

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TRANSVERSAL LIGHTLIKE SUBMERSİYONLAR



DOKTORA TEZİ

Esra KARATAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

HAZİRAN 2022

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TRANSVERSAL LIGHTLIKE SUBMERSİYONLAR



DOKTORA TEZİ

**Esra KARATAŞ
(D3615140001)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

HAZİRAN 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgmeden beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Cumali YILDIRIM'a; değerli bilgileri, önerileri ve sundukları her türlü imkanlarla bana yardımcı olan çok kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e, Sayın Prof. Dr. Kemal ÖZDEMİR'e, Sayın Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN'a ve her zaman desteklerini gördüğüm tüm hocalarıma, daima desteklerini üzerimde hissettiğim ve bu çalışma sürecinde de desteklerini eksik etmeyen kıymetli aileme sonsuz teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.



ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Transversal Lightlike Submersiyonlar ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Esra KARATAŞ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Manifoldlar ve Üzerindeki Temel Yapılar	3
2.2 Riemann Manifoldlar.....	9
2.3 Semi-Riemann Manifoldlar	11
2.4 Lightlike Manifoldlar	15
2.4.1 Lightlike Alt Manifoldlar	15
2.5 Riemann Submersiyonlar	18
2.6 Lightlike Submersiyonlar	25
3. TRANSVERSAL SUBMERSİYONLAR.....	28
3.1 TRANSVERSAL SUBMERSİYONLARA GİRİŞ.....	28
3.1.1 Transversal Submersiyonlar İçin O’Neill Tensörleri.....	36
3.2 TRANSVERSAL SUBMERSİYONLARDA SCHOUTEN KONNEKSİYONU	59
3.3 TRANSVERSAL SUBMERSİYONLARIN KOVARYANT TÜREVİ	62
3.4 EĞRİLİKLER.....	70
3.4.1 Eğrilik Tensör Alanları	70
3.4.2 Riemann Christoffel Eğrilik Tensör Alanları	71
3.4.3 Kesit Eğrilikleri	79
3.4.4 Ricci Eğrilikleri	82
KAYNAKLAR.....	93
ÖZGEÇMİŞ	94

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

F	: Cisim,
V	: Vektör uzayı,
M	: Manifold,
$W^\perp$	: W alt uzayına dik uzay,
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar,
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı,
g	: Metrik tensör,
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	: M manifoldunun vektör alanlarının uzayı,
$T_x M$	: x noktasındaki tanjant uzay,
TM	: Tanjant demet,
$\ \cdot \ $	: Norm,
∇	: Lineer konneksiyon,
D	: Distribüsyon,
L_V	: Lie türev,
$[\cdot]$	: Lie braket (parantez) operatörü,
f_*	: f dönüşümünün türev dönüşümü,
$\pi^{-1}(p)$	: Vektör demetinin lifi,
$\text{çek} f_*$	: Dikey distribüsyon,
A	: Yatay tensör alanı,
T	: Dikey tensör alanı,
R	: Riemann eğrilik tensörü,
$K(\pi)$	: π düzleminin kesit eğriliği,
$\rho(U, V)$	: Ricci eğriliği

ÖZET

Doktora Tezi

TRANSVERSAL LIGHTLIKE SUBMERSİYONLAR

ESRA KARATAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

94+vi sayfa

2022

Danışman: Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ve bu tezde üzerinde çalışılan problemlerin tanıtımı yapılmaktadır.

İkinci bölümde diğer bölümlerde yer alan konulara faydalı olacak temel tanım ve kavramlar verilmektedir. Ayrıca Riemann submersiyonlar, Riemann submersiyonlara göre T ve A temel tensörlerinin geometrik yorumu, bu temel tensörlerin kovaryant türevleri ve eğrilikler arasındaki bağıntılara yer verilmektedir. Ek olarak lightlike manifoldlara yer verilerek r lightlike submersiyon, isotropik submersiyon ve total lightlike submersiyon kavramları tanıtılmaktadır.

Üçüncü bölümde transversal submersiyonlar tanıtılıp bu submersiyonlara göre çeşitli örnekler sunulmaktadır. Ayrıca transversal submersiyonlarda belirli distribüsyonlara göre A ve T temel tensör alanları, konneksiyonlar, Schouten konneksiyonu, integrallenebilirlik, kovaryant türev, eğrilik, kesit eğriliği ve Ricci eğriliği gibi kavramlar incelenerek önemli sonuçlara ulaşılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Riemann manifold, Semi-Riemann manifold, Lightlike manifold, Riemann submersiyon, Lightlike submersiyon, Transversal submersiyon, Schouten konneksiyon.

ABSTRACT

Phd. Thesis

TRANSVERSAL LIGHTLIKE SUBMERSIONS

Esra KARATAŞ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

94+vi pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Cumali YILDIRIM

This study, which was prepared as a doctoral thesis, consists of three chapters. In the first chapter, the historical development of the subject and the problems studied in this thesis are introduced.

In the second section, the basic definitions and concepts that will be useful for the topics in other sections are indicated. Also Riemannian submersions, geometric interpretation of T and A fundamental tensors according to Riemannian submersions, covariant derivatives of these fundamental tensors and relations between curvatures are given. In addition the concepts of r lightlike submersion, isotropic submersion and totally lightlike submersion are introduced by including lightlike manifolds.

In the third chapter, transversal submersions are introduced and various examples are presented according to these submersions. In addition, some important results are obtained by examining concepts such as A and T fundamental tensor fields, connections, Schouten connection, integrability, covariant derivative, curvature, sectional curvature and Ricci curvature along transversal submersions according to certain distributions.

Keywords: Riemannian manifold, Semi-Riemannian manifold, Lightlike manifold, Riemannian submersion, Lightlike submersion, Transversal submersion, Schouten connection.

1. GİRİŞ

Bilimin birçok dalındaki uygulamalarında yer alması nedeniyle diferansiyel geometri matematiğin önemli alanlarından biridir. Diferansiyel geometrinin başlangıcı, Gauss'un yüzeylerin eğrilikleri üzerine olan çalışmalarına dayanır. Gauss'un yüzeylerin diferansiyel geometrisi üzerine olan çalışmaları Riemann manifoldu kavramına öncülük etti [1].

Manifoldlar teorisinde bir manifoldun geometrisi çalışılırken bir manifolddan başka bir manifolda uygun bir dönüşüm tanımlanmaktadır. Bu dönüşümlerle bazı geometrik incelemelerde bulunmaktadır. Bu dönüşümlerden biri de submersiyon dönüşümüdür.

Riemann submersiyon teorisi O'Neill [2] ve Gray [3] tarafından tanıtıldı. Daha sonra Riemann manifoldların yapısının tanıtılmasında etkili bir araç olarak kullanıldı [4].

(M, g) ve (B, g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve

$$\pi : M \rightarrow B$$

bir submersiyon olsun. Bu durumda $\text{rank}\pi = \text{boy}B < \text{boy}M$ olur. Herhangi bir $x \in B$ için

$$F_x = \pi^{-1}(x)$$

üzerindeki lif, (M, g) manifoldunun $r = (m - n)$ boyutlu bir alt manifoldudur. $\pi^{-1}(x)$ alt manifoldlarına **submersiyonun lifleri** denir [1].

$\pi : M \rightarrow B$ submersiyonunun $p \in M$ için (M, g) 'deki $\mathcal{V}$ integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathcal{V}_p = \text{çek}\pi_*p$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_p$ 'ye submersiyonun **dikey distribüsyonu** denir. Dikey distribüsyona dik ve tamamlayan olan

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^\perp$$

distribüsyona ise submersiyonun **yatay distribüsyonu** denir [1].

(M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları olsun. Eğer

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

diferensiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa π dönüşümüne

Riemann submersiyon denir.

1. π dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

2. Her $p \in M$ noktasında, π_{*p} dönüşümü $X_p \in \Gamma(\mathcal{H}_p)$ yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

Tanımdaki birinci şart dönüşümün bir submersiyon olduğunu garanti etmektedir. İkinci şart ise $p \in M$ noktasında π_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi(p)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu göstermektedir. Yani

$$g_p(u, v) = g'_{\pi(p)}(\pi_*u, \pi_*v), u, v \in \mathcal{H}_p, p \in M$$

[1].

Bilindiği gibi M ve B Riemann manifoldlar olduğunda lifleri de Riemann manifold olur. Fakat manifoldlar semi-Riemann manifold olduğunda π 'nin lifleri semi-Riemann olmayabilir [4].

Şahin son zamanlarda lightlike manifoldlardan semi-Riemann manifoldlar üzerine submersiyon ve semi-Riemann manifoldlardan lightlike manifoldlar üzerine submersiyon kavramlarını sırasıyla [5] ve [4] te tanıttı ve çalıştı.

Bu tezde bir semi- Riemann M_1 manifoldundan semi Riemann M_2 manifolduna bir submersiyonda liflerin dejenere olma hali göz önüne alınarak transversal submersiyon kavramı tanıtıldı.

İkinci bölümde tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlara yer verildi. Ayrıca Riemann submersiyonlar ele alınarak Riemann submersiyonlara göre T ve A temel tensörlerinin geometrik yorumlarına yer verildi. Ek olarak lightlike manifoldlara yer verilerek r lightlike submersiyon, isotropik submersiyon ve total lightlike submersiyon kavramları tanıtıldı.

Tezin orijinal bölümü üçüncü bölüm olup bu bölümde transversal submersiyonlar tanıtılıp bu submersiyonlara göre örnekler sunuldu. Ayrıca transversal submersiyonlara göre A ve T temel tensör alanları ele alınıp belirli distribüsyonlara göre konneksiyonlar, Schouten konneksiyonu, integrallenebilirlik, kovaryant türev ve eğrilik gibi durumlar incelenerek önemli sonuçlara ulaşıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm altı altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde manifoldlar ve üzerindeki temel yapılarla ilgili çeşitli kavramlar tanıtılmaktadır. İkinci altbölümde Riemann manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmektedir. Üçüncü altbölümde semi-Riemann manifoldlar ve bu manifoldlarla ilgili çeşitli kavramlar ve yapılar sunulmaktadır. Dördüncü altbölümde lightlike manifoldlar tanıtılarak lightlike altmanifoldlarla ilgili kavramlara değinilmektedir. Beşinci altbölümde Riemann submersiyonlar ve onların incelenmesinde önemli bir vasıta olan O'Neill tensörleri olarak adlandırılan A ve T temel tensör alanları belirtilmektedir. Altıncı altbölümde lightlike submersiyonlar ve bu submersiyonlarla ilgili çeşitli birtakım kavramlar tanıtılmaktadır.

2.1 Manifoldlar ve Üzerindeki Temel Yapılar

Bu bölümde manifoldlar ve üzerindeki temel yapılar ile ilgili çeşitli kavramlara yer verilmektedir.

Tanım 2.1.1. V boştan farklı bir küme ve F de V üzerinde bir cisim olsun. Bu durumda

$$+ : V \times V \rightarrow V, \\ +(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

ve

$$\cdot : F \times V \rightarrow V, \\ \cdot(a, v) = av$$

işlemleri tanımlansın. Her $v_1, v_2, v_3 \in V$ ve $a, b \in F$ için

- 1.) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3),$
- 2.) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1,$
- 3.) $v + \circ = v$ olacak şekilde V kümesinin sıfır elemanı olarak adlandırılan bir $\circ \in V$ vardır,
- 4.) Her bir $v \in V$ için v elemanının $+$ işlemine göre tersi olarak adlandırılan ve $v + (-v) = \circ$ eşitliğini sağlayan bir $-v \in V$ vardır,
- 5.) $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2,$
- 6.) $(a + b)v = av + bv,$
- 7.) $a(bv) = (ab)v,$

8.) $\bullet v = v$ olacak şekilde $\bullet \in F$ var,

böylece V kümesine F cismi üzerinde **vektör uzayı** denir [1].

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde r tane vektör uzayı $V_1, V_2, \dots, V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $u_i, v_i \in V_i, a \in \mathbb{R}$ için

i.) $f(u_1, u_2, \dots, u_i + v_i, \dots, u_r) = f(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_r) + f(u_1, u_2, \dots, v_i, \dots, u_r),$

ii.) $f(u_1, u_2, \dots, au_i, \dots, u_r) = a.f(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_r)$

özelliklerini sağlıyorsa f 'ye i **yinci yere göre lineerdir** denir. $\forall i = 1, 2, \dots, r$ için i) ve ii) özellikleri sağlanıyorsa f fonksiyonuna **r lineer fonksiyon** denir [6].

Tanım 2.1.3. $f \in C^\infty(p)$ ve $V_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$\alpha(t) = p + tV$$

eşitliğiyle verilsin, $f \circ \alpha$ fonksiyonunun sıfır noktasındaki türevi, f fonksiyonunun V_p **yönündeki türevi** olarak adlandırılır ve $V_p[f]$ şeklinde gösterilir [7].

Tanım 2.1.4. $p \in E^n$ olmak üzere

$$\{(p, V) : V \in \mathbb{R}^n\}$$

cümlesi $T_p(E^n)$ ile gösterilsin. Bu cümlede toplama işlemi

$$(p, V_1) + (p, V_2) = (p, V_1 + V_2),$$

ve skalerle çarpma işlemi de $t \in \mathbb{R}$ için

$$t(p, V_1) = (p, tV_1)$$

işlemlerine göre $T_p(E^n)$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına E^n uzayının p noktasındaki **tanjant uzayı** denir. Bu uzayın elemanlarına da p noktasında **tanjant vektörler** denir [8].

Tanım 2.1.5. M bir manifold ve T_pM , manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olmak üzere her $p \in M$ noktasına T_pM uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne **vektör alanı** denir [1].

Tanım 2.1.6. M bir manifold ve manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

ile tanımlı ve

1. $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ,$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$
3. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY,$
4. $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_XY$

koşullarını sağlayan ∇ dönüşümüne **afin** veya **lineer konneksiyon** denir. ∇_XY vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca **kovaryant türevi** denir [1].

Tanım 2.1.7. M bir reel diferensiyellenebilir manifold ve ∇ , M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. ∇ nın T ile gösterilen **torsiyon tensörü** bir $(1, 2)$ tensördür öyle ki M üzerindeki X ve Y , vektör alanları için

$$T(X, Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y]$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 2.1.8. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM),$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının **Lie (parantez) operatörü** denir [1].

Tanım 2.1.9. M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar, $f : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm ve $X \in T_pM$ için M 'de seçilen $\gamma(t)$ eğrisine $\gamma(t_0) = p$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $f(p) = f(\gamma(t_0))$ noktasında $f(\gamma(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $f_*(X)$ vektörünü karşılık getiren

$$f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$$

dönüşümüne **türev dönüşümü** denir ve df ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. $f_*(X) = \tilde{X}$ ise X ve $\tilde{X}$ vektör alanlarına f **bağlı vektör alanları** denir [1].

Tanım 2.1.11. f_{*p} lineer dönüşümünün $T_p(\mathbb{R})$ ve $T_{f(p)}(\mathbb{R})$ uzaylarının doğal tabanlarına göre matrisine f fonksiyonunun p noktasındaki **Jakobiyen matrisi** denir ve $(Jf)_p$ ile gösterilir [7].

Tanım 2.1.12. V bir vektör uzayı ve

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir dönüşüm olsun. $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(ax_1 + bx_2, y) = a.f(x_1, y) + b.f(x_2, y),$$

$$f(x, ay_1 + by_2) = a.f(x, y_1) + b.f(x, y_2)$$

şartları sağlanıyorsa f dönüşümüne V üzerinde **bilineer form** adı verilir [1].

Tanım 2.1.13. V bir reel vektör uzayı ve

$$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir R bilinear fonksiyon olsun. Her $v, w \in V$ için

$$f(v, w) = f(w, v)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu forma **simetrik bilinear form** denir [10].

Tanım 2.1.14. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. V 'nin bir $\xi \neq 0$ vektörü var ve her $v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa g simetrik bilinear formuna V üzerinde **dejenere** denir [11].

Tanım 2.1.15. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. $\forall v \in V$ için

$$g(u, v) = 0$$

olması ancak $u = 0$ ile mümkünse bu durumda g simetrik bilinear formuna **non dejenere** denir [11].

Tanım 2.1.16. V , m boyutlu bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu durumda non dejenere olması halinde g simetrik bilinear formuna V üzerinde bir **skaler çarpım** denir [12].

Tanım 2.1.17. V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu durumda $v \neq 0$ için

i.) $g(v, v) > 0$ ise g **pozitif tanımlı**,

ii.) $g(v, v) < 0$ ise g **negatif tanımlı**,

denir. [11].

Tanım 2.1.18. $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i,$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (p, q) &\rightarrow \langle p, q \rangle \end{aligned}$$

iç çarpımına $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının **standart iç çarpımı** denir [8].

Tanım 2.1.19. $p \in \mathbb{R}^n$ için $\sqrt{\langle p, p \rangle}$ sayısı $\|p\|$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\rightarrow \|p\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir **norm** denir, bu normla birlikte $\mathbb{R}^n$ cümlesine **normlu vektör uzayı** denir [8].

Tanım 2.1.20. $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $p \in E^n$ noktası için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0, h \in \mathbb{R},$$

olacak şekilde bir

$$\lambda : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R},$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa f 'ye $p \in E^n$ noktasında **türevlenebilirdir** denir ve λ lineer fonksiyonuna da $p \in E^n$ noktasında **f 'nin türevi** adı verilir.

Belli bir $p \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonların cümlesi

$$C(p, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilsin. Buna göre $\forall p \in E^n$ için $f \in C(p, \mathbb{R})$ ise f fonksiyonuna E^n 'de **türevlenebilir** veya **diferensiyellenebilirdir** denir [13].

Tanım 2.1.21. M bir m boyutlu manifold, $p \in M$ ve $T_p M$ de p noktasındaki tanjant uzay olmak üzere M üzerinde

$$D : M \rightarrow \cup T_p M,$$

$$p \rightarrow D_p \subset T_p M, \text{ boy}(D_p) = r$$

şeklinde tanımlı D dönüşümüne r **boyutlu distribüsyon** denir [1].

Tanım 2.1.22. D , M üzerinde bir n boyutlu bir distribüsyon olsun. $0 < k \leq n$ ve M 'nin k boyutlu altmanifoldu N olmak üzere herhangi $x \in N$ için $T_x N \subset D_x$ oluyorsa N 'ye D 'nin **integral manifoldu** denir [12].

Tanım 2.1.23. $\tilde{M}$ bir C^∞ manifold ve D , $\tilde{M}$ üzerinde r boyutlu bir distribüsyon olsun. M , $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere D distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifoldda distribüsyonunun **maksimal integral manifoldu** denir [1].

Tanım 2.1.24. $\tilde{M}$ bir C^∞ manifold ve D , $\tilde{M}$ üzerinde r boyutlu bir distribüsyon olmak üzere $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ olması durumunda D distribüsyonuna **involutedir** denir [1].

Tanım 2.1.25. $\tilde{M}$ bir C^∞ manifold ve M , $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere $\forall p \in M$ için D distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna **integrallenebilirdir** denir [1].

Teorem 2.1.1. $\tilde{M}$ bir C^∞ manifold ve D , $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde r boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyon integrallenebilirdir [1].

Tanım 2.1.26. M bir manifold ve ∇ , M manifoldu üzerinde bir konneksiyon olsun. $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

olması durumunda D distribüsyonuna **paraleldir** denir [1].

Tanım 2.1.27. M bir manifold, X manifold üzerinde bir vektör alanı ve φ_t , 1 parametrelili dönüşümlerin grubunu temsil etsin. Bu durumda Φ , M üzerinde bir tensör alanı olmak üzere Φ tensörünün X vektör alanına göre **Lie türevi**,

$$(L_X \Phi)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_p - (\tilde{\varphi}_t \Phi)_p], p \in M$$

şeklinde tanımlanır, burada $\tilde{\varphi}, \tau(\varphi^{-1}(p))$ tensör cebirinden $\tau(p)$ tensör cebirine bir izomorfizmadır ve

$$(\tilde{\varphi}\Phi)_p = \tilde{\varphi}\Phi_{\varphi^{-1}(p)}$$

ile tanımlıdır [1].

2.2 Riemann Manifolds

Bu bölümde Riemann manifoldu tanımlanmakta olup ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan Killing vektör alanı, Killing distribüsyon, Koszul formülü, Levi-Civita konneksiyonu, eğrilik tensörü, Riemann Christoffel eğrilik tensörü ve kesit eğriliği kavramları sunulmaktadır.

Tanım 2.2.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve g

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde bir bilinear form olmak üzere M manifoldunun her bir x noktasına, $T_x(M)$ uzayı üstünde g_x iç çarpımını karşılık getiren bir g dönüşümüne, M üstünde bir **metrik tensör** denir. M manifoldu üzerinde bir metrik tensör olması halinde bu metrik tensörle birlikte bu manifolda bir **Riemann manifoldu** adı verilir [7].

Tanım 2.2.2. (M, g) bir Riemann manifoldu, X manifold üzerinde bir vektör alanı ve L_X ise X vektör alanına göre Lie türevi olsun. Bu durumda $L_X g = 0$ olması durumunda X vektör alanına **Killing vektör alanı** denir [1].

Tanım 2.2.3. D, M manifoldu üzerinde bir distribüsyon olmak üzere D 'ye ait her vektör alanı bir Killing vektör alanıysa bu distribüsyona **Killing distribüsyon** denir. [11].

Tanım 2.2.4. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($\nabla g = 0$) bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona **Levi-Civita konneksiyon, Riemann konneksiyon** veya **metrik konneksiyon** denir [1].

Tanım 2.2.5. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{ & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ & + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

ifadesi **Koszul formülü** olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.2.6. M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. O halde $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad (2.2.2)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ile tanımlı R tensör alanına ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [1].

Tanım 2.2.7. (M, g) bir Riemann manifoldu ve R de M üzerinde tanımlı eğrilik tensör alanı olsun. Bu durumda $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

ile tanımlı tensör alanına **Riemann Christoffel eğrilik tensör alanı** denir [1].

Önerme 2.2.1. $R(X, Y, Z, W)$ Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z),$
2. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y),$
3. $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0,$
4. $(\nabla_Z R)(X, Y)W + (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W = 0$

[14].

Tanım 2.2.8. M bir Riemann manifoldu ve $T_p M$, $p \in M$ noktasında bir tanjant uzayı olmak üzere $T_p M$ tanjant uzayının 2 boyutlu bir σ alt uzayına p noktasında M 'ye **teğet düzlem** denir. σ 'nın p 'de non-dejenere olması ile

$$K_\sigma(u, v) = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$$

ifadesine M 'deki p noktasında K_σ **kesit eğriliği** denir [15].

2.3 Semi-Riemann Manifolds

Bu bölümde bir V vektör uzayı üzerinde skaler çarpım, indeks, radikal uzay, null uzay, g bilinear formunun tipi, semi-Riemann manifoldlar, quasi ortonormal taban tanımlanıp; çeşitli kavramlar ve önermeler sunulmaktadır. Bu bölümün sonlarına doğru lightlike submersiyonlar çalışılmakta ve bu submersiyonlar için verilen durumlarda quasi-ortonormal taban kullanılmaktadır.

Tanım 2.3.1. V bir reel m boyutlu vektör uzayı ve g ,

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

non-dejenere simetrik bilinear form olsun. Bu durumda g simetrik bilinear formuna **skaler çarpım (semi-Öklidyen metrik)** denir ve bu durumda V bir **semi-Öklidyen uzay** olarak adlandırılır [11].

Not 2.3.1. V bir reel vektör uzayı, W , V vektör uzayının alt vektör uzayı ve g dönüşümü V üzerinde bilinear form olmak üzere g 'nin $W \times W$ üzerinde kısıtlanmış hali W üzerinde bir simetrik bilinear formdur ve $g|_W$ ile gösterilir [11].

Tanım 2.3.2. V bir vektör uzayı ve W ise V 'nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$$g|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g 'nin V 'deki **indeksi** denir ve $\text{ind}V = q$ ile gösterilir [11].

Tanım 2.3.3. V bir reel m boyutlu vektör uzayı ve g simetrik bilinear form olsun. Bu durumda V 'nin **radikal** veya **null** uzayı simetrik g bilinear formuna göre V 'nin bir $\text{Rad } V$ alt uzayıdır ve

$$\text{Rad } V = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, v \in V\}$$

şeklinde tanımlanır. $\text{Rad } V$ 'nin boyutuna g 'nin **nullluk derecesi** denir [11].

Tanım 2.3.4. V reel vektör uzayı ve g , simetrik bilinear form olsun. Bu durumda;

- 1.) $g(x_i, x_j) = 0, i \neq j,$
- 2.) $g(x_i, x_i) = -1, 1 \leq i \leq q,$
- 3.) $g(x_i, x_i) = +1, q+1 \leq i \leq p+q,$

4.) $g(x_i, x_i) = 0, p + q + 1 \leq i \leq p + q + r = m$

olacak şekilde V 'nin bir $B = \{x_1, \dots, x_m\}$ ortonormal bazı vardır. Burada $p + q + r = m$ olup (p, q, r) üçlüsüne g **formunun tipi** denir [10].

Tanım 2.3.5. V semi-Öklidyen uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpım için $p, q \neq 0$ olması durumunda g metriğine **proper semi- Öklidyen metrik** ve (V, g) ikilisine de **proper semi-Öklidyen uzayı** denir. Bilineer formun dejenere olması durumunda vektör uzayına **lightlike uzayı** denir [11].

Tanım 2.3.6. V semi-Öklidyen uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpımı için,

- 1.) $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne **spacelike**,
- 2.) $g(v, v) < 0$ ise v vektörüne **timelike**,
- 3.) $v \neq 0$ için $g(v, v) = 0$ ise v vektörüne **lightlike (null veya isotropik) vektör** denir. $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v 'nin **causal karakteri** denir [11].

Tanım 2.3.7. Uzunluğu 1 olan ; yani uzayda normu 1 olan vektörlere **birim vektör** denir [11].

Tanım 2.3.8. $u, v \in V$ için $g(u, v) = 0$ ise bu iki vektör **ortogonaldır** denir ve $u \perp v$ ile gösterilir. Benzer olarak V 'nin iki alt kümesi U ve W olmak üzere herhangi $u \in U$ ve $w \in W$ için $u \perp w$ ise bu iki küme de **ortogonaldır** ve $U \perp W$ ile gösterilir [11].

Tanım 2.3.9. Ortogonal birim vektörlerinin karşılıklı bir E kümesi **ortonormal küme** olarak adlandırılır ki bu küme lineer bağımsızdır. Bu nedenle m boyutlu V vektör uzayının ortonormal vektörlerinin kümesine V 'nin **ortonormal bazı** denir [11].

Önerme 2.3.1. Boştan farklı bir V semi-Öklidyen uzayının ortonormal bir bazı mevcuttur [11].

Tanım 2.3.10. M bir manifold olsun. M üzerindeki $(v$ indeksli) bir metrik tensör $(0, 2)$ tipinde bir tensör alanıdır öyle ki $p \in M$ için g_p her bir $T_p M$ üzerinde v indeksli bir iç çarpımdır. Eğer g , M üzerinde $(v$ indeksli) bir metrik tensör ise bu durumda (M, g) 'ye bir **semi-Riemann manifold** $(v$ indeksli) denir [16].

Önerme 2.3.2. (W, g) , n boyutlu lightlike öyle ki; $\text{null } W = r < n$ olsun. Bu durumda $\text{Rad } W$ ye tamamlayan her alt uzay non-dejenere dir [11].

Tanım 2.3.11. (W, g) bir reel n boyutlu lightlike vektör uzayı ve $\text{Rad } W$ de W vektör uzayının radikali olsun. Bu durumda W vektör uzayında $\text{Rad } W$ 'ye tamamlayan alt uzay olan SW 'ye W 'nin **ekran (screen) altuzayı** denir [11].

Tanım 2.3.12. (V, g) bir m boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W, V 'nin bir altuzayı olsun. Bu durumda $g|_W: W \times W \rightarrow R$ bilineer formu dejenere ise W 'ye **lightlike (dejenere) altuzay** denir. Aksi taktirde W 'ye **non-dejenere altuzay** denir [11].

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

alt uzayını göz önüne alalım. Burada $W^\perp$ alt uzayına W **uzayının diki** denir. Genelde

$$W \cap W^\perp \neq \{0\}$$

dır [11].

Önerme 2.3.3. (V, g) , n boyutlu bir iç çarpım uzayı ve W uzayı da (V, g) 'nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda;

i.) $\text{boy } W + \text{boy } W^\perp = \text{boy } V = n$,

ii.) $(W^\perp)^\perp = W$,

iii.) $(W, g_W), (V, g)$ 'nin bir non-dejenere alt uzayıdır gerek ve yeter şart $W \cap W^\perp = \{0\}$ gerek ve yeter şart $W \oplus W^\perp = V$

dir [16].

(V, g) uzayı n boyutlu bir proper semi-Öklidyen uzay olmak üzere (V, g) uzayının $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazını göz önüne alalım öyle ki $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ ve $\{e_{q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ sırasıyla birim timelike ve spacelike vektörler olsun. Bazı lightlike vektörleri içeren bir baz oluşturmak için aşağıdaki durumları gözönüne alalım:

Durum 2.3.1. $(q < p)$:

Bu durumda

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\}, \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\}, \quad i \in (1, 2, \dots, q) \quad (2.3.1)$$

vektörlerini oluşturalım. Bu vektörler

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0,$$

ve

$$g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j \in (1, 2, \dots, q) \quad (2.3.2)$$

eşitliklerini sağlar. Böylece $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{2q+1}, \dots, e_{p+q}\}$, $2q$ tane lightlike vektör ve $p - q$ tane spacelike vektör içeren V 'nin bir bazıdır.

Durum 2.3.2. ($p < q$)

Bu durumda

$$f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} + e_a\}, \quad f_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} - e_a\}, \quad a \in \{1, \dots, p\} \quad (2.3.3)$$

olur. Böylece (2.3.1) ve (2.3.2)'deki i, j yerine $a, b \in \{1, \dots, p\}$ yazılırsa $\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$ 'nin $2p$ tane lightlike, $q - p$ tane timelike vektör içeren V 'nin bir bazı olduğu görülür.

Durum 2.3.3. ($p = q$)

$n = 2q = 2p$ olduğundan (2.3.1) veya (2.3.3)'te tanımlanan

$$\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*\}$$

lightlike bazı elde edilir.

Tanım 2.3.13. (V, g) bir proper semi-Öklidyen uzayının bir $B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$ bazı aşağıdaki şartların sağlanması halinde **quasi ortonormal baz** olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} g(f_i, f_j) &= g(f_i^*, f_j^*) = 0; \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \\ g(u_\alpha, f_i) &= g(u_\alpha, f_i^*) = 0; \quad g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Burada $i, j \in \{1, \dots, r\}$ ve $\alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$ dir. Burada $\{f\}$, $\{f^*\}$ ve $\{u\}$ sırasıyla $\Gamma(\text{Rad } TM|_U)$, $\Gamma(\text{tr}(TM)|_U)$ ve $\Gamma(S(TM)|_U)$ 'nin bazlarıdır [11].

Tanım 2.3.14. m boyutlu bir proper semi Öklidyen V uzayının bir n boyutlu lightlike alt uzayı olan W 'yi göz önüne alalım. Bu durumda bir quasi ortonormal

$$B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$$

bazı vardır öyle ki

$$W = \text{Span}\{f_1, \dots, f_r, u_1, \dots, u_s\} ; n = r + s, 1 \leq s \leq t$$

dir; veya

$$W = \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\} ; n \leq r$$

dir. O halde bu ifadeye W boyunca V 'nin quasi ortonormal tabanı denir [11].

Önerme 2.3.4. *W boyunca V vektör uzayının bir quasi ortonormal bir tabanı vardır [11].*

2.4 Lightlike Manifoldlar

Bu bölümde lightlike manifold, dejenere metrik, radikal distribüsyon gibi kavramlara yer verilmekte ve lightlike alt manifoldlar başlığı altında lightlike altmanifold kavramı tanımlanarak lightlike, izotropik, co-izotropik ve total lightlike alt manifold kavramları sunulmaktadır.

Tanım 2.4.1. *(M, g) , herhangi $x \in M$ için $T_x M$ üzerinde sabit indeksli, $(0, 2)$ tipinde, simetrik tensör alanlı, reel n boyutlu, diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Kabul edelim ki g_x , $T_x M$ üzerinde dejenere olsun; yani $T_x M$ 'nin bir $\xi \neq 0$ vektörü mevcuttur öyle ki $\forall V \in T_x M$ için $g_x(\xi, V) = 0$ olsun. Bu durumda $T_x M$ 'nin simetrik bilineer g_x formuna karşılık gelen radikal veya null uzayı $T_x M$ 'nin bir $\text{Rad } T_x M$ alt uzayıdır ve*

$$\text{Rad } T_x M = \{\xi \in T_x M : g_x(\xi, V) = 0, \forall V \in T_x M\}$$

*olur. $\text{Rad } T_x M$ 'nin boyutuna g_x 'in **nullluk derecesi** denir $\text{null } T_x M$ ile gösterilir [15].*

Tanım 2.4.2. *$\text{Rad } TM$ 'nin her bir $x \in M$ 'yi $T_x M$ 'nin $\text{Rad } T_x M$ alt uzayına eşlediğini varsayalım. Burada g_x 'e karşılık gelen $T_x M$, M üzerinde rankı sıfırdan büyük olan diferensiyellenebilir bir distribüsyon tanımlar. Bu durumda M 'ye r **lightlike** (r **dejenere manifold**) ve g 'ye r **dejenere metrik** denir. $\text{Rad } TM$ 'ye de M 'nin **radikal distribüsyonu** denir [11].*

2.4.1 Lightlike Alt Manifoldlar

$(\overline{M}, \overline{g})$ bir reel $(m + n)$ boyutlu semi-Riemann manifold olsun, burada $m > 1$, $n \geq 1$ olmak üzere $\overline{g}$, $\overline{M}$ manifoldu üzerinde sabit $q \in \{1, \dots, m + n - 1\}$ indeksli bir semi-Riemann metriktir. Kabul edelim ki M manifoldu, $\overline{M}$ manifoldunun m boyutlu bir alt manifoldu olsun. $m > 1$ olma şartı M 'nin $\overline{M}$ 'nin bir eğrisi olmayacağını göstergesidir. $p \in M$ için

$$T_p M^\perp = \{V_p \in T_p \overline{M} : \overline{g}_p(V_p, W_p) = 0, \forall W_p \in T_p M\}$$

dir. Lightlike bir M manifoldu için diferensiyellenebilir bir distribüsyon mevcuttur öyle ki

$$Rad T_p M = T_p M \cap T_p M^\perp \neq \{0\}, \forall p \in M,$$

$Rad TM$ 'nin rankı $r > 0$ ise M 'ye bir **r lightlike alt manifold** denir [15].

$\bar{M}$ 'nin bir lightlike M altmanifoldunun transversal vektör demetinin inşası için $Rad TM$ 'nin rankına, M 'nin ekboyutuna ve boyutuna göre aşağıdaki dört durum incelenir:

Durum 2.4.1. $(0 < r < \min\{m, n\})$. M manifoldunun tanjant demeti TM 'de $Rad TM$ 'nin tamamlayıcı olan $S(TM)$ distribüsyonu gözönüne alınsın. M 'nin parakompakt olduğu kabul edilirse böyle bir distribüsyonun her zaman var olduğu söylenir. Önerme 2.3.2'den $S(TM)$, $Rad TM$ 'ye ortogonal ve $\bar{g}$ 'ye göre non dejeneredir.

$$TM = Rad TM \perp S(TM), \quad (2.4.1)$$

ortogonal direkt toplamı gözönüne alınsın. Non dejenere altmanifoldlar teorisindeki sabitlik ile birlikte

$$TM^\perp = \bigcup_{u \in M} T_u M^\perp$$

vektör demetini gözönüne alınırsa M lightlike manifoldu için $TM^\perp$ in $\bar{M}|_M$ 'de TM 'ye tamamlayan olmadığını söyleriz. Çünkü $Rad TM = TM \cap TM^\perp$ 'tir ve M üzerinde rank $r > 0$ olan bir distribüsyondur. $TM^\perp$ 'te $Rad TM$ 'ye ortogonal tamamlayan vektör demeti $S(TM^\perp)$ ile tanımlansın. Önerme 2.3.2'den

$$TM^\perp = Rad TM \perp S(TM^\perp)$$

ifadesi yazılabilir. Diğer taraftan $S(TM)$ ve $S(TM^\perp)$ sırasıyla M 'nin bir screen distribüsyon ve bir screen transversal vektör demetidir. $S(TM)$, $\bar{M}|_M$ 'nin bir non dejenere altvektör demeti olduğundan

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp S(TM)^\perp$$

şeklinde yazılabilir. Burada $S(TM)^\perp$, $T\bar{M}$ 'de $S(TM)$ 'nin tamamlayan ortogonal vektör demetidir. Ayrıca $S(TM^\perp)$, $S(TM)^\perp$ bir altvektör demeti olduğundan ve ikisi de non dejenere olduğundan

$$S(TM)^\perp = S(TM^\perp) \perp S(TM^\perp)^\perp$$

ortogonal direkt toplam ayrışımı elde edilir [11].

Bundan sonra lightlike altmanifoldu $(M, g, S(TM), S(TM^\perp))$ ile gösterilecektir. Ayrıca bu bölümde aksi belirtilmedikçe indisler

$$i, j, k, \dots \in \{1, \dots, r\}; a, b, c, \dots \in \{r+1, \dots, m\}; \alpha, \beta, \gamma, \dots \in \{r+1, \dots, n\}$$

şeklinde olacaktır.

Lemma 2.4.1. $(M, g, S(TM), S(TM^\perp)), (\bar{M}, \bar{g})$ 'nin bir 1 lightlike altmanifoldu olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{U}$, M 'nin bir koordinat komşuluğu ve $\xi \in \Gamma(\text{Rad } TM|_{\mathcal{U}})$, $\mathcal{U}$ 'nin her yerinde sıfırdan farklı olsun. Bu durumda $S(TM^\perp)^\perp$ 'nin tek bir N kesit eğriliği vardır öyle ki

$$\bar{g}(N, \xi) = 1 \quad (2.4.2)$$

ve

$$\bar{g}(N, N) = 0 \quad (2.4.3)$$

dır [11].

İspat: $S(TM^\perp)^\perp$ in non dejenere olması ve $\text{Rad } TM$ 'nin $S(TM^\perp)^\perp$ in bir altvektör demeti olması $V \in \Gamma(S(TM^\perp)^\perp|_{\mathcal{U}})$ nun varlığını gösterir öyle ki $\mathcal{U}$ üzerinde $\bar{g}(V, \xi) \neq 0$ 'dır. Böylece $\text{rank } S(TM^\perp)^\perp = 2$ olduğundan herhangi $N \in \Gamma(S(TM^\perp)^\perp|_{\mathcal{U}})$; α ve β $\mathcal{U}$ üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $N = \alpha V + \beta \xi$ vasıtasıyla ifade edilebilir. Böylece doğrudan hesaplamalarla N 'nin (2.4.2) ve (2.4.3) eşitliklerini sağlaması için gerek ve yeter şart N 'nin

$$N = \frac{1}{\bar{g}(V, \xi)} \left\{ V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(V, \xi)} \cdot \xi \right\} \quad (2.4.4)$$

ile verilmesidir [11].

Lemma 2.4.2. $(M, g, S(TM), S(TM^\perp)); r > 1$ olmak üzere $(\bar{M}, \bar{g})$ 'nin bir r lightlike altmanifoldu olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{U}$, M 'nin bir koordinat komşuluğu ve $\{\xi_i\}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ $\Gamma(\text{Rad } TM|_{\mathcal{U}})$ 'nin bir bazı olsun. Bu durumda $S(TM^\perp)^\perp|_{\mathcal{U}}$ nun $\{N_i\}$ diferensiyellenebilir kesitleri vardır öyle ki herhangi $i, j \in \{1, \dots, r\}$ için

$$g(N_i, \xi_j) = \delta_{ij} \quad (2.4.5)$$

ve

$$\bar{g}(N_i, N_j) = 0 \quad (2.4.6)$$

dir [11].

Durum 2.4.2. ($1 < r = n < m$). Bu durumda $\text{Rad } TM = TM^\perp$ ve böylece Riemann altmanifoldların klasik teorisinden önceki normal demet lightlike altmanifold üzerinde bir distribüsyon olur. Bu durumdaki altmanifoldta $\bar{M}$ 'nin **co-isotropik altmanifoldu** denir ve $S(TM^\perp) = \{0\}$ olduğundan

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp$$

ifadesi elde edilir [11].

Durum 2.4.3. ($1 < r = m < n$). Bu durumda $\text{Rad } TM = TM$ olur; yani $S(TM) = 0$ 'dır. Böylece M 'nin tanjant demeti $TM^\perp$ in bir altvektör demeti olur. Bu durumda M manifolduna $\bar{M}$ manifoldunun **isotropik altmanifoldu** denir. Böylece

$$TM^\perp = TM \perp S(TM^\perp)$$

ifadesi elde edilir [11].

Durum 2.4.4. ($1 < r = m = n$). Bu durumda $\text{Rad } TM = TM = TM^\perp$; yani $S(TM) = \{0\}$ ve $S(TM^\perp) = \{0\}$ olur. Böylece ne bir screen distribüsyon ne de transversal screen distribüsyon vardır. Bu durumda M manifolduna, $\bar{M}$ manifoldunun **tamamen lightlike alt manifoldu** denir ve $T\bar{M} = TM \oplus \text{ltr}(TM)$ ayrışımı elde edilir [11].

2.5 Riemann Submersiyonlar

Bu bölümde Riemann submersiyon kavramı açıklanmakta ve O'Neill tensörleri tanıtılarak Riemann submersiyonlarda bu tensörlerin önemli özelliklerine yer verilmektedir. Ayrıca Riemann submersiyonlarda O'Neill tensörlerinin kovaryant türevleri ve Riemann submersiyonlarda eğrilik kavramları incelenerek önemli geometrik sonuçlar sunulmaktadır.

Tanım 2.5.1. M_1 ve M_2 sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ örten dönüşüm olmak üzere $x \in M$ noktasında $f_{*p} : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$ dönüşümünün rankının n olması durumunda f dönüşümüne **submersiyon** adı verilir [1].

Tanım 2.5.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir submersiyon olsun. O halde $\text{rank } f = \text{boy } M_2 < \text{boy } M_1$ olur. Herhangi bir $p \in M_2$ için $F_p = f^{-1}(p)$ üzerindeki lif, (M_1, g_1) manifoldunun $r = (m - n)$ boyutlu bir altmanifoldudur. $f^{-1}(p)$ alt manifoldlarına **submersiyonun lifleri** denir [1].

Tanım 2.5.3. $f : M_1 \rightarrow M_2$ submersiyonunun $x \in M_1$ için (M_1, g_1) 'deki $\mathcal{V}$ integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathcal{V}_x = \text{çek} f_*$$

şeklinde tanımlanıp, $\mathcal{V}_x$ submersiyonun **dikey distribüsyonu** olarak adlandırılır. Dikey distribüsyona dik ve tamamlayan olan

$$\mathcal{H}_x = (\mathcal{V}_x)^\perp$$

distribüsyon ise submersiyonun **yatay distribüsyonu** olarak adlandırılır [1].

Tanım 2.5.4. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda f dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa f dönüşümüne **Riemann submersiyonu** denir.

i.) f dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

ii.) Her $x \in M_1$ noktasında, f_{*x} dönüşümü $X_x \in \Gamma(\mathcal{H}_x)$ yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

[1].

Tanım 2.5.5. $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere M_1 üzerindeki bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise bu vektör alanına **yatay vektör alanı** denir ve yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^h(M_1)$ ile gösterilir.

M_1 üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise bu vektör alanına **dikey vektör alanı** denir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^v(M_1)$ ile gösterilir.

Herhangi bir $E \in \chi(M_1)$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir [1].

Tanım 2.5.6. $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere M_1 üzerindeki izdüşürülebilir vektör alanlarının uzayı $\chi^c(M_1)$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\chi^c(M_1)$ 'in her bir elemanı M_1 üzerinde bir vektör alanı olup aynı zamanda M_2 üzerindeki bir vektör alanına f bağlıdır [17].

Tanım 2.5.7. $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir Riemann submersiyon olmak üzere M_1 üzerindeki bir yatay X_1 vektör alanı M_2 üzerindeki X_2 vektör alanına f bağlı ise bu X_1 vektör alanına **temel vektör alanı** denir. Temel vektör alanlarının uzayı

$$\chi^b(M_1) = \chi^c(M_1) \cap \chi^h(M_1)$$

ile gösterilir [1].

Lemma 2.5.1. $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ bir Riemann submersiyon, ∇ ve ∇' sırasıyla M_1 ve M_2 manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere X, Y temel vektör alanları X', Y' 'ne f bağlı ise bu durumda

- i.) $g_1(X, Y) = g_2(X', Y') \circ f$,
- ii.) $h[X, Y], [X', Y']$ vektör alanına f bağlı temel vektör alanıdır,
- iii.) $h(\nabla_X Y), \nabla'_{X'} Y'$ 'ne f bağlı temel vektör alanıdır,
- iv.) Herhangi V dikey vektör alanı için $[X, V]$ dikey bir vektör alanıdır

[18].

Şimdi de O'Neill tarafından, Riemann submersiyonları için tanımlanan temel tensörleri inceleyelim:

Tanım 2.5.8. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere $E_1, E_2 \in \chi(M_1)$ için

$$T(E_1, E_2) = T_{E_1} E_2 = h\nabla_{vE_1} vE_2 + v\nabla_{vE_1} hE_2, \quad (2.5.1)$$

ifadesi $(1, 2)$ mertebeli **T temel tensör alanı**,

$$A(E_1, E_2) = A_{E_1} E_2 = v\nabla_{hE_1} hE_2 + h\nabla_{hE_1} vE_2, \quad (2.5.2)$$

ifadesi $(1, 2)$ mertebeli **A temel tensör alanı** olarak tanımlanır. Burada v ve h

$$v : \chi(M_1) \rightarrow \chi^v(M_1),$$

$$h : \chi(M_1) \rightarrow \chi^h(M_1),$$

şeklinde sırasıyla $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ üzerinde ortogonal projeksiyonlar ve ∇ , (M_1, g_1) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonudur [18].

Not 2.5.1. $E \in \chi(M_1)$ için T ve A temel tensör alanları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. T_E ve A_E lineer operatördür.
 2. T_E ve A_E yatay ve dikey alt uzaylarının rollerini değiştirir.
 3. T dikey tensör alanıdır; yani $E \in \chi(M_1)$ için $T_E = T_{vE}$.
 4. A yatay tensör alanıdır; yani $E \in \chi(M_1)$ için $A_E = A_{hE}$ dir.
- [1].

Lemma 2.5.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere herhangi $X, Y, Z \in \chi(M_1)$ için

$$g_1(T_X Y, Z) = -g_1(T_X Z, Y),$$

$$g_1(A_X Y, Z) = -g_1(A_X Z, Y),$$

dir; yani T_X ve A_X operatörleri g_1 metriğine göre anti-simetrik operatörlerdir [1].

Lemma 2.5.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere,

i.) $U_1, U_2 \in \chi(M_1)$ için

$$T_{U_1} U_2 = T_{U_2} U_1,$$

ii.) $X_1, X_2 \in \chi(M_1)$ için

$$A_{X_1} X_2 = -A_{X_2} X_1,$$

iii.) $X_1, X_2 \in \chi(M_1)$ için

$$A_{X_1} X_2 = \frac{1}{2} v[X_1, X_2]$$

dir [1].

Lemma 2.5.4. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, $X, X_1, X_2 \in \chi^h(M_1)$ ve $V, V_1, V_2 \in \chi^v(M_1)$ için

$$\nabla_{V_1} V_2 = T_{V_1} V_2 + v \nabla_{V_1} V_2, \quad (2.5.3)$$

$$\nabla_V X = T_V X + h \nabla_V X, \quad (2.5.4)$$

$$\nabla_X V = A_X V + v \nabla_X V, \quad (2.5.5)$$

$$\nabla_{X_1} X_2 = A_{X_1} X_2 + h \nabla_{X_1} X_2, \quad (2.5.6)$$

dir, burada $\widehat{\nabla}_{V_1} V_2 = v \nabla_{V_1} V_2$ 'dir. Liilere ait diğer geometrik nesneler de $\widehat{}$ sembolü ile belirtilecektir [1].

Tanım 2.5.9. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere,

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_2 = v(\nabla_{E_1} v E_2) + h(\nabla_{E_1} h E_2), \quad E_1, E_2 \in \chi(M_1) \quad (2.5.7)$$

ile tanımlı konneksiyona **Schouten konneksiyonu** denir. Burada $\mathcal{V}$ dikey distribüsyonu ve $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonu üzerine olan projeksiyonlar sırasıyla v ve h 'dir [18].

Lemma 2.5.5. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere $E, G \in \chi(M_1)$ için

$$\nabla_E G = \overline{\nabla}_E G + T_E G + A_E G \quad (2.5.8)$$

dir [18].

İspat: (2.5.7) eşitliğinden yararlanılarak $E, G \in \chi(M_1)$ için

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_E G &= v(\nabla_E v G) + h(\nabla_E h G), \\ &= v(\nabla_{(vE+hE)} v G) + h(\nabla_{(vE+hE)} h G), \\ &= v \nabla_{vE} v G + v \nabla_{hE} v G + h \nabla_{vE} h G + h \nabla_{hE} h G + \nabla_E G - \nabla_E G \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\nabla_E G &= v\nabla_E G + h\nabla_E G, \\
&= v(\nabla_{(vE+hE)}(vG+hG)) + h(\nabla_{(vE+hE)}(vG+hG)), \\
&= v\nabla_{vE}vG + v\nabla_{vE}hG + v\nabla_{hE}vG + v\nabla_{hE}hG \\
&\quad + h\nabla_{vE}vG + h\nabla_{vE}hG + h\nabla_{hE}vG + h\nabla_{hE}hG
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

olur. O halde (2.5.10) eşitliği (2.5.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\nabla_E G = \bar{\nabla}_E G + T_E G + A_E G$$

eşitliği elde edilmiş olur [17].

Tanım 2.5.10. (M_1, g_1) bir Riemann manifoldu ve $E_1, E_2, E_3 \in \chi(M_1)$ olsun. $(1, 2)$ mertebeli A ve T tensör alanlarının **kovaryant türevleri** sırasıyla,

$$(\nabla_{E_1} A)_{E_2} E_3 = (\nabla_{E_1} A)(E_2, E_3) = \nabla_{E_1}(A_{E_2} E_3) - A_{\nabla_{E_1} E_2} E_3 - A_{E_2} \nabla_{E_1} E_3 \tag{2.5.11}$$

ve

$$(\nabla_{E_1} T)_{E_2} E_3 = (\nabla_{E_1} T)(E_2, E_3) = \nabla_{E_1}(T_{E_2} E_3) - T_{\nabla_{E_1} E_2} E_3 - T_{E_2} \nabla_{E_1} E_3 \tag{2.5.12}$$

ile tanımlanır [18].

Lemma 2.5.6. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X, Y, Z, Z' \in \chi^h(M_1)$ ve $U, V, W \in \chi^v(M_1)$ için

$$\begin{aligned}
g_1((\nabla_U A)_X V, W) &= g_1(T_U V, A_X W) - g_1(T_U W, A_X V), \\
g_1((\nabla_X T)_U V, W) &= g_1(T_U W, A_X V) - g_1(T_U V, A_X W), \\
g_1((\nabla_X A)_Y U, V) &= g_1(A_X U, A_Y V) - g_1(A_X V, A_Y U), \\
g_1((\nabla_U T)_V X, Y) &= g_1(T_U X, T_V Y) - g_1(T_U Y, T_V X), \\
g_1((\nabla_X A)_Y Z, Z') &= g_1(A_X Z, A_Y Z') - g_1(A_X Z', A_Y Z), \\
g_1((\nabla_X T)_U Y, Z) &= g_1(T_U Z, A_X Y) - g_1(T_U Y, A_X Z)
\end{aligned}$$

dir [1].

A ve T tensör alanları ve kovaryant türevleri (M, g) manifoldunun R Riemann eğriliğinin ifade edilmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Herhangi $E, F, G, H \in \chi(M_1)$ için

$$R(E, F, G, H) = g_1(R(G, H, F), E) = g_1([\nabla_G, \nabla_H] - \nabla_{[G, H]})F, E)$$

dir [19].

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer Riemann manifold

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon ve (M_1, g_1) 'in yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. R^* , $\chi^h(M_1)$ üzerinde $(1, 3)$ eğrilik tensör alanı olmak üzere herhangi $X, Y, Z \in \chi^h(M_1)$ ve $p \in M_1$ için $R'_{f(p)}(f_*X_p, f_*Y_p, f_*Z_p)$ tensörünün yatay lifti $R^*(X, Y, Z)$ ile gösterilir.

(M_2, g_2) manifoldunun R' Riemann eğriliği kısaca;

$$f_*(R^*(X, Y, Z)) = R'(f_*X, f_*Y, f_*Z)$$

ile ifade edilir. Ayrıca herhangi $X, Y, Z \in \chi^h(M_1)$ için

$$R^*(X, Y, Z, H) = g_1(R^*(Z, H, Y), X) = R'(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*H) \circ f$$

yazılır [18].

Teorem 2.5.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyon ve R, R' sırasıyla M_1 ve M_2 manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda, herhangi bir $X, Y, Z, H \in \chi^h(M_1)$ ve $V, W \in \chi^v(M_1)$ için

$$\begin{aligned} g_1(R(X, Y)V, W) &= g_1((\nabla_V A)_X Y, W) - g_1((\nabla_W A)_X Y, V) \\ &\quad + g_1(A_X V, A_Y W) - g_1(A_X W, A_Y V) \\ &\quad - g_1(T_V X, T_W Y) + g_1(T_W X, T_V Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(R(X, V)Y, W) &= g_1((\nabla_X T)_V W, Y) + g_1((\nabla_V A)_X Y, W) \\ &\quad - g_1(T_V X, T_W Y) + g_1(A_X V, A_Y W) \end{aligned}$$

dir [18].

2.6 Lightlike Submersiyonlar

Bu bölümde lightlike submersiyonlar tanıtılarak önemli bazı kavramlara yer verilmektedir.

(M_1, g_1) bir semi-Riemann manifold ve (M_2, g_2) bir r lightlike manifold olsun.

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

diferensiyellenebilir submersiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda $p \in M_2$ için $f^{-1}(p)$,

$$\text{boy}M_1 - \text{boy}M_2$$

boyutlu alt manifolddur.

Öte yandan p noktasında f_* dönüşümünün çekirdeği

$$\text{çek}f_* = \{X \in T_p(M_1) : f_*(X) = 0\} \quad (2.6.1)$$

ile tanımlanır [4].

$(\text{çek}f_*)^\perp$ ifadesi de

$$(\text{çek}f_*)^\perp = \{Y \in T_p(M_1) : g_1(Y, X) = 0, \forall X \in \text{çek}f_*\}$$

şeklinde tanımlanır.

T_pM_1 bir semi-Riemann vektör uzayı olduğundan $(\text{çek}f_*)^\perp$, $\text{çek}f_*$ 'ın tamamlayıcı olmayabilir [4]. Kabul edelim ki

$$\Delta = \text{çek}f_* \cap (\text{çek}f_*)^\perp \neq \{0\}$$

olsun. Bu durumda submersiyonların aşağıdaki 4 durumunu göz önüne alalım:

Durum 2.6.1. $0 < \text{boy } \Delta < \min \{\text{boy } (\text{çek}f_*), \text{boy } (\text{çek}f_*)^\perp\}$: Bu durumda Δ , T_pM_1 'in radikal alt uzayıdır. Böylece [11]'de olduğu gibi $\text{çek}f_*$ boyunca M_1 'in quasi ortonormal bazı vardır. $\text{çek}f_*$ bir reel lightlike vektör uzayı olduğundan [11, Önerme 2.1]'den Δ 'ya tamamlayan non dejenere bir alt uzay vardır. $S(\text{çek}f_*)$, $(\text{çek}f_*)$ 'da Δ 'ya tamamlayan non dejenere alt uzay olsun. Bu durumda

$$\text{çek}f_* = \Delta \perp S(\text{çek}f_*) \quad (2.6.2)$$

olur. Benzer şekilde

$$(\text{çek}f_*)^\perp = \Delta \perp S(\text{çek}f_*)^\perp$$

olur. Burada $S(\check{cek}f_*)^\perp$, $(\check{cek}f_*)^\perp$ 'te Δ 'nın tamamlayan alt uzayıdır. $S(\check{cek}f_*)$, $T_p M_1$ 'de non dejenere olduğundan

$$T_p M_1 = S(\check{cek}f_*) \perp (S(\check{cek}f_*)^\perp)$$

ifadesi göz önüne alınır. Burada $(S(\check{cek}f_*)^\perp)$, $T_p M_1$ 'de $S(\check{cek}f_*)$ 'in tamamlayan alt uzayıdır. Ayrıca $S(\check{cek}f_*)$ ve $(S(\check{cek}f_*)^\perp)$ non dejenere olduğundan

$$(S(\check{cek}f_*)^\perp)^\perp = S(\check{cek}f_*)^\perp \perp (S(\check{cek}f_*)^\perp)^\perp$$

olur. Bu durumda [11, Önerme 2.4]'ten yararlanılarak " $\check{cek}f_*$ boyunca $T_p M_1$ 'in bir quasi ortonormal bazı mevcuttur." ifadesi ile birlikte herhangi $i, j \in \{1, \dots, r\}$ ve $\alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$ için

$$\begin{aligned} g(\xi_i, \xi_j) &= g(N_i, N_j) = 0, & g(\xi_i, N_j) &= \delta_{ij} \\ g(W_\alpha, \xi_j) &= g(W_\alpha, N_j) = 0, & g(W_\alpha, W_\beta) &= \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

olur. Burada $\{N_i\}$ 'ler $(S(\check{cek}f_*)^\perp)^\perp$ 'in diferensiyellenebilir null vektör alanları, $\{\xi_i\}$ 'ler Δ 'nın bazıları ve $\{W_\alpha\}$ 'lar da $S(\check{cek}f_*)^\perp$ 'in bazılarıdır. $\{N_i\}$ vektör alanlarının kümesi $\text{ltr}(\check{cek}f_*)$ ile temsil edilmek üzere aşağıdaki

$$\text{tr}(\check{cek}f_*) = \text{ltr}(\check{cek}f_*) \perp S(\check{cek}f_*)^\perp$$

ifadesini göz önüne alalım. Not edelim ki $(\text{ltr}(\check{cek}f_*))$ ile $(\check{cek}f_*)$ birbirine ortogonal değildir. Burada $\mathcal{V} = (\check{cek}f_*)$ ifadesi $T_p M_1$ 'in dikey uzayını, $\mathcal{H} = \text{tr}(\check{cek}f_*)$ ifadesi de yatay uzayı temsil etmek üzere Riemann submersiyonların genel teorisinde olduğu gibi

$$T_p M_1 = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p$$

ifadesi elde edilir. Burada $\mathcal{V}$ ile $\mathcal{H}$ birbirine ortogonal değildir [4].

Tanım 2.6.1. (M_1, g_1) bir semi-Riemann manifold ve (M_2, g_2) bir r lightlike manifold olsun. Kabul edelim ki

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

bir submersiyon olsun. Öyle ki

i.) $\text{boy } \Delta = \text{boy } \{(\check{cek}f_*) \cap (\check{cek}f_*)^\perp\} = r$, $0 < r < \min \{\text{boy } (\check{cek}f_*), \text{boy } (\check{cek}f_*)^\perp\}$,

ii.) f_* horizontal vektörlerin uzunluğunu korusun; yani

$$X, Y \in \Gamma(\mathcal{H}) \text{ için } g_1(X, Y) = g_2(f_*(X), f_*(Y))$$

olsun. Bu durumda f 'ye bir r lightlike submersiyon denir [4].

Durum 2.6.2. $\text{boy}\Delta = \text{boy}(\zeta ekf_*) < \text{boy}(\zeta ekf_*)^\perp : O$ halde

$$\mathcal{V} = \Delta \text{ ve } \mathcal{H} = S(\zeta ekf_*)^\perp \perp \text{ltr}(\zeta ekf_*)$$

olur. Bu durumda f 'ye **izotropik submersiyon** denir [4].

Durum 2.6.3. $\text{boy}\Delta = \text{boy}(\zeta ekf_*)^\perp < \text{boy}(\zeta ekf_*) : O$ halde

$$\mathcal{V} = S(\zeta ekf_*) \perp \Delta \text{ ve } \mathcal{H} = \text{ltr}(\zeta ekf_*)$$

olur. Bu durumda f 'ye **co-izotropik submersiyon** denir [4].

Durum 2.6.4. $\text{boy}\Delta = \text{boy}(\zeta ekf_*)^\perp = \text{boy}(\zeta ekf_*) : O$ halde

$$\mathcal{V} = \Delta \text{ ve } \mathcal{H} = \text{ltr}(\zeta ekf_*)$$

olur. Bu durumda f 'ye **total lightlike submersiyon** denir [4].

3. TRANSVERSAL SUBMERSİYONLAR

3.1 TRANSVERSAL SUBMERSİYONLARA GİRİŞ

Bu bölümde transversal lightlike submersiyonların geometrisi çalışılmaktadır. Bu bölümün giriş kısmında transversal lightlike submersiyonlar tanıtılarak transversal r lightlike submersiyonlar ve isotropik transversal lightlike submersiyonlar ile ilgili örnekler sunulmaktadır. Daha sonra transversal submersiyonlar için O'Neill tensörleri tanıtılarak altbölümler halinde transversal lightlike submersiyonlar için Schouten konneksiyonu, A ve T temel tensör alanına göre kovaryant türev ve eğrilikler incelenerek önemli geometrik sonuçlara ulaşılmaktadır.

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold olmak üzere

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

şeklinde dejenere liflere sahip diferensiyellenebilir submersiyonu göz önüne alalım. Bu durumda $p \in M_2$ için $f^{-1}(p)$, $\text{boy} M_1 - \text{boy} M_2$ boyutlu alt manifolddur. Diğer taraftan p noktasında f_* dönüşümünün çekirdeği

$$\ker f_* = \{X \in T_p(M_1) : f_*(X) = 0\}$$

ile tanımlanır. O halde

$$(\ker f_*)^\perp = \{Y \in T_p(M_1) : g_1(Y, X) = 0, \forall X \in \Gamma(\ker f_*)\}$$

şeklinde tanımlanır. $T_p M_1$ vektör uzayı semi-Riemann olduğundan $(\ker f_*)^\perp$, $\ker f_*$ 'ın tamamlayıcı olmayabilir.

$$\Delta = (\ker f_*) \cap (\ker f_*)^\perp \neq \{0\}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda [4]'ten yararlanarak aşağıdaki dört durumu inceleyelim:

Durum 3.1.1. $0 < \text{boy } \Delta < \min \{\text{boy } (\ker f_*), \text{boy } (\ker f_*)^\perp\}$. Bu durumda Δ , $T_p M_1$ uzayının radikal alt uzayı olur. Böylece [11]'den yararlanarak $\ker f_*$ boyunca M_1 'in quasi ortonormal bazının olduğunu söyleriz. $(\ker f_*)$ lightlike vektör uzayı olduğundan [11, Önerme 2.1]'den Δ 'ya tamamlayan non dejenere bir alt uzayın varlığı görülür.

$S(\ker f_*)$, $(\ker f_*)$ 'da Δ 'ya tamamlayan non dejenere alt uzay olsun. Bu durumda

$$\ker f_* = \Delta \perp S(\ker f_*)$$

olur. Diğer taraftan benzer şekilde

$$(\zeta ekf_*)^\perp = \Delta \perp S(\zeta ekf_*)^\perp$$

olur. Burada $S(\zeta ekf_*)^\perp$, $(\zeta ekf_*)^\perp$ 'te Δ 'nın tamamlayan alt uzayıdır. $S(\zeta ekf_*)$, $T_p M_1$ 'de non dejenere olduğundan

$$T_p M_1 = S(\zeta ekf_*) \perp (S(\zeta ekf_*)^\perp)^\perp$$

ifadesini göz önüne alacağız. Burada $(S(\zeta ekf_*)^\perp)^\perp$, $T_p M_1$ 'de $S(\zeta ekf_*)$ 'in tamamlayan alt uzayıdır. Ayrıca $S(\zeta ekf_*)$ ve $(S(\zeta ekf_*)^\perp)^\perp$ non dejenere olduğundan

$$(S(\zeta ekf_*)^\perp)^\perp = S(\zeta ekf_*)^\perp \perp (S(\zeta ekf_*)^\perp)^\perp$$

olur. Bu durumda [11, Önerme 2.4]'ten herhangi $i, j \in \{1, \dots, r\}$ ve $\alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$ için

$$\begin{aligned} g(\xi_i, \xi_j) &= g(N_i, N_j) = 0, & g(\xi_i, N_j) &= \delta_{ij} \\ g(W_\alpha, \xi_j) &= g(W_\alpha, N_j) = 0, & g(W_\alpha, W_\beta) &= \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

olur. Burada $\{N_i\}$ 'ler $(S(\zeta ekf_*)^\perp)^\perp$ in diferensiyellenebilir null vektör alanları, $\{\xi_i\}$ 'ler Δ 'nın bazıları ve $\{W_\alpha\}$ 'lar da $S(\zeta ekf_*)^\perp$ 'in bazılarıdır. $\{N_i\}$ vektör alanlarının kümesi $\text{ltr}(\zeta ekf_*)$ ile temsil edilmek üzere

$$\text{tr}(\zeta ekf_*) = \text{ltr}(\zeta ekf_*) \perp S(\zeta ekf_*)^\perp$$

ifadesini göz önüne alalım. Not edelim ki $(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ ile (ζekf_*) birbirine ortogonal değildir. Burada $\mathcal{V} = (\zeta ekf_*)$ ifadesi $T_p M_1$ 'in dikey uzayını, $\mathcal{H} = \text{tr}(\zeta ekf_*)$ ifadesi de yatay uzayı temsil etmek üzere Riemann submersiyonların genel teorisinde olduğu gibi

$$T_p M_1 = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p \quad (3.1.1)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\mathcal{V}$ ile $\mathcal{H}$ birbirine ortogonal değildir.

Tanım 3.1.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

bir submersiyon olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$g_1(X, Y) = g_2(f_*(X), f_*(Y))$$

eşitliği sağlanıyorsa f dönüşümüne bir **transversal lightlike submersiyon** denir.

Durum 3.1.2. $\text{boy} \Delta = \text{boy}(\zeta ekf_*) < \text{boy}(\zeta ekf_*)^\perp$: O halde $\mathcal{V} = \Delta$ ve $\mathcal{H} = S(\zeta ekf_*)^\perp \perp \text{ltr}(\zeta ekf_*)$ olur. Bu durumda f 'ye **izotropik transversal lightlike submersiyon** denir.

Not edelim ki $p \in M_2$ için $f^{-1}(p)$ $\text{boy}M_1 - \text{boy}M_2$ boyutlu alt manifolddur.

Şimdi transversal r lightlike ve izotropik transversal lightlike submersiyonlar için ikişer örnek vereceğiz:

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}_1^6$ ve $\mathbb{R}_1^3$ sırasıyla $g_1 = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 + (dx_5)^2 + (dx_6)^2$ ve $g_2 = -(dy_1)^2 + \frac{1}{2}(dy_2)^2 + \frac{1}{2}(dy_3)^2$ metriği ile verilen $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^3$ olsun. Burada $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ve y_1, y_2, y_3 sırasıyla $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^3$ te kanonik koordinatlardır. Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1^6 & \rightarrow & \mathbb{R}_1^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) & \rightarrow & (x_1 - x_5, x_2 + x_6, x_3 + x_4) \end{array}$$

Doğrudan işlemlerle

$$f_* \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $\text{rank } f_* = \text{boy } \mathbb{R}^3 = 3$ bulunur. Böylece f bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\text{çek} f_* = \text{Span} \left\{ W_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_5}, W_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_6}, W_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

olur. Böylece $(\text{çek} f_*)^\perp$ ifadesi de

$$(\text{çek} f_*)^\perp = \text{Span} \left\{ T_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_5}, T_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_6}, T_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

şeklinde bulunur. O halde $W_1 = T_1$

$$\Delta = (\text{çek} f_*) \cap (\text{çek} f_*)^\perp = \text{Span}\{W_1\}$$

olur. Dolayısıyla $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için $g_1(\xi, V) \neq 0$ olacak şekilde V vektörünün $V = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ile seçilmesi sonucunda (2.4.4) yani,

$$N = \frac{1}{g_1(\xi, V)} \left\{ V - \frac{g_1(V, V)}{2g_1(\xi, V)} \cdot \xi \right\}$$

eşitliğinde yerine yazılması ile

$$N = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\text{ltr}(\text{çek} f_*) = \text{Span} \left\{ N = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_5} \right) \right\}$$

olur. Kolayca gösterilebilir ki $g_1(N, W_1) = 1$, $g_1(N, W_2) = 0$, $g_1(N, W_3) = 0$ dır. Böylece dikey ve yatay uzaylar

$$\mathcal{V} = \text{Span}\{W_1, W_2, W_3\},$$

$$\mathcal{H} = \text{Span}\{N, T_2, T_3\}$$

ile verilir. Ayrıca

$$f_*(T_2) = 2\frac{\partial}{\partial y_2}, f_*(T_3) = 2\frac{\partial}{\partial y_3}, f_*(N) = -\frac{\partial}{\partial y_1}$$

eşitlikleri elde edildiğinden

$$g_1(T_2, T_2) = g_2(f_*(T_2), f_*(T_2)) = 2,$$

$$g_1(T_3, T_3) = g_2(f_*(T_3), f_*(T_3)) = 2,$$

$$g_1(N, N) = 0, g_2(f_*(N), f_*(N)) = -1$$

ifadelerine ulaşılır. Buradan görülür ki $S(\text{çek}f_*)^\perp$ teki vektörlerin uzunlukları korunur; ancak $\text{ltr}(\text{çek}f_*)$ için aynı şey söylenemez. Bu durumda f dönüşümü bir transversal 1 lightlike submersiyondur.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}_2^6$ ve $\mathbb{R}_2^3$ sırasıyla $g_1 = -(dx_1)^2 - (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 + (dx_5)^2 + (dx_6)^2$ ve $g_2 = -(dy_1)^2 - (dy_2)^2 + \frac{1}{2}(dy_3)^2$ semi-Riemann metrikleriyle verilen $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^3$ olsun. Burada $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ve y_1, y_2, y_3 sırasıyla $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^3$ ün kanonik koordinatlarıdır. Aşağıdaki

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2^6 & \rightarrow & \mathbb{R}_2^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) & \rightarrow & (x_1 + x_4, x_2 + x_5, x_3 + x_6) \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Doğrudan işlemlerle

$$f_* \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $\text{rank } f_* = \text{boy } \mathbb{R}^3 = 3$ bulunur. Böylece f bir submersiyondur. Diğer taraftan,

$$\text{çek}f_* = \text{Span} \left\{ W_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}, W_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_5}, W_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_6} \right\}$$

olur. Böylece $(\text{çek}f_*)^\perp$ ifadesi de

$$(\text{çek}f_*)^\perp = \text{Span} \left\{ T_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}, T_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_5}, T_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_6} \right\}$$

şeklinde bulunur. O halde $(\text{çek}f_*) \cap (\text{çek}f_*)^\perp = \text{Sp}\{W_1 = T_1, W_2 = T_2\}$ olur. Böylece

$$N_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \right),$$

$$N_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

olur. Diğer taraftan

$$f_*(T_3) = (0, 0, 2),$$

$$f_*(N_1) = (1, 0, 0),$$

$$f_*(N_2) = (0, 1, 0)$$

olarak bulunur. O halde transversal submersiyonun son şartı incelenirse;

$$g_1(T_3, T_3) = g_2(f_*(T_3), f_*(T_3)) = 2,$$

$$g_1(N_1, N_1) = 0, \quad g_2(f_*(N_1), f_*(N_1)) = -1 \text{ olduğundan } g_1(N_1, N_1) \neq g_2(f_*(N_1), f_*(N_1)),$$

$$g_1(N_2, N_2) = 0, \quad g_2(f_*(N_2), f_*(N_2)) = -1 \text{ olduğundan } g_1(N_2, N_2) \neq g_2(f_*(N_2), f_*(N_2))$$

eşitlikleri bulunur. Böylece f transversal 2 lightlike submersiyondur.

Örnek 3.1.3. $\mathbb{R}_1^4$ ve $\mathbb{R}_1^3$ sırasıyla $g_1 = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2$ ve $g_2 = -(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2$ semi-Riemann metrikleriyle verilen $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^3$ olsun. Burada x_1, x_2, x_3, x_4 $\mathbb{R}^4$ 'te kanonik koordinatlardır ve y_1, y_2, y_3 $\mathbb{R}^3$ 'te kanonik koordinatlardır. Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1^4 & \rightarrow & \mathbb{R}_1^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \rightarrow & (x_1 + x_2, x_3, x_4) \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada f 'nin submersiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

Diğer taraftan

$$\zeta ek f_* = \text{Span} \left\{ W_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$$

olur. Böylece $(\zeta ek f_*)^\perp$ ifadesi de

$$(\zeta ek f_*)^\perp = \text{Span} \left\{ T_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, T_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, T_3 = \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$(\zeta ek f_*) \cap (\zeta ek f_*)^\perp = \text{Span} \left\{ W_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$$

olur. Diğer taraftan

$$N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$f_*(T_2) = (0, 1, 0),$$

$$f_*(T_3) = (0, 0, 1),$$

$$f_*(N) = (1, 0, 0)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} g_1(T_2, T_2) &= g_2(f_*(T_2), f_*(T_2)) = 1, \\ g_1(T_3, T_3) &= g_2(f_*(T_3), f_*(T_3)) = 1, \\ g_1(N, N) &= 0, \quad g_2(f_*(N), f_*(N)) = -1 \end{aligned}$$

eşitliklerinden f 'nin bir izotropik transversal lightlike submersiyon olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.1.4. $\mathbb{R}_2^6$ ve $\mathbb{R}_2^4$ sırasıyla $g_1 = -(dx_1)^2 - (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 + (dx_5)^2 + (dx_6)^2$ ve $g_2 = -(dy_1)^2 - (dy_2)^2 + (dy_3)^2 + (dy_4)^2$ semi-Riemann metrikleriyle verilen $\mathbb{R}^6$ ve $\mathbb{R}^4$ olsun. Burada $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ $\mathbb{R}^6$ da kanonik koordinatlar ve y_1, y_2, y_3, y_4 $\mathbb{R}^4$ te kanonik koordinatlardır. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}_2^6 &\rightarrow \mathbb{R}_2^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &\rightarrow \left(\frac{x_1+x_5}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+x_6}{\sqrt{2}}, x_3, x_4 \right) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada f 'nin submersiyon olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan

$$\zeta ek f_* = \text{Span} \left\{ W_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_5}, W_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_6} \right\}$$

olur. Böylece $(\zeta ek f_*)^\perp$ ifadesi de

$$(\zeta ek f_*)^\perp = \text{Span} \left\{ T_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_5}, T_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_6}, T_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, T_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$(\zeta ek f_*) \cap (\zeta ek f_*)^\perp = \Delta = \text{Span} \{ W_1 = T_1, W_2 = T_2 \}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0 \right), \\ N_2 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} f_*(T_3) &= (0, 0, 1, 0), \\ f_*(T_4) &= (0, 0, 0, 1), \\ f_*(N_1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right), \\ f_*(N_2) &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g_1(T_3, T_3) &= g_2(f_*(T_3), f_*(T_3)) = 1, \\ g_1(T_4, T_4) &= g_2(f_*(T_4), f_*(T_4)) = 1, \\ g_1(N_1, N_1) &= 0, \quad g_2(f_*(N_1), f_*(N_1)) = -\frac{1}{2}, \\ g_1(N_2, N_2) &= 0, \quad g_2(f_*(N_2), f_*(N_2)) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden f 'nin izotropik transversal lightlike submersiyon olduğu bulunur.

Sonuç 3.1.1. *O halde dejenere liflere sahip olan bir transversal submersiyon için transversal r lightlike ve izotropik transversal submersiyon kavramlarından bahsedilebilir; ancak co-izotropik ve total lightlike submersiyonlardan bahsedilemez; çünkü co-izotropik ve total lightlike submersiyonların yatay kısmı $S(\text{çek}f_*)^\perp$ 'i içermeyip sadece $\text{ltr}(\text{çek}f_*)$ kısmını içerdiğinden bu submersiyonlar için Tanım 3.1.1'deki gibi izometri şartı sağlanmaz.*

Lemma 3.1.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için

$$g_1(X, Y) = g_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \circ f$$

olur.

İspat: Transversal submersiyonun izometri şartından $X, Y \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_{1_p}(X, Y) &= g_{2_{f(p)}}(f_*(X), f_*(Y)) \\ g_{1_p}(X, Y) &= g_{2_{f(p)}}(\tilde{X}|_{f(p)}, \tilde{Y}|_{f(p)}) \\ g_1(X, Y) &= g_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \circ f \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.1.1. M_1 ve M_2 birer semi-Riemann manifold ve

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

bir transversal submersiyon olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için $h\nabla_X Y, \nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{M}_2} \tilde{Y}$ ya f bağlıdır.

İspat: Bir semi-Riemann manifoldda torsiyonsuz metrik konneksiyon Levi Civita konneksiyon olduğundan Koszul eşitliği elde edilir. Herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$ için

$$2g_1(\nabla_X Y, Z) = X(g_1(Y, Z)) + Y(g_1(X, Z)) - Z(g_1(X, Y)) \\ + g_1([X, Y], Z) + g_1([Z, X], Y) - g_1([Y, Z], X)$$

olur. Transversal submersiyonun izometri şartından

$$X(g_1(Y, Z)) = Xg_2(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \circ f = \tilde{X}(g_2(\tilde{Y}, \tilde{Z})) \circ f, \\ Y(g_1(X, Z)) = Yg_2(\tilde{X}, \tilde{Z}) \circ f = \tilde{Y}(g_2(\tilde{X}, \tilde{Z})) \circ f, \\ Z(g_1(X, Y)) = Zg_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \circ f = \tilde{Z}(g_2(\tilde{X}, \tilde{Y})) \circ f, \\ g_1([X, Y], Z) = g_2([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) \circ f, \\ g_1([Z, X], Y) = g_2([\tilde{Z}, \tilde{X}], \tilde{Y}) \circ f, \\ g_1([Y, Z], X) = g_2([\tilde{Y}, \tilde{Z}], \tilde{X}) \circ f,$$

olur. Bu durumda

$$2g_1(\nabla_X Y, Z) = \tilde{X}g_2(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \circ f + \tilde{Y}g_2(\tilde{X}, \tilde{Z}) \circ f - \tilde{Z}g_2(\tilde{Y}, \tilde{X}) \circ f \\ - g_2(\tilde{X}, [\tilde{Y}, \tilde{Z}]) \circ f + g_2(\tilde{Y}, [\tilde{Z}, \tilde{X}]) \circ f + g_2(\tilde{Z}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]) \circ f$$

bulunmuş olur. M_2 semi-Riemann manifold olduğundan Levi-Civita konneksiyonuna sahiptir. Buradan $\overset{M_2}{\nabla}$ Koszul eşitliğini sağlar. O halde

$$g_1(\nabla_X Y, Z) = g_2(\overset{M_2}{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) \circ f$$

bulunur. Böylece

$$g_1(v\nabla_X Y + h\nabla_X Y, Z) = g_2(\overset{M_2}{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) \circ f, \\ \underbrace{g_1(v\nabla_X Y, Z)}_{=0} + \underbrace{g_1(h\nabla_X Y, Z)}_{\neq 0} = g_2(\overset{M_2}{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) \circ f$$

olacağından $h\nabla_X Y, \overset{M_2}{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ ya f bağlıdır.

Not 3.1.1. M_1 ve M_2 birer semi-Riemann manifold ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere Teorem 3.1.1 'deki ifade $N_1, N_2 \in \Gamma(ltr(\check{c}ekf_*))$ için geçerli değildir.

Not 3.1.2. Herhangi bir $U \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*))$ ve $X \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$ için $[X, U]$ dikey vektör alanıdır.

Teorem 3.1.2. M_1 ve M_2 sırasıyla g_1 ve g_2 metrikleriyle verilen semi-Riemann manifold ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda ∇ bir Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\forall N_1, N_2, N_3 \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ için

$$g_1(\nabla_{N_1} N_2, N_3) = -g_1(N_2, \nabla_{N_1} N_3)$$

olur.

İspat: Aşağıdaki

$$(\nabla_{N_1} g_1)(N_2, N_3) = N_1 g_1(N_2, N_3) - g_1(\nabla_{N_1} N_2, N_3) - g_1(N_2, \nabla_{N_1} N_3) \quad (3.1.2)$$

eşitliği ele alınsın. Bir semi-Riemann manifoldda torsiyonsuz metrik konneksiyon Levi Civita konneksiyon olduğundan

$$(\nabla_{N_1} g_1)(N_2, N_3) = 0 \quad (3.1.3)$$

olur. Diğer taraftan $N_2, N_3 \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ olduğundan

$$g_1(N_2, N_3) = 0$$

olur. Böylece

$$N_1 g_1(N_2, N_3) = 0 \quad (3.1.4)$$

olur. O halde (3.1.3) ve (3.1.4) eşitlikleri (3.1.2)'de yerine yazılırsa

$$0 = -g_1(\nabla_{N_1} N_2, N_3) - g_1(N_2, \nabla_{N_1} N_3).$$

Buradan

$$g_1(\nabla_{N_1} N_2, N_3) = -g_1(N_2, \nabla_{N_1} N_3)$$

eşitliği elde edilir.

3.1.1 Transversal Submersiyonlar İçin O'Neill Tensörleri

Bu bölümde transversal submersiyonlar için Şahin ve Gündüzalp'in [4]'teki çalışmasından yararlanılarak O'Neill tensörleri tanıtılacak ve bu tensörler kullanılarak bazı önemli özellikler sunulacaktır:

M_1 ve M_2 birer semi-Riemann manifold,

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

bir transversal submersiyon, E ve F de M_1 üzerinde herhangi vektör alanları olmak üzere

$$h : TM_1 \rightarrow \mathcal{H} \text{ ve } v : TM_1 \rightarrow \mathcal{V}$$

projeksiyonları $TM_1 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ direkt toplam ayrışmaları ile bağlantılı doğal projeksiyonu gösterebilir. ∇ da (M_1, g_1) in Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $(1, 2)$ tipindeki T tensör alanı

$$T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF \quad (3.1.5)$$

ile tanımlanır. Riemann submersiyonlarda olduğu gibi T tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. T yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.
2. T dikeydir; yani $T_E = T_{vE}$ dir.

Diğer taraftan A tensör alanı

$$A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF \quad (3.1.6)$$

ile tanımlanır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. A yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.
2. A yataydır; yani $A_E = A_{hE}$

dir [4].

Lemma 3.1.2. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere

1. $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)), V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$T_U V = h\nabla_U V, \quad (3.1.7)$$

2. $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)), \xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$T_U \xi = h\nabla_U \xi, \quad (3.1.8)$$

3. $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$T_\xi V = h\nabla_\xi V, \quad (3.1.9)$$

4. $\xi_1 \in \Gamma(\Delta)$, $\xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için

$$T_{\xi_1} \xi_2 = h\nabla_{\xi_1} \xi_2, \quad (3.1.10)$$

dir.

İspat: 1. (3.1.7) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.5) eşitliğinden yararlanılırsa $U, V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$T_U V = h\nabla_{vU} vV + v\nabla_{vU} hV$$

olur. Bu durumda $hV = 0$ olacağından

$$T_U V = h\nabla_{vU} vV = h\nabla_U V \quad (3.1.11)$$

olur.

2. Durum: $T_U V$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $U, V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{Ug_1(V, \xi)}_{=0} &= g_1(\nabla_U V, \xi) + g_1(V, \nabla_U \xi), \\ g_1(\nabla_U V, \xi) &= -g_1(V, \nabla_U \xi), \\ g_1(T_U V, \xi) &= -\underbrace{g_1(V, v\nabla_U \xi)}_{\neq 0}, \\ T_U V &\neq 0 \end{aligned}$$

olur.

b.) $U, V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{Ug_1(V, X)}_{=0} &= g_1(\nabla_U V, X) + g_1(V, \nabla_U X), \\ g_1(\nabla_U V, X) &= -g_1(V, \nabla_U X), \\ g_1(T_U V, X) &= -\underbrace{g_1(V, v\nabla_U X)}_{\neq 0}, \\ T_U V &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.11) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.7) eşitliği elde edilmiş olur.

2. (3.1.8) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.5) eşitliğinden yararlanılırsa $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ ve $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$T_U \xi = h \nabla_{vU} v \xi + v \nabla_{vU} h \xi$$

olur. Bu durumda $h \xi = 0$ olacağından

$$T_U \xi = h \nabla_{vU} v \xi = h \nabla_U \xi \quad (3.1.12)$$

olur.

2. Durum: $T_U \xi$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{U g_1(\xi_1, \xi_2)}_{=0} &= g_1(\nabla_U \xi_1, \xi_2) + g_1(\xi_1, \nabla_U \xi_2), \\ g_1(\nabla_U \xi_1, \xi_2) &= -g_1(\xi_1, \nabla_U \xi_2), \\ g_1(T_U \xi_1, \xi_2) &= -\underbrace{g_1(\xi_1, h \nabla_U \xi_2)}_{\neq 0}, \\ T_U \xi_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

olur.

b.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ ve $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{U g_1(\xi, X)}_{=0} &= g_1(\nabla_U \xi, X) + g_1(\xi, \nabla_U X), \\ g_1(\nabla_U \xi, X) &= -g_1(\xi, \nabla_U X), \\ g_1(T_U \xi, X) &= -\underbrace{g_1(\xi, h \nabla_U X)}_{\neq 0}, \\ T_U \xi &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.12) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.8) eşitliği elde edilmiş olur.

3. (3.1.9) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.5) eşitliğinden yararlanılırsa $\xi \in \Gamma(\Delta)$ ve $V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ için

$$T_\xi V = h\nabla_{v\xi} vV + v\nabla_{v\xi} hV$$

olur. Bu durumda $hV = 0$ olacağından

$$T_\xi V = h\nabla_{v\xi} vV = h\nabla_\xi V \quad (3.1.13)$$

olur.

2. Durum: $T_\xi V$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{\xi_1 g_1(V, \xi_2)}_{=0} &= g_1(\nabla_{\xi_1} V, \xi_2) + g_1(V, \nabla_{\xi_1} \xi_2), \\ g_1(\nabla_{\xi_1} V, \xi_2) &= -g_1(V, \nabla_{\xi_1} \xi_2), \\ g_1(T_{\xi_1} V, \xi_2) &= -\underbrace{g_1(V, v\nabla_{\xi_1} \xi_2)}_{\neq 0}, \\ T_{\xi_1} V &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. .

b.) $V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $\xi_1 \in \Gamma(\Delta)$ ve $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{\xi_1 g_1(V, X)}_{=0} &= g_1(\nabla_{\xi_1} V, X) + g_1(V, \nabla_{\xi_1} X), \\ g_1(\nabla_{\xi_1} V, X) &= -g_1(V, \nabla_{\xi_1} X), \\ g_1(T_{\xi_1} V, X) &= -\underbrace{g_1(V, v\nabla_{\xi_1} X)}_{\neq 0}, \\ T_{\xi_1} V &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.13) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.9) eşitliği elde edilmiş olur.

4. (3.1.10) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.5) eşitliğinden yararlanılırsa $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için

$$T_{\xi_1} \xi_2 = h\nabla_{v_{\xi_1}} v_{\xi_2} + v\nabla_{v_{\xi_1}} h\xi_2$$

olur. Bu durumda $h\xi_2 = 0$ olacağından

$$T_{\xi_1} \xi_2 = h\nabla_{v_{\xi_1}} v_{\xi_2} = h\nabla_{\xi_1} \xi_2 \quad (3.1.14)$$

olur.

2. Durum: $T_{\xi_1} \xi_2$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{\xi_1 g_1(\xi_2, \xi_3)}_{=0} &= g_1(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) + g_1(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3), \\ g_1(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= -g_1(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3), \\ \underbrace{g_1(h\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3)}_{\neq 0} &= -\underbrace{g_1(\xi_2, h\nabla_{\xi_1} \xi_3)}_{\neq 0}, \\ g_1(T_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= -\underbrace{g_1(\xi_2, h\nabla_{\xi_1} \xi_3)}_{\neq 0}, \\ T_{\xi_1} \xi_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

olur.

b.) $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ ve $X \in \Gamma(S(\zeta e f_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{\xi_1 g_1(\xi_2, X)}_{=0} &= g_1(\nabla_{\xi_1} \xi_2, X) + g_1(\xi_2, \nabla_{\xi_1} X), \\ g_1(\nabla_{\xi_1} \xi_2, X) &= -g_1(\xi_2, \nabla_{\xi_1} X), \\ g_1(T_{\xi_1} \xi_2, X) &= -\underbrace{g_1(\xi_2, h\nabla_{\xi_1} X)}_{\neq 0}, \\ T_{\xi_1} \xi_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.14) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.10) eşitliği elde edilmiş olur.

Lemma 3.1.3. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere Lemma 3.1.2'den $W_1, W_2 \in \Gamma(\zeta ek f_*)$ için

$$T_{W_1} W_2 = h \nabla_{W_1} W_2 \quad (3.1.15)$$

dir.

Lemma 3.1.4. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere

1.) $U \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$T_U X = v \nabla_U X, \quad (3.1.16)$$

2.) $U \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*))$ için

$$T_U N = v \nabla_U N, \quad (3.1.17)$$

3.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$T_\xi X = v \nabla_\xi X, \quad (3.1.18)$$

4.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*))$ için

$$T_\xi N = v \nabla_\xi N \quad (3.1.19)$$

dir.

İspat: 1. (3.1.16) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.5) eşitliğinden yararlanılırsa

$$T_U X = h \nabla_{vU} vX + v \nabla_{vU} hX$$

olur. Bu durumda $vX = 0$ olacağından

$$T_U X = v\nabla_{vU} hX = v\nabla_U X \quad (3.1.20)$$

olur.

2. Durum: $T_U X$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $U, V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)), X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{Ug_1(X, V)}_{=0} &= g_1(\nabla_U X, V) + g_1(X, \nabla_U V), \\ g_1(\nabla_U X, V) &= -g_1(X, \nabla_U V), \\ g_1(T_U X, V) &= -\underbrace{g_1(X, h\nabla_U V)}_{\neq 0}, \\ T_U X &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $T_U X \neq 0$ olur.

b.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)), X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{Ug_1(X, N)}_{=0} &= g_1(\nabla_U X, N) + g_1(X, \nabla_U N), \\ g_1(\nabla_U X, N) &= -g_1(X, \nabla_U N), \\ g_1(T_U X, N) &= -\underbrace{g_1(X, h\nabla_U N)}_{\neq 0}, \\ T_U X &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.20) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.16) eşitliği elde edilmiş olur.

Lemma 3.1.5. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere Lemma 3.1.4'ten $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$, $F \in \Gamma(tr(\zeta ekf_*))$ için

$$T_W F = v\nabla_W F$$

dir.

Lemma 3.1.6. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere

1.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$A_X U = h \nabla_X U, \quad (3.1.21)$$

2.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$A_X \xi = h \nabla_X \xi, \quad (3.1.22)$$

3.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$A_N U = h \nabla_N U, \quad (3.1.23)$$

4.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$A_N \xi = h \nabla_N \xi \quad (3.1.24)$$

dir.

İspat: 1. (3.1.21) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.6) eşitliğinden yararlanılırsa

$$A_X U = v \nabla_{hX} hU + h \nabla_{hX} vU$$

olur. Bu durumda $hU = 0$ olacağından

$$A_X U = h \nabla_{hX} vU = h \nabla_X U \quad (3.1.25)$$

olur.

2. Durum: $A_X U$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)), X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), \xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{Xg_1(U, \xi)}_{=0} &= g_1(\nabla_X U, \xi) + g_1(U, \nabla_X \xi), \\ g_1(\nabla_X U, \xi) &= -g_1(U, \nabla_X \xi), \\ A_X U &\neq 0 \end{aligned}$$

b.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)), X_1, X_2 \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{X_1 g_1(U, X_2)}_{=0} &= g_1(\nabla_{X_1} U, X_2) + g_1(U, \nabla_{X_1} X_2), \\ g_1(\nabla_{X_1} U, X_2) &= -g_1(U, \nabla_{X_1} X_2), \\ A_{X_1} U &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.25) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.21) eşitliği elde edilmiş olur.

Lemma 3.1.7. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere Lemma 3.1.6' dan yararlanılarak $F \in \Gamma(tr(\zeta ekf_*)), W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ için

$$A_F W = h \nabla_F W$$

sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.1.8. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere

1.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$A_X Y = v \nabla_X Y, \quad (3.1.26)$$

2.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$A_X N = v \nabla_X N, \quad (3.1.27)$$

3.) $N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*)), X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$A_N X = v \nabla_N X, \quad (3.1.28)$$

4.) $N_1, N_2 \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ için

$$A_{N_1} N_2 = v \nabla_{N_1} N_2 \quad (3.1.29)$$

dir.

İspat: 1. (3.1.26) eşitliğini ispatlayalım:

Burada iki durum göz önüne alacağız:

1. Durum: Transversal r lightlike submersiyon için (3.1.6) eşitliğinden yararlanılırsa

$$A_X Y = v \nabla_{hX} hY + h \nabla_{hX} vY$$

olur. Bu durumda $vY = 0$ olacağından

$$A_X Y = v \nabla_{hX} hY = v \nabla_X Y \quad (3.1.30)$$

olur.

2. Durum: $A_X Y$ ile çarpımları sıfırdan farklı olacak distribüsyonlardan elemanlar seçerek aşağıdaki denklemleri inceleyelim:

a.) $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{X g_1(Y, U)}_{=0} &= g_1(\nabla_X Y, U) + g_1(Y, \nabla_X U), \\ g_1(\nabla_X Y, U) &= -g_1(U, \nabla_X Y), \\ A_X Y &\neq 0 \end{aligned}$$

b.) $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ için

$$\begin{aligned} \underbrace{X g_1(Y, N)}_{=0} &= g_1(\nabla_X Y, N) + g_1(Y, \nabla_X N), \\ g_1(\nabla_X Y, N) &= -g_1(Y, \nabla_X N), \\ A_X Y &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece **2. Durum**'dan yararlanılarak **1. Durum**'da elde edilen (3.1.30) eşitliğinin sıfırdan farklı olduğu görülür. O halde **1. Durum** ve **2. Durum**'dan (3.1.26) eşitliği elde edilmiş olur.

Lemma 3.1.9. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere Lemma 3.1.8'den yararlanılarak $F_1, F_2 \in \Gamma(\text{tr}(\text{çek}f_*))$ için

$$A_{F_1}F_2 = v\nabla_{F_1}F_2$$

sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.1.10. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda herhangi $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$, $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$, $N_1, N_2 \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ için

$$1.) \quad g_1(T_U N_1, N_2) = -g_1(N_1, T_U N_2),$$

$$2.) \quad g_1(T_\xi N_1, N_2) = -g_1(N_1, T_\xi N_2),$$

$$3.) \quad g_1(A_N \xi_1, \xi_2) = -g_1(\xi_1, A_N \xi_2),$$

$$4.) \quad g_1(A_X N_1, N_2) = -g_1(N_1, A_X N_2)$$

ifadeleri elde edilir.

İspat: İlk eşitliğin ispatını yapalım:

(M_1, g_1) bir semi-Riemann manifold olduğundan metrik konneksiyondur. Burdan yola çıkılarak $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $N_1, N_2 \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ için

$$\underbrace{U g_1(N_1, N_2)}_{=0} = g_1(\nabla_U N_1, N_2) + g_1(N_1, \nabla_U N_2),$$

$$g_1(\nabla_U N_1, N_2) = -g_1(N_1, \nabla_U N_2)$$

olur. Lemma 3.1.4'ten yararlanılarak

$$g_1(T_U N_1, N_2) = -g_1(N_1, T_U N_2)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde 2.), 3.) ve 4.) ün ispatı da kolayca yapılabilir.

Lemma 3.1.11. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold, ∇ , M_1 'de Levi-Civita konneksiyonu, T ve A temel tensör alanları,

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $W_1, W_2 \in \Gamma(\text{çek}f_*)$ için

$$\nabla_{W_1} W_2 = T_{W_1} W_2 + \nu \nabla_{W_1} W_2, \quad (3.1.31)$$

2.) $W \in \Gamma(\text{çek}f_*), \xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\nabla_W \xi = T_W \xi + \nu \nabla_W \xi, \quad (3.1.32)$$

3.) $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*), W \in \Gamma(\text{çek}f_*)$ için

$$\nabla_U W = T_U W + \nu \nabla_U W, \quad (3.1.33)$$

4.) $U, V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ için

$$\nabla_U V = T_U V + \nu \nabla_U V, \quad (3.1.34)$$

5.) $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*), \xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\nabla_U \xi = T_U \xi + \nu \nabla_U \xi, \quad (3.1.35)$$

6.) $\xi \in \Gamma(\Delta), W \in \Gamma(\text{çek}f_*)$ için

$$\nabla_\xi W = T_\xi W + \nu \nabla_\xi W, \quad (3.1.36)$$

7.) $\xi_1 \in \Gamma(\Delta), \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\nabla_{\xi_1} \xi_2 = T_{\xi_1} \xi_2 + \nu \nabla_{\xi_1} \xi_2, \quad (3.1.37)$$

8.) $\xi \in \Gamma(\Delta), V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ için

$$\nabla_\xi V = T_\xi V + \nu \nabla_\xi V. \quad (3.1.38)$$

İspat: Biz burada ilk eşitliği ispatlayacağız. Diğer eşitliklerin ispatı benzer şekilde yapılır.

$W_1, W_2 \in \Gamma(\text{çek}f_*)$ olmak üzere

$$\nabla_{W_1} W_2 = \nu \nabla_{W_1} W_2 + h \nabla_{W_1} W_2$$

dir. Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3'ten yararlanılarak

$$\nabla_{W_1} W_2 = \nu \nabla_{W_1} W_2 + T_{W_1} W_2$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (3.1.31) eşitliği bulunmuş olur.

Lemma 3.1.12. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold, ∇ , M_1 de Levi-Civita konneksiyon, T ve A temel tensör alanları

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_W N = T_W N + h \nabla_W N, \quad (3.1.39)$$

2.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_U N = T_U N + h \nabla_U N, \quad (3.1.40)$$

3.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_\xi N = T_\xi N + h \nabla_\xi N, \quad (3.1.41)$$

4.) $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$, $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$\nabla_W X = T_W X + h \nabla_W X, \quad (3.1.42)$$

5.) $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $F \in \Gamma(tr(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_U F = T_U F + h \nabla_U F, \quad (3.1.43)$$

6.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $F \in \Gamma(tr(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_\xi F = T_\xi F + h \nabla_\xi F, \quad (3.1.44)$$

7.) $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$, $F \in \Gamma(tr(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_W F = T_W F + h \nabla_W F. \quad (3.1.45)$$

İspat: Biz burada ilk eşitliği ispatlayacağız. Diğer eşitliklerin ispatı benzer şekilde yapılır.

$W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ olmak üzere

$$\nabla_W N = v \nabla_W N + h \nabla_W N$$

dir. Lemma 3.1.4 ve Lemma 3.1.5'ten yararlanılarak

$$\nabla_W N = T_W N + h \nabla_W N$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (3.1.39) eşitliği bulunmuş olur.

Lemma 3.1.13. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ için

$$\nabla_X W = A_X W + v \nabla_X W, \quad (3.1.46)$$

2.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\nabla_X \xi = A_X \xi + v \nabla_X \xi, \quad (3.1.47)$$

3.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$, $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ için

$$\nabla_N W = A_N W + v \nabla_N W, \quad (3.1.48)$$

4.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_N U = A_N U + v \nabla_N U, \quad (3.1.49)$$

5.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$\nabla_N \xi = A_N \xi + v \nabla_N \xi, \quad (3.1.50)$$

6.) $F \in \Gamma(tr(\zeta ekf_*))$, $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ için

$$\nabla_F W = A_F W + v \nabla_F W, \quad (3.1.51)$$

7.) $F \in \Gamma(\text{tr}(\zeta ekf_*)), U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_F U = A_F U + \nu \nabla_F U. \quad (3.1.52)$$

İspat: Biz burada ilk eşitliği ispatlayacağız. Diğer eşitliklerin ispatı benzer şekilde yapılır.

$X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ olmak üzere

$$\nabla_X W = \nu \nabla_X W + h \nabla_X W$$

dir. Lemma 3.1.6 ve Lemma 3.1.7'ten yararlanılarak

$$\nabla_X W = A_X W + \nu \nabla_X W$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (3.1.46) eşitliği bulunmuş olur.

Lemma 3.1.14. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_X N = A_X N + h \nabla_X N, \quad (3.1.53)$$

2.) $N_1, N_2 \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_{N_1} N_2 = A_{N_1} N_2 + h \nabla_{N_1} N_2, \quad (3.1.54)$$

3.) $F_1, F_2 \in \Gamma(\text{tr}(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_{F_1} F_2 = A_{F_1} F_2 + h \nabla_{F_1} F_2, \quad (3.1.55)$$

4.) $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp), F \in \Gamma(\text{tr}(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_X F = A_X F + h \nabla_X F, \quad (3.1.56)$$

5.) $N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*)), F \in \Gamma(\text{tr}(\zeta ekf_*))$ için

$$\nabla_N F = A_N F + h \nabla_N F, \quad (3.1.57)$$

6.) $F \in \Gamma(\text{tr}(\zeta ek f_*)), N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ek f_*))$ için

$$\nabla_F N = A_F N + h \nabla_F N, \quad (3.1.58)$$

7.) $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$\nabla_X Y = A_X Y + h \nabla_X Y. \quad (3.1.59)$$

İspat: Biz burada ilk eşitliği ispatlayacağız. Diğer eşitliklerin ispatı benzer şekilde yapılır.

$X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ek f_*))$ olmak üzere

$$\nabla_X N = v \nabla_X N + h \nabla_X N$$

dir. Lemma 3.1.8 ve Lemma 3.1.9'dan yararlanılarak

$$\nabla_X N = A_X N + h \nabla_X N$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (3.1.53) eşitliği bulunmuş olur.

Teorem 3.1.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $\zeta ek f_*$ integrallenebilirdir.

İspat: $W_1, W_2 \in \Gamma(\zeta ek f_*), g_2 \in C^\infty(M_2, \mathbb{R})$ için

$$W_{1p} \in \Gamma(\zeta ek f_{*p}),$$

$$W_{2p} \in \Gamma(\zeta ek f_{*p}),$$

olur. Diğer taraftan

$$f_*(W_1) = \tilde{W}_1 = 0,$$

$$f_*(W_2) = \tilde{W}_2 = 0,$$

olacağından [1, Lemma 1.4.4]'ten yararlanılarak W ile $\tilde{W}$, f bağlı ise $g_2 \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ için

$\tilde{W}(g) = f_*(X)g_2 = X(g_2 \circ f)$ 'tir. Böylece Lie parantez operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} [\tilde{W}_1, \tilde{W}_2]g_2 &= \tilde{W}_1 \tilde{W}_2(g_2) - \tilde{W}_2 \tilde{W}_1(g_2), \\ &= W_1(\tilde{W}_2(g_2) \circ f) - W_2(\tilde{W}_1(g_2) \circ f), \\ &= W_1(W_2(g_2 \circ f)) - W_2(W_1(g_2 \circ f)), \\ &= [W_1, W_2](g_2 \circ f), \\ &= f_*([W_1, W_2]) \circ g_2 \end{aligned}$$

olup $[W_1, W_2] \in \Gamma(\zeta ek f_*)$ olup $\zeta ek f_*$ integrallenebilirdir.

Not 3.1.3. $(\tilde{M}_1, \tilde{g}_1)$ ve $(\tilde{M}_2, \tilde{g}_2)$ birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (\tilde{M}_1, \tilde{g}_1) \rightarrow (\tilde{M}_2, \tilde{g}_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon $\tilde{\nabla}$ da $\tilde{M}_1$ manifoldu üzerinde $\tilde{g}_1$ metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu olsun. Kabul edelim ki $S(\text{çek}f_*)$ ve $tr(\text{çek}f_*)$ sırasıyla screen distribüsyon ve M_1 ' in transversal lightlike vektör demeti olsun. Bu durumda

$$T\tilde{M}_1 = \text{çek}f_* \oplus tr(\text{çek}f_*)$$

ayrışımı, (3.1.5) eşitliği ve (3.1.7)'den yararlanılarak

$$\tilde{\nabla}_U V = \hat{\nabla}_U V + T_U V \quad (3.1.60)$$

eşitliği elde edilir. Burada $T_U V$, $\Gamma(ltr(\text{çek}f_*))$ 'a bağlı iken $\hat{\nabla}_U V$, $\Gamma(\text{çek}f_*)$ 'a bağlıdır.

Eğer P , $v = S(\text{çek}f_*) \oplus \Delta$ ayrışmasına göre $S(\text{çek}f_*)$ 'da $(\text{çek}f_*)$ 'in projeksiyon morfizmini tanımlarsa bu durumda

$$\nabla_U PV = v^* \tilde{\nabla}_U PV + h^* \nabla_U PV$$

ayrışımında (3.1.7) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\nabla_U PV = \hat{\nabla}_U^* PV + T_U^* PV \quad (3.1.61)$$

eşitliği elde edilir. Burada $T_U^* PV$, $\Gamma(\Delta)$ 'ya bağlı iken $\hat{\nabla}_U^* PV$ ifadesi de $\Gamma(S(\text{çek}f_*))$ 'a bağlıdır.

Teorem 3.1.4. $(\tilde{M}_1, \tilde{g}_1)$ ve $(\tilde{M}_2, \tilde{g}_2)$ birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (\tilde{M}_1, \tilde{g}_1) \rightarrow (\tilde{M}_2, \tilde{g}_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $S(\text{çek}f_*)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart, her $U, V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ için

$$T_U^* PV = T_V^* PU$$

dur.

İspat: $U, V \in \Gamma(\text{çek}f_*)$, $N \in \Gamma(ltr(\text{çek}f_*))$ olsun. ∇ torsiyonsuz olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1([U, V], N) &= \tilde{g}_1(\nabla_U V - \nabla_V U, N), \\ &= \tilde{g}_1(\nabla_U V, N) - \tilde{g}_1(\nabla_V U, N) \end{aligned}$$

dir. (3.1.61)'den

$$\tilde{g}_1([U, V], N) = \tilde{g}_1(\widehat{\nabla}_U^* PV, N) + \tilde{g}_1(T_U^* PV, N) - \tilde{g}_1(\widehat{\nabla}_V^* PU, N) - \tilde{g}_1(T_V^* PU, N)$$

olur. Buradan $\tilde{g}_1(\widehat{\nabla}_U^* PV, N) = 0$ ve $\tilde{g}_1(\widehat{\nabla}_V^* PU, N) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}_1([U, V], N) = \tilde{g}_1(T_U^* PV, N) - \tilde{g}_1(T_V^* PU, N)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon; $\xi, \xi' \in \Gamma(\Delta)$ ve $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

i.) Δ integrallenebilirdir.

ii.) $g_1(\xi', T_\xi U) = g_1(\xi, T_{\xi'} U)$ dur.

iii.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$; $W, W' \in \Gamma((\text{çek}f_*))$ için

$$(L_\xi g_1)(W, W') = 0$$

dur.

İspat: $i) \Rightarrow ii.)$ $\xi, \xi' \in \Gamma(\Delta)$, $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ için Δ 'nın integrallenebilmesi için $[\xi, \xi'] \in \Gamma(\Delta)$ olmalıdır. Öncelikle

$$\begin{aligned} g_1([\xi, \xi'], U) &= g_1(\nabla_\xi \xi' - \nabla_{\xi'} \xi, U), \\ &= g_1(\nabla_\xi \xi', U) - g_1(\nabla_{\xi'} \xi, U) \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

olur. Diğer taraftan ∇ , Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$\xi g_1(\xi', U) = g_1(\nabla_\xi \xi', U) + g_1(\xi', \nabla_\xi U)$$

$\xi g_1(\xi', U) = 0$ olduğundan

$$g_1(\nabla_\xi \xi', U) = -g_1(\xi', \nabla_\xi U) \quad (3.1.63)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\xi' g_1(\xi, U) = g_1(\nabla_{\xi'} \xi, U) + g_1(\xi, \nabla_{\xi'} U)$$

bulunur. $\xi' g_1(\xi, U) = 0$ olduğundan

$$g_1(\nabla_{\xi'} \xi, U) = -g_1(\xi, \nabla_{\xi'} U) \quad (3.1.64)$$

olur. (3.1.63) ve (3.1.64)'teki ifadeler (3.1.62)'de yerine yazılırsa

$$g_1([\xi, \xi'], U) = g_1(\nabla_{\xi'} U, \xi) - g_1(\nabla_{\xi} U, \xi')$$

olur. Lemma 3.1.11'deki (3.1.38) eşitliği kullanılırsa

$$g_1([\xi, \xi'], U) = g_1(T_{\xi'} U, \xi) - g_1(T_{\xi} U, \xi')$$

ve

$$g_1([\xi, \xi'], U) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$g_1(T_{\xi'} U, \xi) = g_1(T_{\xi} U, \xi')$$

olur.

i) $\Rightarrow$ iii.)

$$(L_{\xi} g_1)(W, W') = \xi g_1(W, W') - g_1([\xi, W], W') - g_1(W, [\xi, W'])$$

ifadesi incelenirse Δ integrallenebilir olduğundan $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için $\exists W \in \Gamma(\Delta)$ vardır

$\ni [\xi, W] \in \Gamma(\Delta)$ olur. Bu durumda

$$(L_{\xi} g_1)(W, W') = 0$$

dir.

Teorem 3.1.6. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $W_1, W_2 \in \Gamma(\text{çek} f_*)$ için

$$T_{W_1} W_2 = T_{W_2} W_1$$

olur.

İspat: $W_1, W_2 \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ için Lemma 3.1.3'teki (3.1.15) eşitliği kullanılırsa

$$T_{W_1}W_2 - T_{W_2}W_1 = h[W_1, W_2]$$

olur. O halde Teorem 3.1.3'ten

$$T_{W_1}W_2 - T_{W_2}W_1 = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $S(\zeta ekf_*)^\perp$ distribüsyonu integrallenebilirse $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$A_X Y = A_Y X$$

dir. Tersine $A_X Y = A_Y X$ ise $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{H})$ 'dir.

İspat: Bu teoremin ispatını iki durum bir arada düşünülerek yapılacaktır.

1. Durum:

$X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$g_1([X, Y], U) = g_1(\nabla_X Y, U) - g_1(\nabla_Y X, U)$$

olur. Bu durumda (3.1.59)'dan

$$\begin{aligned} g_1([X, Y], U) &= g_1(A_X Y, U) + \underbrace{g_1(h\nabla_X Y, U)}_{=0} - g_1(A_Y X, U) - \underbrace{g_1(h\nabla_Y X, U)}_{=0}, \\ g_1([X, Y], U) &= g_1(A_X Y, U) - g_1(A_Y X, U) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $S(\zeta ekf_*)^\perp$ integrallenebilir olduğundan

$$g_1(A_X Y, U) = g_1(A_Y X, U) \quad (3.1.65)$$

olur.

2.Durum: $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ ve $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$g_1([X, Y], N) = g_1(\nabla_X Y, N) - g_1(\nabla_Y X, N)$$

ifadesinde (3.1.59) eşitliği kullanılırsa

$$g_1([X, Y], N) = g_1(A_X Y, N) - g_1(A_Y X, N)$$

eşitliği elde edilir. O halde $S(\zeta ekf_*)^\perp$ integrallenebilir olduğundan

$$g_1(A_X Y, N) = g_1(A_Y X, N) \quad (3.1.66)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda sırasıyla 1. Durum ve 2. Durum'daki (3.1.65) ve (3.1.66) eşitlikleri kullanılarak

$$A_X Y = A_Y X$$

sonucuna ulaşılır. Eğer $A_X Y = A_Y X$ ise $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{H})$ olacağı kolay bir şekilde gösterilebilir.

Not edelim ki bir Riemann submersiyonda $A_X Y = -A_Y X$ alterne özellik vardır. Ancak bu durum transversal r lightlike submersiyon için farklılık gösterir.

Teorem 3.1.8. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold,

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon, ∇, g_1 'in Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ için $\text{ltr}(\zeta ekf_*)$ distribüsyonu, $S(\zeta ekf_*)^\perp$ distribüsyonu yönünde paralel ise

$$A_X Y = -A_Y X \quad (3.1.67)$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Öncelikle $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için $A_X X = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ olsun. Bu durumda "Herhangi bir $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için $[X, V]$ dikey vektör alanıdır." ifadesi göz önüne alınarak $V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$\begin{aligned} Vg_1(X, X) &= 2g_1(\nabla_V X, X), \\ &= 2g_1(\nabla_X V, X), \\ &= -2g_1(\nabla_X X, V), \text{ (burada (3.1.59) eşitliği kullanılırsa)} \\ &= -2g_1(A_X X + h\nabla_X X, V), \\ &= -2g_1(A_X X, V) - 2g_1(h\nabla_X X, V), \\ &= -2g_1(A_X X, V) \end{aligned}$$

olur. M_1 bir semi-Riemann manifold olduğundan $g_1(X, X)$ her lif üzerinde sabittir. Buradan

$$Vg_1(X, X) = 0$$

olacağından

$$g_1(A_X X, V) = 0 \quad (3.1.68)$$

olması sonucuna varılır. Ancak sonucun sıfır olması şu iki şeye bağlıdır:

1.) $A_X X = 0$ ise

$$A_{(X+Y)}(X+Y) = A_X X + A_X Y + A_Y X + A_Y Y$$

olur. Buradan

$$A_X Y = -A_Y X.$$

2.) $N \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ için $g_1(A_X X, N)$ ifadesi incelenirse

$$\begin{aligned} g_1(A_X X, N) &= g_1(v\nabla_X X, N) = g_1(\nabla_X X, N), \\ &= Xg_1(X, N) - g_1(\nabla_X N, X), \\ &= -g_1(\nabla_X N, X) \end{aligned}$$

olur. O halde $N \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ olmak üzere $\text{ltr}(\text{çek}f_*)$ distribüsyonu, $S(\text{çek}f_*)^\perp$ distribüsyonu yönünde paralel ise $\nabla_X N \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ olacağından

$$g_1(A_X X, N) = 0 \quad (3.1.69)$$

olur. Böylece (3.1.68) ve (3.1.69) eşitliklerinden

$$A_X Y = -A_Y X$$

ifadesi elde edilir.

Lemma 3.1.15. (M_1, g_1) ile (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $U, V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için

$$g_1(T_U V, X) = -g_1(T_U X, V),$$

2.) $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$g_1(A_X Y, U) = -g_1(A_X U, Y),$$

3.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$g_1(T_\xi U, X) = -g_1(T_\xi X, U),$$

4.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için

$$g_1(A_N U, X) = -g_1(A_N X, U).$$

İspat:

1.) $U, V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için Lemma 3.1.11'den yararlanılarak

$$\begin{aligned} \underbrace{U g_1(V, X)}_{=0} &= g_1(\nabla_U V, X) + g_1(\nabla_U X, V), \\ g_1(\nabla_U V, X) &= -g_1(\nabla_U X, V), \\ g_1(T_U V, X) &= -g_1(T_U X, V), \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer maddelerin ispatı da benzer şekilde elde edilebilir.

3.2 TRANSVERSAL SUBMERSİYONLARDA SCHOUTEN KONNEKSİYONU

Bu bölümde, daha önce Riemann submersiyonlar başlığı altında tanıtılan Schouten konneksiyonu transversal lightlike submersiyonlar için incelenecek, T ve A tensör alanlarına göre çeşitli eşitlikler bulunacak ve Schouten konneksiyonunun metrik konneksiyon olup olmadığına dair bazı bulgulara yer verilecektir.

Şahin'in [9]'da yer alan tanımından yararlanarak Schouten konneksiyon kavramını transversal submersiyonlar için verelim:

Tanım 3.2.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal lightlike submersiyon olmak üzere $E, G \in \chi(M)$ için Schouten konneksiyonu

$$\bar{\nabla}_E G = v(\nabla_E vG) + h(\nabla_E hG) \quad (3.2.1)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.2.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $E, G \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_E G = \bar{\nabla}_E G + T_E G + A_E G \quad (3.2.2)$$

dir.

İspat: (3.2.1)'den $E, G \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_E G &= v(\nabla_E vG) + h(\nabla_E hG), \\ &= v(\nabla_{(vE+hE)} vG) + h(\nabla_{(vE+hE)} hG), \\ &= v\nabla_{vE} vG + v\nabla_{hE} vG + h\nabla_{vE} hG + h\nabla_{hE} hG + \nabla_E G - \nabla_E G \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \nabla_E G &= v\nabla_E G + h\nabla_E G, \\ &= v\nabla_{(vE+hE)} (vG + hG) + h\nabla_{(vE+hE)} (vG + hG), \\ &= v\nabla_{vE} vG + v\nabla_{vE} hG + v\nabla_{hE} vG + v\nabla_{hE} hG \\ &\quad + h\nabla_{vE} vG + h\nabla_{vE} hG + h\nabla_{hE} vG + h\nabla_{hE} hG \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

olur. O halde (3.2.4) eşitliği (3.2.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\bar{\nabla}_E G = \nabla_E G - T_E G - A_E G$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Lemma 3.2.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold,

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon; $\bar{\nabla}$, Schouten konneksiyonu; ∇ , M_1 üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere A ve T temel tensör alanlarının birinci ve ikinci bileşenlerinin yatay ve dikey distribüsyondan seçilme durumlarına göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.)

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_2 - T_{E_1} E_2 \quad E_1, E_2 \in \Gamma(\mathcal{V}), \quad (3.2.5)$$

2.)

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_2 - T_{E_1} E_2 \quad E_1 \in \Gamma(\mathcal{V}), E_2 \in \Gamma(\mathcal{H}), \quad (3.2.6)$$

3.)

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_2 - A_{E_1} E_2 \quad E_1 \in \Gamma(\mathcal{H}), E_2 \in \Gamma(\mathcal{V}), \quad (3.2.7)$$

4.)

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_2 - A_{E_1} E_2 \quad E_1, E_2 \in \Gamma(\mathcal{H}). \quad (3.2.8)$$

İspat: (3.2.2) eşitliğinden

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_2 - T_{E_1} E_2 - A_{E_1} E_2$$

olur. Burada $E_1, E_2 \in \Gamma(\mathcal{V})$ olacağından

$$A_{E_1} E_2 = 0$$

olur. Böylece

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_2 - T_{E_1} E_2$$

eşitliği elde edilir. 2.), 3.) ve 4.) numaralı maddelerin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Not 3.2.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold,

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $\bar{\nabla}$ Schouten konneksiyonu her zaman metrik konneksiyon değildir.

Gerçekten de,

$$U, V \in \Gamma(S(\zeta e k f_*)), X \in \Gamma(S(\zeta e k f_*)^\perp) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U g_1)(V, X) &= U g_1(V, X) - g_1(\bar{\nabla}_U V, X) - g_1(V, \bar{\nabla}_U X), \\ &= U g_1(V, X) - g_1(\nabla_U V - T_U V, X) - g_1(V, \nabla_U X - T_U X), \\ &= U g_1(V, X) - g_1(\nabla_U V, X) + g_1(T_U V, X) - g_1(\nabla_U X, V) + g_1(T_U X, V), \\ &= \underbrace{U g_1(V, X) - g_1(\nabla_U V, X) - g_1(\nabla_U X, V)}_{=0} + g_1(T_U V, X) + g_1(T_U X, V), \\ &= \underbrace{g_1(T_U V, X)}_{\neq 0} + \underbrace{g_1(T_U X, V)}_{\neq 0}. \end{aligned}$$

Böylece $\bar{\nabla}$ Schouten konneksiyonu her zaman metrik konneksiyon değildir.

Not 3.2.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold,

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon, $\bar{\nabla}$ Schouten konneksiyonu, $U_1, U_2 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $X_1, X_2 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*))$ için

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U g_1)(U_1, U_2) &= 0, & (\bar{\nabla}_U g_1)(X_1, X_2) &= 0, \\ (\bar{\nabla}_\xi g_1)(U_1, U_2) &= 0, & (\bar{\nabla}_\xi g_1)(X_1, X_2) &= 0, \\ (\bar{\nabla}_X g_1)(U_1, U_2) &= 0, & (\bar{\nabla}_X g_1)(X_1, X_2) &= 0, \\ (\bar{\nabla}_N g_1)(U_1, U_2) &= 0, & (\bar{\nabla}_N g_1)(X_1, X_2) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri biraraya getirilerek aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$*E \in \Gamma(\mathcal{V})$ veya $E \in \Gamma(\mathcal{H})$ olmak üzere $U_1, U_2 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için

$$(\bar{\nabla}_E g_1)(U_1, U_2) = 0, \quad (3.2.9)$$

$*E \in \Gamma(\mathcal{V})$ veya $E \in \Gamma(\mathcal{H})$ olmak üzere $X_1, X_2 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$(\bar{\nabla}_E g_1)(X_1, X_2) = 0 \quad (3.2.10)$$

olur. Buradan (3.2.9) ve (3.2.10) eşitlikleri ile transversal r lightlike submersiyonlar için Schouten konneksiyonunun metrik konneksiyon olmasına yönelik genel bir ifade verilmiş olur.

3.3 TRANSVERSAL SUBMERSİYONLARIN KOVARYANT TÜREVİ

Bu bölümde bir transversal r lightlike submersiyon için temel tensörlerin kovaryant türevleri incelenip bu türevlerden elde edilecek temel özellikler gösterilmektedir. Ayrıca Riemann eğriliklerin hesaplanmasında kullanılacak eşitlikler bulunmaktadır. Ek olarak kovaryant türevlerden yararlanılarak T ve A tensör alanlarının paralel olma durumuna göre önemli sonuçlara yer verilmektedir.

T ve A temel tensör alanları olmak üzere herhangi E_1, E_2, E_3 vektör alanları için A ve T tensör alanlarının kovaryant türevleri sırasıyla

$$(\nabla_{E_1} A)_{E_2} E_3 = (\nabla_{E_1} A)(E_2, E_3) = \nabla_{E_1}(A_{E_2} E_3) - A_{\nabla_{E_1} E_2} E_3 - A_{E_2} \nabla_{E_1} E_3, \quad (3.3.1)$$

$$(\nabla_{E_1} T)_{E_2} E_3 = (\nabla_{E_1} T)(E_2, E_3) = \nabla_{E_1}(T_{E_2} E_3) - T_{\nabla_{E_1} E_2} E_3 - T_{E_2} \nabla_{E_1} E_3 \quad (3.3.2)$$

ile tanımlanır. (3.3.1) ve (3.3.2) eşitliklerinden yararlanılarak transversal submersiyonlarda T ve A temel tensör alanlarının kovaryant türevlerini inceleyelim:

Lemma 3.3.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda belirlenen bazı distribüsyonlara göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

a.) $W_1 \in \Gamma(\zeta ek f_*), X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), W_2 \in \Gamma(\zeta ek f_*)$ için

$$(\nabla_{W_1} T)_X = -T_{W_1} X, \quad (3.3.3)$$

b.) $W_1 \in \Gamma(\zeta ek f_*), F \in \Gamma(tr(\zeta ek f_*)), W_2 \in \Gamma(\zeta ek f_*)$ için

$$(\nabla_{W_1} T)_F = -T_{W_1} F, \quad (3.3.4)$$

c.) $W \in \Gamma(\zeta ek f_*), X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), U \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için

$$(\nabla_W T)_X = -T_W F, \quad (3.3.5)$$

d.) $X_1 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), U \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)), X_2 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$(\nabla_{X_1} A)_U = -A_{X_1} U, \quad (3.3.6)$$

e.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*)), U_1 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)), U_2 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için

$$(\nabla_N A)_{U_1} = -A_{N} U_1, \quad (3.3.7)$$

f.) $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*)), U \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)), X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$(\nabla_N A)_U = -A_N U. \quad (3.3.8)$$

İspat:

a.) $W_1 \in \Gamma(\zeta ek f_*), X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), W_2 \in \Gamma(\zeta ek f_*)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_{W_1} T)_X W_2 &= \underbrace{\nabla_{W_1} (T_X W_2)}_{=0} - T_{\nabla_{W_1} X} W_2 - \underbrace{T_X \nabla_{W_1} W_2}_{=0} \\ &= -T_{\nabla_{W_1} X} W_2, \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Lemma 3.1.12'den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_{W_1} T)_X W_2 &= -T_{(T_{W_1} X + h \nabla_{W_1} X)} W_2, \\
&= -T_{T_{W_1} X} W_2 - \underbrace{T_{h \nabla_{W_1} X} W_2}_{=0}, \\
(\nabla_{W_1} T)_X W_2 &= -T_{T_{W_1} X} W_2,
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

olur. (3.3.9) eşitliği her $W_2 \in \Gamma(\text{çek}f_*)$ için sağlanacağından

$$(\nabla_{W_1} T)_X = -T_{T_{W_1} X}$$

eşitliği elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde elde edilebilir.

Önerme 3.3.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda $E \in \chi(M_1)$, $W_1, W_2 \in \Gamma(\text{çek}f_*)$,

$X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için

$$g_1((\nabla_E T)_{W_1} W_2, X) = g_1((\nabla_E T)_{W_2} W_1, X) \tag{3.3.10}$$

olur.

İspat: Kovaryant türevin tanımından

$$g_1((\nabla_E T)_{W_1} W_2, X) = g_1(\nabla_E T_{W_1} W_2, X) - g_1(T_{\nabla_E W_1} W_2, X) - g_1(T_{W_1} \nabla_E W_2, X)$$

olur. Bu durumda

1. Terim: Teorem 3.1.6'dan yararlanılarak

$$g_1(\nabla_E T_{W_1} W_2, X) = g_1(\nabla_E T_{W_2} W_1, X),$$

2. Terim:

$$\begin{aligned}
g_1(T_{\nabla_E W_1} W_2, X) &= g_1(T_{W_2} \nabla_E W_1, X), \\
&= g_1(T_{W_2} \nabla_E W_1, X)
\end{aligned}$$

olur.

3. Terim:

$$\begin{aligned}
g_1(T_{W_1} \nabla_E W_2, X) &= g_1(T_{W_1} h \nabla_E W_2 + T_{W_1} v \nabla_E W_2, X), \\
&= g_1(T_{W_1} h \nabla_E W_2, X) + g_1(T_{W_1} v \nabla_E W_2, X), \\
&= g_1(T_{\nabla_E W_2} W_1, X)
\end{aligned}$$

olur. O halde 1. Terim, 2. Terim, 3. Terim kullanılarak

$$g_1((\nabla_E T)_{W_1} W_2, X) = g_1((\nabla_E T)_{W_2} W_1, X)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de T temel tensör alanına göre belirli bazı distribüsyonların g_1 metriğine göre karşılıklarını inceleyelim:

Lemma 3.3.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda belirlenen bazı distribüsyonlar için T temel tensör alanının kovaryant türevlerine göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için

$$g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), U_4) = g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, U_4) - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, U_4), \quad (3.3.11)$$

2.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*))$ için

$$g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), N) = g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, N) - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, N), \quad (3.3.12)$$

3.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), X) = g_1(\nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, X) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, X) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, X), \quad (3.3.13)$$

4.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), \xi) = g_1(\nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, \xi). \quad (3.3.14)$$

İspat:

1.) $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ için

$$g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), U_4) = g_1(\nabla_{U_1}(T_{U_2} U_3), U_4) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, U_4) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, U_4)$$

ifadesi Lemma 3.1.2, Lemma 3.1.3, Lemma 3.1.4 ve Lemma 3.1.5'ten yararlanılarak tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), U_4) &= g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, U_4) + g_1(h \nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, U_4) \\ &\quad - g_1(T_{T_{U_1} U_2} U_3, U_4) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, U_4) \\ &\quad - g_1(T_{U_2}(T_{U_1} U_3 + \nabla_{U_1} U_3), U_4), \\ &= g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, U_4) - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, U_4). \end{aligned}$$

2.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)), N \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ için

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), N) &= g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, N) + g_1(h \nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, N) \\ &\quad - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, N) - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, N) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, N), \\ &= g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, N) - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, N). \end{aligned}$$

3.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)), X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), X) &= g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, X) + g_1(h \nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, X) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, X) \\ &\quad - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, X) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, X), \\ &= g_1(h \nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, X) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, X) \\ &\quad - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, X), \\ &= g_1(\nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, X) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, X) \\ &\quad - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, X). \end{aligned}$$

4.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)), \xi \in \Gamma(\Delta)$

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), \xi) &= g_1(T_{U_1} T_{U_2} U_3, \xi) + g_1(h \nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, \xi) \\ &\quad - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{U_2} T_{U_1} U_3, \xi) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, \xi), \\ &= g_1(h \nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, \xi), \\ &= g_1(\nabla_{U_1} T_{U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{\nabla_{U_1} U_2} U_3, \xi) - g_1(T_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, \xi). \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Lemma 3.3.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda belirlenen bazı distribüsyonlar için A temel tensör alanının kovaryant türevlerine göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$g_1((\nabla_{X_1} A)(X_2, X_3), X_4) = g_1(A_{X_1} A_{X_2} X_3, X_4) - g_1(A_{X_2} A_{X_1} X_3, X_4), \quad (3.3.15)$$

2.) $X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), \xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$g_1((\nabla_{X_1} A)(X_2, X_3), \xi) = g_1(A_{X_1} A_{X_2} X_3, \xi) - g_1(A_{X_2} A_{X_1} X_3, \xi), \quad (3.3.16)$$

3.) $X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), U \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için

$$g_1((\nabla_{X_1} A)(X_2, X_3), U) = g_1(\nabla_{X_1} A_{X_2} X_3, U) - g_1(A_{\nabla_{X_1} X_2} X_3, U) - g_1(A_{X_2} \nabla_{X_1} X_3, U), \quad (3.3.17)$$

4.) $X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp), N \in (\Gamma(ltr(\zeta ek f_*)))$ için

$$g_1((\nabla_{X_1} A)(X_2, X_3), N) = g_1(\nabla_{X_1} A_{X_2} X_3, N) - g_1(A_{\nabla_{X_1} X_2} X_3, N) - g_1(A_{X_2} \nabla_{X_1} X_3, N). \quad (3.3.18)$$

İspat: $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için (3.3.1) eşitliği, Lemma 3.1.13 ve Lemma 3.1.14'ten yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_{X_1} A)(X_2, X_3), X_4) &= g_1(\nabla_{X_1} A_{X_2} X_3, X_4) - g_1(A_{\nabla_{X_1} X_2} X_3, X_4) - g_1(A_{X_2} \nabla_{X_1} X_3, X_4), \\ &= g_1(A_{X_1} A_{X_2} X_3, X_4) + g_1(v \nabla_{X_1} A_{X_2} X_3, X_4) \\ &\quad - g_1(A_{(A_{X_1} X_2 + h \nabla_{X_1} X_2)} X_3, X_4) - g_1(A_{X_2} (A_{X_1} X_3 + h \nabla_{X_1} X_3), X_4), \\ &= g_1(A_{X_1} A_{X_2} X_3, X_4) - g_1(A_{X_2} A_{X_1} X_3, X_4), \end{aligned}$$

elde edilir. 2.), 3.) ve 4.) numaralı maddelerin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.3.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda $W \in \Gamma(\zeta ek f_*)$, $V \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ olması ve ayrıca $T_W X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ 'nin non null ve T dikey tensör alanının paralel olması durumunda $T = 0$ dır.

İspat: $X \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ $W \in \Gamma(\zeta ekf_*)$ olmak üzere Lemma 3.1.12'den yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_W T)_X W, X) &= g_1(\nabla_W T_X W - T_{\nabla_W X} W - T_X \nabla_W W, X), \\ &= g_1(\nabla_W T_X W, X) - g_1(T_{\nabla_W X} W, X) - g_1(T_X \nabla_W W, X), \\ &= -g_1(T_{\nabla_W X} W, X), \\ &= -g_1(T_{T_W X} W, X), \end{aligned}$$

olur. O halde Teorem 3.1.6'dan

$$g_1((\nabla_W T)_X W, X) = -g_1(T_W T_W X, X)$$

olur. Bu durumda normalde $\Gamma(S(\zeta ekf_*))$ ve $\Gamma(\Delta)$ distribüsyonlarından oluşan $T_W X$ temel tensör alanı teoremden non-null; yani dejenere olmayan vektörlerin oluşturduğu vektör alanı olarak seçildiğinden $\Gamma(S(\zeta ekf_*))$ 'in elemanıdır. O halde Lemma 3.1.15'den yararlanılarak;

$$g_1((\nabla_W T)_X W, X) = g_1(T_W X, T_W X)$$

ifadesi elde edilir. T dikey tensör alanının paralel olması durumunda $T_W X$ non-null olduğundan T_W yatay distribüsyon üzerinde sıfırdır. Diğer taraftan $V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ olmak üzere

$$g_1(T_W X, V) = -g_1(T_W V, X) = 0$$

elde edilir. Buradan $T_W V = 0$ olur. O halde $T_W X = 0$ ve $T_W V = 0$ olduğundan $T_W = 0$ olur. Ayrıca $E \in \chi^h(M)$ için $T_E = 0$ olacağından $T = 0$ eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.3.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için $A_X W \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ aynı zamanda non-null ve $N \in \Gamma(\text{ltr}(\zeta ekf_*))$ için $\text{ltr}(\zeta ekf_*)$, $S(\zeta ekf_*)^\perp$ distribüsyonu boyunca paralel ve A yatay tensör alanı paralel ise

$A = 0$ 'dır.

İspat: $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $W \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_X A)_W X, W) &= g_1(\nabla_X A_W X - A_{\nabla_X W} X - A_W \nabla_X X, W), \\ &= g_1(\nabla_X A_W X, W) - g_1(A_{\nabla_X W} X, W) - g_1(A_W \nabla_X X, W), \\ &= -g_1(A_{\nabla_X W} X, W), \end{aligned}$$

(3.1.46) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_X A)_W X, W) &= -g_1(A_{A_X W} X, W) - g_1(A_{\nabla_X W} X, W), \\ &= -g_1(A_{A_X W} X, W), \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $A_X W \in \Gamma(S(\zeta e k f_*)^\perp)$ olursa (3.1.67) eşitliğinden yararlanıldığında

$$g_1((\nabla_X A)_W X, W) = g_1(A_X A_X W, W)$$

olur. Diğer taraftan Lemma 3.1.15 kullanılırsa

$$g_1((\nabla_X A)_W X, W) = -g_1(A_X W, A_X W)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda A yatay tensör alanı paralel ise $A_X W$ tensör alanının non-null olması; aslında $\Gamma(S(\zeta e k f_*)^\perp)$ ve $\Gamma(ltr(\zeta e k f_*))$ distribüsyonlarından oluşan $A_X W$ temel tensör alanının teoremden non-null; yani dejenere olmayan vektörlerin oluşturduğu vektör alanı olarak seçilmesinden $A_X W, \Gamma(S(\zeta e k f_*)^\perp)$ 'in elemanıdır. Bu durumda

$$A_X W = 0 \tag{3.3.19}$$

Lemma 3.1.15'ten

$$g_1(A_X W, Y) = -g_1(A_X Y, W)$$

olur ve böylece

$$A_X Y = 0 \tag{3.3.20}$$

olur. O halde (3.3.19) ve (3.3.20)'dan

$$A_X = 0$$

olur. Öte yandan $\tilde{W} \in \chi^v(M)$ için $A_{\tilde{W}} = 0$ olacağından

$$A = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Not 3.3.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Sonuç 3.3.1'deki ifade $T_W X \in \Gamma(\mathcal{V})$ için her zaman elde edilmeyebilir.

Not 3.3.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Sonuç 3.3.2'teki ifade $A_X W \in \Gamma(\mathcal{H})$ için her zaman elde edilmeyebilir.

3.4 EĞRİLİKLER

Bu bölümde transversal r lightlike submersiyonlarda belirli distribüsyonlara göre eğrilik tensör alanları, Riemann Christoffel eğrilik tensör alanları, kesit eğrilikleri ve Ricci eğrilikleri incelenerek bazı önemli sonuçlara ulaşılabacaktır.

3.4.1 Eğrilik Tensör Alanları

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda Lemma 3.1.3'ten yararlanılarak $W_1, W_2, W_3 \in \Gamma(\text{çek}f_*)$ için

$$\begin{aligned} R(W_1, W_2)W_3 &= T_{W_1}T_{W_2}W_3 - T_{W_2}T_{W_1}W_3 - T_{[W_1, W_2]}W_3 + \hat{R}(W_1, W_2)W_3 \\ &\quad + h\nabla_{W_1}T_{W_2}W_3 - h\nabla_{W_2}T_{W_1}W_3 + T_{W_1}\nu\nabla_{W_2}W_3 - T_{W_2}\nu\nabla_{W_1}W_3, \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Gerçekten de, (3.1.31) eşitliği Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.12'den yararlanılarak

$$\begin{aligned} R(W_1, W_2)W_3 &= \nabla_{W_1}\nabla_{W_2}W_3 - \nabla_{W_2}\nabla_{W_1}W_3 - \nabla_{[W_1, W_2]}W_3, \\ &= \nabla_{W_1}(T_{W_2}W_3 + \nu\nabla_{W_2}W_3) - \nabla_{W_2}(T_{W_1}W_3 + \nu\nabla_{W_1}W_3) - \nabla_{[W_1, W_2]}W_3, \\ &= \nabla_{W_1}T_{W_2}W_3 + \nabla_{W_1}\nu\nabla_{W_2}W_3 - \nabla_{W_2}T_{W_1}W_3 - \nabla_{W_2}\nu\nabla_{W_1}W_3 - \nabla_{[W_1, W_2]}W_3, \\ &= T_{W_1}T_{W_2}W_3 + h\nabla_{W_1}T_{W_2}W_3 + T_{W_1}\nu\nabla_{W_2}W_3 + \nu\nabla_{W_1}\nu\nabla_{W_2}W_3 \\ &\quad - T_{W_2}T_{W_1}W_3 - h\nabla_{W_2}T_{W_1}W_3 - T_{W_2}\nu\nabla_{W_1}W_3 - \nu\nabla_{W_2}\nu\nabla_{W_1}W_3 \\ &\quad - T_{[W_1, W_2]}W_3 - \nu\nabla_{[W_1, W_2]}W_3, \\ &= T_{W_1}T_{W_2}W_3 - T_{W_2}T_{W_1}W_3 + \hat{R}(W_1, W_2)W_3 \\ &\quad + h\nabla_{W_1}T_{W_2}W_3 - h\nabla_{W_2}T_{W_1}W_3 + T_{W_1}\nu\nabla_{W_2}W_3 - T_{W_2}\nu\nabla_{W_1}W_3 - T_{[W_1, W_2]}W_3, \\ &= T_{W_1}T_{W_2}W_3 - T_{W_2}T_{W_1}W_3 - T_{[W_1, W_2]}W_3 + \hat{R}(W_1, W_2)W_3 \\ &\quad + h\nabla_{W_1}T_{W_2}W_3 - h\nabla_{W_2}T_{W_1}W_3 + T_{W_1}\nu\nabla_{W_2}W_3 - T_{W_2}\nu\nabla_{W_1}W_3, \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada R ve $\widehat{R}$ sırasıyla M_1 manifoldunun ve $(f^{-1}(x), \widehat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörüdür.

3.4.2 Riemann Christoffel Eğrilik Tensör Alanları

Bu bölümde bir transversal submersiyonda belirli distribüsyonlara göre Riemann Christoffel eğrilik tensör alanları incelenecektir. O halde bir semi-Riemann manifold için belirli distribüsyonlara göre eğriliklerin hesaplandığı ve yer yer kovaryant türevle de bağlantısının bulunduğu ifadelerin yer aldığı aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.4.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon ; R ve $\widehat{R}$ sırasıyla M_1 manifoldunun ve $(f^{-1}(x), \widehat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda belirli distribüsyonlar için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

1.) $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için

$$g_1(R(U_1 U_2) U_3, U_4) = g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), U_4) + g_1(\widehat{R}(U_1, U_2) U_3, U_4), \quad (3.4.1)$$

2.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*))$ için

$$g_1(R(U_1 U_2) U_3, N) = g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), N) + g_1(\widehat{R}(U_1, U_2) U_3, N), \quad (3.4.2)$$

3.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$g_1(R(U_1 U_2) U_3, \xi) = g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), \xi) - g_1((\nabla_{U_2} T)(U_1, U_3), \xi), \quad (3.4.3)$$

4.) $U_1, U_2, U_3 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$g_1(R(U_1 U_2) U_3, X) = g_1((\nabla_{U_1} T)(U_2, U_3), X) - g_1((\nabla_{U_2} T)(U_1, U_3), X). \quad (3.4.4)$$

İspat: $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ için Riemann eğrilik açılımından

$$g_1(R(U_1, U_2) U_3, U_4) = g_1(\nabla_{U_1} \nabla_{U_2} U_3, U_4) - g_1(\nabla_{U_2} \nabla_{U_1} U_3, U_4) - g_1(\nabla_{[U_1, U_2]} U_3, U_4)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra (3.1.34) eşitliği kullanılırsa

$$g_1(R(U_1, U_2)U_3, U_4) = g_1(\nabla_{U_1}(T_{U_2}U_3 + v\nabla_{U_2}U_3), U_4) - g_1(\nabla_{U_2}(T_{U_1}U_3 + v\nabla_{U_1}U_3), U_4) \\ - g_1(T_{[U_1, U_2]}U_3, U_4) - g_1(v\nabla_{[U_1, U_2]}U_3, U_4),$$

olur. Daha sonra

$$g_1(R(U_1, U_2)U_3, U_4) = g_1(\nabla_{U_1}T_{U_2}U_3, U_4) + g_1(\nabla_{U_1}v\nabla_{U_2}U_3, U_4) \\ - g_1(\nabla_{U_2}T_{U_1}U_3, U_4) - g_1(\nabla_{U_2}v\nabla_{U_1}U_3, U_4) \\ - g_1(T_{[U_1, U_2]}U_3, U_4) - g_1(v\nabla_{[U_1, U_2]}U_3, U_4),$$

eşitliğinde (3.1.33) ve (3.1.43) eşitliklerinden yararlanılarak

$$g_1(R(U_1, U_2)U_3, U_4) = g_1(T_{U_1}T_{U_2}U_3, U_4) - g_1(T_{U_2}T_{U_1}U_3, U_4) \\ + g_1(v\nabla_{U_1}v\nabla_{U_2}U_3, U_4) - g_1(v\nabla_{U_2}v\nabla_{U_1}U_3, U_4) \\ - g_1(v\nabla_{[U_1, U_2]}U_3, U_4),$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (3.3.11) eşitliği ve $v\nabla_{U_1}U_2 = \widehat{\nabla}_{U_1}U_2$ ifadesi kullanılarak

$$g_1(R(U_1, U_2)U_3, U_4) = g_1((\nabla_{U_1}T)(U_2, U_3), U_4) + g_1(\widehat{R}(U_1, U_2)U_3, U_4)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde 2.), 3.) ve 4.) maddelerinin ispatı kolay bir şekilde elde edilebilir.

Teorem 3.4.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda R ve $\overset{*}{R}$ sırasıyla M_1 ve M_2 'nin Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere belirli distribüsyonlara göre aşağıdaki eşitlikler bulunur:

1.) $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(S(\zeta \text{ek} f_*)^\perp)$ için

$$g_1(R(X_1, X_2)X_3, X_4) = g_1((\nabla_{X_1}A)(X_2, X_3), X_4) + g_1(\overset{*}{R}(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad (3.4.5)$$

2.) $X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(S(\zeta \text{ek} f_*)^\perp)$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için

$$g_1(R(X_1, X_2)X_3, \xi) = g_1((\nabla_{X_1}A)(X_2, X_3), \xi) + g_1(\overset{*}{R}(X_1, X_2)X_3, \xi), \quad (3.4.6)$$

3.) $X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $N \in \Gamma(ltr(\zeta ekf_*))$ için

$$g_1(R(X_1, X_2)X_3, N) = g_1((\nabla_{X_1}A)(X_2, X_3), N) - g_1((\nabla_{X_2}A)(X_1, X_3), N), \quad (3.4.7)$$

4.) $X_1, X_2, X_3 \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $U \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$ için

$$g_1(R(X_1, X_2)X_3, U) = g_1((\nabla_{X_1}A)(X_2, X_3), U) - g_1((\nabla_{X_2}A)(X_1, X_3), U). \quad (3.4.8)$$

İspat: $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$ için Lemma 3.3.3'ün (3.3.15) eşitliği, Lemma (3.1.14) ve Lemma (3.1.8)'den yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1(R(X_1, X_2)X_3, X_4) &= g_1(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3, X_4) - g_1(\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3, X_4) - g_1(\nabla_{[X_1, X_2]}X_3, X_4), \\ &= g_1(\nabla_{X_1}(A_{X_2}X_3 + h\nabla_{X_2}X_3), X_4) - g_1(\nabla_{X_2}(A_{X_1}X_3 + h\nabla_{X_1}X_3), X_4) \\ &\quad - g_1(h\nabla_{[X_1, X_2]}X_3, X_4), \\ &= g_1(\nabla_{X_1}A_{X_2}X_3, X_4) + g_1(\nabla_{X_1}h\nabla_{X_2}X_3, X_4) \\ &\quad - g_1(\nabla_{X_2}A_{X_1}X_3, X_4) - g_1(\nabla_{X_2}h\nabla_{X_1}X_3, X_4) - g_1(h\nabla_{[X_1, X_2]}X_3, X_4), \\ &= g_1(A_{X_1}A_{X_2}X_3, X_4) + g_1(v\nabla_{X_1}A_{X_2}X_3, X_4) + g_1(A_{X_1}h\nabla_{X_2}X_3, X_4) \\ &\quad + g_1(h\nabla_{X_1}h\nabla_{X_2}X_3, X_4) - g_1(A_{X_2}A_{X_1}X_3, X_4) - g_1(v\nabla_{X_2}A_{X_1}X_3, X_4) \\ &\quad - g_1(A_{X_2}h\nabla_{X_1}X_3, X_4) - g_1(h\nabla_{X_2}h\nabla_{X_1}X_3, X_4) - g_1(h\nabla_{[X_1, X_2]}X_3, X_4), \\ &= g_1((\nabla_{X_1}A)(X_2, X_3), X_4) + g_1(\overset{*}{R}(X_1, X_2)X_3, X_4) \end{aligned}$$

Benzer şekilde 2.), 3.) ve 4.) maddelerinin ispatı da yapılabilir.

Ayrıca not edelim ki $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ekf_*)^\perp)$, $U, V \in \Gamma(S(\zeta ekf_*))$, $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için

1.)

$$\begin{aligned} g_1(R(X, Y)U, V) &= g_1((\nabla_XA)(Y, U), V) + g_1(v\nabla_Xv\nabla_YU, V) \\ &\quad - g_1(v\nabla_Yv\nabla_XU, V) - g_1(v\nabla_{[X, Y]}U, V), \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

2.)

$$\begin{aligned} g_1(R(X, U)Y, V) &= g_1((\nabla_XT)(U, Y), V) - g_1((\nabla_UA)(X, Y), V) \\ &\quad - g_1(A_{h\nabla_UX}Y, V) + g_1(T_{\nabla_UX}Y, V), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

3.)

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi_1)Y, \xi_2) &= g_1((\nabla_XT)(\xi_1, Y), \xi_2) + g_1(h\nabla_Xh\nabla_{\xi_1}Y, \xi_2) \\ &\quad - g_1(h\nabla_{\xi_1}h\nabla_XY, \xi_2) - g_1(h\nabla_{[X, \xi_1]}Y, \xi_2), \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

4.)

$$g_1(R(U, \xi_1)U, \xi_2) = g_1((\nabla_U T)(\xi_1, U), \xi_2) - g_1((\nabla_{\xi_1} T)(U, U), \xi_2), \quad (3.4.12)$$

5.)

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi)X, U) &= g_1((\nabla_X T)(\xi, X), U) - g_1((\nabla_\xi A)(X, X), U) \\ &\quad + g_1(T_{T_\xi X}X, U) - g_1(A_{h\nabla_\xi X}X, U), \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

6.)

$$g_1(R(U, \xi)U, V) = g_1((\nabla_U T)(\xi, U), V) + g_1(\widehat{R}(U, \xi)U, V), \quad (3.4.14)$$

7.)

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi)X, Y) &= g_1((\nabla_X T)(\xi, X), Y) + g_1(\nabla_X h\nabla_\xi X, Y) \\ &\quad - g_1(\nabla_\xi^* \nabla_X X, Y) - g_1(\nabla_{[X, \xi]}X, Y), \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

8.)

$$g_1(R(U, \xi)U, X) = g_1((\nabla_U T)(\xi, U), X) - g_1((\nabla_\xi T)(U, U), X). \quad (3.4.16)$$

İspat: 1.) $X, Y \in \Gamma(S(\mathcal{C}ekf_*)^\perp)$, $U, V \in \Gamma(S(\mathcal{C}ekf_*))$ için (2.2.2), (3.1.59), (3.1.21) eşitlikleri ve Lemma 3.1.13'ten; $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{H})$ kabul edilerek,

$$\begin{aligned} g_1(R(X, Y)U, V) &= g_1(\nabla_X \nabla_Y U, V) - g_1(\nabla_Y \nabla_X U, V) - g_1(\nabla_{[X, Y]}U, V), \\ &= g_1(\nabla_X A_Y U, V) + g_1(\nabla_X v \nabla_Y U, V) - g_1(\nabla_Y A_X U, V) \\ &\quad - g_1(\nabla_Y v \nabla_X U, V) - g_1(A_{[X, Y]}U, V) - g_1(v \nabla_{[X, Y]}U, V), \\ &= g_1(A_X A_Y U, V) - g_1(A_Y A_X U, V) \\ &\quad + g_1(v \nabla_X v \nabla_Y U, V) - g_1(v \nabla_Y v \nabla_X U, V) - g_1(v \nabla_{[X, Y]}U, V) \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

olur. Diğer taraftan (3.3.1) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1((\nabla_X A)(Y, U), V) &= g_1(\nabla_X A_Y U, V) - g_1(A_Y \nabla_X U, V) - g_1(A_{\nabla_X Y}U, V), \\ &= g_1(A_X A_Y U, V) + g_1(h \nabla_X A_Y U, V) - g_1(A_Y A_X U, V) \\ &\quad - g_1(A_Y v \nabla_X U, V) - g_1(A_{A_X Y}U, V) - g_1(A_{v \nabla_X Y}U, V), \\ &= g_1(A_X A_Y U, V) - g_1(A_Y A_X U, V). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

O halde (3.4.17) ve (3.4.18) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_1(R(X, Y)U, V) &= g_1((\nabla_X A)(Y, U), V) + g_1(v\nabla_X v\nabla_Y U, V) \\ &\quad - g_1(v\nabla_Y v\nabla_X U, V) - g_1(v\nabla_{[X, Y]}U, V) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

2.) $X, Y \in \Gamma(S(\text{çekf}_*)^\perp)$, $U, V \in \Gamma(S(\text{çekf}_*))$ için (2.2.2), (3.1.59) eşitlikleri ve Lemma 3.1.12 eşitliklerinin kullanılması ve Not 3.1.2'den yararlanılarak $[X, U]$ 'nin dikey vektör alanı olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} g_1(R(X, U)Y, V) &= g_1(\nabla_X \nabla_U Y - \nabla_U \nabla_X Y - \nabla_{[X, U]}Y, V), \\ &= g_1(\nabla_X(T_U Y + h\nabla_U Y), V) - g_1(\nabla_U(A_X Y + h\nabla_X Y), V) \\ &\quad - g_1(T_{[X, U]}Y, V) - g_1(h\nabla_{[X, U]}Y, V), \\ &= g_1(v\nabla_X T_U Y, V) + g_1(A_X h\nabla_U Y, V) - g_1(v\nabla_U A_X Y, V) \\ &\quad - g_1(T_U h\nabla_X Y, V) - g_1(T_{\nabla_X U}Y, V) + g_1(T_{\nabla_U X}Y, V) \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

olur. Diğer taraftan sırasıyla (3.3.1) ve (3.3.2) eşitliklerinden yararlanılarak

$$g_1((\nabla_U A)(X, Y), V) = g_1(v\nabla_U A_X Y, V) - g_1(A_h \nabla_U X Y, V) - g_1(A_X h\nabla_U Y, V) \quad (3.4.20)$$

ve

$$g_1((\nabla_X T)(U, Y), V) = g_1(v\nabla_X T_U Y, V) - g_1(T_{v\nabla_X U}Y, V) - g_1(T_U h\nabla_X Y, V) \quad (3.4.21)$$

olur. O halde (3.4.19), (3.4.20) ve (3.4.21) eşitliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1(R(X, U)Y, V) &= g_1((\nabla_X T)(U, Y), V) - g_1((\nabla_U A)(X, Y), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X Y, V) + g_1(T_{\nabla_U X}Y, V) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

3.) $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ ve $X, Y \in \Gamma(S(\text{çekf}_*)^\perp)$ için (2.2.2), (3.1.18) ve (3.1.59) eşitliklerinin kullanılması ve Not 3.1.2'den yararlanılarak $[X, \xi_1]$ 'in dikey vektör alanı olduğu göz önüne

alınarak,

$$\begin{aligned}
g_1(R(X, \xi_1)Y, \xi_2) &= g_1(\nabla_X \nabla_{\xi_1} Y, \xi_2) - g_1(\nabla_{\xi_1} \nabla_X Y, \xi_2) - g_1(\nabla_{[X, \xi_1]} Y, \xi_2), \\
&= g_1(A_X T_{\xi_1} Y, \xi_2) + g_1(\nu \nabla_X T_{\xi_1} Y, \xi_2) \\
&+ g_1(A_X h \nabla_{\xi_1} Y, \xi_2) + g_1(h \nabla_X h \nabla_{\xi_1} Y, \xi_2) \\
&- g_1(T_{\xi_1} A_X Y, \xi_2) - g_1(\nu \nabla_{\xi_1} A_X Y, \xi_2) \\
&- g_1(T_{\xi_1} h \nabla_X Y, \xi_2) - g_1(h \nabla_{\xi_1} h \nabla_X Y, \xi_2) \\
&- g_1(h \nabla_{[X, \xi_1]} Y, \xi_2), \\
&= g_1(A_X T_{\xi_1} Y, \xi_2) + g_1(h \nabla_X h \nabla_{\xi_1} Y, \xi_2) \\
&- g_1(T_{\xi_1} A_X Y, \xi_2) - g_1(h \nabla_{\xi_1} h \nabla_X Y, \xi_2) - g_1(h \nabla_{[X, \xi_1]} Y, \xi_2) \quad (3.4.22)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan doğrudan işlemlerle

$$g_1((\nabla_X T)(\xi_1, Y), \xi_2) = g_1(A_X T_{\xi_1} Y, \xi_2) - g_1(T_{\xi_1} A_X Y, \xi_2) \quad (3.4.23)$$

ifadesi bulunur. O halde (3.4.22) ve (3.4.23) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g_1(R(X, \xi_1)Y, \xi_2) &= g_1((\nabla_X T)(\xi_1, Y), \xi_2) + g_1(h \nabla_X h \nabla_{\xi_1} Y, \xi_2) \\
&- g_1(h \nabla_{\xi_1} h \nabla_X Y, \xi_2) - g_1(h \nabla_{[X, \xi_1]} Y, \xi_2)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

4.) $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$ için (2.2.2), (3.1.38), (3.1.34) eşitlikleri ile

$$\begin{aligned}
g_1(R(U, \xi_1)U, \xi_2) &= g_1(\nabla_U \nabla_{\xi_1} U, \xi_2) - g_1(\nabla_{\xi_1} \nabla_U U, \xi_2) - g_1(\nabla_{[U, \xi_1]} U, \xi_2), \\
&= g_1(T_U T_{\xi_1} U, \xi_2) + g_1(h \nabla_U T_{\xi_1} U, \xi_2) + g_1(T_U \nu \nabla_{\xi_1} U, \xi_2) \\
&+ g_1(\nu \nabla_U \nu \nabla_{\xi_1} U, \xi_2) - g_1(T_{\xi_1} T_U U, \xi_2) - g_1(h \nabla_{\xi_1} T_U U, \xi_2) \\
&- g_1(T_{\xi_1} \nu \nabla_U U, \xi_2) - g_1(\nu \nabla_{\xi_1} \nu \nabla_U U, \xi_2) - g_1(T_{[U, \xi_1]} U, \xi_2), \\
&= g_1(h \nabla_U T_{\xi_1} U, \xi_2) + g_1(T_U \nu \nabla_{\xi_1} U, \xi_2) - g_1(h \nabla_{\xi_1} T_U U, \xi_2) \\
&- g_1(T_{\xi_1} \nu \nabla_U U, \xi_2) - g_1(T_{\nabla_U \xi_1} U, \xi_2) + g_1(T_{\nabla_{\xi_1} U} U, \xi_2) \quad (3.4.24)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$g_1((\nabla_U T)(\xi_1, U), \xi_2) = g_1(h \nabla_U T_{\xi_1} U, \xi_2) - g_1(T_{\nabla_U \xi_1} U, \xi_2) - g_1(T_{\xi_1} \nu \nabla_U U, \xi_2) \quad (3.4.25)$$

ve

$$g_1((\nabla_{\xi_1} T)(U, U), \xi_2) = g_1(h \nabla_{\xi_1} T_U U, \xi_2) - g_1(T_{\nabla_{\xi_1} U} U, \xi_2) - g_1(T_U \nu \nabla_{\xi_1} U, \xi_2) \quad (3.4.26)$$

eşitlikleri bulunur. O halde (3.4.24), (3.4.25) ve (3.4.26) eşitliklerinden

$$g_1(R(U, \xi_1)U, \xi_2) = g_1((\nabla_U T)(\xi_1, U), \xi_2) - g_1((\nabla_{\xi_1} T)(U, U), \xi_2)$$

eşitliği bulunur.

5.) $X \in \Gamma(S(\text{çekf}_*)^\perp)$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $U \in \Gamma(S(\text{çekf}_*))$ için (2.2.2), (3.1.59) eşitlikleri ve Lemma 3.1.12'den

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi)X, U) &= g_1(\nabla_X \nabla_\xi X, U) - g_1(\nabla_\xi \nabla_X X, U) - g_1(\nabla_{[X, \xi]} X, U), \\ &= g_1(v \nabla_X T_\xi X, U) + g_1(A_X h \nabla_\xi X, U) - g_1(v \nabla_\xi A_X X, U) \\ &\quad - g_1(T_\xi h \nabla_X X, U) - g_1(T_{\nabla_X \xi} X, U) + g_1(T_{\nabla_\xi X} X, U) \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

olur. Diğer taraftan

$$g_1((\nabla_X T)(\xi, X), U) = g_1(v \nabla_X T_\xi X, U) - g_1(T_{v \nabla_X \xi} X, U) - g_1(T_\xi h \nabla_X X, U) \quad (3.4.28)$$

ve

$$g_1((\nabla_\xi A)(X, X), U) = g_1(v \nabla_\xi A_X X, U) - g_1(A_h \nabla_\xi X, U) - g_1(A_X h \nabla_\xi X, U) \quad (3.4.29)$$

eşitlikleri bulunur. O halde (3.4.27), (3.4.28) ve (3.4.29) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi)X, U) &= g_1((\nabla_X T)(\xi, X), U) - g_1((\nabla_\xi A)(X, X), U) \\ &\quad + g_1(T_{T_\xi X} X, U) - g_1(A_h \nabla_\xi X, U) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

6.) $U, V \in \Gamma(S(\text{çekf}_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için (2.2.2), (3.1.38) ve (3.1.34) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_1(R(U, \xi)U, V) &= g_1(\nabla_U \nabla_\xi U, V) - g_1(\nabla_\xi \nabla_U U, V) - g_1(\nabla_{[U, \xi]} U, V), \\ &= g_1(T_U T_\xi U, V) + g_1(v \nabla_U v \nabla_\xi U, V) - g_1(T_\xi T_U U, V) \\ &\quad - g_1(v \nabla_\xi v \nabla_U U, V) - g_1(v \nabla_{[U, \xi]} U, V) \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

olur. Diğer taraftan

$$g_1((\nabla_U T)(\xi, U), V) = g_1(T_U T_\xi U, V) - g_1(T_\xi T_U U, V) \quad (3.4.31)$$

eşitliği bulunur. Bu durumda (3.4.30) ve (3.4.31) eşitliklerinden

$$g_1(R(U, \xi)U, V) = g_1((\nabla_U T)(\xi, U), V) + g_1(\widehat{R}(U, \xi)U, V)$$

ifadesi elde edilir.

7.) $X, Y \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$ ve $\xi \in \Gamma(\Delta)$ için (2.2.2), (3.1.59) eşitlikleri ve Lemma (3.1.12)'den yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi)X, Y) &= g_1(\nabla_X \nabla_\xi X - \nabla_\xi \nabla_X X - \nabla_{[X, \xi]} X, Y), \\ &= g_1(A_X T_\xi X, Y) + g_1(h \nabla_X h \nabla_\xi X, Y) - g_1(T_\xi A_X X, Y) \\ &\quad - g_1(h \nabla_\xi h \nabla_X X, Y) - g_1(h \nabla_{[X, \xi]} X, Y) \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

olur. Diğer taraftan

$$g_1((\nabla_X T)(\xi, X), Y) = g_1(A_X T_\xi X, Y) - g_1(T_\xi A_X X, Y) \quad (3.4.33)$$

eşitliği bulunur. Bu durumda (3.4.32) ve (3.4.33) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_1(R(X, \xi)X, Y) &= g_1((\nabla_X T)(\xi, X), Y) + g_1(\nabla_X h \nabla_\xi X, Y) \\ &\quad - g_1(\nabla_\xi^* \nabla_X X, Y) - g_1(\nabla_{[X, \xi]} X, Y) \end{aligned}$$

bulunur.

8.) $U \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*))$, $\xi \in \Gamma(\Delta)$, $X \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$ için (2.2.2), (3.1.34) ve (3.1.38)'den

$$\begin{aligned} g_1(R(U, \xi)U, X) &= g_1(\nabla_U \nabla_\xi U, X) - g_1(\nabla_\xi \nabla_U U, X) - g_1(\nabla_{[U, \xi]} U, X), \\ &= g_1(h \nabla_U T_\xi U, X) + g_1(T_U \nabla_\xi U, X) - g_1(h \nabla_\xi T_U U, X) \\ &\quad - g_1(T_\xi \nabla_U U, X) - g_1(T_{\nabla_U \xi} U, X) + g_1(T_{\nabla_\xi U} U, X) \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

olur. Diğer taraftan

$$g_1((\nabla_U T)(\xi, U), X) = g_1(h \nabla_U T_\xi U, X) - g_1(T_{\nabla_U \xi} U, X) - g_1(T_\xi \nabla_U U, X) \quad (3.4.35)$$

ve

$$g_1((\nabla_\xi T)(U, U), X) = g_1(h \nabla_\xi T_U U, X) - g_1(T_{\nabla_\xi U} U, X) - g_1(T_U \nabla_\xi U, X) \quad (3.4.36)$$

eşitlikleri bulunur. O halde (3.4.34), (3.4.35) ve (3.4.36) eşitliklerinden

$$g_1(R(U, \xi)U, X) = g_1((\nabla_U T)(\xi, U), X) - g_1((\nabla_\xi T)(U, U), X)$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3.4.3 Kesit Eğrilikleri

Tanım 3.4.1. (M_1, g_1) bir semi-Riemann manifold ve $R, (M_1, g_1)$ 'in eğrilik tensörü olsun. Bu durumda ξ_p 'ye göre $p \in M_1$ noktasında M_1 'in **null kesit eğriliği**

$$K_{M_1}(\xi_p, X_p) = \frac{g_1(R(X_p, \xi_p)\xi_p, X_p)}{g_1(X_p, X_p)} \quad (3.4.37)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada X_p non null vektör ve $\xi_p, T_p(M_1)$ 'de null vektördür [16].

Teorem 3.4.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold ve

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. Bu durumda;

a.) U ve ξ tarafından gerilen bir $T_p M_1$ düzlemi için

$$K(U, \xi) = g_1((\nabla_U T)(\xi, \xi), U) + \widehat{K}(U, \xi)$$

b.) X ve ξ tarafından gerilen bir $T_p M_1$ düzlemi için

$$\begin{aligned} K(X, \xi) &= g_1((\nabla_X T)(\xi, \xi), X) - g_1(h\nabla_\xi A_X \xi, X) + g_1(T_{\xi X} \xi, X) \\ &\quad - g_1(h\nabla_X T_\xi \xi, X) + g_1(T_{\nabla_X \xi} \xi, X) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

İspat: **a.)** $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $\xi \in \Gamma(\text{Rad}(\text{çek}f_*))$ için (3.4.37) eşitliği kullanılırsa Lemma (3.1.11)'den

$$\begin{aligned} R(U, \xi)\xi &= \nabla_U \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_U \xi - \nabla_{[U, \xi]}\xi, \\ &= \nabla_U (T_\xi \xi + \nu \nabla_\xi \xi) - \nabla_\xi (T_U \xi + \nu \nabla_U \xi) \\ &\quad - T_{[U, \xi]}\xi - \nu \nabla_{[U, \xi]}\xi, \\ &= \nabla_U T_\xi \xi + \nabla_U \nu \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi T_U \xi - \nabla_\xi \nu \nabla_U \xi - T_{[U, \xi]}\xi - \nu \nabla_{[U, \xi]}\xi \end{aligned}$$

olur. O halde (3.1.32), (3.1.33), (3.1.43), ve (3.1.45) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} R(U, \xi)\xi &= T_U T_\xi \xi + h\nabla_U T_\xi \xi + T_U \nu \nabla_\xi \xi + \nu \nabla_U \nu \nabla_\xi \xi \\ &\quad - T_\xi T_U \xi - h\nabla_\xi T_U \xi - T_\xi \nu \nabla_U \xi - \nu \nabla_\xi \nu \nabla_U \xi \\ &\quad - T_{[U, \xi]}\xi - \nu \nabla_{[U, \xi]}\xi \end{aligned}$$

olur. O halde kesit eğriliğinin bulunabilmesi için $g_1(R(U, \xi)\xi, U)$ eşitliğinin bulunması gerekir. Bu durumda

$$\begin{aligned} g_1(R(U, \xi)\xi, U) &= g_1(T_U T_\xi \xi, U) - g_1(T_\xi T_U \xi, U) + g_1(v\nabla_U v\nabla_\xi \xi, U) \\ &\quad - g_1(v\nabla_\xi v\nabla_U \xi, U) - g_1(v\nabla_{[U, \xi]} \xi, U) \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

dir. Diğer taraftan

$$g_1((\nabla_U T)(\xi, \xi), U) = g_1(T_U T_\xi \xi, U) - g_1(T_\xi T_U \xi, U) \quad (3.4.39)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda (3.4.38) ve (3.4.39) eşitlikleri biraraya getirildiğinde

$$g_1(R(U, \xi)\xi, U) = g_1((\nabla_U T)(\xi, \xi), U) + g_1(\widehat{R}(U, \xi)\xi, U) \quad (3.4.40)$$

olur. (3.4.40) kullanılırsa

$$K_\xi(H) = g_1((\nabla_U T)(\xi, \xi), U) + g_1(\widehat{R}(U, \xi)\xi, U)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $K_\xi(H) \neq 0$ olur ve teorem ispatlanır.

b.)'nin ispatı da benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.4.4. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon ve X_1, X_2 vektör alanları da 2-düzlemini geren $(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ 'e ait vektör alanları olmak üzere, horizontal bileşenlere sahip A temel tensör alanının $S(\text{çek}f_*)$ 'in elemanı olması durumunda

$$K^{M_1}(X, Y) = g_1((\nabla_X A)(Y, Y), X) + K^{M_2}(X, Y) \quad (3.4.41)$$

eşitliği elde edilir. Burada K^{M_1} ve K^{M_2} sırasıyla M_1 ve M_2 'nin non dejenere kesit eğriliğidir.

İspat: $X, Y \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için (3.3.2), (3.1.26), (3.1.59) eşitlikleri ve Lemma (3.1.13)'ten yararlanılarak

$$g_1((\nabla_X A)(Y, Y), X) = g_1(A_X A_Y Y, X) - g_1(A_Y A_X Y, X) \quad (3.4.42)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan (2.2.2) eşitliğinde $[X, Y] \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için (3.1.26), (3.1.56) eşitlikleri ve Lemma (3.1.13)'ten yararlanılarak

$$\begin{aligned} R(X, Y)Y &= A_X A_Y Y + v\nabla_X A_Y Y + A_X h\nabla_Y Y + h\nabla_X h\nabla_Y Y \\ &\quad - A_Y A_X Y - v\nabla_Y A_X Y - A_Y h\nabla_X Y - h\nabla_Y h\nabla_X Y \\ &\quad - A_{[X, Y]}Y - h\nabla_{[X, Y]}Y \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

dir. O halde $X, Y \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$ için (3.1.26), (3.1.46) ve (3.1.59) yararlanılarak

$$\begin{aligned} g_1(R(X, Y)Y, X) &= g_1(A_X A_Y Y, X) - g_1(A_Y A_X Y, X) + g_1(h\nabla_X h\nabla_Y Y, X) \\ &\quad - g_1(h\nabla_Y h\nabla_X Y, X) - g_1(h\nabla_{[X, Y]} Y, X) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (3.4.42) ve (3.4.43) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1(R(X, Y)Y, X) &= g_1((\nabla_X A)(Y, Y), X) + g_1(\check{R}^*(X, Y)Y, X), \\ K^{M_1}(X, Y) &= g_1((\nabla_X A)(Y, Y), X) + K^{M_2}(X, Y) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.4.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold,

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olmak üzere $X, Y \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$, $N \in \Gamma(ltr(\check{c}ekf_*))$ olmak üzere $ltr(\check{c}ekf_*)$ distribüsyonunun $S(\check{c}ekf_*)^\perp$ distribüsyonu boyunca paralel olması ve $A_X Y$ temel tensör alanının $S(\check{c}ekf_*)$ 'in elemanı olması durumunda

$$K^{M_1}(X, Y) = K^{M_2}(X, Y) - 3 \|A_X Y\|^2$$

eşitliği elde edilir. Burada K^{M_1} ve K^{M_2} sırasıyla M_1 ve M_2 manifoldlarına karşılık gelen non dejenere kesit eğrilikleri ve buradaki vektör alanları da ortonormal vektör alanlarıdır.

İspat: (3.1.59) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (\check{\nabla}_Y^* Z + A_Y Z) \\ &= \check{\nabla}_X^* \check{\nabla}_Y^* Z + A_X \check{\nabla}_Y^* Z + A_X A_Y Z + \nu \nabla_X A_Y Z \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

olur. Benzer şekilde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \check{\nabla}_Y^* \check{\nabla}_X^* Z + A_Y \check{\nabla}_X^* Z + A_Y A_X Z + \nu \nabla_Y A_X Z \quad (3.4.45)$$

olur ve bu kez de $[X, Y]$ 'nin vertikal olduğu kabul edilirse (3.1.42) ve (3.1.59) eşitliğinden yararlanılarak

$$\nabla_{[X, Y]} Z = T_{A_X Y} Z - T_{A_Y X} Z + h\nabla_{A_X Y} Z - h\nabla_{A_Y X} Z$$

eşitliği elde edilir. Burada özel olarak $X, Y \in \Gamma(S(\check{c}ekf_*)^\perp)$, $N \in \Gamma(ltr(\check{c}ekf_*))$ için $ltr(\check{c}ekf_*)$ 'ın X yönünde paralel olması durumunda Teorem (3.1.67)'den

$$\begin{aligned} \nabla_{[X, Y]} Z &= T_{2A_X Y} Z + h\nabla_{2A_X Y} Z, \\ &= 2T_{A_X Y} Z + 2h\nabla_{A_X Y} Z \end{aligned}$$

olur. O halde Lemma 3.1.6'dan yararlanılarak

$$\nabla_{[X,Y]}Z = 2T_{AX}Y + 2A_ZA_XY \quad (3.4.46)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (3.4.44), (3.4.45) ve (3.4.46) biraraya getirilerek

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X^* \nabla_Y^* Z + A_X^* \nabla_Y^* Z + A_X A_Y Z + v \nabla_X A_Y Z \\ &\quad - \nabla_Y^* \nabla_X^* Z - A_Y^* \nabla_X^* Z - A_Y A_X Z - v \nabla_Y A_X Z \\ &\quad - 2T_{AX}Y - 2A_ZA_XY \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

eşitliği elde edilir. (3.4.47) eşitliğinin her iki tarafı $H \in \Gamma(S(\text{çekf}_*)^\perp)$ ile çarpılırsa

$$g_1(R(X,Y)Z,H) = g_1(\dot{R}(X,Y)Z,H) + g_1(A_X A_Y Z,H) - g_1(A_Y A_X Z,H) - 2g_1(A_Z A_X Y,H)$$

olur. Burada özel olarak bileşenleri yatay vektör alanlarından oluşan A temel tensör alanlarının $S(\text{çekf}_*)$ 'in elemanı olması halinde

$$g_1(R(X,Y)Z,H) = g_1(\dot{R}(X,Y)Z,H) - g_1(A_X H, A_Y Z) + g_1(A_Y H, A_X Z) + 2g_1(A_Z H, A_X Y)$$

eşitliği elde edilir. Burada özel olarak Z yerine Y ve H yerine X alınırsa

$$g_1(R(X,Y)Y,X) = g_1(\dot{R}(X,Y)Y,X) - g_1(\underbrace{A_X X}_{=0}, \underbrace{A_Y Y}_{=0}) + g_1(A_Y X, A_X Y) + 2g_1(A_Y X, A_X Y)$$

olur. $A_X Y = -A_Y X$ olacağından

$$\begin{aligned} g_1(R(X,Y)Y,X) &= g_1(\dot{R}(X,Y)Y,X) - g_1(A_X Y, A_X Y) - 2g_1(A_X Y, A_X Y), \\ &= g_1(\dot{R}(X,Y)Y,X) - 3g_1(A_X Y, A_X Y), \end{aligned}$$

$$K^{M_1}(X,Y) = K^{M_2}(X,Y) - 3\|A_X Y\|^2$$

bulunur.

3.4.4 Ricci Eğrilikleri

Şimdi de Maria Falcitelli ve diğ. [18]'de bahsetmiş olduğu π -uyumlu çatı tanımından yararlanarak aşağıdaki ifadeyi verelim:

Tanım 3.4.2. (M_1, g_1) bir semi-Riemann manifold olsun. X_j 'lerin her biri $S(\text{çekf}_*)^\perp$ ve U_k 'ların her biri $S(\text{çekf}_*)$ 'in elemanı olmak üzere M_1 üzerindeki her bir $\{X_j, U_k\}_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq r}$ lokal ortonormal çatıya π uyumlu çatı denir.

Lemma 3.4.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon olsun. $U, V \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$, $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\Delta)$, $X, Y \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ ve $N_1, N_2 \in \Gamma(ltr(\zeta ek f_*))$ için $\{X_k, U_i\}_{1 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq m}$ (M_1, g_1) üzerinde bir f uyumlu çatı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

i.)

$$\sum_{k=1}^r g_1(T_U X_k, T_V X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(T_U U_i, T_V U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(T_U \xi_j, T_V N_j), \quad (3.4.48)$$

ii.)

$$\sum_{k=1}^r g_1(A_X X_k, A_Y X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, A_Y U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j), \quad (3.4.49)$$

iii.)

$$\sum_{k=1}^r g_1(A_X X_k, T_U X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, T_U U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, T_U N_j), \quad (3.4.50)$$

iv.)

$$\sum_{k=1}^r g_1(T_{\xi_1} X_k, T_{\xi_2} X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_1} U_i, T_{\xi_2} U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_1} N_j, T_{\xi_2} N_j), \quad (3.4.51)$$

v.)

$$\sum_{k=1}^r g_1(A_{N_1} X_k, A_{N_2} X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_1} U_i, A_{N_2} U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_1} \xi_j, A_{N_2} N_j), \quad (3.4.52)$$

vi.)

$$\sum_{k=1}^r g_1(A_N X_k, T_\xi X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(A_N U_i, T_\xi U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_N \xi_j, T_\xi N_j). \quad (3.4.53)$$

İspat: i.) $V \in \Gamma(S(\zeta ek f_*))$ ve $X \in \Gamma(S(\zeta ek f_*)^\perp)$ için

$$T_V X = v \nabla_V X$$

olduğundan $T_V X$ temel vektör alanı dikey distribüsyona ait bir vektör alanı olup, $S(\zeta ek f_*)$ ve Δ distribüsyonlarından oluşur. Bu da

$$T_V X_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j \quad (3.4.54)$$

ile gösterilsin. Bu durumda,

$$g_1(T_V X_k, U_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

$$g_1(T_V X_k, N_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j$$

olur. O halde,

$$T_V X_k = \sum_{i=1}^m g_1(T_V X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_V X_k, N_j) \xi_j,$$

$$\sum_{k=1}^r g_1(T_U X_k, T_V X_k) = \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_U X_k, \left(\sum_{i=1}^m g_1(T_V X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_V X_k, N_j) \xi_j \right) \right),$$

dir.

Lemma 3.1.15'ten yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r g_1(T_U X_k, T_V X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_U X_k, \sum_{i=1}^m g_1(T_V X_k, U_i) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_U X_k, \sum_{j=1}^n g_1(T_V X_k, N_j) \xi_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_U X_k, - \sum_{i=1}^m g_1(T_V U_i, X_k) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_U X_k, - \sum_{j=1}^n g_1(T_V N_j, X_k) \xi_j \right), \\ &= - \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(T_U X_k, U_i) \cdot g_1(T_V U_i, X_k) - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(T_U X_k, \xi_j) \cdot g_1(T_V N_j, X_k), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(T_U U_i, X_k) \cdot g_1(T_V U_i, X_k) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(T_U \xi_j, X_k) g_1(T_V N_j, X_k), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(g_1(T_U U_i, X_k) X_k, T_V U_i) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(g_1(T_U \xi_j, X_k) X_k, T_V N_j), \\ &= \sum_{i=1}^m g_1(T_U U_i, T_V U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(T_U \xi_j, T_V N_j). \end{aligned}$$

ii.) $X, Y \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için

$$A_Y X = v \nabla_Y X$$

olduğundan $A_Y X$ temel vektör alanı dikey distribüsyona ait bir vektör alanı olur ve dolayısıyla $S(\text{çek}f_*)$ ve Δ distribüsyonlarından oluşur. Bu durumda

$$A_Y X_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j,$$

$$g_1(A_Y X_k, U_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

$$g_1(A_Y X_k, N_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j.$$

Bu durumda

$$A_Y X_k = \sum_{i=1}^m g_1(A_Y X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(A_Y X_k, N_j) \xi_j$$

olur.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r g_1(A_X X_k, A_Y X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, \left(\sum_{i=1}^m g_1(A_Y X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(A_Y X_k, N_j) \xi_j \right) \right), \\ &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, \sum_{i=1}^m g_1(A_Y X_k, U_i) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, \sum_{j=1}^n g_1(A_Y X_k, N_j) \xi_j \right), \\ &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, - \sum_{i=1}^m g_1(A_Y U_i, X_k) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, - \sum_{j=1}^n g_1(A_Y N_j, X_k) \xi_j \right), \\ &= - \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_X X_k, U_i) g_1(A_Y U_i, X_k) - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_X X_k, \xi_j) g_1(A_Y N_j, X_k), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, X_k) g_1(A_Y U_i, X_k) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, X_k) g_1(A_Y N_j, X_k), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, X_k) X_k, A_Y U_i + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, X_k) X_k, A_Y N_j, \\ &= \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, A_Y U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j). \end{aligned}$$

iii.) $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ ve $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ olduğundan $T_U X = v \nabla_U X$ olur ve böylece

$$T_U X_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j$$

şeklinde yazılır.

$$g_1(T_U X_k, U_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

$$g_1(T_U X_k, N_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_U X_k &= \sum_{i=1}^m g_1(T_U X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_U X_k, N_j) \xi_j, \\ \sum_{k=1}^r g_1(A_X X_k, T_U X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, \left(\sum_{i=1}^m g_1(T_U X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_U X_k, N_j) \xi_j \right) \right), \\ &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, \sum_{i=1}^m g_1(T_U X_k, U_i) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, \sum_{j=1}^n g_1(T_U X_k, N_j) \xi_j \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^r g_1(A_X X_k, T_U X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, -\sum_{i=1}^m g_1(T_U U_i, X_k) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_X X_k, -\sum_{j=1}^n g_1(T_U N_j, X_k) \xi_j \right), \\
&= -\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_X X_k, U_i) g_1(T_U U_i, X_k) - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_X X_k, \xi_j) g_1(T_U N_j, X_k), \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, X_k) g_1(T_U U_i, X_k) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, X_k) g_1(T_U N_j, X_k), \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(g_1(A_X U_i, X_k) X_k, T_U U_i) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(g_1(A_X \xi_j, X_k) X_k, T_U N_j), \\
&= \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, T_U U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, T_U N_j)
\end{aligned}$$

olur.

iv.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$ ve $X \in \Gamma(S(\text{çekf}_*)^\perp)$ için $T_\xi X = v \nabla_\xi X$ olur ve böylece

$$T_{\xi_2} X_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j$$

şeklinde yazılır. O halde

$$\begin{aligned}
g_1(T_{\xi_2} X_k, U_i) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i, \\
g_1(T_{\xi_2} X_k, N_j) &= \sum_{j=1}^n \mu_j
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$T_{\xi_2} X_k = \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} X_k, N_j) \xi_j$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^r g_1(T_{\xi_1} X_k, T_{\xi_2} X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_{\xi_1} X_k, \left(\sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} X_k, N_j) \xi_j \right) \right), \\
&= \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_{\xi_1} X_k, \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} X_k, U_i) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_{\xi_1} X_k, \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} X_k, N_j) \xi_j \right), \\
&= \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_{\xi_1} X_k, -\sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} U_i, X_k) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(T_{\xi_1} X_k, -\sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} N_j, X_k) \xi_j \right), \\
&= -\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} U_i, X_k) g_1(T_{\xi_1} X_k, U_i) - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} N_j, X_k) g_1(T_{\xi_1} X_k, \xi_j), \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} U_i, X_k) g_1(T_{\xi_1} U_i, X_k) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} N_j, X_k) g_1(T_{\xi_1} \xi_j, X_k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^r g_1(T_{\xi_1} X_k, T_{\xi_2} X_k) &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(g_1(T_{\xi_2} U_i, X_k) X_k, T_{\xi_1} U_i) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} N_j, X_k) X_k, T_{\xi_1} X_j), \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_2} U_i, T_{\xi_1} U_i) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_2} N_j, T_{\xi_1} X_j), \\
&= \sum_{i=1}^m g_1(T_{\xi_1} U_i, T_{\xi_2} U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(T_{\xi_1} X_j, T_{\xi_2} N_j).
\end{aligned}$$

v.)

$$\begin{aligned}
A_{N_2} X_k &= \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j, \\
g_1(A_{N_2} X_k, U_i) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i, \\
g_1(A_{N_2} X_k, N_j) &= \sum_{j=1}^n \mu_j
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$A_{N_2} X_k = \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_2} X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_2} X_k, N_j) \xi_j$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^r g_1(A_{N_1} X_k, A_{N_2} X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_{N_1} X_k, \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_2} X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_2} X_k, N_j) \xi_j \right), \\
&= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_{N_1} X_k, \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_2} X_k, U_i) U_i + \sum_{k=1}^r g_1(A_{N_1} X_k, \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_2} X_k, N_j) \xi_j) \right), \\
&= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_{N_1} X_k, - \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_2} U_i, X_k) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_{N_1} X_k, - \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_2} N_j, X_k) \xi_j \right), \\
&= - \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_1} X_k, U_i) g_1(A_{N_2} U_i, X_k) - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_1} X_k, \xi_j) g_1(A_{N_2} N_j, X_k), \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_1} U_i, X_k) g_1(A_{N_2} U_i, X_k) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_1} \xi_j, X_k) g_1(A_{N_2} N_j, X_k), \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(g_1(A_{N_1} U_i, X_k) X_k, A_{N_2} U_i) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(g_1(A_{N_1} \xi_j, X_k) X_k, A_{N_2} N_j), \\
&= \sum_{i=1}^m g_1(A_{N_1} U_i, A_{N_2} U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_{N_1} \xi_j, A_{N_2} N_j).
\end{aligned}$$

vi.) $\xi \in \Gamma(\Delta)$ ve $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ için $T_\xi X = v \nabla_\xi X$ olur ve böylece

$$T_\xi X_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j,$$

şeklinde yazılır.

$$g_1(T_\xi X_k, U_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

$$g_1(T_\xi X_k, N_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j$$

olur. Bu durumda

$$T_\xi X_k = \sum_{i=1}^m g_1(T_\xi X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_\xi X_k, N_j) \xi_j,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r g_1(A_N X_k, T_\xi X_k) &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_N X_k, \sum_{i=1}^m g_1(T_\xi X_k, U_i) U_i + \sum_{j=1}^n g_1(T_\xi X_k, N_j) \xi_j \right), \\ &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_N X_k, \sum_{i=1}^m g_1(T_\xi X_k, U_i) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_N X_k, \sum_{j=1}^n g_1(T_\xi X_k, N_j) \xi_j \right), \\ &= \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_N X_k, -\sum_{i=1}^m g_1(T_\xi U_i, X_k) U_i \right) + \sum_{k=1}^r g_1 \left(A_N X_k, -\sum_{j=1}^n g_1(T_\xi N_j, X_k) \xi_j \right), \\ &= -\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_N X_k, U_i) g_1(T_\xi U_i, X_k) - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_N X_k, \xi_j) g_1(T_\xi N_j, X_k), \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m g_1(A_N U_i, X_k) g_1(T_\xi U_i, X_k) + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n g_1(A_N \xi_j, X_k) g_1(T_\xi N_j, X_k), \\ &= \sum_{i=1}^m g_1(A_N U_i, T_\xi U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_N \xi_j, T_\xi N_j) \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.4.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon ve $\{X_k, U_i\}$ bir f uyumlu çatı olsun. Bu durumda herhangi $U, V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $X, Y \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$, $T_U X_k$ 'nin $S(\text{çek}f_*)$ 'in elemanı olması ve $S(\text{çek}f_*)$ 'in integrallenebilir olması durumunda

$$\begin{aligned} \rho_1(U, V) &= \sum_i \left\{ g_1(T_U U_i, T_V U_i) + g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, V) + g_1(\widehat{R}(U_i, U) U_i, V) \right\} \\ &\quad + \sum_j \left\{ g_1(T_U \xi_j, T_V N_j) \right\} \\ &\quad + \sum_k \left\{ g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) - g_1(A_{h\nabla_U X_k} X_k, V) \right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: $U, V \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ ve $\{X_k, U_i\}$ bir f uyumlu çatı olmak üzere (3.4.10), (3.4.1) ve (3.4.48) denklemlerinden yararlanılarak ve

$$\rho_1(U, V) = \sum_k R(X_k, U, X_k, V) + \sum_i R(U_i, U, U_i, V)$$

ayrışımı ele alınarak

$$\begin{aligned} \sum_k R(X_k, U, X_k, V) &= \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X_k, V) + g_1(T_{\nabla_U X_k} X_k, V)\}, \\ &= \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X_k, V) + g_1(T_{U X_k} X_k, V)\}, \\ &= \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X_k, V) - g_1(T_{U X_k} V, X_k)\}, \\ &= \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X_k, V) - g_1(T_V T_U X_k, X_k)\}, \\ &= \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X_k, V) + g_1(T_V X_k, T_U X_k)\}, \\ &= \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) \\ &\quad - g_1(A_h \nabla_U X_k, V)\} + \sum_i \{g_1(T_U U_i, T_V U_i)\} + \sum_j \{g_1(T_U \xi_j, T_V N_j)\} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\sum_i R(U_i, U, U_i, V) = \sum_i \{g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, V) + g_1(\widehat{R}(U_i, U) U_i, V)\}$$

eşitliğinden de yararlanılarak

$$\begin{aligned} \rho_1(U, V) &= \sum_i \left\{ g_1(T_U U_i, T_V U_i) + g_1((\nabla_{U_i} T)_U U_i, V) + g_1(\widehat{R}(U_i, U) U_i, V) \right\} \\ &\quad + \sum_j \{g_1(T_U \xi_j, T_V N_j)\} \\ &\quad + \sum_k \{g_1((\nabla_{X_k} T)(U, X_k), V) - g_1((\nabla_U A)(X_k, X_k), V) - g_1(A_h \nabla_U X_k, V)\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.4.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon ve $\{X_k, U_i\}$ bir f uyumlu çatı olsun. Bu durumda ∇ Levi-Civita konneksiyon olmak üzere, $N \in \Gamma(\text{ltr}(\text{çek}f_*))$ için $\text{ltr}(\text{çek}f_*)$ distribüsyonunun $S(\text{çek}f_*)^\perp$ distribüsyonu boyunca paralel olması, $A_{X_j}X$ 'in $S(\text{çek}f_*)$ 'ın elemanı olması, $T_U X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$ olması ve $S(\text{çek}f_*)$ 'ın integrallenebilmesi durumunda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \rho_1(X, X) &= \rho_2(X, X) + \sum_i \{g_1((\nabla_X T)(U_i, X), U_i) - g_1((\nabla_{U_i} A)(X, X), U_i) - g_1(A_{h\nabla_{U_i} X} X, U_i) \\ &\quad + \|T_{U_i} X\|^2\} + \sum_k \left\{ \sum_{i=1}^m \|A_X U_i\|^2 + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j) \right\}. \end{aligned}$$

İspat: $U \in \Gamma(S(\text{çek}f_*))$, $X \in \Gamma(S(\text{çek}f_*)^\perp)$ olsun. X temel vektör alanı X' vektör alanına f bağlı ve $\{X_k, U_i\}$ bir f uyumlu çatı olsun. O halde (3.4.5), (3.4.10) ve (3.3.15) denklemlerinden yararlanılarak

$$\rho_1(X, X) = \sum_k R(X, X_k, X, X_k) + \sum_i R(X, U_i, X, U_i)$$

ele alındığında

$$\begin{aligned} \sum_k R(X, X_k, X, X_k) &= \sum_k \{g_1((\nabla_X A)(X_k, X), X_k) + g_1(R^*(X, X_k)X, X_k), \\ &= \sum_k \{g_1(A_X A_{X_k} X, X_k) - g_1(A_{X_k} A_X X, X_k) + g_1(R^*(X, X_k)X, X_k)\} \end{aligned}$$

olur. Lemma (3.1.15) kullanılırsa

$$\sum_k R(X, X_k, X, X_k) = \sum_k \{-g_1(A_X X_k, A_{X_k} X) + g_1(A_{X_k} X_k, A_X X) + g_1(R^*(X, X_k)X, X_k)\}$$

Bu durumda Teorem (3.1.8)'den $A_{X_k} X_k = 0$ olacağından

$$\sum_k R(X, X_k, X, X_k) = \sum_k \{-g_1(A_X X_k, A_{X_k} X) + g_1(R^*(X, X_k)X, X_k)\}$$

olur. Lemma (3.4.1)'den yararlanılırsa ; yani

$$\sum_{k=1}^r g_1(A_X X_k, A_Y X_k) = \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, A_Y U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j)$$

eşitliği kullanılırsa ve Teorem (3.1.8)'den

$$\begin{aligned} \sum_k R(X, X_k, X, X_k) &= \sum_k \left\{ \sum_{i=1}^m g_1(A_X U_i, A_X U_i) + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j) + g_1(R^*(X, X_k)X, X_k) \right\}, \\ &= \sum_k \left\{ \sum_{i=1}^m \|A_X U_i\|^2 + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j) + g_1(R^*(X, X_k)X, X_k) \right\} \quad (3.4.55) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\sum_k R(X, U_k, X, U_k) &= g_1((\nabla_X T)(U_k, X), U_k) - g_1((\nabla_{U_k} A)(X, X), U_k) \\
&\quad - g_1(A_h \nabla_{U_k} X, U_k) + g_1(T_{\nabla_{U_k} X}, U_k), \\
&= g_1((\nabla_X T)(U_k, X), U_k) - g_1((\nabla_{U_k} A)(X, X), U_k) \\
&\quad - g_1(A_h \nabla_{U_k} X, U_k) - g_1(T_{U_k} T_{U_k} X, X), \\
&= g_1((\nabla_X T)(U_k, X), U_k) - g_1((\nabla_{U_k} A)(X, X), U_k) \\
&\quad - g_1(A_h \nabla_{U_k} X, U_k) + g_1(T_{U_k} X, T_{U_k} X), \\
&= g_1((\nabla_X T)(U_k, X), U_k) - g_1((\nabla_{U_k} A)(X, X), U_k) \\
&\quad - g_1(A_h \nabla_{U_k} X, U_k) + \|T_{U_k} X\|^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\sum_i R(X, U_i, X, U_i) = g_1((\nabla_X T)(U_i, X), U_i) - g_1((\nabla_{U_i} A)(X, X), U_i) - g_1(A_h \nabla_{U_i} X, U_i) + \|T_{U_i} X\|^2 \quad (3.4.56)$$

Bu durumda (3.4.55) ve (3.4.56) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\rho_1(X, X) &= \rho_2(X, X) + \sum_i \{g_1((\nabla_X T)(U_i, X), U_i) - g_1((\nabla_{U_i} A)(X, X), U_i) - g_1(A_h \nabla_{U_i} X, U_i) \\
&\quad + \|T_{U_i} X\|^2\} + \sum_k \left\{ \sum_{i=1}^m \|A_X U_i\|^2 + \sum_{j=1}^n g_1(A_X \xi_j, A_Y N_j) \right\}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.4.4. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) birer semi-Riemann manifold

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir transversal r lightlike submersiyon, $\{X_k, U_i\}$ bir f uyumlu çatı olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(S(\zeta e k f_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta e k f_*)^\perp)$

$$\begin{aligned}
\rho_1(U, X) &= \sum_k \{-g_1((\nabla_X A)(X_k, X_k), U) + g_1((\nabla_{X_k} A)(X, X_k), U)\} \\
&\quad - \sum_i \{g_1((\nabla_U T)(U_i, U_i), X) - g_1((\nabla_{U_i} T)(U, U_i), X)\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: $U \in \Gamma(S(\zeta e k f_*))$, $X \in \Gamma(S(\zeta e k f_*)^\perp)$ ve $\{X_k, U_i\}$ bir f uyumlu çatı olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho_1(U, X) &= \sum_j R(X, X_k, U, X_k) - \sum_i R(U, U_i, U_i, X) \\
&= - \sum_k R(X, X_k, X_k, U) - \sum_i R(U, U_i, U_i, X)
\end{aligned}$$

olur. O halde son ayrışımı tek tek ele alırsak (3.4.8) eşitliğinden

$$\sum_k R(X, X_k, X_k, U) = \sum_k \{g_1((\nabla_X A)(X_k, X_k), U) - g_1((\nabla_{X_k} A)(X, X_k), U)\} \quad (3.4.57)$$

olur. Diğer taraftan (3.4.4) eşitliğinden

$$\sum_i g_1(R(U, U_i, U_i, X) = g_1((\nabla_U T)(U_i, U_i), X) - g_1((\nabla_{U_i} T)(U, U_i), X) \quad (3.4.58)$$

eşitliği elde edilir. O halde (3.4.57) ve (3.4.58) eşitlikleri biraraya getirilerek

$$\begin{aligned} \rho_1(U, X) = & \sum_k \{-g_1((\nabla_X A)(X_k, X_k), U) + g_1((\nabla_{X_k} A)(X, X_k), U)\} \\ & - \sum_i \{g_1((\nabla_U T)(U_i, U_i), X) - g_1((\nabla_{U_i} T)(U, U_i), X)\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık.
- [2] **O'Neill, B.** (1966). The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.*, 13(4), 459–469.
- [3] **Gray, A.** (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16, 715–737.
- [4] **Şahin, B. ve Gündüzalp, Y.** (2010). Submersion from semi-Riemannian manifolds onto lightlike manifolds, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39(1), 41–53.
- [5] **Şahin, B.** (2008). On a submersion between Reinhart lightlike manifolds and semi-Riemannian manifolds, *Mediterranean J. Math*, 5, 273–284.
- [6] **Hacısalıhoğlu, H.H. ve Ekmekçi, N.** (2003). *Tensör Geometri*, Hacısalıhoğlu Yayınları.
- [7] **Sabuncuoğlu, A.** (2004). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım.
- [8] **Hacısalıhoğlu, H.H. ve Sabuncuoğlu, A.** (1983). *Diferensiyel Geometri*, Milli Eğitim Basımevi.
- [9] **Şahin, B.** (2017). *Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and their Applications*, Academic Press.
- [10] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press.
- [11] **Duggal, K.L. ve Bejancu, A.** (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Springer.
- [12] **Bejancu, A. ve Farran, H.R.** (2006). *Foliations and Geometric Structures*, Springer.
- [13] **Hacısalıhoğlu, H.H.** (1983). *Diferensiyel Geometri*, Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi.
- [14] **Petersen, P.** (2006). *Riemannian Geometry*, Springer.
- [15] **Duggal, K.L. ve Sahin, B.** (2010). *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*, Birkhäuser Basel.
- [16] **García-Río, E. ve Kupeli, D.N.** (1999). *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Springer-Science-Business Media, BV.
- [17] **Gündüzalp, Y.** (2007). *Riemann Submersiyonların Geometrisi Üzerine* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [18] **Maria Falcitelli, S.I. ve Pastore, A.M.** (2004). *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific.
- [19] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1963,1969). *Foundations of Differential Geometry*, ciltI-II, Interscience Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2015, İnönü Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı
- **Doktora:** 2022, İnönü Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2013-2014 Eğitim-Öğretim yılında Yaygın Ortaokulu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. (1. Dönem)
- 2015-2016 Eğitim-Öğretim yılında TÜBİTAK Projesi bursiyeri olarak yer aldı.
- 2016 yılında Malatya Büyükşehir Belediyesi Eğitim Merkezleri'nde Matematik öğretmeni olarak göreve başlamış olup halen bu görevini sürdürmektedir.

YÜKSEK LİSANS VEYA DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)