki uzaklık arttırılır. Bu artış, ilerideki bölümlerde açıklanacak olan hassaslık mertebelerini bozmayacak şekilde seçilmelidir. Akış alanının alt ve üst sınırlarını profile yeterince uzak yerleştirmek için akışa dik doğrultuda çok sayıda düğüm gerekmektedir. Fakat ağ yukarıdaki gibi, profil yüzeyinden ayrıldıktan sonra esnetilirse, yani düğümlerin birbirlerine olan uzaklıkları arttırılırsa gereken düğüm sayısından ve dolayısıyla hesaplama zamanından kazanç sağlanmış olur.

Bu çalışmada akışa dik doğrultuda dizilmiş düğümler arasındaki uzaklıktaki artış oranı 1.1 olarak seçilmiştir. Fakat uygulama yapıldığında görülmüştür ki, profile yakın bölgede bu şekilde yapılan esnetme çözümün hassaslığını bozmaktadır. Bu nedenle bu bölgede sözkonusu aralıklar, ilk 5-10 düğüm noktası için sabit alınmıştır. Bu şekilde yapılan çözümlerde elde edilen sonuçlar tatmin edici olmuştur. Şekil 6-4 de profil civarındaki bir ağ yapısı görülmektedir.



Şekil 6-3 : Akışın sayısal alanı

Akım doğrultusunda yer alan düğümler arasındaki uzaklıklar da düğümün bulunduğu bölgeye göre değişmektedir. Hücum kenarı, şok, firar kenarı gibi, akışta büyük değişikliklerin beklendiği bölgelerde bu aralık küçük alınmakta, hücum kenarından giriş kesitine ve firar kenarından çıkış kesitine doğru giderek artmaktadır. Akışa paralel doğrultudaki aralıkların oranı profil üzerinde 1.05–1.2 , diğer yerlerde 1.3 olarak alınmıştır. Böylece uzaysal ayrıklaştırmada öngörülen hassaslık şartlarına, özellikle profil üzerindeki bölgede bağlı kalmış olur. Akış alanının uzaysal ayrıklaştırması bitrapezoidal kontrol yüzeyleri ile yapılacaktır.

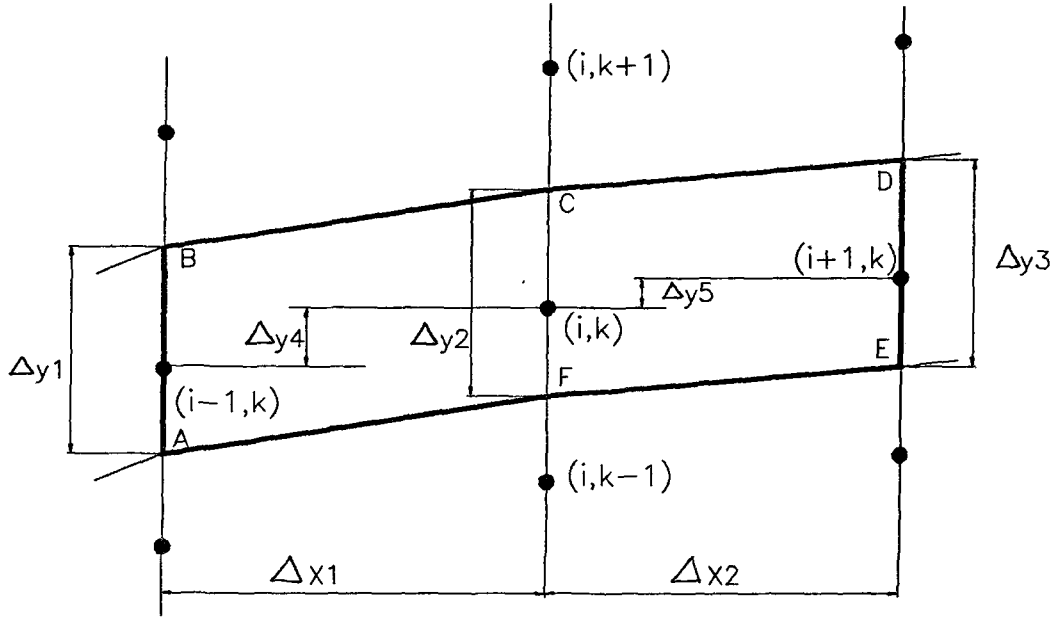


Şekil 6-4 : Profil civarındaki ağ yapısı

6.3.1. Bitrapezoidal Kontrol Yüzeyi

Hesap zamanından kazanç sağlamak açısından iki doğrultuda örtüşen kontrol yüzeyleri yerine tek doğrultuda örtüşen kontrol yüzeylerinin seçimi uygun görülmektedir. Bu tip bitrapezoidal kontrol yüzeyleri komşu yüzeylerle akış doğrultusunda örtüşürler. Şekil 6-5 de bu tip kontrol hacmi ve uyumluluk kontrolü yapabilmek için gerekli geometrik parametreler görülmektedir. (i,k) düğümündeki bilinmeyenler bunu çevreleyen $(i,k-1)$, $(i,k+1)$, $(i-1,k)$, $(i+1,k)$ düğümlerindeki değerler kullanılarak hesaplanır. Kontrol yüzeyi sınırındaki taşınımların hesaplanması Bölüm (4.4) de açıklanmaktadır.

Bu tip kontrol yüzeyi kullanılarak yapılan ayrıklaştırmanın sağladığı hassalık mertebesinin hesaplanması yani tutarlılık analizinin (consistency analysis) uygulanması için çözülecek denklem takımının daimi şekli kullanılır.



Şekil 6-5 : Bitrapezoidal kontrol yüzeyi ve tutarlılık analizinde gerekli parametreler

(3.1) denklemini sağlanması her elemana giren akıların toplamının sıfır olması demektir. Her kenar için bunun ifadesi

$$\begin{aligned}
 & -(\vec{f}_{i-1,k}\Delta y_1) && \text{AB kenarı} \\
 & -\frac{1}{2}(\vec{f}_{i,k} + \vec{f}_{i,k+1})\left(\frac{\Delta y_3}{2} + \Delta y_5 - \frac{\Delta y_1}{2} + \Delta y_4\right) \\
 & +\frac{1}{2}(\vec{g}_{i,k} + \vec{g}_{i,k+1})(\Delta x_1 + \Delta x_2) && \text{BCD kenarı} \\
 & +\vec{f}_{i+1,k}\Delta y_3 && \text{DE kenarı} \\
 & +\frac{1}{2}(\vec{f}_{i,k} + \vec{f}_{i,k-1})\left(\frac{\Delta y_1}{2} + \Delta y_4 - \frac{\Delta y_3}{2} + \Delta y_5\right) \\
 & -\frac{1}{2}(\vec{g}_{i,k} + \vec{g}_{i,k-1})(\Delta x_1 + \Delta x_2) && \text{EFA kenarı} \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Buradaki türevler yerine Ek B deki (i,k) noktasındaki Taylor açılımları kullanılarak

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(\Delta y_3\Delta x_2 + \Delta x_1\Delta y_1) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y}[(\Delta y_2(\Delta x_1 + \Delta x_2))] \\
 & + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}[(\Delta y_5(\Delta y_3 - \Delta y_2) - \Delta y_4(\Delta y_2 - \Delta y_1))] \\
 & + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2}(\Delta y_3\Delta x_2^2 - \Delta y_1\Delta x_1^2)\right] + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2}\left[\frac{1}{2}(\Delta y_3\Delta y_5^2 - \Delta y_1\Delta y_4^2)\right] \\
 & + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x\partial y}(\Delta y_2\Delta y_3\Delta y_5 - \Delta x_1\Delta y_1\Delta y_4) \\
 & + O(\Delta^4) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

elde edilir. Eğer

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 \quad (6.3)$$

şartı sağlanırsa (6.3) denklemi şu hale gelir :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right) + [\Delta y_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2)] \\ & + O(\Delta^3) [\text{ikinci türev terimleri}] + O(\Delta^4) = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Bu eşitlik Δx ve Δy nin sıfıra yaklaşması durumunda bitrapezoidal kontrol yüzeyi kullanılarak yapılan ayrıklaştırmanın şartlı olarak, (3.1) denklemiyle tutarlılık içinde olacağını belirtir. (6.4) denklemini şu şekilde yazarsak

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right) + \frac{O(\Delta^3)(\text{ikinci türevler})}{O(\Delta^2)} + O(\Delta^2) = 0 \quad (6.5)$$

görülür ki (3.1) denklemi ve birinci ve ikinci mertebeye türevleri içeren bu denklem (3.1) denkleminin birinci mertebeden yaklaşıktır . Ayrıca (6.3) şartını

$$\begin{aligned} \Delta y_1 - \Delta y_2 &= O(\Delta^2) \\ \Delta y_2 - \Delta y_3 &= O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

şeklinde uygulamamız ayrıklaştırmanın birinci mertebeden yaklaşık olmasını engellemez. (6.6) denklemindeki değişim miktarı ise küt hücum kenarı uygulamalarının dahi sağlanmasına yeterlidir.

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \Delta y_2 = \Delta y_3 \\ \Delta y_4 &= \Delta y_5 \\ \Delta x_1 &= \Delta x_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

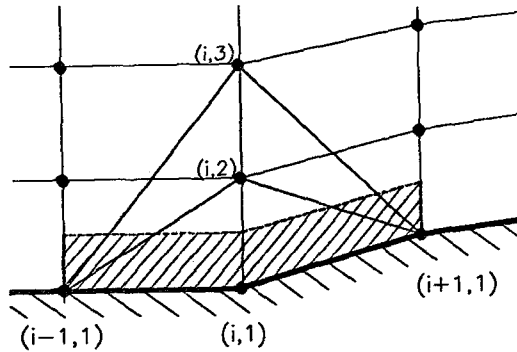
Bu ise elemanların uçları arasında hiç yükseklik farkı olmamasını ve akıma dik doğrultudaki hatlar arasındaki uzaklığın eşit olmasını gerektirir. Gene buradaki

değişimleri aşağıdaki sınırlar içerisinde tutarak ikinci mertebeden yaklaşıklığın korunması mümkün olur.

$$\begin{aligned}
 \Delta y_1 - \Delta y_2 &= O(\Delta^3) \\
 \Delta y_2 - \Delta y_3 &= O(\Delta^3) \\
 \Delta y_4 - \Delta y_5 &= O(\Delta^2) \\
 \Delta x_1 - \Delta x_2 &= O(\Delta^2)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.3.2. Sınır Şartları ve Yarım Elemanlar

Katı cisim çeprelerinde bulunan düğümlerde, çepere dik akıların sıfır olacağı ve bu düğümlerde sadece momentum denkleminde katkıda bulunan statik basınç teriminin bulunacağı bölüm 5.1 de belirtilmişti. Bu düğümlerde söz konusu sınır şartlarının uygulanabilmesi için yarım bitrapezoidal yüzeyler kullanılmıştır. Bu tip bir yüzey Şekil 6-6 da görülmektedir.



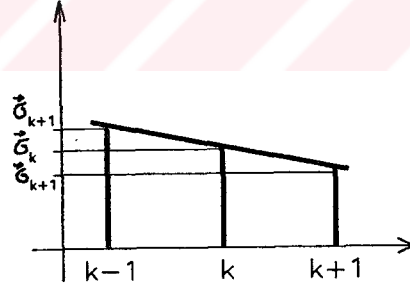
Şekil 6-6 Yarım bitrapezoidal kontrol yüzeyi

(i-1,k)-(i,k) ve (i,k)-(i+1,k) çepreleri boyunca kontrol yüzeyine giren ve çıkan

akılar sıfırdır. Bu çerperde sadece statik basınç terimi etkilidir. Bu terim hesaplanırken, $(i-1,k)$ ile $(i+1,k)$ arasındaki bölgede statik basıncın (i,k) düğümündeki değere eşit ve sabit dağılmış olduğu kabul edilmektedir.

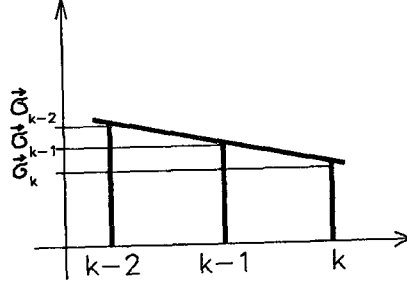
(i,k) düğümünde akış bilinmeyenleri hesaplanırken, zamansal ayrıklaştırma şemasının ifadesi, akış alanı içerisindekinden farklıdır. (i,k) düğümündeki bilinmeyenler $(i,k+2)$, $(i,k+1)$, $(i-1,k)$ ve $(i+1,k)$ düğümlerindeki değerler kullanılarak hesaplanır.

Şartsız kararsız olan Euler şemasının ifadesi olan (4.3) eşitliğinde sağ tarafın ilk terimi olan $\bar{\sigma}_k^n$ terimi yerine, Lax şemasında $\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{k+1}^n + \bar{\sigma}_{k-1}^n)$ terimi yerleştirilerek kararlı bir şema elde edildiği bölüm 4.2 de görüldü. Bu düzleştirme Şekil 6-7 de şematik olarak görülmektedir.



Şekil 6-7 : Lax şemasında uygulanan düzleştirmenin şematik gösterimi

Aynı şekilde çerperde bulunan bir düğüm için Şekil 6-8 deki düzleştirme yapılırsa



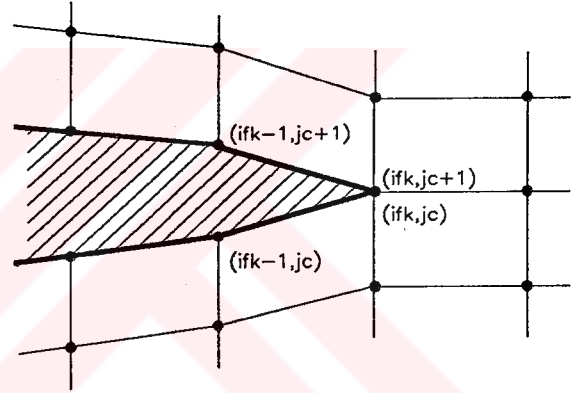
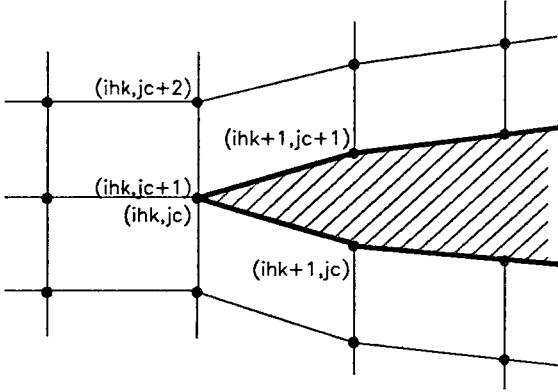
Şekil 6-8 : Sınır eleman için uygulanan düzeltirmenin şematik gösterimi

$\vec{\sigma}_k^n$ yerine $2\vec{\sigma}_{k-1}^n - \vec{\sigma}_{k-2}^n$ yazılabileceği görülür. Bu yolla Düzeltilmiş Viskozite şemasının çeper elemanları için yazılmış denklem

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{i,1}^{n+1} &= \frac{1}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,1}^{n+1} + \vec{\sigma}_{i+1,1}^n + 4\vec{\sigma}_{i,2}^n - 2\vec{\sigma}_{i,3}^n \right] \\ &- \frac{\alpha}{4} \left[\vec{\sigma}_{i-1,1}^* + \vec{\sigma}_{i+1,1}^* + \vec{\sigma}_{i,2}^* - 2\vec{\sigma}_{i,3}^* - 4\vec{\sigma}_{i,1}^* \right] \\ &+ \frac{\Delta t}{s} \Sigma (\text{ taşıma terimleri }) \end{aligned} \quad (6.9)$$

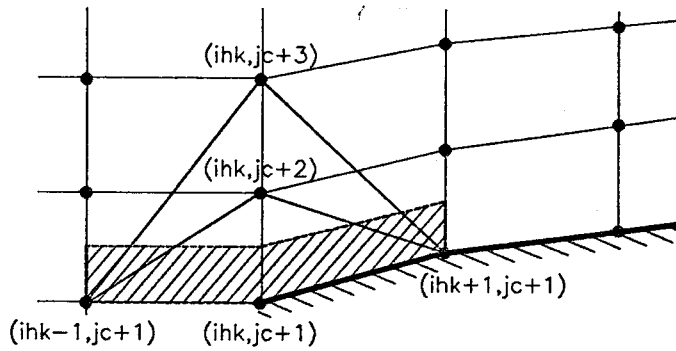
Şeklini alır. Bu denklemde periyodik düzeltme teriminin de aynı prensiple değiştirildiği görülür. Aynı işlem $k = km$ alınarak üst çeper elemanları için de uygulanır.

Çeper elemanlarından hücum kenarı ve firar kenarına rastlayanlar çeper hattına denk gelen sınırlardaki akıların hesaplanması açısından farklılık gösterirler. Şekil 6-9 da hücum kenarı ve firar kenarına rastlayan ağ görülmektedir.



Şekil 6-9 : Hücüm ve Firar kenarı civarındaki yarım elemanlar

Bu elemanlardan biri Şekil 6-10 da görülmektedir.



Şekil 6-10: Hücüm kenarındaki bir yarım kontrol yüzeyi

Burada B-C arasında katı cisim çeperlerine uygulanan şartlar uygulanmaktadır. A-B arasında ise taşınımın izin verilmekte ve buradaki taşınımın değeri hat boyunca sabit olmak üzere A ve B noktalarındaki akış değişkenlerinin ortalaması kullanılarak hesaplanmaktadır.

Şekil 6-9 da dikkat çeken bir nokta da, hücum kenarına denk gelen düğümün iki kez numaralandırılmış olmasıdır. Bunun nedeni sözkonusu düğümlerin yarım elemanlarla hesaplanması zorunluluğudur. Bu düğümlerdeki değerler, bir iterasyon süreci sırasında profilin alt ve üst yüzeyleri için iki kez hesaplanırlar. Aynı konumda olan, fakat farklı şekilde hesaplanan bu iki düğüm noktasındaki değerler arasında tutarlılık sağlanabilmesi için her iki noktadaki değerlerin ortalama alınarak eşitlenmesi gerekir. Eğer bu yapılmazsa, özellikle simetrik olmayan profillerin, firar kenarında, alt ve üst yüzeyden gelen bilgilerin çok farklı olması nedeniyle çözümde kararsızlıkla karşılaşmaktadır.

Giriş ve çıkış kesitlerinde uygulanması gereken sınır şartlarının sayısı Bölüm 5.1.1 de yapılan incelemeyle belirlenmişti. Buna göre subsonik giriş hızları için, giriş kesitinde üç, çıkış kesitinde de bir sınır şartı uygulanması gerekmektedir. Uygulanacak sınır şartları Essers tarafından yapılan teorik incelemeye bağlı olarak, sönümleme etkileri gözönüne alınarak seçilmiştir. Buna göre giriş kesitinde, toplam basınç, toplam sıcaklık ve giriş hücum açısı, çıkış kesitinde ise statik basınç, sınır şartı olarak uygulanmıştır. Tüm bu şartlar akıma dik doğrultuda uniform olarak alınmıştır. Ayırıklaştırılmış şemaya bu şartların uygulanması için bu bölgelerde de yarım bi-trapezoidal kontrol yüzeyleri kullanılmıştır.

6.4. NACA 0012 Profil üzerinde uygulama

Önceki bölümlerde anlatılan yöntem ve seçimlere bağlı kalınarak hazırlanan bilgisayar programı kalibrasyon amacıyla NACA 0012 profil üzerinde $M=0.80$ hızı ve 0.00° ve 1.25° hücum açıları için uygulanmıştır.

Şekil 6-11 den Şekil 6-15 e kadar değişik program parametreleri ve ağ yapıları kullanılarak bulunmuş sonuçlar görülmektedir.

Şok kalınlığının doğru olarak belirlenebilmesi için, şok beklenen bölgelerde ağın sıklaştırılması gerekmektedir. Kullanılan ağın sıklığı ile, bulunan şok kalınlığı arasındaki ilişki en belirgin olarak Şekil 6-11-e,f ve Şekil 6-13-e,f karşılaştırıldığında görülmektedir.

Ancak ağın sadece akım doğrultusunda sıkıştırılması kontrol yüzeylerinin akıma dik doğrultudaki uzunluğu ile akım doğrultusundaki uzunluğu arasındaki oranı büyütmemektedir. Şokun bulunduğu bölgede bu şekilde çözüm yapılırsa şok şiddeti beklenenden yüksek çıkmaktadır. Bu durum Şekil 6-11-f ile Şekil 6-13-f deki sonuçlar karşılaştırılarak görülebilir. Bu farklılığın nedeni, akış bilgilerinin yüksek elemanlar kullanıldığında akıma dik doğrultuda yeterince taşınamamasıdır.

Bulunan şok kalınlığını etkileyen bir parametre de, yapay viskozite katsayısıdır. Yapay viskozite katsayısının etkisi Şekil 6-11-f ve Şekil 6-12-b de görülmektedir. Yapay viskozite katsayısı çözümün karalılığını da etkilemektedir. Şok ardında oluşan titreşimler yapay viskozite katsayısı uygun seçilmezse sönmelenemez ve kararsızlığa neden olurlar. Bu durum Şekil 6-14-c ve 6-14-d de görülmektedir. Seçilecek yapay viskozite katsayısı $(1 - O(\Delta))$ ile orantılıdır. Buna dayanarak büyük değişimlerin

olduğu bölgelerde veterin %0.5 - 1 aralıklı ağ kullanıldığında, $\alpha = 0.96$ alınmasının en doğru çözümü verdiği uygulamayla belirlenmiştir.

Hücum açısı olarak 1.25° ve $M=0.80$ şartlarında çözüm yapıldığında emme yüzeyinde elde edilen basınç dağılımı diğer kaynaklardan elde edilen çözümlerle uyusmaktadır. Ancak basınç yüzeyinde şoktan hemen sonra büyük genlikli titreşimler oluşmaktadır.

Şekil 6-15-a,b,c,d de hücum açılı uygulamalarda kullanılan ağ görülmektedir. Ağ, üst ve alt yüzeylerde farklı bölgelerde yoğunlaştırılmıştır. Şekil 6-15-e de 3000 ve 4000 zaman adımı sonucunda elde edilen basınç dağılımları görülmektedir. Alt yüzeyde şok ardında görülen büyük genlikli titreşimler zaman adımlama süreci içerisinde yer değiştirmekte fakat zayıflamamaktadırlar.

Hesaplamalarda zaman adımı Δt , CFL şartı kullanılarak belirlenmiştir. Her adımda tüm noktalarda hızlar ve ses hızları hesaplanmış ve her yüzey için izin verilen en büyük zaman adımı bulunmuştur. Bu değerlerden en küçüğü tüm kontrol yüzeylerinde zaman adımı olarak uygulanmıştır.

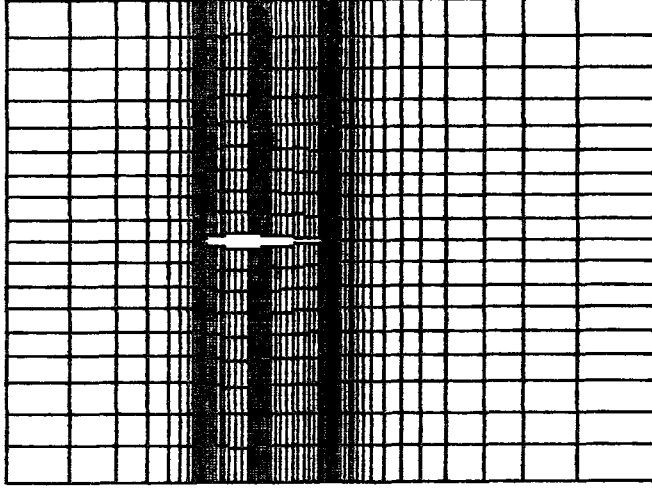
NACA 0012 profil için yapılan hesaplarda yapay viskozite terimlerinin gündeştirme sıklığı $N_v=20$ olarak alınmıştır.

6.5. NACA 6548 Profil üzerinde uygulama

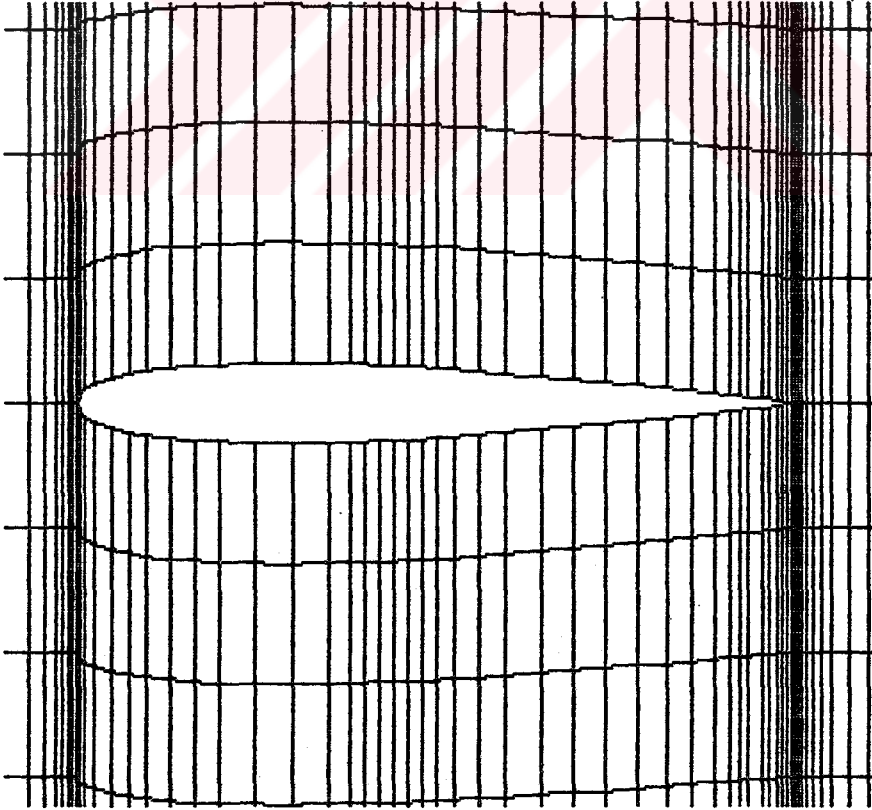
Modifiye edilmiş NACA 6548 profili Northrop F-5 uçaklarının kanatlarında kullanılmaktadır. Bu profile ait geometrik bilgiler üretici firma tarafından hazırlanan bir katalogda bulunan şekillerden çıkarılmıştır. Profil üzerindeki akış $M=0.95$ hızında manevra şartlarında hesaplanmıştır. Bu şartlar 12° slot ve 8° flap açısıdır.

Elde edilen sonuçların karşılaştırılabileceği herhangi bir kaynak bulunamamıştır. Ancak profil üzerindeki basınç dağılımı incelendiğinde taşıma merkezinin, sesüstü profillerde beklenildiği gibi veterin yaklaşık %50 sinde olduğu görülmektedir. Şekil 18 deki Eşmach eğrileri çözümün beklenen fiziksel olaylarla uyumlu olduğunu göstermektedir.

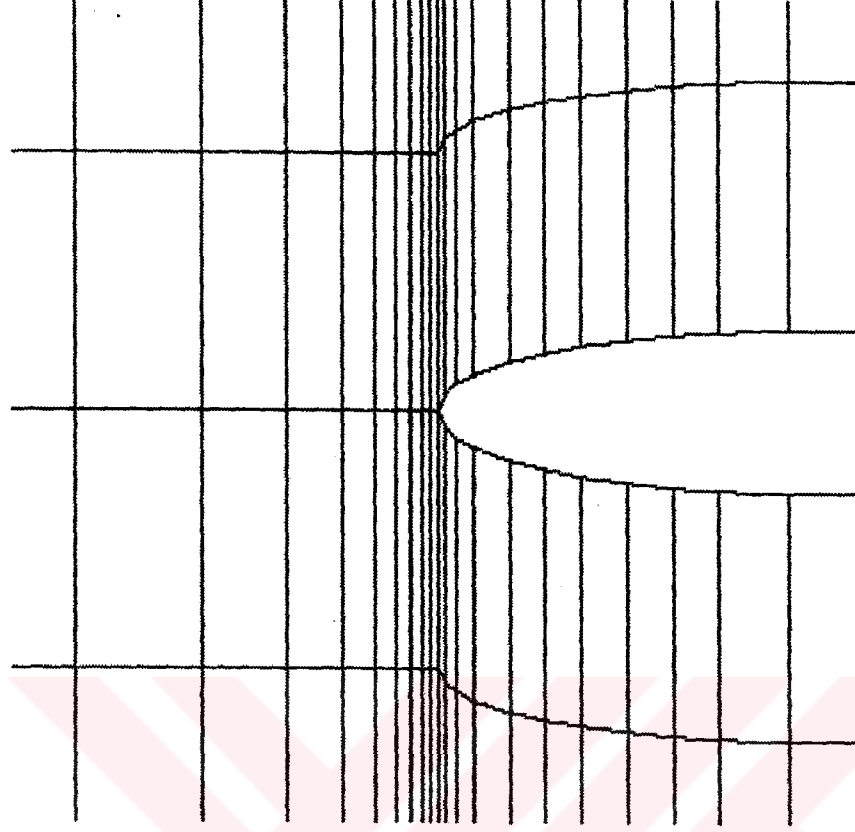
Profil yüzeyinde kullanılan kontrol elemanlarının yüksekliklerinin önemi daha önce açıklanmıştır. Bu nedenle bu profil üzerinde üç farklı ağ yapısı kurulmuş ve bunlar için çözüm yapılmıştır. Bu çözümler ve ağ yapıları Şekil 16,17,18 de görülmektedir.



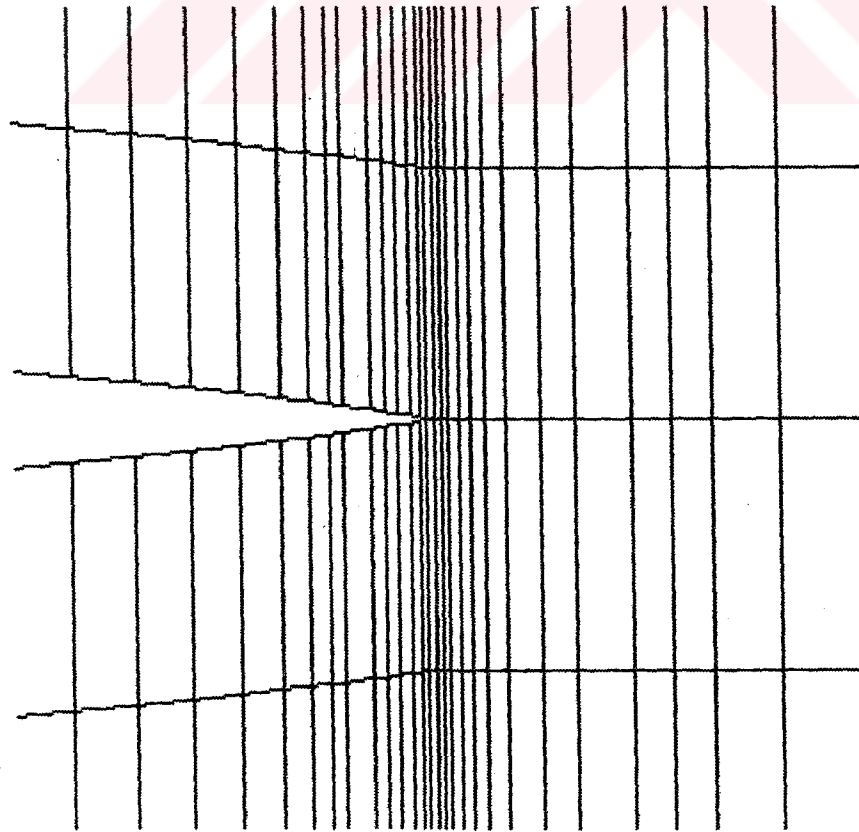
Şekil 6-11-a : NACA 0012 profil çevresinde oluşturulmuş 74 x 20 elemanlı ağ. Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



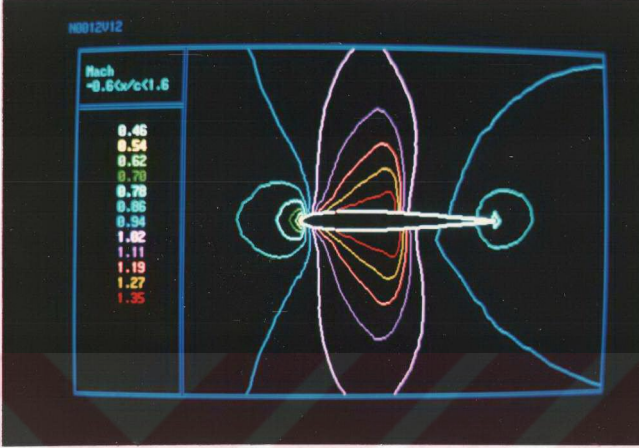
Şekil 6-11-b : Profil çevresinde ağ yapısı



Şekil 6-11-c : Hücum kenarı çevresi

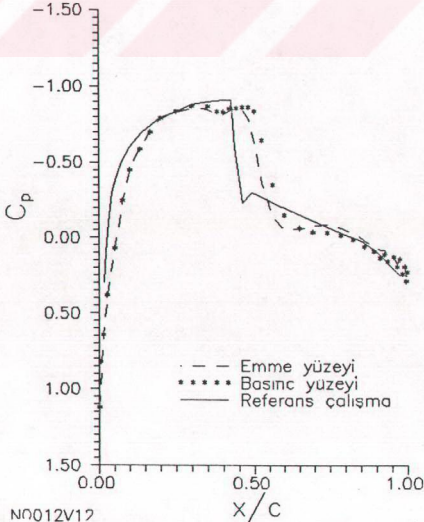


Şekil 6-11-d : Fırar kenarı çevresi

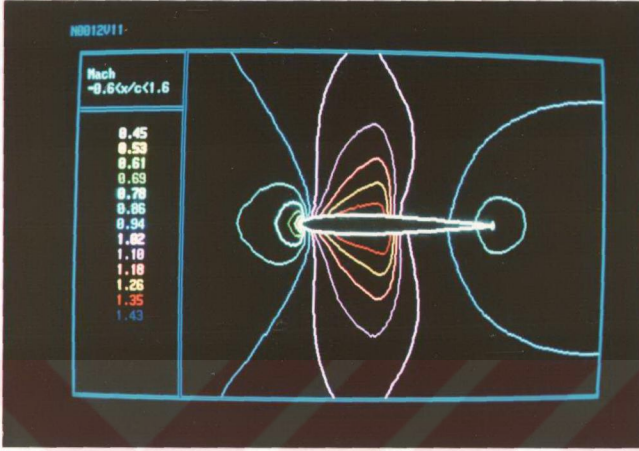


Şekil 6-11-e : NACA 0012 profil çevresinde 74 x 20 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.80$, 0.00° hücum açısı, $vc=0.98$, için elde edilen çözüme ait Eşmach eğrileri.

NACA 0012 Profil
(74 x 20) Ağ, 3000 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.98
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00

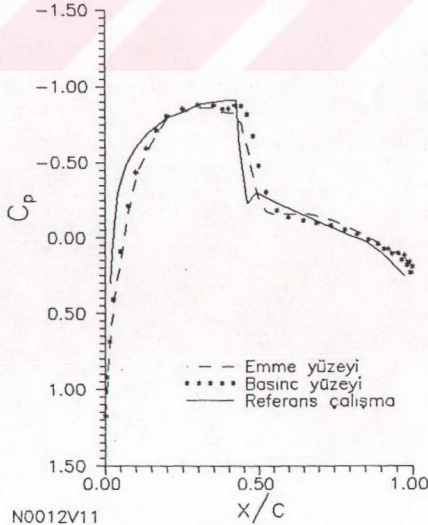


Şekil 6-11-f : Aynı çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı. Referans çalışma [11]

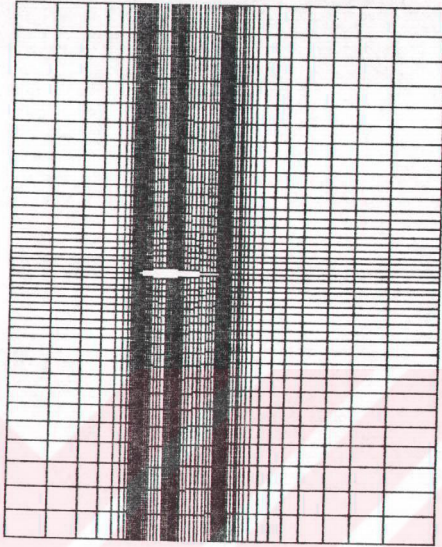


Şekil 6-12-a : NACA 0012 profil çevresinde 74 x 20 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.50$, 0.00° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait Eşmach eğrileri.

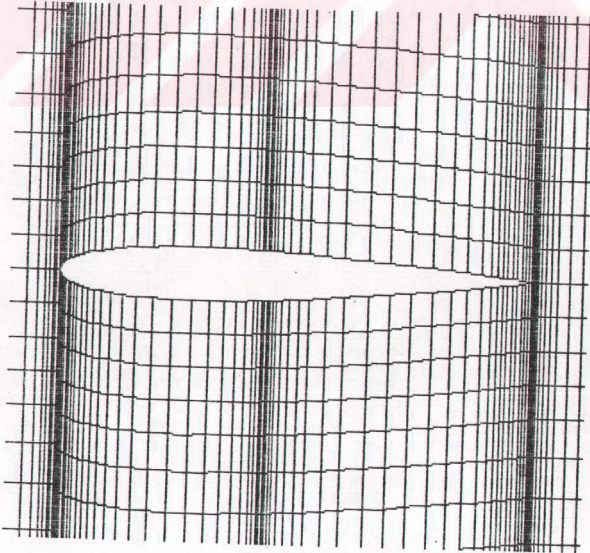
NACA 0012 Profil
(74 x 20) Ağ, 3000 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



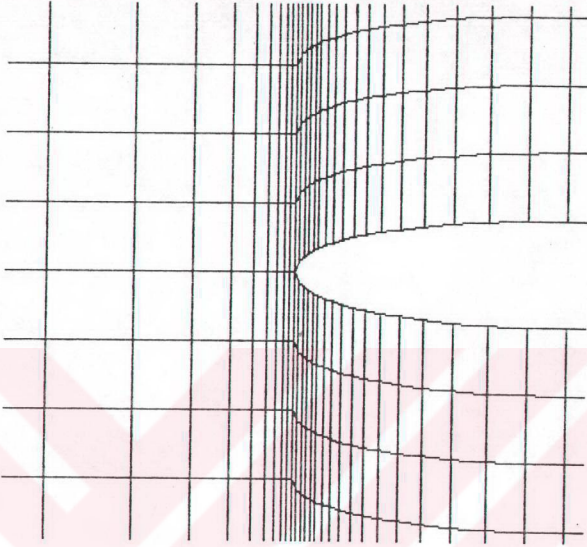
Şekil 6-12-b : Aynı çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı. Referans çalışma [11]



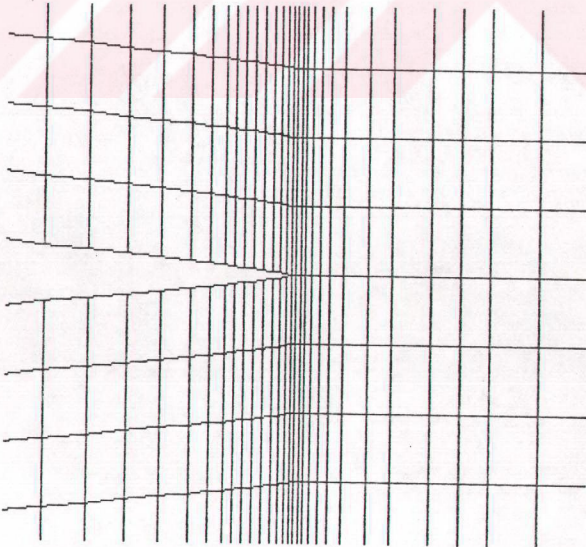
Şekil 6-13-a : NACA 0012 profil çevresinde oluşturulmuş 87 x 40 elemanlı ağı. Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



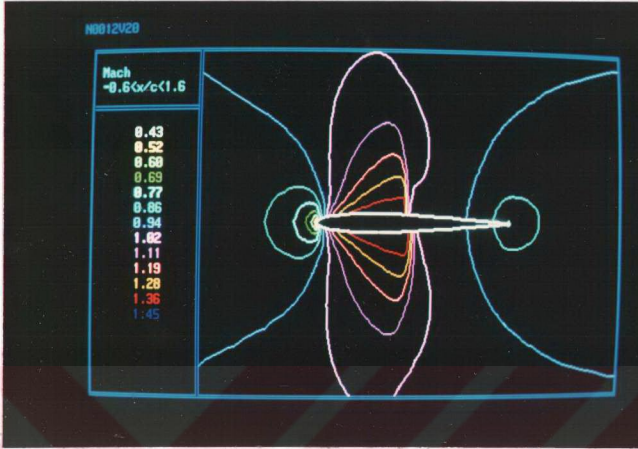
Şekil 6-13-b : Profil çevresinde ağı yapısı



Şekil 6-13-c : Hücüm kenarı çevresi

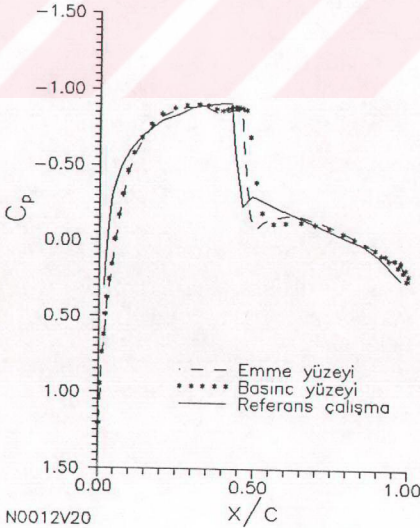


Şekil 6-13-d : Fırar kenarı çevresi

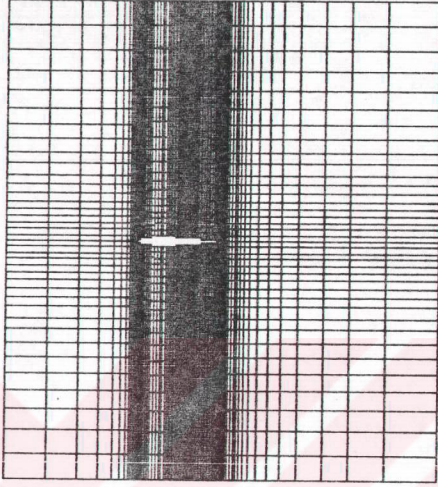


Şekil 6-13-e : NACA 0012 profil çevresinde 87 x 40 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.80$ 0.00° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait Eşmach eğrileri.

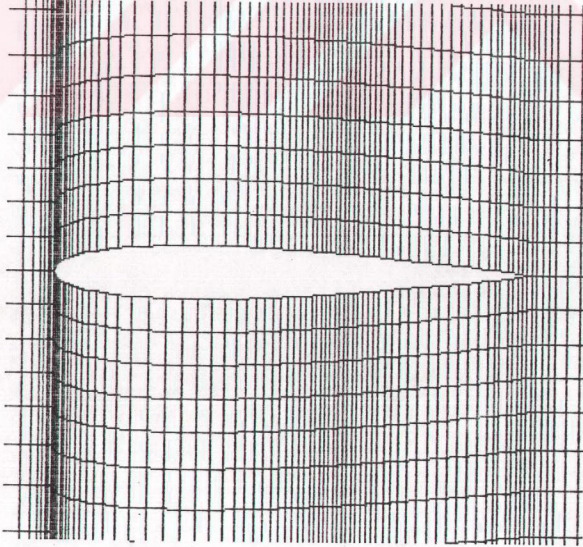
NACA 0012 Profil
(87 x 40) Ağ, 4000 iterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



Şekil 6-13-f : Aynı çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı. Referans çalışma [11]

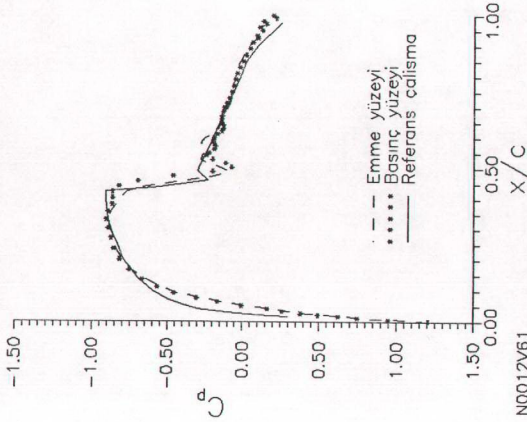


Şekil 6-14-a : NACA 0012 profil çevresinde oluşturulmuş ağ 98 x 40 elemanlı ağ. Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



Şekil 6-14-b : Profil çevresinde ağ yapısı

NACA 0012 Profil
(98 x 40) Ag, 3000 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00

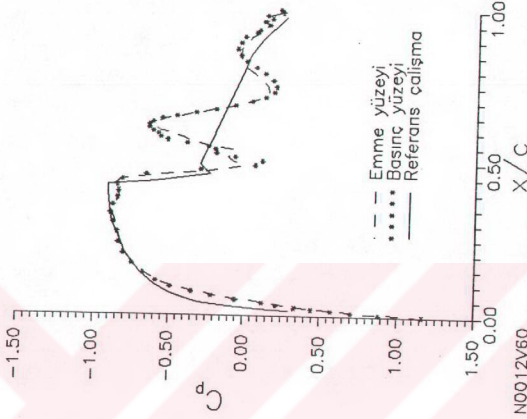


N0012V61

Şekil 6-14-c: NACA 0012 profil çevresinde 98 x 40 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.80$, 0.00° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı.

Referans çalışma [11]

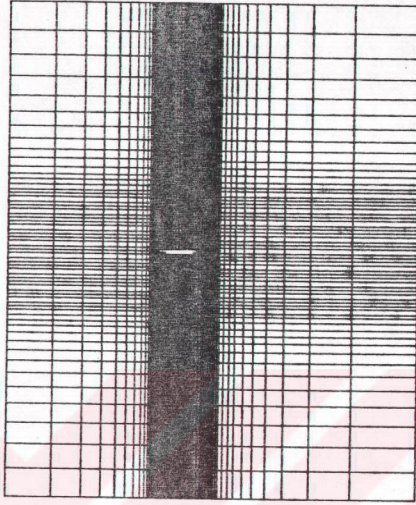
NACA 0012 Profil
(98 x 40) Ag, 4000 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.98
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



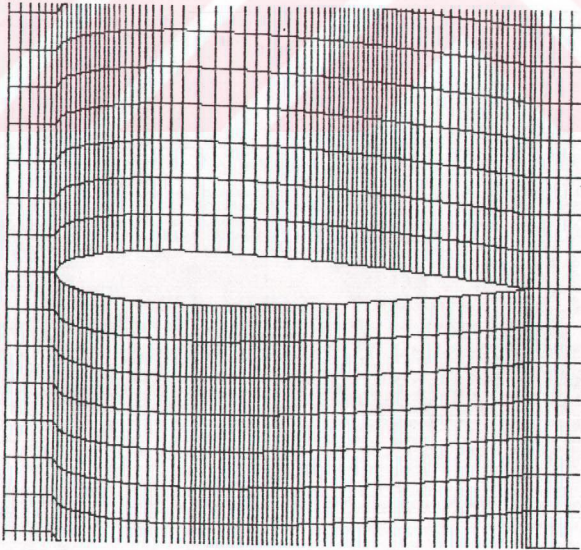
N0012V60

Şekil 6-14-d: NACA 0012 profil çevresinde 98 x 40 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.80$, 0.00° hücum açısı, $vc=0.98$, için elde edilen çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı.

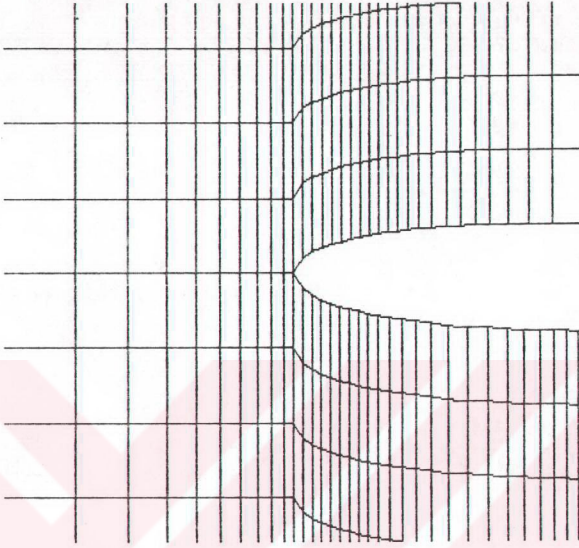
Referans çalışma [11]



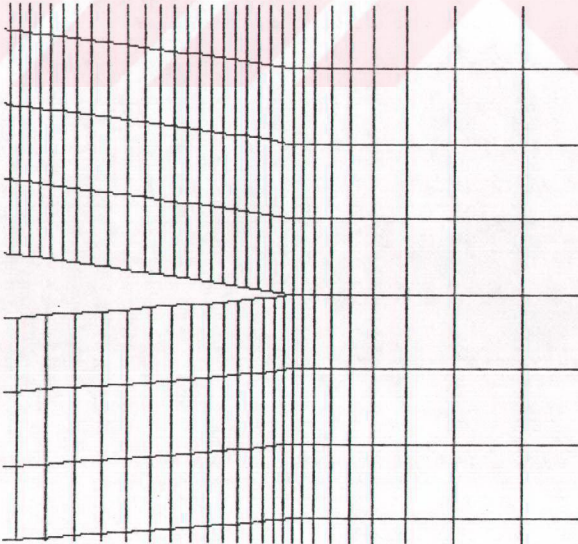
Şekil 6-15-a : NACA 0012 profil çevresinde oluşturulmuş ağ 104 x 60 elemanlı ağ. Kanal yüksekliği $5.16 + 5.16$



Şekil 6-15-b : Profil çevresinde ağ yapısı

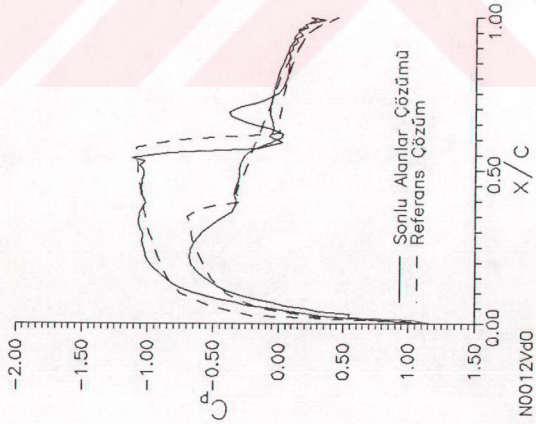


Şekil 6-15-c : Hücüm kenarı çevresi

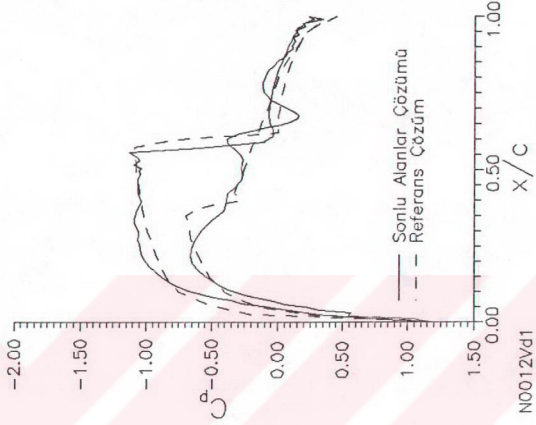


Şekil 6-15-d : Fırar kenarı çevresi

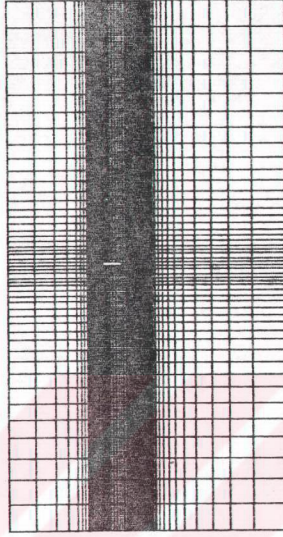
NACA 0012 Profil
(104 x 60) Ağ, 3000 iterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 1.25°
Kanal yüksekliği 5.16 + 5.16



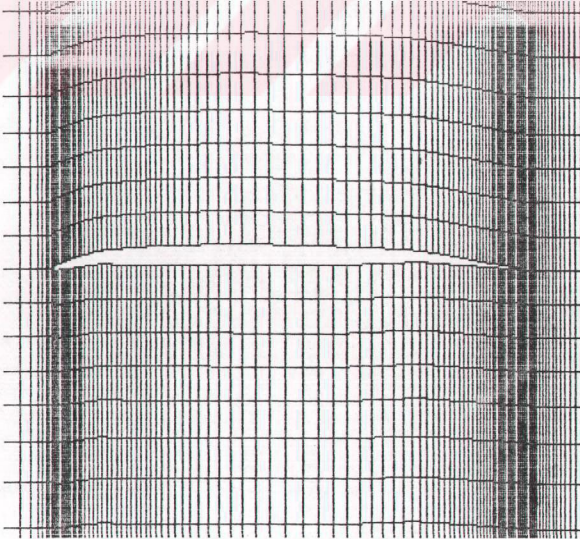
NACA 0012 Profil
(104 x 60) Ağ, 4000 iterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 1.25°
Kanal yüksekliği 5.16 + 5.16



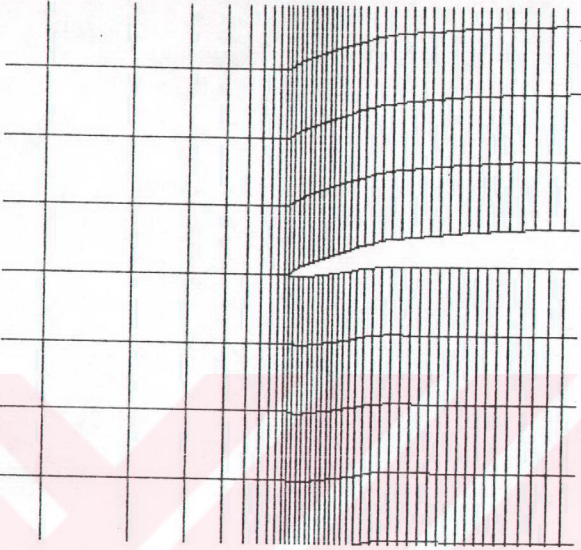
Şekil 6-15-e : NACA 0012 profil çevresinde 104 x 60 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.80$ 1.25° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı. Referans çalışma [12]



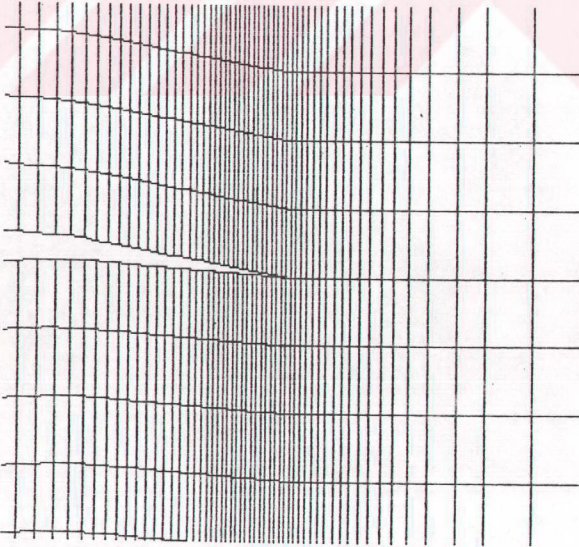
Şekil 6-16-a : NACA 6548 (12° slot, 8° flap açısı) profil çevresinde oluşturulmuş 125 x 50 elemanlı ağ. Kanal yüksekliği $5.12 + 5.12$



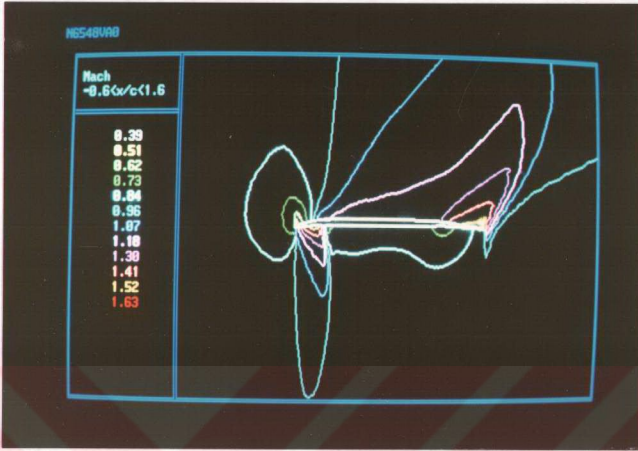
Şekil 6-16-b : Profil çevresinde ağ yapısı



Şekil 6-16-c : Hücum kenarı çevresi

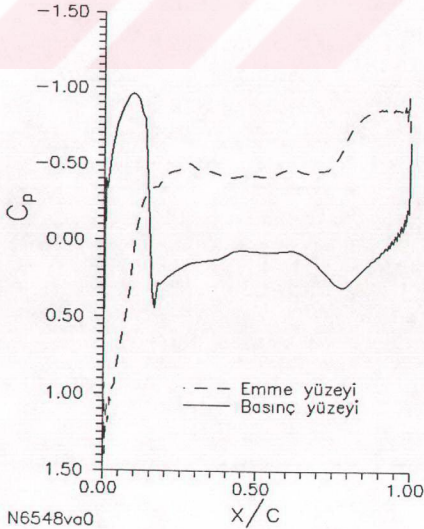


Şekil 6-16-d : Fırar kenarı çevresi

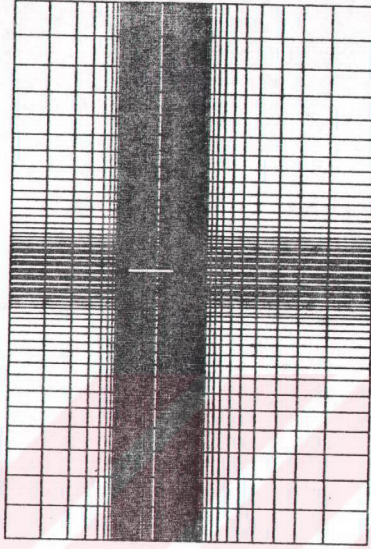


Şekil 6-16-e : NACA 6548 profil çevresinde 125 x 50 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.95$ 0.00° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait Eşmach eğrileri.

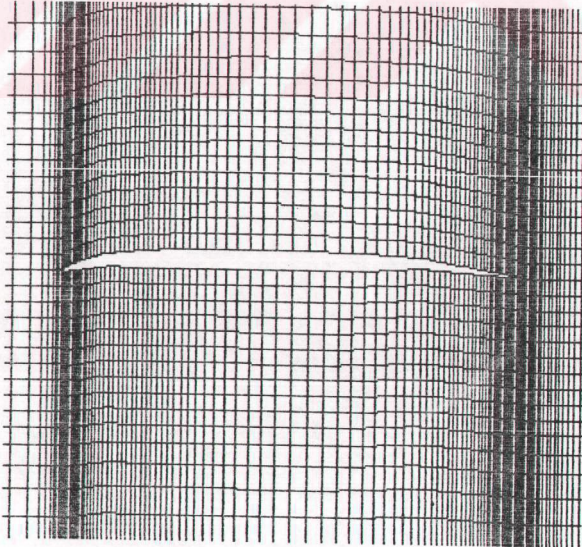
NACA 6548 Profil
(125 x 50) Ağ, 3000 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 5.12 + 5.12



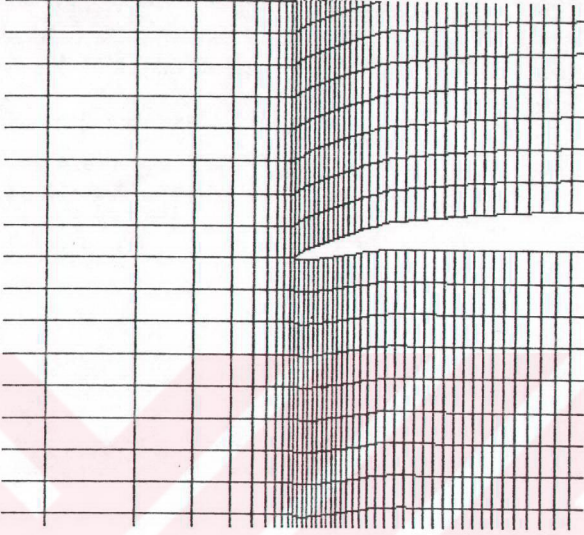
Şekil 6-16-f : Aynı çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı.



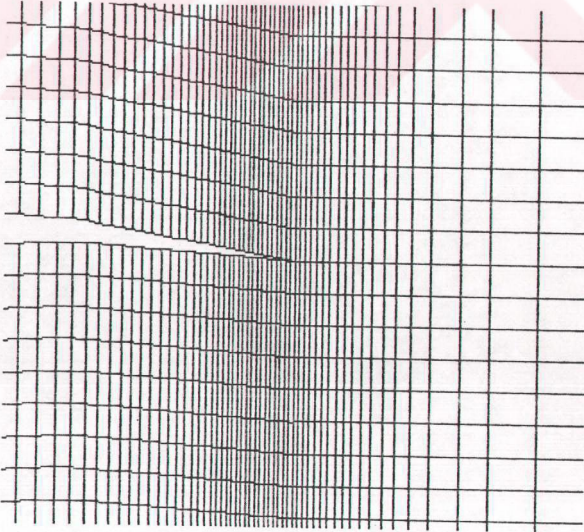
Şekil 6-17-a : NACA 6548 (12° slot, 8° flap açısı) profil çevresinde oluşturulmuş 125 x 60 elemanlı ağ. Kanal yüksekliği 4.00 + 4.00



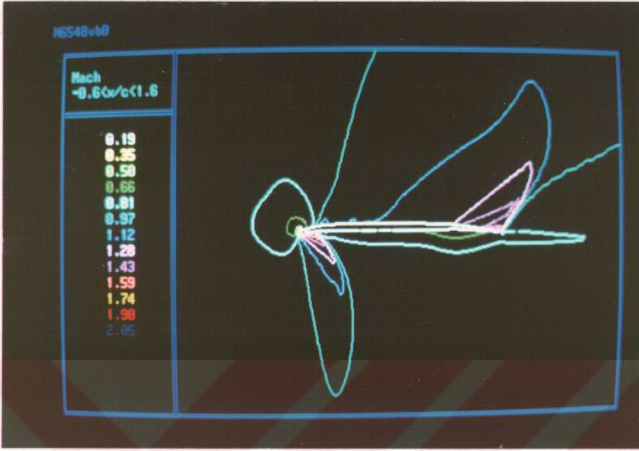
Şekil 6-17-b : Profil çevresinde ağ yapısı



Şekil 6-17-c : Hücum kenarı çevresi

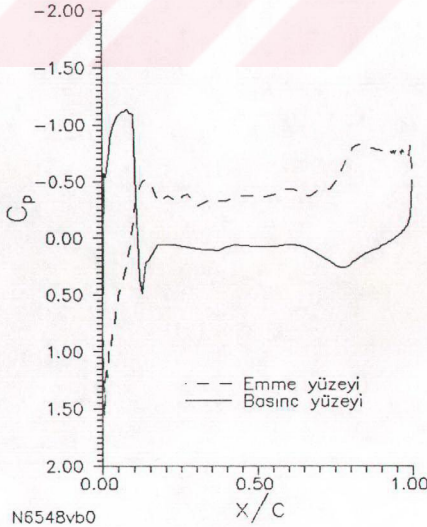


Şekil 6-17-d : Fırar kenarı çevresi

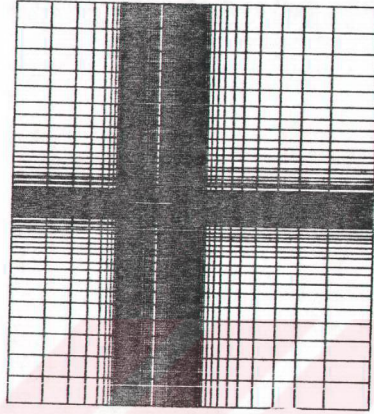


Şekil 6-17-e : NACA 6548 profil çevresinde 125 x 60 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.95$ 0.00° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait Eşmach eğrileri.

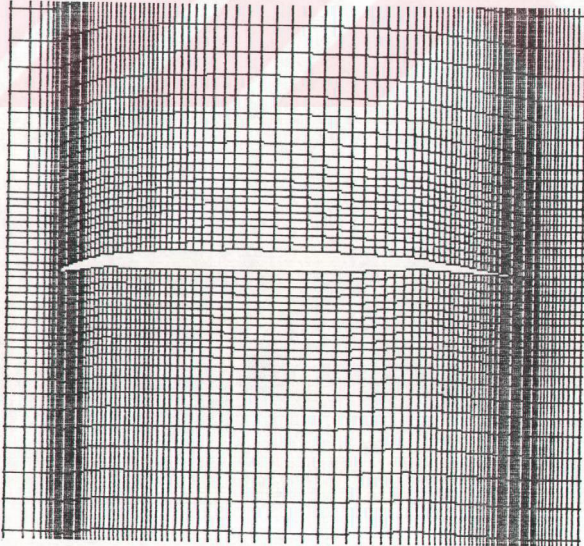
NACA 6548 Profil
(125 x 60) Ağ, 3000 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 4.00 + 4.00



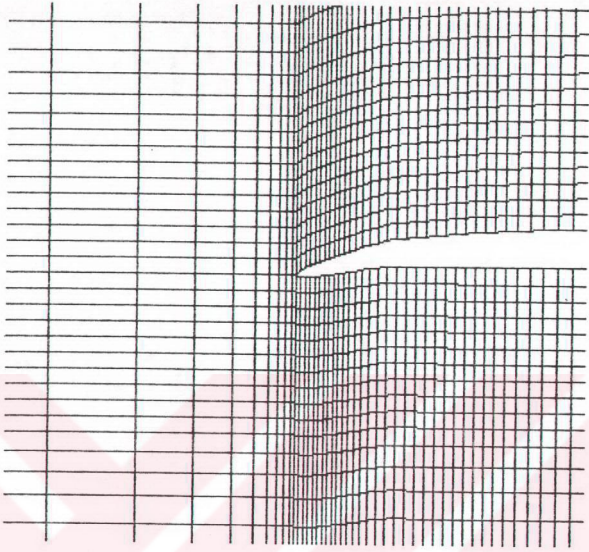
Şekil 6-17-f : Aynı çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı.



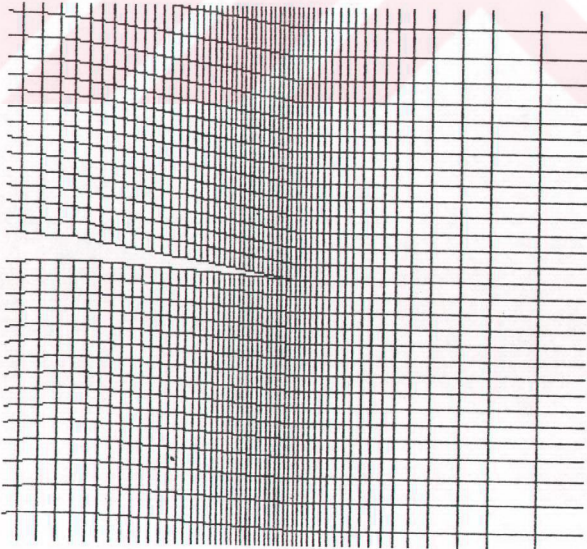
Şekil 6-18-a : NACA 6548 (12° slot, 8° flap açısı) profil çevresinde oluşturulmuş 125×66 elemanlı ağ. Kanal yüksekliği $3.00 + 3.00$



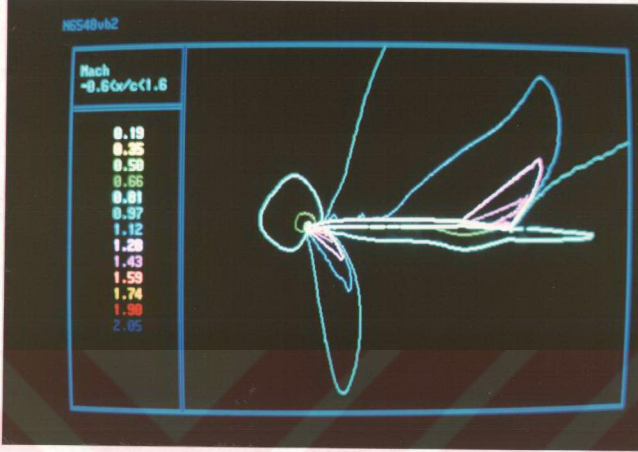
Şekil 6-18-b : Profil çevresinde ağ yapısı



Şekil 6-18-c : Hücum kenarı çevresi

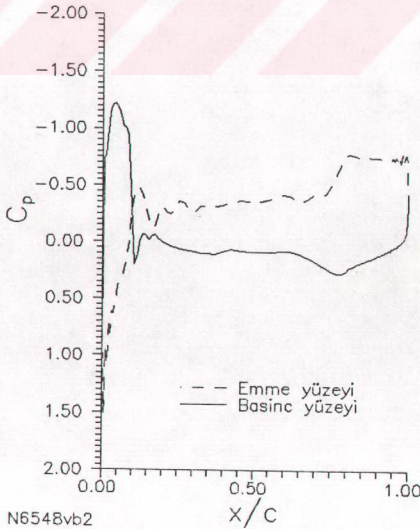


Şekil 6-18-d : Fırar kenarı çevresi



Şekil 6-18-e : NACA 6548 profil çevresinde 125 x 66 elemanlı ağ kullanılarak $M=0.95$ 0.00° hücum açısı, $vc=0.96$, için elde edilen çözüme ait Esmach eğrileri.

NACA 6548 Profil
(125 x 66) Ağ, 3500 İterasyon
Y.V. Katsayısı 0.96
Hücum Açısı 0.0°
Kanal yüksekliği 3.00 + 3.00



Şekil 6-18-f : Aynı çözüme ait yüzey basınç katsayısı dağılımı.

BÖLÜM 7

SONUÇ

Önceki bölümde ayrıntıları ile açıklanan yönteme bağlı olarak dış akımı çözen bir program geliştirilmiş ve farklı iki profil üzerindeki transonik akış incelenmiştir.

Uygulanan yöntem birinci mertebeden hassas bir yöntemdir. Profiller üzerinde yapılan uygulamalar, çözümlerin doğruluğu açısından tatmin edici sonuçlar vermiştir. Yöntemin dezavantajı olarak uzun hesaplama süresi belirtilebilir.

Geliştirilen program IBM 4381 serisinden bir bilgisayarda ve INTEL 80486 mikroişlemcili bir kişisel bilgisayarda çalıştırılmıştır. Hesaplama süresi olarak 486 tabanlı bilgisayar için ortalama $4.8 \cdot 10^{-4}$ saniye / (düğüm x zaman adımı) gözlemlenmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak, özellikle etkileşimli problemlere yönelik olarak, gerekirse farklı kontrol elemanları da kullanarak 3-boyutlu akış için yöntem ve buna bağlı program geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Anderson, J.D. Introduction To Computational Fluid Dynamics, VKI LS 89-02, 1989
- [2] Kutler, P. A Perspective Of Theoretical And Applied Computational Fluid Dynamics, AIAA Journal Vol 23, No 3, pp 328, 1985
- [3] Hove,W.V., Arts, A. Comparison Of Several Time Difference Schemes For Time Marching Methods As Applied To One Dimensional Nozzle Flow, VKI Technical Note 132 ,1979
- [4] Dick ,E. Introduction To Finite Volume Techniques in CFD VKI LS 1989-02, 1989
- [5] Arts, A., Hove, W.v. Cascade Flow Calculations Using A Finite Volume Method VKI Technical Note 146 , 1982
- [6] Kurtulus N., Arts, A. Multidomain Approach And Cascade Flow Calculations VKI Project Report 1988-23, 1988
- [7] Anderson, D.A., Tannehill, C.J., Pletcher, R.H. Computational Fluid Dynamics And Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984
- [8] Roache, P.J. Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, 1972
- [9] Hirsh, C. Numerical Computational Of Internal And External Flows, Vol 2, John Wiley & Sons , 1988
- [10] Murman, E.M. Computational Methods For Inviscid Transonic Flows With Inbedded Shock Waves, AGARD LS 48,1972

- [11] Caughey, D.A. Diagonal Implicit Multigrid Algorithm For The Euler Equations, AIAA Journal Vol. 26, No. 7, 1988
- [12] Petrie, J.A.H. Sinclair, P.M. Applications And Development Of Computational Methods For The Aerodynamic Problems Of Complex Configurations, AGARD CP-412, 1986

Akıma dik doğrultuda örtüşen trapezoidal kontrol yüzeyi için Taylor açılımları.

$$\vec{f}_{i,k-1} = \vec{f}_{i,k} - \frac{1}{4}(\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{1}{32}(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{f}_{i,k+1} = \vec{f}_{i,k} + \frac{1}{4}(\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{1}{32}(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i-1,k} &= \vec{f}_{i,k} - \frac{1}{2}(\Delta x_1 + \Delta x_2) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{1}{8}(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} \\ &\quad - \Delta y_5 \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \Delta y_5^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \Delta y_5 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i+1,k} &= \vec{f}_{i,k} + \frac{1}{2}(\Delta x_2 + \Delta x_3) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{1}{8}(\Delta x_2 + \Delta x_3)^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} \\ &\quad + \Delta y_6 \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{\Delta y_6^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \Delta y_6 (\Delta x_2 + \Delta x_3) \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} + O(\Delta^3) \end{aligned}$$

$$\vec{g}_{i,k-1} = \vec{g}_{i,k} - \frac{1}{4}(\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} + \frac{1}{32}(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{g}_{i,k+1} = \vec{g}_{i,k} + \frac{1}{4}(\Delta y_2 + \Delta y_3) \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} + \frac{1}{32}(\Delta y_2 + \Delta y_3)^2 \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

EK B

Akıma doğrultusunda örtüşen bitrapezoidal kontrol yüzeyi için Taylor açılımları.

$$\vec{f}_{i+1,k} = \vec{f}_{i,k} + \Delta x_2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \Delta y_6 \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{\Delta x_2^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} + \Delta x_2 \Delta y_6 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta y_6^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{f}_{i-1,k} = \vec{f}_{i,k} - \Delta x_1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} - \Delta y_4 \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} + \Delta x_1 \Delta y_4 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta y_4^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{f}_{i,k+1} = \vec{f}_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{f}_{i,k-1} = \vec{f}_{i,k} - \Delta y_2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{g}_{i,k+1} = \vec{g}_{i,k} + \Delta y_2 \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

$$\vec{g}_{i,k-1} = \vec{g}_{i,k} - \Delta y_2 \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} + \frac{\Delta y_2^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial y^2} + O(\Delta^3)$$

ÖZGEÇMİŞ

Mühendis Fırat Oğuz Edis 1966 yılında İstanbul'da doğdu;1977 yılında İstanbul Erkek Lisesi'nde orta öğrenimine başladı; 1983 yılında İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uçak Mühendisliği bölümüne girdi; buradan 1988 yılında mezun oldu. Aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Uçak Mühendisliği anabilim dalında öğrenimine başladı. 1990 Ocak ayından beri İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Aşağıda adıgeçen öğrencinin 1990-91 yaz döneminde, yönetimimde hazırlamış olduğu Yüksek Lisans tezi tarafımdan incelenerek yazım kılavuzuna uygun olduğu saptanmıştır.

Gereği için bilgilerinize sunulur.

ÖĞRENCİNİN ADI VE SOYADI: Fırat Oğuz Edis
ENSTİTÜ NO : 1188Y003
ANABİLİM DALI : Uçak ve Uzay Bilimleri

TEZ DANIŞMANI

Doç. Dr. Ülgen Gülçat
in a-7-

ANABİLİM DALI BAŞKANI

Levent

ZK.