

TRANSVERSAL TASARIMLAR

Aytekin YAMAÇ

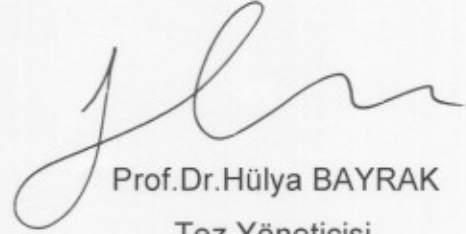
**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2006

ANKARA

Aytekin YAMAÇ tarafından hazırlanan TRANSVERSAL TASARIMLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylıyorum.


Prof.Dr.Hülya BAYRAK
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından İstatistik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Doç.Dr.Gül ERGÜN

Üye :Prof.Dr.Hülya BAYRAK

Üye :Prof.Dr.Semra ORAL ERBAŞ

Üye :Prof.Dr.Hasan BAL

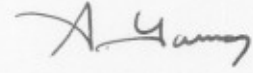
Üye :Prof.Dr.Reşat KASAP

Tarih :13/07/2006

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Aytekin YAMAÇ

TRANSVERSAL TASARIMLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Aytekin YAMAÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2006

ÖZET

Transversal tasarımlar istatistikte önemli bir yere sahip olup bilgisayar biliminde ve kriptografide de kullanılır. İstatistik biliminde ise deney düzenlerinde kullanılırlar. Bunun anlamı aslında insan yaşamının tüm alanlarında kullanılmasıdır. Bu çalışmada, istatistiksel anlamda ortogonal düzenler, Hadamard tasarımlar, dengeli tamamlanmamış blok düzenleri, grup bölünebilir tasarımlar, t-düzenleri ile yakın ilişkisi bulunan transversal tasarımların tanıtılması esas alınmıştır. Bu maksatla transversal tasarımların tanımlarına, ve sözü geçen tasarımlarla ilişkilerine teorik manada değinilip açıklayıcı örnekler verilmiştir.

Bilim Kodu :205.1.066

Anahtar Kelimeler :Transversal tasarım, simetrik transversal tasarım, tamamlanmamış transversal tasarım, etiketli transversal tasarım, ortogonal düzen, dengeli tamamlanmamış blok tasarımı, grup bölünebilir tasarım.

Sayfa Adeti :82

Tez Yöneticisi :Prof.Dr. Hülya BAYRAK

TRANSVERSAL DESIGNS**(M.Sc.Thesis)****Aytekın YAMAÇ****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****July 2006****ABSTRACT**

Transversal designs essential in statistics and they are used in computer science and cryptography. In statistics they are primarily used in designing experiment. Which means that they are immensely important in all areas of human investigation. In this study, we showed the close relationship between transversal designs and the following designs; orthogonal arrays, Hadamard designs, balanced incomplete block designs, group divisible designs, t-designs. We have concluded this study by showing the relationship between transversal designs and the above mentioned designs in theoretical and mathematical samples.

Science Code : 205.1.066**Key Words :Transversal design, symmetric transversal design, incomplete transversal design, labeled transversal design, orthogonal array, balanced incomplete block design, group divisible design.****Numer of Pages :82****Supervisor :Prof.Dr. Hülya BAYRAK**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren, çalışmalarının yoğunluğuna rağmen zaman ayırarak her konuda yardımını esirgemeyen Sayın Prof.Dr. Hülya BAYRAK'a, bugünkü bilgilerimi elde etmemde katkısı olan tüm hocalarıma ve en büyük destekçim olan eşim Hasene YAMAÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1.GİRİŞ.....	1
2.GENEL İSABET YAPILARI.....	5
2.1.Transversal Tasarım.....	5
2.2.Transversal Örtüler.....	8
2.3.Transversal Paketler.....	13
2.4.Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı.....	14
2.5.Grup Bölünebilir Tasarım.....	16
2.6. t -Tasarım.....	21
2.7.Ortogonal Düzen.....	26
2.8.Hadamard Matris.....	28
2.9.İkişerli Ortogonal Latin Kareler.....	32
3.TRANSVERSAL TASARIMLARIN ORTOGONAL DÜZENLER İLE İLİŞKİSİ.....	34
4.SİMETRİK TRANSVERSAL TASARIM.....	39
5.TRANSVERSAL TASARIMLAR VE GEOMETRİK YAPILAR.....	44
6.WILSON YAPISI.....	52

	Sayfa
7.KESİK TRANSVERSAL TASARIM.....	54
8.TAMAMLANMAMIŞ TRANSVERSAL TASARIM	63
9.ETİKETLİ AYRIŞTIRILABİLİR TRANSVERSAL TASARIMLAR.....	69
10.SONUÇ.....	78
KAYNAKLAR.....	79
ÖZGEÇMİŞ.....	82

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. $PG(2,3)$ deki doğrular ve noktalar	49

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Transversal doğrular.....	5
Şekil 2.2. $TD(3,2)$ transversal tasarımı	7
Şekil 2.3. $TD(3,3)$ transversal tasarımı.....	7
Şekil 2.4. Transversal tasarımda $k \geq 4$ durumu.....	7
Şekil 2.5. $3\text{-GDD}(2^3)$	16
Şekil 2.6. $3\text{-GDD}(2^4)$	17
Şekil 2.7. Grup bölünebilir t – tasarım.....	23
Şekil 2.8. Transversal t – tasarım.....	25
Şekil 5.1. Noktalarla noktaların ve nokta gruplarıyla blokların şematik gösterimi.....	45
Şekil 5.2. $pg(2,2,1)$ tasarımı için isabet matrisi.....	47
Şekil 5.3. Homojen replikasyonların bir gösterimi.....	50
Şekil 7.1. Kesik transversal tasarım.....	55
Şekil 7.2. Kesik transversal tasarımın, transversal tasarıma dönüştürülmüş hali.....	57

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$N(n)$	MOLS setinde maksimum latin kare sayısı
$TD_{\lambda}(k, n)$	n hacimli, k grup, λ indeksli transversal tasarım
$TC(k, g : n)$	Transversal örtü
$ITC(k, g : n)$	Tamamlanmamış transversal örtü
$PBTC(k, g : n)$	Nokta dengeli transversal örtü
$TP(k, g : n)$	Transversal paket
$RGD(K, \lambda, M; v)$	Ayrıştırılabilir grup bölünebilir tasarım
$OA(k, n)$	Ortogonal düzen
H matris	Hadamard matris
$STD_{\lambda}(k, n)$	Simetrik transversal tasarım
$S = (P, B)$	İsabet yapısı
$ITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$	Tamamlanmamış transversal tasarım
$PITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$	Bölünmüş tamamlanmamış transversal tasarım
$LB(k, \lambda; v)$	Etiketli blok tasarım
$LRTD_{\lambda}(k, m)$	Etiketli ayrıştırılabilir transversal tasarım
$LRB(k, \lambda; v)$	Etiketli ayrıştırılabilir blok tasarım

Kısaltmalar	Açıklama
BIBD	Dengeli tamamlanmamış Blok Tasarımı
GDD	Grup bölünebilir tasarım

Kısaltmalar**Açıklama****MOLS**

İkişerli ortogonal latin kare

1.GİRİŞ

Transversal tasarımlar (transversal designs) bilgisayar yazılım testleri, DNA testleri ve kriptoloji başta olmak üzere bir çok alanda kullanılır. Yirminci yüzyılın ikinci yarısından sonra uygulamada çok fazla kullanılmaya başlanmıştır.

Hanani (1974), transversal tasarımlar üzerine çalışmalar yaparak literatüre önemli katkılarda bulunmuştur [1].

1779 da Euler basit matematik bulmacaları üzerine çalışmalar yapmıştır. Bunlardan biri de 36 subay problemidir. 36 subay 6 farklı rütbeden ve 6 farklı alaydan seçilmiştir. Böylece her bir satır ve sütunda rütbe ve birlikleri farklı 6 subay bulunacaktır. Subayların rütbeleri bir latin kare, geldikleri birlikler de bir latin kare meydana getireceğinden 2 tane latin kare oluşacaktır. Fakat 2 latin karede de her sıralanış sadece 1 kez tekrarlanacaktır. Böylece bu kareler ortogonal olur. $1 \leq i < j \leq m$ için $L_1, \dots, L_m$ bir *MOLS* seti olsun. Bu durumda L_i ve L_j ortogonaldir. $N(n)$ bir *MOLS* setinde n nci mertebeden maksimum latin kare sayısını gösterir. Euler (1782) $N(2)=1$ ve $N(6)=1$ olduğunu biliyordu. n tek sayı olduğunda $N(4) \geq 2$ ve aynı zamanda $N(n) \geq 2$ olduğunu göstermiştir. $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise $N(n)=1$ dir [2].

Kirkman (1850) asal sayılar için projektif düzlemi keşfetmiştir. Tarry (1900) $N(6)=1$ 'in ispatı için çalışmıştır. Aynı dönemlerde Moore(1896) $N(nm) \geq \max(N(n), N(m))$ eşitsizliğini kurmuş ve daha sonra bu eşitsizlik MacNeish (1922) tarafından keşfedilmiştir. MacNeish yanlışlıkla Euler'in tahminini ispatladığını düşünmüş ve ardından daha güçlü bir tahminde bulunmuştur. $n = q_1 q_2 \dots q_s$, $s \geq 1$, her bir q_i , farklı bir asal sayının kuvveti olsun. Bu durumda eğer $q_1 \leq q_i$ ise $2 \leq i \leq s$ için $N(n) = q_1 - 1$ 'dir [2].

Levi (1942) MacNeish'in varsayılan ispatındaki hatalarla ilgilenmiştir. MacNeish'in tahmini Euler'i kuvvetlendirir, çünkü $n \equiv 2 \pmod{4}$ olduğu zaman $q_1 = 2$ olur. q bir asal kök olduğunda $N(q) = q - 1$ eşitliğini ilk kimin ortaya çıkardığını söylemek zordur. Bose(1938) ve ondan önce Moore(1896) da bu konular üzerine çalışmıştır [2].

Yates (1935,1936) blok genişliğinin optimal seçeneğini tartışmış ve dengeli tamamlanmamış blok düzenlerinin (*BIBD*) istenilen özelliklerini göstermiştir. Levi (1942), sonlu projektif ve afin geometri arasındaki yakın ilişkiye dikkat çekmiştir. Bruck ve Ryser (1949), Bose (1949) ve Schützenberger (1949), bu geometrileri çalışmak için isabet matrislerini kullanmışlardır [3].

1940'larda Rao kombinatöriyel düzenlemeler üzerine çalışmış ve istatistikteki uygulamaları üzerinde durmuştur [4].

Euler ve MacNeish'in tahminlerinden sonra Parker (1959,1962) da bu alanda çalışmıştır. Parker, dengeli tamamlanmamış blok düzenleri üzerine çalışmalar da gerçekleştirmiştir. $N(21) \geq 4$ olduğunu göstermiştir.

Bose ve Shrikhande (1960) Parker'ın bu çalışmasını görmüş ve bir genellemeye gitmişlerdir. 1960'da Bose, Shrikhande ve Parker, $n \neq 2, 6$ olan tüm n değerleri için $TD(4, n)$ tasarımından 2 *MOLS*'un oluşturulabileceğini ispatlamışlardır [5].

$N(22) \geq 2$ olduğunu kanıtlamışlar ve $N(66) \geq 5$ olduğunu göstermişlerdir. Bose ve Shrikhande, Euler sayıları üzerine çalışmalar yapmışlardır [2].

Supersimple transversal tasarımlar ilk olarak Gronau ve Mullin tarafından çalışılmış ve tanıtılmıştır. $\lambda \leq n$ ve (λ, n) ikilisinin (1,2) ve (1,6) durumlarından

farklı olması kısıtlarıyla birlikte supersimple $TD_\lambda(4, n)$ tasarımının varlığını tahmin etmişlerdir [5].

MacWilliams ve Sloane (1977) ortogonal düzenler (orthogonal arrays) ile kodlar arasındaki ilişkiyle ilgilenmişlerdir [4].

McCarthy (1969) ve Wu (1991) anket örneklemeleri için ortogonal düzenlerden faydalanırken, Owen (1992) ortogonal düzen uygulamalarını bilgisayar denemeleri için kullanmıştır [4].

Abdel-Ghaffar ve Abadi, transversal paketler (transversal packings) üzerine çalışmış; $b > g$ için maksimum k değerlerini bulmuşlardır [6].

Mills ve Mullin transversal paketlerdeki sınırlarla ilgili çalışmalar yapmışlardır [6].

Sperner (1973), Katona, Kleitman ve Spencer (1973) benzer problemler üzerinde çalışarak transversal örtülerin (transversal covers) geliştirilmesine katkı sağlamışlardır [6].

Sloane 1993'te test protokolleri için transversal örtülerden yararlanmıştır [6].

Basit formu grid tasarım olarak adlandırılan transversal tasarımlar Balding (1996) tarafından genel olarak ele alınmıştır [7].

Williams ve Probert (1996) ve Cohen (1996) çeşitli yazılımları geliştirmede bu literatürden yararlanmışlardır. Williams ve Probert çeşitli bilgisayar donanım bileşenlerinin etkileşimleri ile ilgilenmişlerdir. Cohen yine bu teoriden yararlanarak AETG(Automatic Efficient Test Generator) adında bir sistem geliştirmiştir [6].

Tezin birinci bölümünü oluşturan giriş kısmında dengeli tamamlanmamış blok düzenleri (balanced incomplete block design- *BIBD*), ortogonal düzenler, grup bölünebilir tasarımlar (group divisible designs) ve transversal tasarımlarla ilgili daha önce yapılan çalışmalardan ve uygulamada kullanım yerlerinden bahsedildi.

Tezin ikinci bölümünde transversal tasarımların daha iyi anlaşılabilmesi için genel isabet yapıları verildi.

Tezin üçüncü bölümünde transversal tasarımların ortogonal düzenler ile ilişkisine değinildi.

Tezin dördüncü bölümünde simetrik transversal tasarımlar tanıtılmaya çalışıldı.

Tezin beşinci bölümünde transversal tasarımlar ve geometrik yapılar arasındaki ilişkilerden bahsedildi.

Tezin altıncı bölümünde Wilson yapısına değinildi.

Tezin yedinci bölümünde kesik (truncated) transversal tasarımlar örneklerle tanıtıldı.

Tezin sekizinci bölümünde tamamlanmamış (incomplete) transversal tasarımlar tanıtıldı.

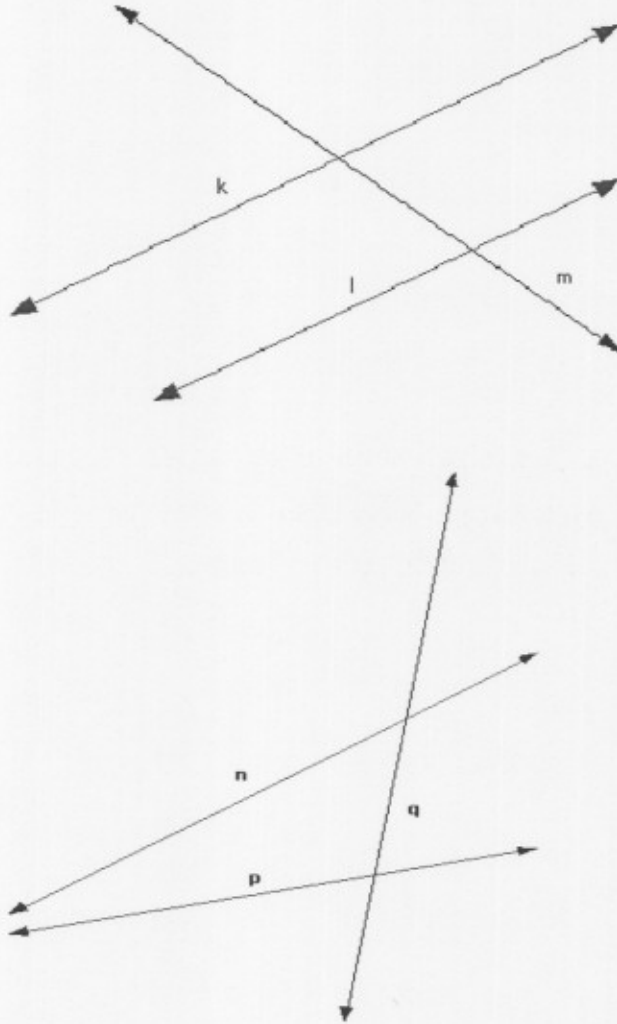
Tezin dokuzuncu bölümünde etiketli yeniden çözülebilir (labeled resolvable) transversal tasarımlara değinildi.

Tezin onuncu bölümünü oluşturan sonuç bölümünde ise tezin amacı ve özellikleri ile ilgili bilgi verildi.

2.GENEL İSABET YAPILARI

2.1.Transversal Tasarım

Geometride iki veya daha fazla doğruyu farklı noktalarda kesen doğru transversal olarak adlandırılır. Aşağıda transversal doğruları gösteren iki şekil verilmiştir. Burada m ve q doğruları transversaldır.



Şekil 2.1.Transversal doğrular

2.1.Tanım

$k \geq 2$ ve $n \geq 1$ olmak üzere bir transversal tasarım $TD_\lambda(k, n)$ ile ifade edilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan (X, G, B) sıralı üçlüsünden oluşur.

- (i) X , kn elemanlı bir settir, elemanları noktalar olarak adlandırılır.
- (ii) G , X 'in bir parçasıdır. Genişliği n olan k tane alt setten oluşur. Bu setler gruplar olarak adlandırılır.
- (iii) B , X 'deki k alt setin bir setidir ve bloklar olarak adlandırılır.
- (iv) Herhangi bir grup ve bloğun sadece bir tek ortak noktası vardır.
- (v) Farklı gruplardan gelen tüm nokta çiftleri bir blokta yer alır.

Bir transversal tasarımda gruplar, noktaların alt setidir. Ayrıca $n \geq 1$ olan tamsayılar için bir $TD_\lambda(2, n)$ tasarımı mevcuttur [8].

Transversal tasarımların gösterilmesinde farklı notasyonlar kullanılmaktadır. Örneğin, $T[k, \lambda; n]$ n hacimli, k grup ve λ indeksli bir transversal tasarımı ifade eder. $\lambda = 1$ durumunda tasarıma birim indeksli transversal tasarım denir.

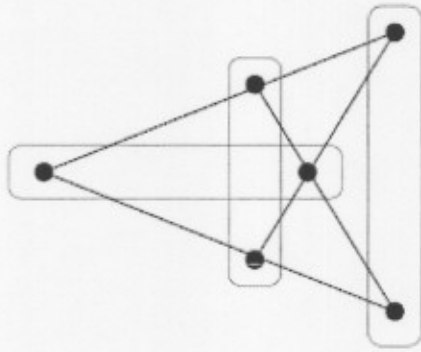
2.1.Örnek

$TD_1(3, 2)$ tasarımı aşağıdaki gibidir:

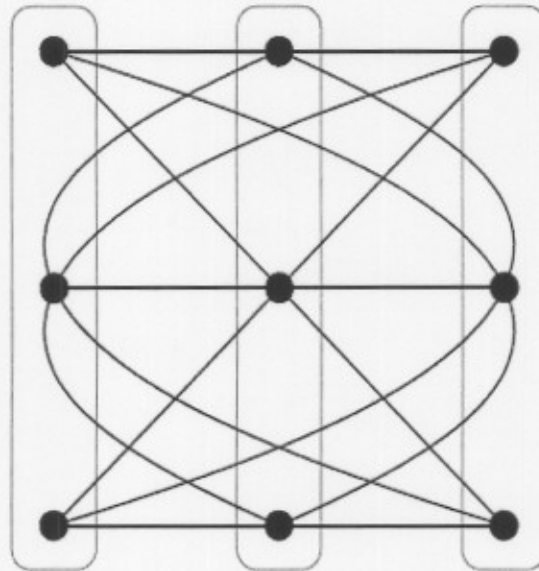
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$G = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$$

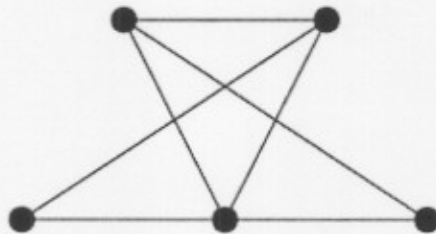
$$B = \{\{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}\}$$



Şekil 2.2. $TD(3,2)$ transversal tasarımı



Şekil 2.3. $TD(3,3)$ transversal tasarımı



Şekil 2.4. Transversal tasarımda $k \geq 4$ durumu [9].

2.2. Transversal Örtüler

Bir transversal örtüde (ya da paket), genişliği g olan k ayrık grup, bloklar olarak adlandırılan, en az (ya da en çok) transversal altset birleşimi ve gk nokta bulunur. Aynı gruptan olmayan herhangi bir nokta çifti en az (ya da en fazla) bir blokta görünür.

Transversal örtüler, yazılım testlerinde ve veri sıkıştırımda kullanılabilir.

Burada en çok düşünülen iki soru, " $k(tc(k, g : n))$ de minimum b nedir?" ve " $b(kc(b, g : n))$ de maksimum k nedir?" olarak ortaya çıkar. Bu sorular aşağıdaki ifadelerle denk sorulardır.

$$tc(k, g : n) = \min \{ b \mid kc(b, g : n) \geq k \} \text{ ve}$$

$$kc(b, g : n) = \max \{ k \mid tc(k, g : n) \leq b \}$$

2.2. Tanım

k, g ve $n \leq g$ birer pozitif tamsayı olsun. Bir transversal örtü (X, G, B) üçlüsünden oluşur ve $TC(k, g : n)$ ile ifade edilebilir. Burada $|X| = kg$, G, X içinde $G = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ den oluşan, genişliği g olan k setten meydana gelen gruplar, B ise X in altsetlerinden oluşan bloklar ya da transversaller olarak adlandırılan seti göstermektedir. Her bloğun genişliği k dir ve her bir grupta sadece bir noktada kesişirler. X 'deki her bir nokta çifti aynı gruptan olmamak şartıyla en az bir blokta görünür. Bunun yanında B de en az n ayrık blok vardır. $TC(k, g : n)$ de en küçük blok sayısı $tc(k, g : n)$ ile ifade edilebilir. Bir transversal örtüde en büyük grup sayısı $kc(b, g : n)$ ile ifade edilebilir [6].

2.2.Örnek

$V = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $G_1 = \{0,1\}$, $G_2 = \{2,3\}$, $G_3 = \{4,5\}$ ve $G_4 = \{6,7\}$ olsun.

Aşağıdaki bloklar bir transversal örtü formundadır.

$$\{0,2,4,6\} \{1,3,5,6\} \{1,3,4,7\} \{1,2,5,7\} \{0,3,5,7\}$$

2.3.Örnek

$X = Z_6$ olmak üzere $TC(3,2:2)$ transversal örtüsü aşağıdaki gibidir.

		$\{0,2,4\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,3,5\}$
Gruplar	$\{2,3\}$	Bloklar $\{1,2,4\}$
	$\{4,5\}$	$\{1,2,5\}$
		$\{1,3,4\}$

Bir $TC(k, g : n)$, g^2 bloklı bir transversal tasarımıdır. $TC(k, g : n)$ den, n ayrık bloğun çıkarılmasıyla oluşan örtüye tamamlanmamış transversal örtü denir ve $ITC(k, g : n)$ ile ifade edilebilir.

$1 \leq i < j \leq n$ için,

$tc(k, g : i) \leq tc(k, g : j) \leq tc(k, g : i) + j - i$ eşitsizliğinin sağlanacağı aşıkardır.

2.3.Tanım

Bir örtü düzende (covering array) $CA(k, g : n)$, değerleri g -ary alfabelinden olan k kolon, her bir kolonunda farklı çift bulunan, en az n satır vardır ve bunlar ayrıktır. Örneğin i ve j gibi iki kolon verilsin. Burada g -ary alfabeti

(g_1, g_2) nden gelen tüm sıralı eleman çiftleri için $a_{i,r} = g_1$ ve $a_{j,r} = g_2$ olmak üzere bir satır (r) vardır [6].

2.4.Örnek

2.2.Örnekde verilen transversal örtüden, her bir grubunda 2-ary alfabesinden olan $\{0,1\}$ değerlerinin yer aldığı aşağıdaki örtü düzen elde edilebilir.

```

0 0 0 0
1 1 1 0
1 1 0 1
1 0 1 1
0 1 1 1

```

2.5.Örnek

$CA(3,2:2)$ örtü düzeni aşağıdaki gibidir.

```

0 0 0
0 1 1
1 0 0
1 0 1
1 1 0

```

2.6.Örnek

$CA(2^2, 3^3 : 2)$ örtü düzeni aşağıdaki gibidir.

0	0	0	0	0
0	1	2	1	0
1	0	1	2	0
1	0	2	0	1
1	1	1	1	1
0	1	0	2	1
0	1	1	0	2
1	0	0	1	2
1	1	2	2	2

2.7.Örnek

$CA(2^1, 3^4 : 1)$ örtü düzeni aşağıdaki gibidir [10].

0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	2	2	2
0	1	0	2	1
1	1	1	0	2
0	1	2	1	0
0	2	0	1	2
0	2	1	2	0
1	2	2	0	1
1	2	0	2	0

2.4.Tanım

A bir g -bölünmüş, B ise $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve $\cup_{i=1}^g A_i = B$ olmak üzere

$\{A_i\}_{i=1}^g$ altsetlerinin birleşimi olan bir b -settir.

2.5.Tanım

Her $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ ve her $\{j_1, \dots, j_t\}$ seti için; $1 \leq l \leq t$ ve $1 \leq j_l \leq g$ olmak üzere;
 $A_{j_1}^{i_1} \cap A_{j_2}^{i_2} \cap \dots \cap A_{j_t}^{i_t} \neq \emptyset$ olsun. Bu koşulları sağlayan B , t -bağımsız olarak
 adlandırılır.

Buradan bir örtü düzenin 2-bağımsız g -bölünmüş b -set olduğu görülebilir.
 Her bir kolon g -bölünmüş b -set tanımlar.

2.8.Örnek

2.2.Örnekde verilen transversal örtünün blokları sırayla $B = \{a, b, c, d, e\}$
 olmak üzere 2-bağımsız 2-bölünmüş aile aşağıdaki gibidir.

$$A^1 = \{\{a, e\}, \{b, c, d\}\}$$

$$A^2 = \{\{a, d\}, \{b, c, e\}\}$$

$$A^3 = \{\{a, c\}, \{b, d, e\}\}$$

$$A^4 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$$

2.6.Tanım

Bir nokta-dengeli transversal örtü $PBTC(k, g : n)$ ile ifade edilebilir. Burada
 tüm noktalar eşit sıklıkla görünür. $PBTC(k, g : n)$ de olası en küçük blok sayısı
 $pbtc(k, g : n)$ ile ifade edilebilir.

2.3. Transversal Paketler

2.7. Tanım

2.2. Tanımdaki özellikler transversal paketler için de geçerlidir. Bir transversal paket $TP(k, g : n)$ ile ifade edilebilir. $TP(k, g : n)$ de en büyük blok sayısı $tp(k, g : n)$, en büyük grup sayısı $kp(b, g : n)$ ile ifade edilebilir [6].

2.9. Örnek

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, $G_1 = \{0, 1, 2\}$, $G_2 = \{3, 4, 5\}$, $G_3 = \{6, 7, 8\}$, $G_4 = \{9, 10, 11\}$ ve $G_5 = \{12, 13, 14\}$ olarak gruplara ayrılmış olsun. Aşağıdaki bloklar transversal paket formundadır.

$$\{0, 3, 6, 9, 12\}, \{0, 4, 8, 11, 13\}, \{1, 3, 7, 11, 14\}, \\ \{2, 4, 6, 10, 14\}, \{2, 5, 7, 9, 13\}, \{1, 5, 8, 10, 12\}$$

2.8. Tanım

2.3. Tanıma ilave olarak, burada g -ary alfabesi (g_1, g_2) nden gelen tüm sıralı eleman çiftleri için $a_{i,r} = g_1$ ve $a_{j,r} = g_2$ olmak üzere en fazla bir satır (r) vardır.

2.10. Örnek

2.9. Örnekte verilen transversal paketten, her bir grubunda 3-ary alfabesinden olan $\{0, 1, 2\}$ değerlerinin yer aldığı aşağıdaki örtü düzen elde edilebilir.

00000
 01221
 10122
 21012
 22101
 12210

2.4.Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı

Rastgele blok düzeninde blok genişliğinin (taşıdığı eleman sayısı) deneme sayısına eşitliği bilinmektedir. Bazen her blokta bütün denemelerin uygulanma imkanı bulunmaz. Bu durumda tamamlanmamış blok tasarımı kullanılır. Bu tasarım, her deneme çiftinin eşit sayıda ortaya çıktığı durumdaki tamamlanmamış blok tasarımıdır.

2.9.Tanım

Bir blok tasarımıda her işlem çifti λ blokta birlikte gözüküyorsa dengeli tamamlanmamış blok tasarımı olarak adlandırılır.

2.10.Tanım

Blok genişliği k olan v nci mertebeden bir λ indeksli dengeli tamamlanmamış blok tasarımı $B(k, \lambda; v)$ ile ifade edilebilir. $(X, \mathcal{B})$ ikilisinde X bir v -set ve $\mathcal{B}$ de X den seçilmiş olan k alt seti göstermek üzere X in farklı eleman çiftlerinden her biri kesinlikle λ blokta yer alır. Bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı ayrıca bir blok tasarımı ya da BIB tasarım olarak da ifade edilebilir.

2.1. Teorem

Aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa bir (v, k, λ) -BIBD mevcuttur.

(i) $v = w + r / \lambda$. Burada $(r / \lambda, k, \lambda)$ -BIBD ve blokları r paralel sınıf formunda olan yeniden çözülebilir $(w, k - 1, \lambda)$ -BIBD mevcuttur.

(ii) $v = (w - 1)m + 1, \lambda = \lambda_1 \lambda_2$. Burada $(k - 1)^{(w-1)/(k-1)}$ tipinde (k, λ_1) -GDD, $((k - 1)m + 1, k, \lambda_1 \lambda_2)$ -BIBD ve $TD_{\lambda_2}(k, m)$ mevcuttur.

(iii) $v = v_1(v_2 - \alpha) + \alpha, \lambda = \lambda_1 \lambda_2$. Burada $\alpha, 0$ ya da 1 dir. $TD_{\lambda_2}(k, v_2 - \alpha), (v_1, k, \lambda_1)$ -BIBD ve (v_2, k, λ) -BIBD mevcuttur [11].

$k \geq 6$ ve $\lambda = 1$ olmak üzere tamamlanmamış transversal tasarımların oluşturulmasında dengeli tamamlanmamış blok düzenleri kullanılır.

2.2. Teorem

$v = k(w - f) + (f + (k - 1)\alpha)$ ve $TD(k, -f + \alpha) - TD(k, \alpha), (w, \{k\} \cup f^*, 1)$ PBD ve bir $(f + (k - 1)\alpha, k, 1)$ BIBD tasarımlarının hepsi mevcuttur. Böylece $v \in B(k, 1)$ dir. Bununla birlikte eğer $k^{(f + (k - 1)\alpha)/k}$ tipinde bir k -GDD ve $TD(k, w - f + \alpha) - TD(k, \alpha) - (w - f)TD(k, 1)$ tasarımları mevcutsa bir $k^{v/k}$ tipinde k -GDD vardır [11].

2.11. Örnek

Bir yeniden çözülebilir $(65, 5, 1)$ BIBD var olması durumunda bir PBD $(81, \{6\} \cup 16^*), (76, 6, 1)$ BIBD ve $TD(6, 77) - TD(6, 12)$ mevcuttur.

Böylece $v = 466 = 6(81-16) + (76 = 16 + 5 \cdot 12)$ için bir $(v, 6, 1)$ BIBD vardır [11].

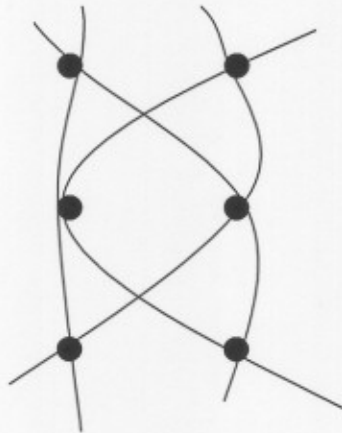
2.5. Grup Bölünebilir Tasarım

Grup bölünebilir tasarımların özel bir sınıfı transversal tasarımlardır.

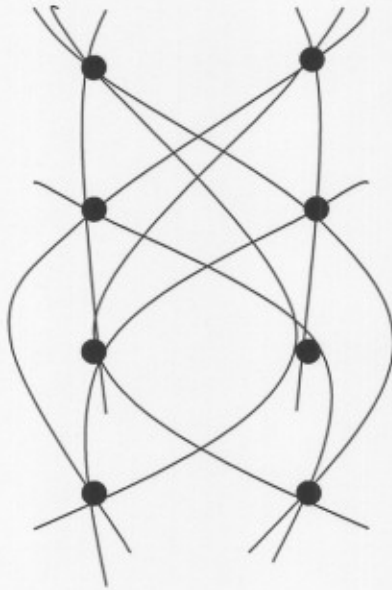
2.11. Tanım

v ve λ pozitif iki tamsayı, K ve M pozitif tamsayılar seti olsun. Bir grup bölünebilir tasarım $GD(K, \lambda, M; v)$, $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ üçlüsünden oluşur. Burada X bir v -settir, $\mathcal{G}$, X 'in bir altsetidir ve gruplar olarak adlandırılır. $\mathcal{A}$ ise yine X 'in altsetlerinden oluşur ve bloklar olarak adlandırılır. Bir grup bölünebilir tasarımda, aşağıdakiler vardır.

- (i) $|B| \in K, \forall B \in \mathcal{A}$,
- (ii) $|G| \in M, \forall G \in \mathcal{G}$,
- (iii) $|B \cap G| \leq 1, \forall B \in \mathcal{A}, G \in \mathcal{G}$,
- (iv) X 'in farklı gruplardan gelen her bir eleman çifti, λ blokta görülür.



Şekil 2.5. 3-GDD (2^3)



Şekil 2.6. 3-GDD (2^4)

$TD(k, n)$ tasarımı, n^k tipinde bir k -GDD tasarımıdır.

G , $i=1,2,\dots,s$ için, genişlikleri m_i olan t_i grup içeriyorsa $m_1^{t_1} m_2^{t_2} \dots m_s^{t_s}$ tipinde GDD olarak adlandırılır.

2.12.Örnek

$1^1 3^3$ tipinde $\{3,4\}$ -GDD:

1	4	7	10	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	5	8		4	5	6	5	6	4	6	4	5
3	6	9		7	8	9	9	7	8	8	9	7
				10	10	10						

1^v tipindeki $GD(K, \lambda, \{1\}; v)$ ikişerli dengeli tasarım (pairwise balanced design-PBD) olarak adlandırılır. $(X, \mathcal{A})$ ya da (v, k, λ) -PBD ile ifade

edilebilir. $(v, k, \lambda) - PBD$ basit gösterimle bir K_k -tasarım dır. $GD(k, 1, \{m\}; km)$, bir transversal tasarımıdır ve $TD(k, m)$ ile ifade edilebilir [12].

$K = \{k\}$ ve $M = \{m\}$ ise bu durumda $GD(\{k\}, \lambda, \{m\}; v)$ tasarımı, tekdüze (uniform) olarak adlandırılır. Bir başka ifadeyle grup genişlikleri aynı olan grup bölünebilir tasarım tekdüze GDD olarak adlandırılır ve basit olarak $GD(k, \lambda, m; v)$ ile ifade edilebilir.

2.3. Teorem

m^u tipindeki tekdüze $(k, \lambda) - GDD$ tasarımının varlığı için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir (u pozitif tamsayı).

- (i) $u \geq k$,
- (ii) $\lambda(u-1)m \equiv 0 \pmod{k-1}$,
- (iii) $\lambda u(u-1)m^2 \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$ [11].

Bir $GD(K, \lambda, M; v)$ tasarımı; bloklar seti paralel sınıflara bölünebiliyor ise yeniden çözülebilir olarak adlandırılır ve $RGD(K, \lambda, M; v)$ ile ifade edilir.

2.4. Teorem

m^u tipindeki tekdüze $(k, \lambda) - RGD$ tasarımının varlığı için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir (u pozitif tamsayı).

- (i) $u \geq k$,
- (ii) $um \equiv 0 \pmod{k}$,
- (iii) $\lambda(u-1)m \equiv 0 \pmod{k-1}$ [11].

Transversal tasarımlar grup bölünebilir tasarımların özel bir sınıfıdır. $TD_\lambda(k, n)$ transversal tasarımı bir $GD(k, \lambda, m; v)$ tasarımıdır. Bir $TD(5, n)$ tasarımında n , 2, 3, 6 ya da 10'a eşit olamaz [13].

$TD(k, n)$ tasarımından “*” noktası çıkarıldığında $GD(\{k, n\}, \{n-1, k-1\}; kn-1)$ elde edilir. Burada “*” noktasını içeren gruplar bloklardan ayrılır.

k	...	k	$k-1$	...	$k-1$	
	...			...		n
	...			...		n
	...			...		n
	...		*	...	*	$n-1$

$TD(k, n-1)$ tasarımının her grubundan “*” noktasını çıkarıp tüm gruplara “ μ ” noktası eklendiğinde, bu bir $GD(\{k, n\}, \{n-1, k-1\}; kn-k)$ tasarımıdır [14].

k	...	k	$k-1$	...	$k-1$	
	...			...		μ n
	...			...		μ n
	...			...		μ n
	...		*	...	*	μ $n-1$

Bir $TD(k+1, n)$ tasarımının en fazla bir grubundan bazı noktaların silinmesiyle grup genişliği m ($0 \leq m \leq n$) olan bir kesik transversal tasarım elde edilir (Kesik transversal tasarım ayrı bir bölüm olarak tez içerisinde verilmiştir). Bu noktaların tüm bloklardan silinmesiyle ikişerli (pairwise) $GD(\{k, k+1\}, \lambda, \{m, n\}; kn+m)$ tasarım elde edilir. Böylece $TD(k+1, n)$ tasarımı ve $0 \leq m \leq n$ olmak üzere $kn+m \in GD(\{k, k+1\}, \lambda, \{m, n\})$ yazılabilir [13].

2.13.Örnek

$0 \leq u \leq n$ ve $TD(10, n)$ tasarımı mevcut olsun. Bu durumda $n^9 u^1$ tipinde bir $\{9, 10\}$ -GDD, $x=9, 10$ için 8^x tipinde bir 9-GDD, $(8n)^9 (8u)^1$ tipinde bir 9-GDD mevcuttur. Böylece $\alpha=1$ ya da 9 ve $\{8n+\alpha, 8u+\alpha\} \subset B(9, 1)$ ise $8(9n+u)+\alpha \in B(9, 1)$ olur.

2.14.Örnek

$0 \leq u \leq n$ ve $TD(9, n)$ tasarımı mevcut olsun. Bu durumda $n^8 u^1$ tipinde bir $\{8, 9\}$ -GDD, $x=8, 9$ için 42^x tipinde 7-GDD ve $(42n)^8 (42u)^1$ tipinde bir 7-GDD mevcuttur. Böylece $\alpha=1$ ya da 7 ve $\{42n+\alpha, 42u+\alpha\} \subset B(7, 1)$ ise $42(8n+u)+\alpha \in B(7, 1)$ olur.

2.15.Örnek

$0 \leq u \leq n$ ve $TD(8, n)$ tasarımı mevcut olsun. Bu durumda $n^7 u^1$ tipinde bir $\{7, 8\}$ -GDD, $x=7, 8$ için 2^x tipinde $(7, 3)$ -GDD ve $(2n)^7 (2u)^1$ tipinde bir $(7, 3)$ -GDD mevcuttur. Böylece $\{2n+1, 2u+1\} \subset B(7, 3)$ ise $2(7n+u)+1 \in B(7, 3)$ olur.

2.16.Örnek

$0 \leq u, w \leq t$ ve $TD(9, n)$ tasarımı mevcut olsun. Bu durumda $n^7 u^1 w^1$ tipinde bir $\{7, 8, 9\}$ -GDD, $x=7, 8, 9$ için 2^x tipinde $(7, 21)$ -GDD ler ve $(2n)^7 (2u)^1 (2w)^1$

tipinde bir $(7,21)$ -GDD mevcuttur. Böylece $\{2n+1, 2u+1, 2w+1\} \subset B(7,21)$ ise $2(7n+u+w)+1 \in B(7,21)$ olur.

2.17.Örnek

Blokları r paralel sınıf formunda olan bir yeniden çözülebilir $(w,k,1)$ BIBD mevcut olsun. $x \leq r$ ise x sonlu noktanın her birinin farklı paralel sınıflara eklenmesiyle bir $1^w x^1$ tipinde $\{k,k+1\}$ -GDD elde edilir. $k, k-1$ asal kuvvetler ise $n=k$ ve $n=k+1$ için $(k-1)^n$ tipinde k -GDD'ler mevcuttur. Bu yüzden $(k-1)^w ((k-1)x)^1$ tipinde bir k -GDD mevcuttur. Bu durumda $(k-1)x+1 \in B(k,1)$ ise $(k-1)(w+x)+1 \in B(k,1)$ olur [11].

2.6.t-Tasarım

2.12.Tanım

v negatif olmayan bir tamsayı, λ ve t pozitif tamsayı, K pozitif tamsayılar seti olsun. $t-(v,K,\lambda)$ tasarımı bir (X,A) çiftidir. Burada;

- (i) X , v elemanlı bir settir ve noktalar olarak adlandırılır,
- (ii) A , X 'in alt setlerinin bir ailesidir ve bloklar olarak adlandırılır,
- (iii) Farklı noktaların bütün t -altseti, sadece λ blokta görülür.

Bir $t-(v,K,\lambda)$ tasarımı, $S_\lambda(t,k,v)$ ile de gösterilebilir ve $\lambda=1$ durumunda Steiner sistemi olarak adlandırılır [3]. (X,A) , v nci mertebeden, blok genişliği K ve λ indeksli t -tasarımı olarak adlandırılır.

v noktası bulunan bir Steiner üçlü sistem (Steiner triple system) $STS(v)$ ile ifade edilebilir ve bu bir $(v,3,1)$ -tasarımdır. Burada v nokta, blok genişliği 3 ve her bir nokta çifti sadece bir blokta yer alır.

2.18.Örnek

$STS(7)$ bir fano düzlemdir.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{156, 137, 124, 267, 235, 346, 457\}$$

2.19.Örnek

$STS(9)$ aşağıdaki şekildedir.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{123, 456, 789, 147, 258, 369, 159, 267, 348, 168, 249, 357\}$$

2.20.Örnek

$S(3,4,v)$ mevcut olması için gerek ve yeter koşul $v \equiv 2,4 \pmod{6}$ dır. $v=8$ olan bir $S(3,4,v)$ aşağıdaki gibidir:

```
000 001 010 011  000 001 100 101  000 001 110 111  000 010 100 110
000 010 101 111  000 011 100 111  000 011 101 110  100 101 110 111
010 011 110 111  010 011 100 101  001 011 101 111  001 011 100 110
001 010 101 110  001 010 100 111
```

2.13.Tanım

v , negatif olmayan tamsayı, λ ve t pozitif tamsayılar, K bir pozitif tamsayılar seti olsun.

(X, Γ, A) üçlüsü, v nci mertebeden, λ indeksli ve blok genişliği K olan grup bölünebilir t -tasarımı oluşturur. Burada;

- (i) X , v elemanlı bir settir ve noktalar olarak adlandırılır.
- (ii) $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots\}$, X in boş olmayan bir alt seti ve gruplar olarak adlandırılır.
- (iii) A , X in bir alt ailesi ve bloklar olarak adlandırılır. Herhangi bir grup ile her bir blok en fazla bir noktada kesişir.
- (iv) Sadece λ blokta t farklı grubun noktaları bulunur.



Şekil 2.7. Grup bölünebilir t -tasarım

Wilson (1972)'in temel yapısı $t > 2$ olmak üzere grup bölünebilir tasarımlar için genelleştirilebilir.

2.5. Teorem

(X, Γ, A) bir t -grup bölünebilir tasarım ve s_x , $x \in X$ olan her bir noktada tanımlı pozitif bir integral ağırlığı, $(S_x : x \in X)$, $|S_x| = s_x$ ile ayrılmış setler olsun.

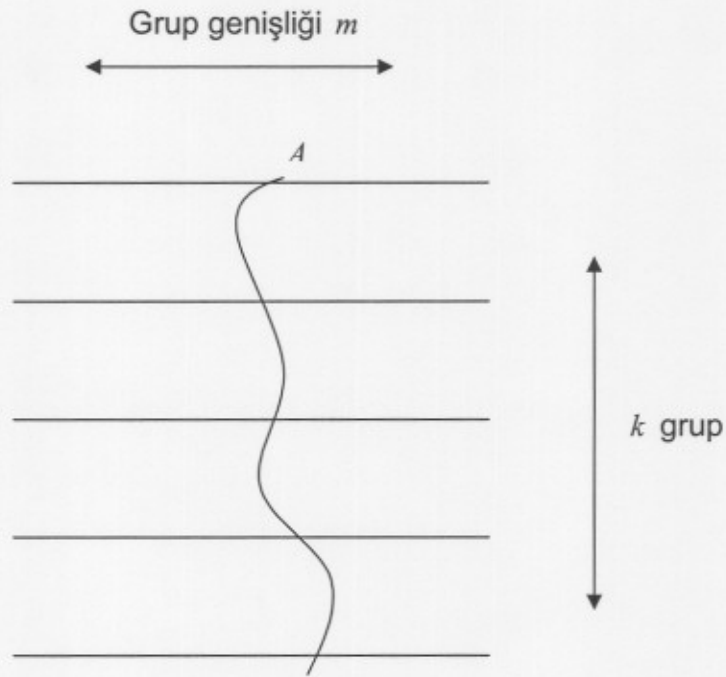
$S_Y = \bigcup_{x \in Y} S_x$ notasyonu ile $Y \subseteq X$ için, $X^* = S_x$ ve $\Gamma^* = \{S_G : G \in \Gamma\}$ olsun. $A \in \mathcal{A}$ olan her bir blok için bir t -grup bölünebilir tasarım $(S_A, \{S_x : x \in A\}, B_A)$ mevcuttur ve $A^* = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B_A$ ile ifade edilir. Böylece (X^*, Γ^*, A^*) bir t -grup bölünebilir tasarım olur [15].

İspat: $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*\}$, t farklı gruptan gelen X^* 'in noktalarının t -seti olsun. Öyle ki $x_i^* \in S_{x_i}$ ve $i = 1, 2, \dots, t$ için $x_i \in X$ 'dir.

t -grup bölünebilir tasarım $(X, \Gamma, \mathcal{A})$ 'ın farklı gruplarından gelen $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ t -setini içeren A 'nın tek bloğu A 'dır.

$x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*$, t -grup bölünebilir tasarım $(S_A, \{S_x : x \in A\}, B_A)$ 'dan t farklı grup olduğundan, $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*\}$ 'yı içeren B_A 'nın tek bloğu vardır ve A^* 'ın diğer hiçbir bloğu $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*\}$ t -setini kapsamaz.

Blok genişliği k ve grup genişliği m olan, k tane aynı grubun oluşturduğu, grup bölünebilir t -tasarım, transversal tasarım olarak da adlandırılır ve $TD_\lambda(t, k, m)$ ile ifade edilir.



Şekil 2.8. Transversal t – tasarım

Tasarım incelendiğinde grup genişliği m olan ve her bir grubu sadece bir noktada kesen A bloğu görülebilir.

Blanchard (1995), $t > 2$ olduğunda büyük grup genişliğinde $TD(t, k, m)$ tasarımının varlığını ispatlamıştır [15].

Chowla-Erdős-Straus $t = 2$ durumu için tasarıma ilişkin sonuçlar çıkarmışlardır [15].

t ve k , pozitif bir tamsayı ve $1 \leq t \leq k$ olmak üzere $m_0(t, k) = m_0$ olan bir tamsayı vardır. Öyle ki $m \geq m_0$ olan herhangi bir tamsayı olmak üzere, $TD(t, k, m)$ transversal tasarımı mevcuttur.

2.7. Ortogonal Düzen

Ortogonal düzenler, endüstriyel denemelerde birkaç faktörün etkisini kontrol etmek için de kullanılabilir.

Bu düzenler ilk kez Rao tarafından tanıtılmıştır [4].

Faktöriyel denemeler iki veya daha fazla faktörün tek başına etkilerinin ve etkileşimlerini araştırmak için düşünülür. Burada iki özellik dikkate alınır.

- (i) Bir faktörün denenecek durumlardan her biri öteki faktörlerin denenecek durumlarından her biri ile ayrı ayrı işlem kombinasyonu teşkil edilir.
- (ii) İşlem kombinasyonları homojen olarak seçilen deney etkenlerine rasgele ve yeteri kadar tekrarlı dağıtılır.

2.14. Tanım

Ortogonal düzenler ilk defa Rao (1947) tarafından tanıtıldı. Faktöriyel tasarımlarda yaygın olarak kullanıldı. Özellikle $OA(N, s^k, t)$ ile gösterilen, ortogonal düzen büyüklüğü N , k kısıtı, s düzeyi ve t kuvvetli ortogonal düzen s sembollerin $k \times N$ boyutlu X matrisidir, öyle ki X 'in herhangi $t \times N$ alt matrisinin sütun vektörleri aynı dereceli sıklıkla görülür. λ genellikle ortogonal düzenin indeksi olarak isimlendirildiğinde, $N = \lambda s^t$ biçiminde olduğu açıktır. Faktöriyel tasarımlara uygulamada, her bir satır faktöre uygundur. Semboller faktör düzeylerini ve her bir sütun faktör düzeylerinin birleşimini gösterir. Böylece her $OA(N, s^k, t)$ her biri s düzeye sahip k faktörü için N tekrarlı faktöriyel tasarımı tanımlar.

Ortogonal düzen $OA(N, k, s, t)$ şeklinde de gösterilebilir. Burada N sütun sayısı, k satır sayısı (kısıt sayısı), s düzey sayısı ve t kuvveti gösterir. Böyle bir ortogonal düzen $k \times N$ boyutlu ve tüm elemanları $0, 1, \dots, s-1$ 'den oluşan bir

matristir. Bu matrisin her txN matrisinin sütun vektörleri λ kez tekrar eder. λ burada ortogonal düzenin indeksidir. $N = \lambda s'$ 'dir [16].

2.21.Örnek

$\lambda = 1$ olan $OA(9, 4)$ 'e bir örnek olarak aşağıdaki matris verilebilir.

$$OA(9, 4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $s = 3$ ve $t = 2$ 'dir. Ayrıca iki ortogonal diziden birbirlerine bir geçiş varsa bu ortogonal dizilere *denk* denir. $OA(N, k, s, t)$ den bir satır atılırsa $OA(N, k-1, s, t)$ elde edilir.

$OA(N, k, s, 2)$ 'in varlığı için;

$$k \leq \frac{s^2 \lambda - 1}{s - 1} \text{ olmalıdır. } k = \frac{s^2 \lambda - 1}{s - 1} \text{ ise ortogonal düzen tamdır.}$$

2.22.Örnek

$OA(9, 4)$ ortogonal düzeni aşağıdaki gibi olsun.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s = 3 \text{ ve } t = 2.$$

$k = (3^2 \times 1 - 1) / (3 - 1) = 4$ olduğundan, A tam ortogonal düzendir.

2.6.Teorem

q asal kuvvet ve $t \leq q$ ise bir $OA(t, q+1, q)$ düzeni mevcuttur. Ayrıca q çift ise bir $OA(3, q+2, q)$ da mevcuttur [17].

2.7.Teorem

$OA_\lambda(t, k, g)$ ve $OA_\mu(t, k, h)$ ortogonal düzenleri mevcut ise bir $OA_{\lambda\mu}(t, k, gh)$ düzeni de mevcuttur [18].

2.23.Örnek

4 ncü mertebeden 3 adet ikişerli ortogonal latin kare ve bu latin karelerden elde edilen $OA(5, 4)$ ortogonal düzeni aşağıda verilmiştir.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	4	3	2	1	2	1	4	3	3	4	1
1	2	3	4	3	4	1	2	4	3	2	1	2	1	4
1	2	3	4	2	1	4	3	3	4	1	2	4	3	2

2.8.Hadamard Matris

Hadamard matrisler ile ortogonal tasarımlar, dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ve transversal tasarımlar arasında önemli bir ilişki vardır.

Elemanları $+1$ ve -1 olan ve $HH^T=I$ eşitliğini sağlayan, $n \times n$ matrisine n nci mertebeden "Hadamard Matris" denir (H matris). Bu matrisler tamamlanmamış blok düzenlerin üretilişinde kullanılabilir [19].

Eğer H , bir H matris ise H^T de bir H matris tir.

2.15.Tanım

Bir genelleştirilmiş permütasyon matrisi, her bir satır ve her bir sütunda tam olarak bir tane sıfırdan farklı elemanı olan, tüm elemanları sıfır ya da ∓ 1 olan bir kare matristir.

H nci mertebeden bir H matris ve eğer A ve B , $n \times n$ boyutlu genelleştirilmiş permütasyon matrisi ise AHB , bir H matris tir.

H_1 ve H_2 , n nci mertebeden iki H matris i olsun. A ve B , $H_2=AH_1B$ olacak şekilde, genelleştirilmiş permütasyon matrisleri olsun. Bu taktirde H_1 ve H_2 H denk (equivalent) denir. Bu tanım verilen bir mertebeden Hadamard matrisler üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar.

Bir Hadamard matrisinin ilk satır ve sütunu $+1$ ise normalleştirilmiştir denir. Eğer ilk satır $+1$ ise satır normalleştirilmiştir denir.

$$H = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$$

H , 2 nci mertebeden bir normalleştirilmiş Hadamard matristir.

Eğer H , bir H matris ise bu taktirde $n \equiv 1$ ya da 2 veya $n \equiv 0 \pmod{4}$ tür.

A , m nci mertebeden bir Hadamard matris ve $\{B_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) s mertebeli Hadamard matrisler olsun. Bu taktirde $A \otimes \{B_i\} = (a_{ij} B_i)$, ms mertebeli bir Hadamard matristir.

Eğer n , aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa, n nci mertebeden bir H matris i mevcuttur.

- (i) $n = ab$, burada (axb) boyutlu H matris mevcuttur.
- (ii) $n = p^s + 1$, burada p bir asal (prime) olup $p^s \equiv 3 \pmod{4}$ tür.
- (iii) $n = m(p^s + 1)$, burada $m > 1$ olup m nci mertebeden bir H matris i vardır, p bir tek asaldır.
- (iv) $n = mp^s(p^s + 1)$, $m > 1$ olup m nci mertebeden bir H matris mevcut olup p bir tek asaldır.
- (v) $n = mtp^s(p^s + 1)$, $m > 1$, $t > 1$, (mxt) mertebeli H matris mevcut olup p bir tek asaldır.

H , $n > 4$ mertebeli bir normalleştirilmiş H matris olsun. A , H 'nin ilk satır ve sütununun silinmesi ve -1 in 0 ile yer değiştirmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu bir matris ise, bu taktirde, A simetrik $2 - (n-1, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{4})$ tasarımının isabet (incidence) matrisi bir H matris dir.

$\lambda = 1$ için bir Hadamard 2-tasarımı, $2-(7,3,1)$ parametrelerine sahiptir. $\lambda = 2$ için $2-(11,5,2)$ parametrelerine sahiptir.

$2n$ mertebeli $(n-2)$ tane ikişerli ortogonal latin kare seti, $4n$ mertebeli Hadamard matrisi vardır.

$4n$ mertebeli bir Hadamard matrisinin varlığı parametreleri aşağıda verilen dengeli tamamlanmamış blok düzeninin varlığına denktir.

$$(i) v = b = 4n - 1, \quad r = k = 2n - 1, \quad \lambda = n - 1$$

$$(ii) v = b = 4n - 1, \quad r = k = 2n, \quad \lambda = n$$

$$H = \begin{bmatrix} + & + \cdots + \\ + & \\ \vdots & A \\ + & \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad \frac{1}{2}(J + A) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{2}(J - A) \quad \text{isabet matrisleri dengeli}$$

tamamlanmamış blok düzenini oluşturur. Burada; A , çekirdek matrisidir.

2.24.Örnek

$n = 1$ alınırsa $v = b = 4n - 1$, $r = k = 2n$, $\lambda = n$ eşitliklerinden dolayı $v = b = 3$, $r = k = 2$, $\lambda = 1$ parametrelili dengeli tamamlanmamış blok düzeni elde edilir.

$4n$ mertebeli bir Hadamard matrisinin varlığı parametreleri aşağıda verilen dengeli tamamlanmamış blok düzeninin varlığını vurgular.

$$(i) v = 2n - 1, \quad b = 4n - 2, \quad r = 2n - 2, \quad k = n - 1, \quad \lambda = n - 2$$

$$(ii) v = 2n, \quad b = 4n - 2, \quad r = 2n - 1, \quad k = n, \quad \lambda = n - 1$$

$$(iii) v = 2n - 1, \quad b = 4n - 2, \quad r = 2n, \quad k = n, \quad \lambda = n$$

2.25.Örnek

$n = 2$ alındığında 8 mertebeli Hadamard matrisi:

$$H = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & + & - & - & - \\ + & - & + & + & - & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & + & - \\ + & - & - & - & + & + & - & + \\ + & + & - & - & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & - & + & + \\ + & + & - & + & - & - & - & + \end{bmatrix}$$

1 nci satır ve 1 nci sütun dışındaki elemanların oluşturduğu matris A çekirdek matrisidir.

Hadamard matrisler ile ortogonal düzenler arasında yakın ilişki vardır. Dolayısıyla transversal tasarımların elde edilmesinde Hadamard matrislerden de faydalanılır. $4n$ mertebeli Hadamard matrisdeki ilk satır elemanlarını çıkararak elde edilen matris $(4n, 4n-1, 2, 2)$ parametrelili ortogonal düzen olur.

2.9.İkişerli Ortogonal Latin Kareler

n nci mertebeden k latin karenin bir seti $L_1, L_2, \dots, L_k$ olsun. L_i ve L_j bütün $1 \leq i < j < k$ için ortogonal ise ikişerli ortogonal latin kare (mutually orthogonal latin squares) *MOLS* adını alır. k *MOLS* (n) ifadesi n nci mertebeden k ikişerli latin kare olarak tanımlanır.

2.8.Teorem

$k \geq 1$ ve $1 \leq u \leq t$ ise k *MOLS* (m), k *MOLS* ($m+1$), k *MOLS* (u) ve $k+1$ *MOLS* (t) mevcuttur. Burada, ayrıca k *MOLS* ($mt+u$) mevcuttur [8].

2.9.Teorem

n nci mertebeden k ikişerli latin karenin varlığı aşağıdaki tasarım ve düzenlerin varlığına denktir.

- (i) $TD(k+2, n)$,
- (ii) Yeniden çözülebilir $TD(k+1, n)$,
- (iii) $(k+2, n)$ -net,
- (iv) $OA(k+2, n)$ [11].

Genişliği n , grup sayısı k olan bir transversal tasarımın varlığı, mertebesi n olan $k-2$ ikişerli ortogonal latin kare varlığına eşit olduğu bilinmektedir. Genişliği n olarak verilen ikişerli ortogonal latin karenin maksimum sayısı $N(n)$ ile gösterilsin. Bir $TD(k, n)$ tasarımının var olması sadece ve sadece $N(n) \geq k-2$ eşitsizliğinde sağlanır.

2.10. Teorem

$r-IMOLS(n; b_1, \dots, b_s)$, aşağıdaki tasarım ve düzene denktir ($IMOLS$: tamamlanmamış ikişerli ortogonal latin kare).

- (i) Tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(r+2, n; b_1, \dots, b_s)$,
- (ii) Tamamlanmamış ortogonal düzen $IOA(r+2, n; b_1, \dots, b_s)$.

$r-IMOLS(n; 1)$ ve $r-IMOLS(n; 0)$, n nci mertebeden $r-MOLS$ a denktir [11].

3. TRANSVERSAL TASARIMLARIN ORTOGONAL DÜZENLER İLE İLİŞKİSİ

Öncelikle bir $OA(k, n)$ ortogonal düzeninden bir $TD_\lambda(k, n)$ transversal tasarımının nasıl elde edileceği gösterilecektir. A , sembol seti $\{1, \dots, k\}$ olan bir $OA(k, n)$ ortogonal düzeni olsun. A 'nın kolon etiketleri $1, \dots, k$, satır etiketleri ise $1, \dots, n^2$ şeklinde alınsın.

$X = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\}$, $1 \leq i \leq k$ için, $G_i = \{1, \dots, n\} \times \{i\}$ tanımlanır.

$G = \{G_i : 1 \leq i \leq k\}$, $1 \leq r \leq n^2$ için, $B_r = \{(A(r, i), i) : 1 \leq i \leq k\}$ olmak üzere;
 $B = \{B_r : 1 \leq r \leq n^2\}$ elde edilir.

(X, G, B) üçlüsünün, bir $TD_\lambda(k, n)$ transversal tasarım oluşturduğu görülebilir.

3.1. Örnek

$OA(4, 3)$ ortogonal düzeninden $TD_1(4, 3)$ transversal tasarımının elde edilişi:

$OA(4, 3)$

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

$TD_1(4,3)$ transversal tasarımının grup ve blokları:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\} & G_1 &: \{(1,1) (2,1) (3,1)\} \\
 B_2 &= \{(1,1), (2,2), (2,3), (2,4)\} & G_2 &: \{(1,2) (2,2) (3,2)\} \\
 B_3 &= \{(1,1), (3,2), (3,3), (3,4)\} & G_3 &: \{(1,3) (2,3) (3,3)\} \\
 B_4 &= \{(2,1), (1,2), (2,3), (3,4)\} & G_4 &: \{(1,4) (2,4) (3,4)\} \\
 B_5 &= \{(2,1), (2,2), (3,3), (1,4)\} \\
 B_6 &= \{(2,1), (3,2), (1,3), (2,4)\} \\
 B_7 &= \{(3,1), (1,2), (3,3), (2,4)\} \\
 B_8 &= \{(3,1), (2,2), (1,3), (3,4)\} \\
 B_9 &= \{(3,1), (3,2), (2,3), (1,4)\}
 \end{aligned}$$

3.2.Örnek

$TD_1(4,5)$ tasarımı:

$$\begin{aligned}
 &\{00,10,20,30\} \quad \{01,11,21,31\} \quad \{02,12,22,32\} \quad \{03,13,23,33\} \quad \{04,14,24,34\} \\
 &\{00,11,22,33\} \quad \{01,12,23,34\} \quad \{02,13,24,30\} \quad \{03,14,20,31\} \quad \{04,14,24,34\} \\
 &\{00,12,24,31\} \quad \{01,13,20,32\} \quad \{02,14,21,33\} \quad \{03,10,22,34\} \quad \{04,11,23,30\} \\
 &\{00,13,21,34\} \quad \{01,14,22,30\} \quad \{02,10,23,31\} \quad \{03,11,24,32\} \quad \{04,12,20,33\} \\
 &\{00,14,23,32\} \quad \{01,10,24,33\} \quad \{02,11,20,34\} \quad \{03,12,21,30\} \quad \{04,13,22,31\} [10].
 \end{aligned}$$

3.1.Teorem

$n \geq 2$ ve $k \geq 3$ olsun. Aşağıdaki tasarımlardan herhangi birinin varlığı diğer ikisinin varlığını gerektirir [8].

(i) $k-2$ *MOLS* (n)

(ii) *OA*(k, n)

(iii) $TD_\lambda(k, n)$

3.3.Örnek

$TD_1(4, 3)$ transversal tasarımı ve $k-2$ *MOLS* :

$$X = \{ \begin{array}{ccc} 0 & a & \alpha \spadesuit \\ 1 & b & \beta \heartsuit \\ 2 & c & \gamma \clubsuit \end{array} \}$$

$$\begin{array}{ll} G_1 : 0 & 1 \quad 2 & B_1 = 0 & a \quad \alpha \quad \spadesuit \\ G_2 : a & b \quad c & B_2 = 0 & b \quad \beta \quad \heartsuit \\ G_3 : \alpha & \beta \quad \gamma & B_3 = 0 & c \quad \gamma \quad \clubsuit \\ G_4 : \spadesuit & \heartsuit \quad \clubsuit & B_4 = 1 & a \quad \gamma \quad \heartsuit \\ & & B_5 = 1 & b \quad \alpha \quad \clubsuit \\ & & B_6 = 1 & c \quad \beta \quad \spadesuit \\ & & B_7 = 2 & a \quad \beta \quad \clubsuit \\ & & B_8 = 2 & b \quad \gamma \quad \spadesuit \\ & & B_9 = 2 & c \quad \alpha \quad \heartsuit \end{array}$$

	0	1	2		0	1	2
a	α	γ	β	a	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
b	β	α	γ	b	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
c	γ	β	α	c	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$

3.2.Teorem

$TD_1(k, n)$ tasarımının varlığı n nci mertebeden $k-2$ *MOLS* varlığına eşittir [8].

$TD_1(k, n)$, grupları $G_1, \dots, G_k$ olan bir tasarım olsun. Gruplardaki elemanlar;

$$G_h : \{x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn}\}, \quad h = 1, 2, \dots, k \text{ alınsın.}$$

$1 \leq h \leq k-2$ için $n \times n$ A^h düzenini aşağıdaki yolla tanımlanabilir.

$1 \leq i, j \leq n$ için, $\lambda = 1$ iken, tasarımda $x_{k-1,i}$ ve $x_{k,j}$ elemanlarının her ikisini de içeren tek bir B bloğu vardır.

B bir transversal tasarım bloğu iken, kesinlikle G_h 'nin bir elemanını içerir.

$$B \cap G_h = \{x_{hm}\}$$

$a_{ij}^h = m$ şeklinde tanımlansın. Öncelikle A^h nin bir latin kare olduğunu gösterelim. $a_{ij}^h = a_{il}^h = m$, $j \neq l$; bir başka ifade ile i lerin eşit olduğu satır iki elemanlı olsun. Bunun anlamı B_1 ve B_2 bloklarının var olması demektir.

$$\{x_{h,m}, x_{k-1,i}, x_{k,j}\} \subseteq B_1$$

$$\{x_{h,m}, x_{k-1,i}, x_{k,l}\} \subseteq B_2$$

$x_{kj} \neq x_{kl}$ iken, her grubun bir elemanı, bütün bloklarda görülebilir. Burada $B_1 \neq B_2$ ve $\lambda \geq 2$ dir. Benzer biçimde aynı kolonda iki eleman eşit olamaz.

A^h ve A^l nin ikişerli ortogonal olduklarını kontrol edelim.

$$a_{ij}^h = a_{uv}^h = p \text{ ve } a_{ij}^l = a_{uv}^l = q$$

o halde B_1, B_2, B_3 ve B_4 şeklinde 4 blok vardır.

$$\{x_{h,m}, x_{k-1,i}, x_{k,j}\} \subseteq B_1, \quad \{x_{h,p}, x_{k-1,u}, x_{k,v}\} \subseteq B_2$$

$$\{x_{l,p}, x_{k-1,i}, x_{k,j}\} \subseteq B_3, \quad \{x_{l,q}, x_{k-1,u}, x_{k,v}\} \subseteq B_4$$

$\lambda = 1$ iken, $B_1 = B_3$ ve $B_2 = B_4$ olmalı. Bu yüzden,

$$\{x_{h,p}, x_{l,q}, x_{k-1,i}, x_{k,j}\} \subseteq B_1 \text{ ve}$$

$$\{x_{h,p}, x_{l,q}, x_{k-1,u}, x_{k,v}\} \subseteq B_2 \text{ dir.}$$

Fakat bu durumda $x_{h,p}$ ve $x_{l,q}$ aykırı iki blokta birden görülmektedir. Bu yüzden $TD_1(k, n)$ tasarımından, n nci mertebeden $k-2$ *MOLS* kurulabilir [20].

4.SİMETRİK TRANSVERSAL TASARIM

4.1.Tanım

Eğer bir isabet yapısı $S = (P, B)$ aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa simetrik transversal tasarım $STD_{\lambda}(k, n)$ adını alır. Burada $k \geq 2$, $n \geq 2$ ve $\lambda \geq 1$ dir.

(i) S bir $TD(k, n)$ tasarımıdır.

(ii) S 'nin dual yapısı da yine bir $TD(k, n)$ tasarımıdır. S 'nin dualinin nokta grupları, S 'nin blok gruplarıdır [21].

Eğer $S = (P, B)$, bir simetrik transversal tasarım $STD_{\lambda}(k, n)$ ise $k = \lambda n$ olur.

4.1.Örnek

$STD_1(3,3)$ tasarımının isabet matrisi,

$$\begin{pmatrix} I & I & I \\ I & S & T \\ I & T & S \end{pmatrix}$$

4.2.Örnek

$STD_2(6,3)$ tasarımının isabet matrisi,

$$\begin{pmatrix} I & I & I & I & I & I \\ I & I & S & S & T & T \\ I & S & T & I & T & S \\ I & S & I & T & S & T \\ I & T & T & S & S & I \\ I & T & S & T & I & S \end{pmatrix}$$

4.3.Örnek

$STD_4(12,3)$ tasarımının isabet matrisi,

$$\begin{pmatrix} I & I & I & I & I & I & I & I & I & I & I & I \\ I & I & I & I & S & S & S & S & T & T & T & T \\ I & I & I & S & I & T & T & T & S & S & S & T \\ I & I & S & T & T & I & S & T & I & S & T & S \\ I & S & I & T & T & S & T & I & T & I & S & S \\ I & S & T & I & S & T & I & T & I & T & S & S \\ I & S & T & S & T & I & I & S & T & S & I & T \\ I & S & T & T & I & T & S & S & S & I & T & I \\ I & T & S & I & T & I & T & S & S & T & S & I \\ I & T & S & S & I & T & S & I & T & T & I & S \\ I & T & S & T & S & S & I & T & S & I & I & T \\ I & T & T & S & S & S & T & I & I & S & T & I \end{pmatrix}$$

Burada;

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.Teorem

$k \geq 6$ ve $k \equiv 0 \pmod{2}$ olsun. $STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ ve de $k \equiv 0 \pmod{4}$ mevcut ise

parametreleri $\left(k-1, \frac{1}{2}k-1, \frac{1}{4}k-1\right)$ olan bir Hadamard tasarım mevcuttur. Bu

teoremin tersi de doğrudur [21].

4.2. Teorem

$k \geq 8$ ve $k \equiv 0 \pmod{4}$ olsun. Parametreleri $\left(k-1, \frac{1}{2}k-1, \frac{1}{4}k-1\right)$ olan Hadamard tasarım mevcut ise $STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ olan bir simetrik transversal tasarım mevcuttur [21].

4.4. Örnek

$STD_4(8,2)$ tasarımının isabet matrisine karşılık gelen matris, ayrıca parametreleri (7,3,1) olan Hadamard tasarımın isabet matrisi, aşağıda gösterilmiştir.

1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 1 0 1
1 1 0 0 0 1 0 1	0 0 1 1 1 0 1 0	1 1 0 0 0 1 0
1 1 1 0 0 0 1 0	0 0 0 1 1 1 0 1	0 1 1 0 0 0 1
1 0 1 0 0 0 0 1	0 1 0 0 1 1 1 0	1 0 1 1 0 0 0
1 1 0 1 1 0 0 0	0 0 1 0 0 1 1 1	0 1 0 1 1 0 0
1 0 1 0 1 1 0 0	0 1 0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 0
1 0 0 1 0 1 1 0	0 1 1 0 1 0 0 1	0 0 0 1 0 1 1
1 0 0 0 1 0 1 1	0 1 1 1 0 1 0 0	
0 0 0 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1 1	
0 0 1 1 1 0 1 0	1 1 0 0 0 1 0 1	
0 0 0 1 1 1 0 1	1 1 1 0 0 0 1 0	
0 1 0 0 1 1 1 0	1 0 1 0 0 0 0 1	
0 0 1 0 0 1 1 1	1 1 0 1 1 0 0 0	
0 1 0 1 0 0 1 1	1 0 1 0 1 1 0 0	
0 1 1 0 1 0 0 1	1 0 0 1 0 1 1 0	
0 1 1 1 0 1 0 0	1 0 0 0 1 0 1 1	

4.3. Teorem

Bir $STD_m[k;n]$ ve bir $STD_h[t;r]$ mevcutsa bir $STD_{kh}(kt,r)$ de mevcuttur [21].

4.4. Teorem

p bir asal sayı ise $0 \leq n \leq m$ koşuluyla tüm m ve n ler için bir $STD_{p^{m-n}}(p^m, p^n)$ mevcuttur [21].

4.2. Tanım

G , g nci mertebeden bir grup ve $k \geq 2$ olsun. G nin elemanlarından oluşan $k \times k$ boyutlu $H = (h_{ij})_{0 \leq i, j \leq k-1}$ matrisine $GH(k; G)$ ile ifade edilen genelleştirilmiş Hadamard matrisi denir ve $0 \leq i_1 \neq i_2 \leq k-1$ olmak üzere $\{h_{i1 \ 0} h_{i2 \ 0^{-1}}, h_{i1 \ 1} h_{i2 \ 1^{-1}}, \dots, h_{i1 \ k-1} h_{i2 \ (k-1)^{-1}}\}$ eşit sıklıkla G deki tüm elemanları içerir.

4.3. Tanım

(P, B) , $k = \lambda n$ olacak şekilde bir $STD_\lambda(k, n)$ alınsın. G , n nci mertebeden D nin otomorfizm grubu olsun. G , D deki nokta grubun her birinde düzenli olarak işlerse D ye G -düzenli denir.

4.5. Teorem

G , n nci mertebeden bir grup, $k \geq 2$ ve $k = \lambda n$ olsun. G -düzenli $STD_\lambda(k, n)$ simetrik transversal tasarımının mevcut olması için gerek ve yeter koşul $GH(k, G)$ nin var olmasıdır [21].

Eğer H , bilinen bir $GH(k, G)$ ise G nin mertebesi, bir asalın kuvvetidir.

4.6.Teorem

Bir $STD_m(n, r)$ ve bir $STD_h(k, r)$ mevcutsa bir $STD_{nh}(nk, r)$ de mevcuttur [21].

4.7.Teorem

p bir asal sayı ise $0 \leq n \leq m$ koşuluyla tüm m ve n ler için bir $STD_{p^{m-n}}(p^m, p^n)$ mevcuttur [21].

$STD_5(15, 3)$ tasarımı mevcut değildir, $STD_7(21, 3)$ tasarımı mevcuttur.

Mavron ve Tonchev (2000) dört tane eş biçimli (izomorfik) $STD_3(9, 3)$ simetrik transversal tasarım olduğunu göstermişlerdir [21].

5. TRANSVERSAL TASARIMLAR VE GEOMETRİK YAPILAR

5.1. Tanım

$D(V, B, I)$ üçlüsü bir isabet yapısı olmak üzere, V ve B iki ayrık settir. I , V ve B arasında ikili bağıntı söz konusudur. Bu bağıntı $I \subseteq V \times B$ ile ifade edilebilir. V nin elemanları noktalar, B nin elemanları bloklardır. $p \in V$ olmak üzere $(p, B) \in I$ nin yerine basitçe pIB yazılabilir ve " p noktası, B bloğu üzerinde bulunur", " B , p den geçer", " p ve B bağlıdır" benzeri geometrik yorumlar kullanılır.

5.2. Tanım

Bir $D(V, B, I)$ isabet yapısının bir projektif düzlem olarak adlandırılabilmesi için aşağıdaki aksiyomların sağlanması gerekir.

- (i) Herhangi farklı iki nokta tek bir doğru ile birleşir.
- (ii) Herhangi farklı iki doğru tek bir noktada kesişir.
- (iii) Üçü aynı doğru üzerinde olmayan dört nokta vardır.

V , bazı $q > 1$ değerleri için $GF(q)$ üzerinde $n+1$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. V nin alt uzaylarıyla isabet ilişkisi bulunan altuzaylar projektif uzay olarak adlandırılır ve $PG(n, q)$ ile ifade edilebilir. Burada n , $PG(n, q)$ nin boyutudur.

W , $m+1$ boyutlu V nin altuzayı ise $0 \leq m \leq n$ olmak üzere W nin altuzay setleri ile ilişkisi bulunan altuzaylar m -boyutlu $PG(n, q)$ olarak ifade edilebilir. 0 boyutlu $PG(n, q)$ nin altuzayları, $PG(n, q)$ nin noktaları, 1, 2 ve $n-1$

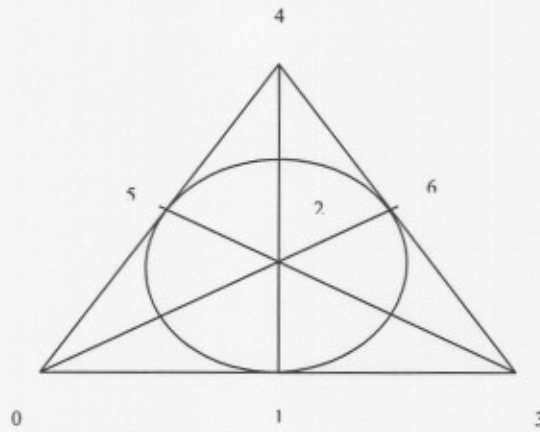
boyutlu altuzayları ise sırasıyla doğrular, düzlemler ve hiperdüzlemler olarak adlandırılır.

5.3.Tanım

$D(V, B, I)$ isabet yapısının bir afin düzlem olarak adlandırılabilmesi için aşağıdaki aksiyomların sağlanması gerekir.

- (i) Herhangi farklı iki nokta tek bir doğru ile birleşir.
- (ii) G herhangi bir doğru olmak üzere pIG olarak alınsın. Bu taktirde p yi üzerinde bulunduran G ile kesişmeyen bir H doğrusu vardır.
- (iii) Üç noktası aynı doğru üzerinde değildir.

Aşağıdaki şekil, yedi noktalı ve yedi doğrulu bir projektif düzlem tanımlar. Yukarıdaki aksiyomlar göz önüne alınarak kontrol edildiğinde en küçük projektif düzlemdir.



Şekil 5.1. Noktalarla noktaların ve nokta gruplarıyla blokların şematik gösterimi

5.4.Tanım

n nci mertebeden k dereceli bir *net*, bir kısmi doğrusal uzaydır (partial linear space). (n,k) -*net* şeklinde ifade edilebilir. Kısmi doğrusal uzay bir isabet yapısıdır. Bu yapıda bloklar, doğrular olarak adlandırılır. Her bir doğru üzerinde en az iki nokta ve herhangi iki nokta en fazla bir doğru üzerinde yer alabilir. Bir afin düzlem *net* in özel bir türüdür. Bir *net*, n nci mertebeden $k-2$ ikişerli ortogonal latin kare setine denktir.

(P,B,I) , P noktalar, B bloklar seti ve $I \subseteq P \times B$ bağıntısıyla bir isabet yapısı olmak üzere bir nokta P ve bir blok B arasında $P \in B$ bağıntısı, ayrıca, $(P,B) \in I$ olsun. Bu durumda, kısmi geometriler (partial geometries), $pg(s,t,\alpha)$ şeklinde ifade edilebilirler ve buradaki üç parametre, s , t ve α aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır.

(i) Herbir P noktası, $t+1$ blok ile ve her bir B bloğu $s+1$ nokta ile bağlı olmalıdır.

(ii) Herhangi iki blokta en fazla bir ortak nokta bulunmalıdır.

(iii) Herhangi bir alakasız nokta-blok (P,B) çifti için P ile ilişkili blokların sayısı ve kesişen B lerin sayısı α sabitine eşittir.

1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.
.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.
.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1
.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1
.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.
.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1
.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.
.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.

Şekil 5.2. $pg(2,2,1)$ tasarımı için isabet matrisi

$\alpha = s+1$ olmak üzere bir kısmi geometri Steiner 2-tasarım dır.

$\alpha = t$ olmak üzere bir kısmi geometri bir *net* olarak ya da duali $\alpha = s$ olmak üzere bir transversal tasarım olarak adlandırılır [22].

$n+1$ mertebeli ve $k+1$ dereceli bir *net* in duali $TD(k+1, n+1)$ tasarımıdır.

$TD(k, n)$ tasarımında elemanlar ve blokların işlevi yer değiştirdiğinde (k, n) -*net* elde edilir [11].

5.1.Örnek

$TD(5, 4)$ tasarımından $(5, 4)$ -*net* elde edilebilir. Bu bir dördüncü mertebeden afin düzlemdir.

5.5.Tanım

Bir (s, r, μ) -*net*, s bloklu, r paralel sınıflı afin yeniden çözülebilir 1-tasarım dır. Burada paralel olmayan herhangi iki blok μ noktada kesişir. $\mu = 1$ durumunda Bruck *net* leri olarak adlandırılır.

Bu yapılar Drake ve Jungnickel (1978) tarafından tanıtılmıştır. Ancak bu yapıların duali ki bunlar transversal tasarım olarak adlandırılır ve Hanani (1974) tarafından gerçekleştirilen transversal tasarımlara ilişkin çalışmalar daha eskidir [23].

n nci mertebeden bir projektif düzlem mevcut ise bir $STD_1(n, n)$ simetrik transversal tasarımı mevcuttur.

Π nci mertebeden bir projektif düzlem olsun. G de Π ile l_0 ortak eksenli ve P_0 ortak merkezli m nci mertebeden bir grup olsun ($m \neq n$).

$D = (P, B, I)$ isabet yapısı aşağıdaki şekilde tanımlansın. P , G nokta yörüngeleri dışında kalan $\{X\}$ 'lerden oluşan bir set $((X \in (l_0)))$ alınsın.

B , G satır yörüngeleri dışında kalan $\{x\}$ 'lerden oluşan bir set $((x \in (P_0)))$ olsun. $\Delta \in P$ ve $\Omega \in B$ olmak üzere $Q \in I$ olduğu gibi sadece ve sadece $Q \in \Delta$ ve $l \in \Omega$ ise Δ / Ω mevcuttur.

Böylece D bir simetrik transversal tasarım $STD_{|G|}\left(n, \frac{n}{|G|}\right)$ dir.

5.1.Teorem

$D = (P, B, I)$ olmak üzere bir $STD_1(n, n)$ mevcut ise n nci mertebeden bir projektif düzlem ve D yi içeren n nci mertebeden afin düzlem mevcuttur [21].

5.6.Tanım

Bir kare latis düzeninde p^n tane işlem vardır. Bunlar, p genişlikli bloklara yerleştirilir. Düzen, p düzeyli n tane etkenin oluşturduğu faktöriyel deney düzeni gibi düşünülür. Diğer taraftan çok sayıda işlem, p yerine k genişlikli ($k < p$) bloklara dağıtılarak bir çözüm yolu denenebilir. Bu durumda dengeli tamamlanmamış blok tasarımından faydalanılır.

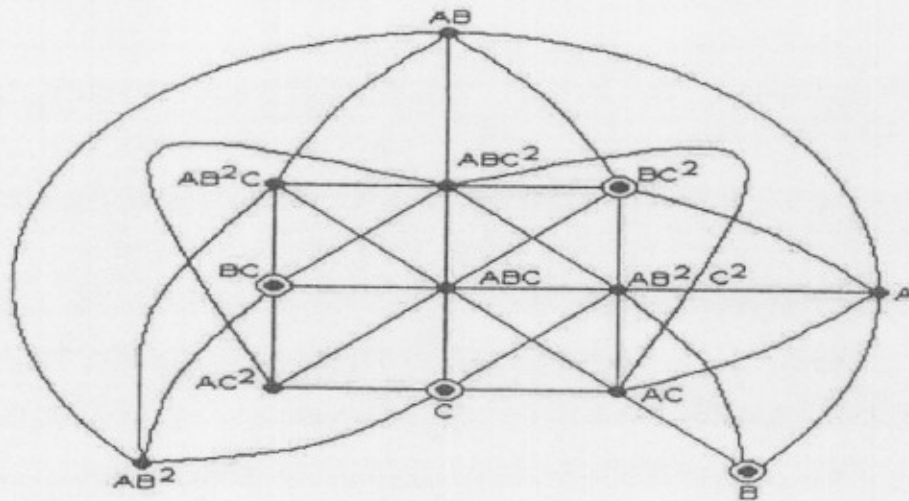
Latis düzenlerin en önemli kısmını oluşturan homojen replikasyonları elde etmenin bir yolu duallik kavramını kullanmak olabilir.

Çizelge 5.1. $PG(2,3)$ deki doğrular ve noktalar

Sis.	Doğru	A	B	AB	AB^2	C	AC	AC^2	BC	BC^2	ABC	ABC^2	AB^2C	AB^2C^2
		100	010	110	1-10	001	101	10-1	011	01-1	111	11-1	1-11	1-1-1
1	[0,0,1]	X	X	X	X									
2	[0,1,0]	X				X	X	X						
3	[0,-1,1]	X							X		X			X
4	[0,1,1]	X								X		X	X	
5	[1,0,0]		X			X			X	X				
6	[1,0,-1]		X				X				X		X	
7	[1,0,1]		X					X				X		X
8	[1,-1,0]			X		X					X	X		
9	[-1,1,1]			X				X	X				X	
10	[1,-1,1]				X	X							X	X
11	[1,1,0]			X			X			X				X
12	[1,1,-1]				X		X		X			X		
13	[1,1,1]				X			X		X	X			

$PG(2,3)$ deki doğrular ve noktalar göz önüne alınsın.

Bu geometride, paralel doğru gruplarından her birinin kapsadığı işlem ya da işlem kombinasyonları homojen replikasyonları verir. Böylece 4 homojen replikasyon elde edilir. Bu homojen replikasyonlar veya 4 tane doğru demeti, düğüm noktalarının dual uzayını meydana getirir. Dolayısıyla, bir homojen replikasyon, geometrik anlamda düğüm noktası çıkarılmış doğrular demetidir. HOMOJEN replikasyonlar öyle bloklar oluşturur ki bu bloklar $EG(2,3)$ geometrisinin tüm özelliklerini sağlar. Böyle bir geometrik yaklaşımla, blok yapma keyfi ve yanlış olmaz. Düğüm noktaları çıkarılmış doğru demetlerinin paralellik özelliğinden, hangi bloğa hangi kombinasyonun gireceği bellidir. HOMOJEN replikasyonlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.3. HOMOJEN replikasyonların bir gösterimi

HOMOJEN Replikasyon 1

(1 0 0)	(1 1 0)	(1-1 0)	A	AB	AB^2
(1 0-1)	(1 1-1)	(1-1-1)	AC^2	ABC^2	AB^2C^2
(1 0 1)	(1 1 1)	(1-1 1)	AC	ABC	AB^2C

Homojen Replikasyon 2

(1 0 0) (1 0 1) (1 0-1)	A	AC	AC^2
(1-1 1) (1-1-1) (1-1 0)	AB^2C	AB^2C^2	AB^2
(1 1 0) (1 1 1) (1 1-1)	AB	ABC	AB^2C

Homojen Replikasyon 3

(1 0 0) (1 1 1) (1-1-1)	A	ABC	AB^2C
(1-1 0) (1 0 1) (1 1-1)	AB^2	AC	ABC^2
(1 1 0) (1 0-1) (1-1 1)	AB	AC^2	AB^2C

Homojen Replikasyon 4

(1 1 1) (1-1 0) (1 0-1)	ABC	AB^2	AB^2C
(1 0 0) (1-1 1) (1 1-1)	A	AB^2C	ABC^2
(1 1 0) (1 0 1) (1-1-1)	AB	AC	AB^2C^2

Bu replikasyonlar aynı zamanda afin yeniden çözülebilirdir.

Homojen replikasyonların oluşturduğu düzenin duali düşünüldüğünde düğüm noktalarının oluşturduğu uzayın dual uzayı $TD(4,3)$ transversal tasarımının gruplarını meydana getirir.

$$G_1:[0\ 1\ 0] : (0\ 0\ 1) (1\ 0\ 1) (1\ 0-1) \rightarrow C, AC, AC^2$$

$$G_2:[0\ 0\ 1] : (0\ 1\ 0) (1\ 1\ 0) (1-1\ 0) \rightarrow B, AB, AB^2$$

$$G_3:[0\ 1\ 1] : (0\ 1-1) (1\ 1-1) (1-1\ 1) \rightarrow BC^2, ABC^2, AB^2C$$

$$G_4:[0\ 1-1] : (1\ 1\ 1) (0\ 1\ 1) (-1\ 1\ 1) \rightarrow ABC, BC, AB^2C^2$$

5.2.Teorem

Transversal tasarımlar, afin tasarımların dualidir [24].

6.WILSON YAPISI

Wilson yapısı transversal tasarımların en kolay elde edilenlerinden biridir. Bunun için önce transversal tasarımlarda, direkt çarpım yapıları üzerinde durulacaktır.

(X, G, A) , grupları $G_1, \dots, G_k$ olan bir $TD(k, t)$ tasarımı olsun.

$Y = X \times \{1, \dots, m\}$, $1 \leq i \leq k$ olmak üzere, $H_i = G_i \times \{1, \dots, m\}$ şeklinde tanımlansın.

$H = \{H_i : 1 \leq i \leq k\}$ alınsın. Y , oluşturulacak $TD(k, mt)$ tasarımının noktaları, H ise grupları olacaktır.

Yeni oluşacak bu transversal tasarımın blokları şöyledir. Herbir blok $A \in A$ olmak üzere m^2 blok oluşturulur.

$1 \leq i \leq k$ için, $\{a_i\} = A \cap G_i$ olsun. Burada B_A , $TD(k, m)$ tasarımının m^2 bloğundan oluşan bir settir ve grupları;

$$\{a_i\} \times \{1, \dots, m\}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$B = \bigcup_{A \in A} B_A \text{ olur.}$$

(Y, H, B) nin bir transversal tasarım oluşturması istensin. Burada amaç, farklı gruplardan gelen herhangi iki nokta olan x ve y nin tek bir blokta yer aldığını göstermektir.

$x = (g, a)$ ve $y = (h, b)$, ayrıca $g \in G_i$, $h \in G_j$, $i \neq j$ ve $a, b \in \{1, \dots, m\}$ olsun.

$g, h \in A$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}$ olan tek bir blok vardır, çünkü g ve h , G deki farklı gruplarda görünür. Buradan x ve y nin B_A da tek bir blokta yer aldığı daha kolay görülebilir. Noktalar birlikte B deki diğer bloklarda yer almaz [8].

Wilson yapısı, kesik transversal tasarımın elde edilmesinde de kullanılır.

7.KESİK TRANSVERSAL TASARIM

(X, G, B) , $k \geq 2$ olan bir $TD(k+1, t)$ tasarımı olmak üzere, $G \in G$ grubu çıkarılsın ve $1 \leq u \leq t$ olsun.

$G' \subseteq G$, $|G'| = u$ olsun.

$$Y = (X \setminus G) \cup G'$$

$$H = (G \setminus \{G'\}) \cup \{G'\}$$

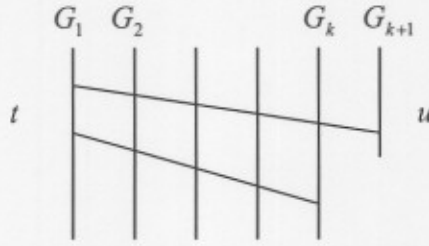
$$C = \{B \in B : B \cap G' \neq \emptyset\} \cup \{B \setminus \{x\} : B \in B, B \cap G = \{x\}, x \in G \setminus G'\}$$

(Y, H, C) üçlüsü bir kesik transversal tasarımı oluşturur. Eğer $u < t$ ise o zaman bu tasarım $kt+u$ tane noktası, genişliği t olan k grubu, genişliği u olan bir grubu, genişliği k olan $t(t-u)$ bloğu ve genişliği $k+1$ olan tu bloğu ihtiva eder. $t = u$ durumunda ise tasarım $TD(k+1, t)$ haline gelir, çünkü hiçbir nokta silinmemiş olur.

7.1.Teorem

$k \geq 2$ olmak üzere şu transversal tasarımlar mevcut olsun. $TD(k, m)$, $TD(k, m+1)$, $TD(k+1, t)$, $TD(k, u)$ ve $TD(k, mt+u)$ burada $1 \leq u \leq t$ dir [8].

Öncelikle $TD(k+1, t)$ tasarımından $t-u$ noktanın silinmesiyle bir kesik transversal tasarım oluşturulsun. (X, G, A) , genişliği t olan k grup $(G_1, \dots, G_k)$, genişliği u olan grup (G_{k+1}) olmak üzere kesik transversal tasarımı ifade eder.



Şekil 7.1. Kesik transversal tasarım

Yukarıdaki şekil bir kesik transversal tasarımı göstermektedir. Dikey çubuklar grupları, diğer ikisi ise blokları ifade eder.

$$Y = ((X \setminus G_{k+1}) \times \{1, \dots, m\}) \cup (\{1, \dots, k\} \times G_{k+1}),$$

$1 \leq i \leq k$ için,

$$H_i = (G_i \times \{1, \dots, m\}) \cup (\{i\} \times G_{k+1})$$

$H = \{H_i : 1 \leq i \leq k\}$ olmak üzere Y ve H sırasıyla $TD(k, mt + u)$ tasarımının noktaları ve grupları olacaktır.

$(X \setminus G_{k+1}) \times \{1, \dots, m\}$ noktaları "1 nci tip" nokta, $\{1, \dots, k\} \times G_{k+1}$ noktaları "2 nci tip" nokta olarak tanımlansın. Her bir grup H_i , mt tane, 1 nci tip (G_i deki her bir noktanın m tane kopyasından oluşan) nokta, u tane 2 nci tip (G_{k+1} deki her bir noktanın bir kopyasından oluşan) nokta içerir.

Her blok için $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere B_A blok seti aşağıdaki plana uygun olmak zorundadır.

(i) $|A| = k$, $1 \leq i \leq k$ için $\{a_i\} = A \cap G_i$ olsun. Bu durumda B_A , m^2 sayıda bloktan oluşan, $1 \leq i \leq k$ için, grupları; $(\{a_i\} \times \{1, \dots, m\})$ olan bir

$TD(k, m)$ tasarımı olacaktır. B_A bloklarına dikkat edildiğinde sadece 1 nci tip noktaları içerdiği görülebilir.

(ii) $|A| = k+1$, $1 \leq i \leq k+1$ için $\{a_i\} = A \cap G_i$ olsun. Böylece grupları, $1 \leq i \leq k$ için, $(\{a_i\} \times \{1, \dots, m\}) \cup \{(i, a_{k+1}), \dots, (k, a_{k+1})\}$, bloğu ise $\{(1, a_{k+1}), \dots, (k, a_{k+1})\}$ olan $TD(k, m+1)$ tasarımı oluşacaktır.

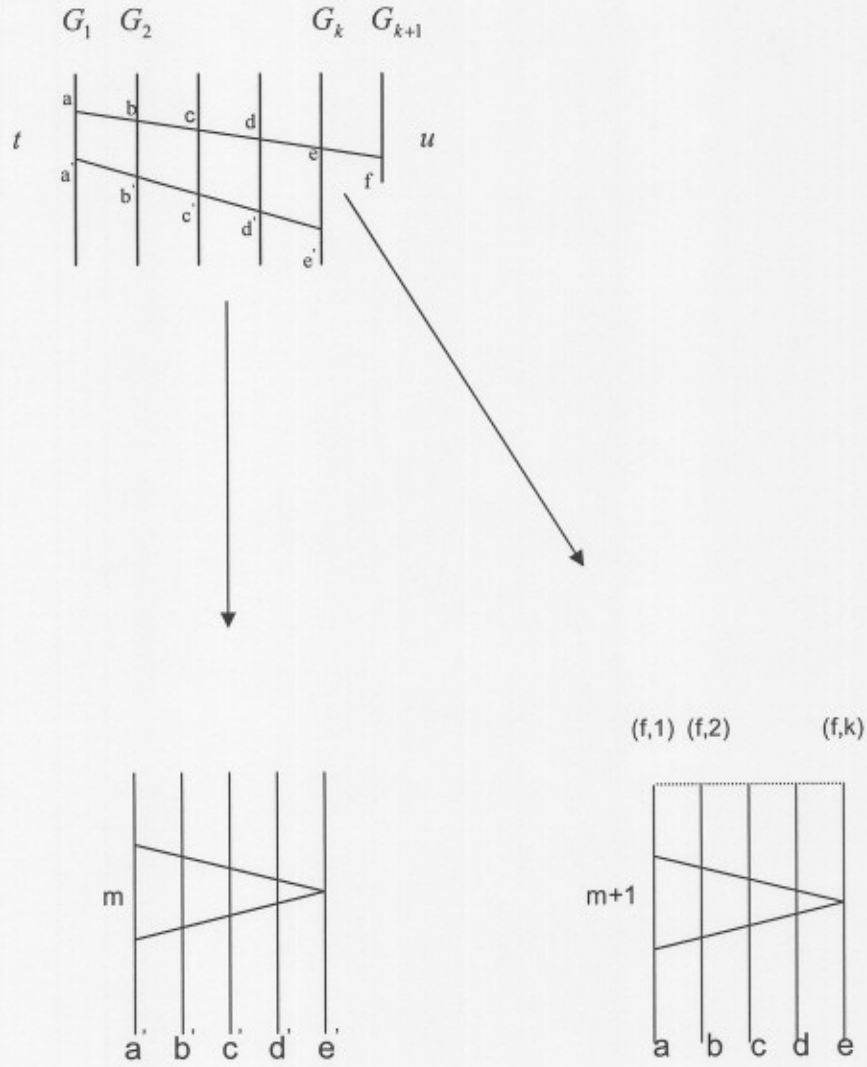
Bu blok silinirse B_A daki blok sayısı $(m+1)^2 - 1$ olacaktır. $TD_1(k, m+1)$ tasarımının her bir grubu incelendiğinde m tane 1 nci tip nokta ve bir tane 2 nci tip noktanın var olduğu görülür. Bununla birlikte, B_A daki blokların hiç biri 1'den fazla 2 nci tip nokta içermez. Bu sebepten dolayı $\{(1, a_{k+1}), \dots, (k, a_{k+1})\}$ bloğu silindiğinde, sadece transversal tasarımdaki blokta 1'den fazla 2 nci tip nokta bulunur.

$1 \leq i \leq k$ için, grupları $\{i\} \times G_{k+1}$ olan; $TD(k, u)$ tasarımına ulaşılır.

B^* bu transversal tasarımın bloklarını gösterebilir (B^* daki bloklarda sadece 2 nci tip noktaların olduğu görülebilir).

$TD(k, mt+u)$ tasarımının blokları şu şekilde tanımlanabilir:

$$B = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} B_A \right) \cup B^*$$



Şekil 7.2. Kesik transversal tasarımın, transversal tasarıma dönüştürülmüş hali

(Y, H, B) 'nin bir transversal tasarım olduğu, x ve y gibi H deki farklı gruplardan gelmiş iki noktanın da tek bir blokta görülebildiği gösterilsin.

Dikkat edilmesi gereken 3 nokta şöyle sıralanabilir.

(i) x ve y nin her ikisi de 1 nci tipten iki nokta olsun. Bu taktirde $x = (g, a)$ ve $y = (h, b)$, $g \in G_i$, $h \in G_j$, $i \neq j$ ve $a, b \in \{1, \dots, m\}$ olur. Burada $g, h \in A$

ve $A \in \mathcal{A}$ bir tek blok vardır. Bu yüzden, x ve y , B_A da tek blokta yer alırlar ve B deki diğer blokların hiç birinde aynı anda görünmezler.

(ii) x , 1 nci tip, y ise 2 nci tip nokta olsun. $x = (g, a)$ ve $y = (j, h)$, $g \in G_i$, $h \in G_{k+1}$, $a \in \{1, \dots, m\}$ ve $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ olmak üzere, burada $g, h \in A$ gibi $A \in \mathcal{A}$ olan bir tek blok vardır. Ayrıca $|A| = k+1$ olmalıdır. x ve y , B_A daki tek blokta yer alırlar ve B deki diğer blokların hiçbirinde aynı anda görünmezler.

(iii) x ve y , $x = (i, g)$ ve $y = (j, h)$, $g, h \in G_{k+1}$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ve $i \neq j$ olan 2 nci tip noktalar olsun. x ve y , B^* daki tek blokta yer alırlar ve B deki diğer blokların hiçbirinde aynı anda görünmezler.

7.1.Örnek

$k=3$, $m=2$, $t=3$ ve $u=2$ olan $TD(3,2)$, $TD(3,3)$, $TD(4,3)$ ve $TD(3,8)$ tasarımları mevcuttur.

$TD(4,3)$ tasarımı ele alınırsa, bu tasarımdan nokta sayısı iki olan bir grup çıkarıldığında bir kesik transversal tasarım elde edilir.

$$(X, G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}, A = \{A_i : 1 \leq i \leq 9\})$$

$$X = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2\},$$

$$G_1 = \{a_1, a_2, a_3\}, G_2 = \{b_1, b_2, b_3\}, G_3 = \{c_1, c_2, c_3\}, G_4 = \{d_1, d_2\}$$

$$A_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1\}, A_2 = \{a_2, b_2, c_2, d_1\}, A_3 = \{a_3, b_3, c_3, d_1\},$$

$$A_4 = \{a_1, b_2, c_3, d_2\}, A_5 = \{a_2, b_3, c_1, d_2\}, A_6 = \{a_3, b_1, c_2, d_2\},$$

$$A_7 = \{a_1, b_3, c_2\}, A_8 = \{a_2, b_1, c_3\}, A_9 = \{a_3, b_2, c_1\}.$$

$TD(3,8)$ tasarımının grupları:

$$H_1 = \{(a_1,1), (a_1,2), (a_2,1), (a_2,2), (a_3,1), (a_3,2), (1,d_1), (1,d_2)\}$$

$$H_2 = \{(b_1,1), (b_1,2), (b_2,1), (b_2,2), (b_3,1), (b_3,2), (2,d_1), (2,d_2)\}$$

$$H_3 = \{(c_1,1), (c_1,2), (c_2,1), (c_2,2), (c_3,1), (c_3,2), (3,d_1), (3,d_2)\}$$

A daki her blok, $TD(3,8)$ tasarımındaki blokların tam setini gösterir. Örneğin, $A_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ 'i ele alalım. $|A_1| = 4 = k+1$ olduğundan, B_{A_1} blokları, grupları $\{(a_1,1), (a_1,2), (1,d_1)\}$, $\{(b_1,1), (b_1,2), (2,d_1)\}$ ve $\{(c_1,1), (c_1,2), (3,d_1)\}$ olan $TD(3,3)$ tasarımından oluşur.

Bir transversal tasarım oluşturmak istenirse bloklardan birinin, $\{(1,d_1), (2,d_1), (3,d_1)\}$ olup olmadığından emin olmak gerekir. Bu blok silindikten sonra geriye kalan sekiz blok B_{A_1} ile karşılaştırılır.

$$\{(a_1,1), (b_1,1), (c_1,1)\} \quad \{(a_1,2), (b_1,2), (c_1,2)\}$$

$$\{(a_1,1), (b_1,2), (3,d_1)\} \quad \{(a_1,2), (2,d_1), (c_1,1)\} \quad \{(1,d_1), (b_1,1), (c_1,2)\}$$

$$\{(a_1,1), (2,d_1), (c_1,2)\} \quad \{(a_1,2), (b_1,1), (3,d_1)\} \quad \{(1,d_1), (b_1,2), (c_1,1)\}$$

A daki diğer blok $A_7 = \{a_1, b_3, c_2\}$ ele alınırsa, $|A_7| = 3 = k$ olduğundan, B_{A_7} nin blokları, grupları $\{(a_1,1), (a_1,2)\}$, $\{(b_3,1), (b_3,2)\}$ ve $\{(c_2,1), (c_2,2)\}$ olan $TD(3,2)$ tasarımıdır.

Aşağıdaki dört blok ele alınırsa,

$$\{(a_1,1), (b_3,1), (c_2,1)\} \quad \{(a_1,2), (b_3,2), (c_2,1)\}$$

$$\{(a_1,2), (b_3,1), (c_2,2)\} \quad \{(a_1,1), (b_3,2), (c_2,2)\},$$

bu işlem, $A_1, \dots, A_9$ olan dokuz bloğun her biri için uygulanır.

Sonuç olarak; $\{(1, d_1), (1, d_2)\}, \{(2, d_1), (2, d_2)\}$ ve $\{(3, d_1), (3, d_2)\}$ grupları ile birlikte, $TD(3,2)$ tasarımındaki dört blok yan yana getirilmiş olur.

Aşağıdaki dört blok ele alınırsa,

$$\begin{aligned} &\{(1, d_1), (2, d_1), (3, d_1)\}, \{(1, d_1), (2, d_2), (3, d_2)\} \\ &\{(1, d_2), (2, d_1), (3, d_2)\}, \{(1, d_2), (2, d_2), (3, d_1)\}, \end{aligned}$$

$TD(3,8)$ tasarımından 64 bloklu bir set elde edilir.

7.2. Teorem

Bir $TD_\lambda(k, n)$ tasarımında λn^2 sayıda blok vardır [8].

Tasarımın herhangi bir bloğunda ortak bir grupta bulunan $\binom{n}{2}$ kadar sıralanmamış ikili yer almamalıdır. Böylece $\binom{kn}{2}$ kadar olası çiftten $k\binom{n}{2}$ tanesi hariç tutulur. Tasarım λ indeksli ise, $\lambda\left(\binom{kn}{2} - k\binom{n}{2}\right) = \lambda n^2 \binom{k}{2}$ kadar A da ikililer bulunmalıdır (A bloklar seti).

Her blok $\binom{k}{2}$ tane sıralanmamış ikililerle doldurulduktan sonra, λn^2 kadar blok olmalıdır [2].

7.3. Teorem

Eğer $k \leq n$ ve $2 \leq n$ ise $TD_1(k, n)$ tasarımındaki herhangi bir blok diğer en küçük bloktan ayrıktır [2]. Bir önceki teoreme göre, genişliği k olan n^2 blok vardır. kn elemandan her biri diğer $(k-1)n$ elemanın her biri ile bir kere görülmelidir ve her eleman n blokta görülür. Bu yüzden k elemanın her biri A blokta bulunur ve diğer $n-1$ bloğa aittir denir, A dan, $k(n-1)$ tane blokla kesişir. Bunun anlamı A , $n^2 - k(n-1) - 1$ tane bloğa ayrılır ve $k \leq n$ olmak üzere, $n - k(n-1) - 1 \geq n^2 - n(n-1) - 1 = n-1$ $n \geq 2$, bu yüzden $n-1 \geq 1$ olup teorem sağlanır.

7.2. Örnek

$TD_1(3, 4)$ tasarımına ait grup ve bloklar aşağıda gösterilmiştir. Burada $n^2 - k(n-1) - 1 = 16 - 9 - 1 = 6$ olur ve görüldüğü gibi B_1 ; $B_6, B_7, B_{10}, B_{12}, B_{15}, B_{16}$ bloklarının her biriyle ayrıktır. Bir başka ifade ile B_1 in bu bloklarla ortak elemanı yoktur. Ya da B_8 ; $B_2, B_3, B_9, B_{10}, B_{13}, B_{15}$ ile ayrıktır. Herhangi bir blok $n^2 - k(n-1) - 1$ adet blokla ayrıktır.

$B_1 : x_{11} \quad x_{21} \quad x_{31}$	$B_{10} : x_{13} \quad x_{22} \quad x_{34}$	$G_1 : x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14}$
$B_2 : x_{11} \quad x_{22} \quad x_{32}$	$B_{11} : x_{13} \quad x_{23} \quad x_{31}$	$G_2 : x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{24}$
$B_3 : x_{11} \quad x_{23} \quad x_{33}$	$B_{12} : x_{13} \quad x_{24} \quad x_{32}$	$G_3 : x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \quad x_{34}$
$B_4 : x_{12} \quad x_{21} \quad x_{32}$	$B_{13} : x_{14} \quad x_{21} \quad x_{34}$	
$B_5 : x_{12} \quad x_{22} \quad x_{33}$	$B_{14} : x_{14} \quad x_{23} \quad x_{32}$	
$B_6 : x_{12} \quad x_{23} \quad x_{31}$	$B_{15} : x_{14} \quad x_{23} \quad x_{32}$	
$B_7 : x_{13} \quad x_{21} \quad x_{33}$	$B_{16} : x_{14} \quad x_{24} \quad x_{33}$	
$B_8 : x_{13} \quad x_{22} \quad x_{31}$		
$B_9 : x_{13} \quad x_{21} \quad x_{33}$		

Bir grup bölünebilir $[K, M; V]$, grup genişliği M , blok genişliği K ve nokta sayısı V olan grup bölünebilir tasarım demektir. Alternatif notasyon olarak s tipli $K - GDD$ (Grup Bölünebilir Tasarım) ifadesi yazılabilir. Burada s , n_i nin r_i kopyasından oluşan setleri ifade eder. r_i ise grup bölünebilir tasarımdaki genişliği n_i olan grupların başlangıç sayısıdır ($n_i \in M$). Son notasyon üssel ifadeye dönüştürülebilir ($n_1^{r_1} n_2^{r_2} \dots n_s^{r_s}$ tipli $K - GDD$ gibi) [25].

Bir grup bölünebilir tasarım $GD[K, M; V]$ da her bir blok her bir grupla kesişir. İki gruptan daha fazlasında $K = \{k\}$, $M = \{n\}$ ve $V = kn$ olmalıdır, n^k tipindeki $k - GDD$ grup bölünebilir tasarım, $TD(k, n)$ ile ifade edilen transversal tasarım olarak da adlandırılabilir.

$n^k m^1$ tipindeki kesik transversal tasarım, $n^k m^1$ tipindeki $\{k, k+1\}$ grup bölünebilir tasarımdır. Burada genişliği m olan gruplar üzerindeki her bir nokta, sadece genişliği $k+1$ olan bloklar üzerinde yer alır.

$\lambda > 1$ için bir $TD_\lambda(4, n)$ tasarımını elde etmek kolaydır. $TD(4, n)$ tasarımından λ adet alınıp, birleştirildiğinde $TD_\lambda(4, n)$ tasarımını elde edilir. Hanani, $n = 2, 6$ durumlarının hariç olduğunu göstermiştir ((λ, n) ikilisinin $(1, 2)$ ve $(1, 6)$ haricindekiler) [5].

Büyük indeksli transversal tasarımların oluşturulup oluşturulamayacağı sorusu akla gelebilir. r pozitif tamsayı olmak üzere herhangi iki farklı blokta ortak eleman sayısı r den daha az ise bu tasarım $TD_\lambda(k, n)$ $r - simple$ olarak ifade edilir. Kısaca $k - simple$ tasarımlara simple, $3 - simple$ tasarımlara supersimple adı verilir.

8.TAMAMLANMAMIŞ TRANSVERSAL TASARIM

Tamamlanmamış transversal tasarımlar, $k-2$ tamamlanmamış, hücre genişliği $b_1, \dots, b_s$ olan n nci mertebeden ikişerli ortogonal latin kareye denktir.

8.1.Tanım

n nci mertebeden, blok genişliği k , indeksi λ ve hücre genişliği $b_1, \dots, b_s$ olan bir tamamlanmamış transversal tasarım $ITD_\lambda(k, n; b_1, \dots, b_s)$ ile ifade edilir ve (V, G, N, B) dörtlüsünden meydana gelir.

- (i) V , kn elemandan oluşan set,
- (ii) G , her birinin genişliği n olan k gruptan oluşan, V 'nin bir parçası,
- (iii) H , V 'deki hücreler (holes) diye adlandırılan $(H_1, \dots, H_s)$ ayırık altsetler, $1 \leq i \leq s$ ve $G \in G$, $|G \cap H_i| = b_i$,
- (iv) B , k alt setten oluşan bir set, bloklar olarak da adlandırılır,
- (v) V 'deki her bir sıralandırılmamış eleman çifti;
 - a) bir hücrede bulunur ve hiçbir blokta yer almaz, ya da,
 - b) bir grupta bulunur ve hiçbir blokta yer almaz, ya da,
 - c) herhangi bir hücre ya da grupta bulunmaz ve λ blokta görünür.

$\sum_{i=1}^s b_i = n$ olduğunda bir $ITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ tasarımı bölünmüş (partitioned) ITD ya da $PITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ ifadesi ile gösterilir. $b_1, \dots, b_s$ genelde üssel notasyon $x_1^{y_1} \dots x_s^{y_s}$ ile gösterilir. Bu gösterimde x_i sırasındaki y_i hücresi kastedilmiş olur $(1 \leq i \leq s)$.

$\lambda = 1$ olduğunda notasyondan çıkarılır.

$TD_\lambda(k, n) - \sum_{i=1}^s TD_\lambda(k, b_i)$ başka bir gösterim şeklidir [2].

Bir negatif olmayan herhangi $b_1, \dots, b_s$ tamsayıları ile $\sum_{i=1}^s b_i \leq 1$ kısıtı altında, $TD(k, n)$ tasarımı, $ITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ tasarımına denktir. k negatif olmayan tüm tamsayıları göstermek üzere bir $TD(k, 0)$ ve $TD(k, 1)$ mevcuttur. Bir tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k, n; h)$, $(k-1)h < n$ olduğunda tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k, n; h, 1, 1)$ a denktir. Ayrıca bir transversal tasarım $TD(k, n)$, $k \leq n$ olduğunda bir $TD(k, n) - 3TD(k, 1)$ tasarımına denktir [2].

Bir tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k, n; h)$ sadece $h = n$ ya da $(k-1)h \leq n$ durumunda mevcuttur. $(k-1)h = n$ olduğunda tüm blokların hücrelerinde (hole) bir eleman vardır. $h = n$ olduğunda büyük bir hücre dışında hiçbirinde blok olmayan tamamlanmamış transversal tasarım halini alırlar. n bir pozitif bir tamsayı ve k negatif olmayan bir tamsayı olduğunda bir $TD(k, n) - TD(k, n)$ transversal tasarımı mevcuttur.

Tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k, (k-1)h+1; h)$, bir bölünmüş tamamlanmamış transversal tasarıma $PITD(k, (k-1)h+1; h^1 1^{(k-2)h+1})$ denktir. Eğer $h = n$ ya da $(k-1)h \leq n$ ise $ITD(k, n; h)$ tamamlanmamış transversal tasarımına mevcuttur. $(k-1)h = n$ olduğunda, tüm blokların hücrelerinde bir eleman bulunur $h = n$ olduğunda tamamlanmamış transversal tasarımda büyük bir hücre dışında bloklar yer almaz.

$ITD(k, (k-1)h+1; h)$ tamamlanmamış transversal tasarımı, bir $PITD(k, (k-1)h+1; h^1 1^{(k-2)h+1})$ bölünmüş tamamlanmamış transversal tasarımına denktir.

Bir $ITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ daima $(k-1)b_1 + b_2 \leq n$ eşitsizliğini sağlar (Burada b_1 ve b_2 sırasıyla en geniş hücrelerdir).

Ayrıca tamamlanmamış transversal tasarımda ilk iki hücrede bir blok kayıptır. Aksi belirtilmedikçe $(k-1)b_1 + b_2 = n$, $b_2 = b_3 = \dots = b_s$ ve $n = \sum_{i=1}^s b_i$ dir. Bundan dolayı, bir $ITD(k, n; b_1, b_2)$ tamamlanmamış transversal tasarımı, $b_1 \geq b_2 > 0$ olmak üzere bir $ITD(k, n; b_1, b_2, 1)$ tamamlanmamış transversal tasarımına denktir.

$ITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ tamamlanmamış transversal tasarımı ve bir $ITD(k, n; a_1, \dots, a_s)$ tamamlanmamış transversal tasarımı mevcutsa $ITD(k, n; a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s)$ tamamlanmamış transversal tasarımı da mevcuttur.

$PITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ bölünmüş tamamlanmamış transversal tasarımı, ε da bir negatif olmayan tamsayı ve $2 \leq i \leq s$ olsun. Bu durumda;

$TD(k, b_1 + \varepsilon) - TD(k, \varepsilon)$ transversal tasarımı vardır. Dolayısıyla, $TD(k, n + \varepsilon) - TD(k, b_1 + \varepsilon)$ transversal tasarımı da vardır [2].

$TD(k+1, n)$ transversal tasarımı mevcutsa, $TD(k, n) - nTD(k, 1)$ transversal tasarımı da mevcuttur.

$TD(k+1, n; h)$ mevcutsa, $TD(k, n) - TD(k, h) - (n-h)TD(k, 1)$ tasarımı da mevcuttur.

$\sum_{i=1}^s b_i < n$ eşitsizliğini sağlayan $ITD(k+1, n; b_1, \dots, b_s)$ tamamlanmamış transversal tasarımı mevcut olsun. $1 \leq i \leq s$ için $TD(k, b_i)$ transversal tasarımı mevcut olsun. Bu durumda bir $TD(k, n) - nTD(k, 1)$ transversal tasarımı da mevcuttur.

$2 \leq i \leq s$ için $TD(k, b_i)$ transversal tasarımı mevcutsa, $TD(k, n) - TD(k, b_1) - (n - b_1)TD(k, 1)$ transversal tasarımı mevcuttur.

$b_1 > 0$ için $PITD(k+1, n; b_1, \dots, b_s)$ bölünmüş tamamlanmamış transversal tasarımı mevcut olsun. $2 \leq i \leq s$ için $TD(k, b_i)$ transversal tasarımı mevcuttur. Bundan dolayı da $TD(k, n) - TD(k, b_1) - (n - b_1)TD(k, 1)$ tasarımı mevcuttur.

$ITD(k, n; b_1, \dots, b_s)$ ve $TD(k, w)$ transversal tasarımları mevcutsa $ITD(k, wn; wb_1, \dots, wb_s)$ tamamlanmamış transversal tasarımı da mevcuttur [2].

8.1. Teorem

Bir $ITD(k, n; b_1, b_2, \dots, b_s)$ tamamlanmamış transversal tasarımı mevcut ise

$$tc(k, n; i) \leq \min_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_s=i \\ i_j \leq b_j}} \left(n^2 - \sum_{j=1}^s (b_j^2 + tc(k, b_j; i_j)) \right) \text{ eşitsizliği yazılabilir [6].}$$

8.1. Örnek

$ITD(4, 6; 2)$ ve $ITD(6, 10; 2)$ tamamlanmamış transversal tasarımların varlığı $tc(4, 6) = 37$ eşitliğini ve $tc(6, 10) \leq 102$ eşitsizliğini verir. $TC(4, 6)$ transversal örtüsü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 4 & 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T$$

Burada son beş sıra hücreye doldurulur. Bunun bir $TC(4,6:5)$ transversal örtüsü olduğu açıktır. 1, 8, 18, 27 ve 35 nci bloklar ayırık blokların setidir. Bilgisayar yardımıyla beşten fazla ayırık blok olmadığı görülebilir.

Tamamlanmamış transversal tasarımlar örtü düzenlerin özel sınıflarının oluşturulmasında kullanılır.

8.2.Örnek

$ITD(6,4:2)$ aşağıdaki gibidir.

0	0	4	0
0	1	5	1
0	2	2	4
0	3	3	5
0	4	0	2
0	5	1	3
1	0	1	5
1	1	0	4
1	2	5	0
1	3	4	1
1	4	2	3
1	5	3	2
2	0	5	3
2	1	4	2
2	2	0	5
2	3	1	4
2	4	3	0
2	5	2	1
3	0	3	4
3	1	2	5
3	2	4	3
3	3	5	2
3	4	1	1
3	5	0	0
4	0	0	1
4	1	3	3
4	2	1	2
4	3	2	0
5	0	2	2
5	1	1	0
5	2	3	1
5	3	0	3

8.2. Teorem

$ITD(k, n; h)$ tamamlanmamış transversal tasarımı sadece $h = n$ veya $(k-1)h \leq n$ durumunda mevcuttur. $(k-1)h = n$ durumunda tüm bloklarda kesinlikle bir nokta hücrededir [6].

9.ETİKETLİ YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİR TRANSVERSAL TASARIMLAR

(X, B) bir $B(k, \lambda; v)$ tasarımı olsun. B deki bir P alt set, X , P ye bölünebilir ise paralel sınıf olarak adlandırılır. $B(k, \lambda; v)$ tasarımı yeniden çözülebilir olarak adlandırılıp, $RB(k, \lambda; v)$ ile ifade edilir. $RB(k, \lambda; v)$ tasarımında tüm bloklar paralel sınıflara bölünebilir.

(X, B) bir $B(k, \lambda; v)$ tasarımı olsun. Burada, $X = \{a_1, a_2, \dots, a_v\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_v$ olacak şekilde tümü sıralı v -seti gösterebilir. Her bir blok $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ için $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ eşitsizliğinin sağlandığı varsayalım.

$\emptyset: B \rightarrow \mathbb{Z}_\lambda^{\binom{k}{2}}$ şeklinde tanımlansın ve burada her bir $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in B$ olacak şekilde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\emptyset(B) = (\emptyset(x_1, x_2), \dots, \emptyset(x_1, x_k), \emptyset(x_2, x_3), \dots, \emptyset(x_{k-1}, x_k))$$

Bu eşitlikte;

$\emptyset(x_i, x_j) \in \mathbb{Z}_\lambda$, $\forall 1 \leq i < j \leq k$ olmak üzere $\emptyset$ tanımlaması aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıyla gerçekleşmiş olacaktır.

(i) Herbir $\{x, y\}$ çifti için $\{x, y\} \subset X$ ve $x < y$ olmak üzere $B_1, B_2, \dots, B_\lambda$ $\{x, y\}$ yi içeren λ blok ve $\emptyset(x, y)_i$ de B_i nin yerini tutan $\emptyset(x, y)$ nin değeri olsun. Burada $1 \leq i \leq \lambda$ dir. $1 \leq i, j \leq \lambda$ için, $\emptyset(x, y)_i \equiv \emptyset(x, y)_j \pmod{\lambda}$ olur. Sadece $i = j$ durumunda.

(ii) Her bir blok $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ için;

$$\emptyset(x_r, x_s) + \emptyset(x_s, x_t) \equiv \emptyset(x_r, x_t) \pmod{\lambda}, \quad \forall 1 \leq r < s < t \leq k \text{ olur.}$$

Böylece $B(k, \lambda; v)$, etiketli (labeled) blok tasarımı olarak adlandırılır ve $LB(k, \lambda; v)$ ile ifade edilir. Bu tasarımın blokları aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$(x_1, x_2, \dots, x_k; \emptyset(x_1, x_2), \dots, \emptyset(x_1, x_k), \emptyset(x_2, x_3), \dots, \emptyset(x_{k-1}, x_k))$$

Bir etiketli $RB(k, \lambda; v)$ tasarımı $LRB(k, \lambda; v)$ ile ifade edilir. $LRB(4, 3; 8)$ tasarımına örnek olarak aşağıdaki tasarım gösterilebilir.

9.1.Örnek

$$X = \{0, 1, 2, \dots, 7\},$$

$$\begin{aligned} B: & (0, 1, 3, 6; 0, 0, 1, 0, 1, 1), (2, 4, 5, 7; 1, 2, 0, 1, 2, 1); \\ & (0, 1, 2, 4; 2, 2, 2, 0, 0, 0), (3, 5, 6, 7; 1, 2, 0, 1, 2, 1); \\ & (1, 2, 3, 5; 2, 2, 2, 0, 0, 0), (0, 4, 6, 7; 1, 2, 1, 1, 0, 2); \\ & (2, 3, 4, 6; 2, 2, 2, 0, 0, 0), (0, 1, 5, 7; 1, 2, 2, 1, 1, 0); \\ & (0, 3, 4, 5; 1, 0, 0, 2, 2, 0), (1, 2, 6, 7; 1, 2, 2, 1, 1, 0); \\ & (1, 4, 5, 6; 1, 0, 0, 2, 2, 0), (0, 2, 3, 7; 1, 2, 0, 1, 2, 1); \\ & (0, 2, 5, 6; 0, 1, 0, 1, 0, 2), (1, 3, 4, 7; 1, 2, 0, 1, 2, 1). \end{aligned}$$

9.1.Teorem

$\lambda = m$ olmak üzere bir $LRB(k, \lambda; v)$ tasarımı mevcut ise $RGD(k, 1, m; mv)$ tasarımı da mevcuttur [23].

$v = km$ olmak üzere bir $GD(k, \lambda, m; v)$ tasarımının $TD_\lambda(k, m)$ ile ifade edilebilecek bir transversal tasarım olduğu bilinmektedir. Bir yeniden çözülebilir $TD_\lambda(k, m)$ tasarımı $RTD_\lambda(k, m)$ ile ifade edilebilir. $TD_1(k, m)$ tasarımı, bir $RTD_1(k-1, m)$ tasarımına denktir.

9.2.Örnek

$TD(5,4)$ tasarımından bir $RTD(4,4)$ tasarımı elde edilebilir.

Eleman seti: $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4,5\}$

Bloklar:

$$\begin{Bmatrix} 12,13,14,15 \\ 12,43,34,25 \\ 12,23,44,35 \\ 12,33,24,45 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22,23,24,25 \\ 22,33,44,15 \\ 22,13,34,45 \\ 22,43,14,35 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 32,33,34,35 \\ 32,23,14,45 \\ 32,43,24,15 \\ 32,13,44,25 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 42,43,44,45 \\ 42,13,24,35 \\ 42,33,14,25 \\ 42,23,34,15 \end{Bmatrix}$$

Burada her bir sıra paralel sınıftır.

9.3.Örnek

$RTD(3,5)$ tasarımının iki çözülmüş sınıfı aşağıda gösterilmiştir [26].

$$\{(0,0), (1,1), (2,3)\}$$

$$\{(1,0), (2,1), (3,3)\}$$

$$\{(2,0), (3,1), (4,3)\}$$

$$\{(3,0), (4,1), (0,3)\}$$

$$\{(4,0), (0,1), (1,3)\}$$

$G = \{G_i | 1 \leq i \leq k\}$ ve $X = \bigcup_{i=1}^k G_i$ olmak üzere (X, G, B) üçlüsü bir $RTD_\lambda(k, m)$

tasarımı olsun. $x, y \in X$, $x < y$, $x \in G_i$ ve $y \in G_j$, $1 \leq i < j \leq k$ kısıtları altında;

$$\emptyset : B \rightarrow \mathbf{Z}_\lambda^{\binom{k}{2}}$$

sağlanıyorsa, $RTD_\lambda(k, m)$ tasarımı etiketli yeniden çözülebilir transversal tasarım olarak adlandırılır ve $LRTD_\lambda(k, m)$ ile ifade edilebilir.

9.2. Teorem

Bir $LRTD_3(4, 3)$ tasarımı mevcuttur [27].

$X = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} G_i$, $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ olsun. Burada,

$G_i = \{(i, j) | j \in \mathbb{Z}_3\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere, B aşağıdaki 9 paralel sınıfın birleşiminden meydana gelsin.

$$\begin{aligned} & \{((1, j), (2, j), (3, j), (4, j); 1, 2, 0, 1, 2, 1) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j), (3, j+1), (4, j+1); 2, 2, 2, 0, 0, 0) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j), (3, j+2), (4, j+2); 0, 2, 1, 2, 1, 2) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j+1), (3, j), (4, j+1); 0, 0, 0, 0, 0, 0) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j+1), (3, j+1), (4, j+2); 1, 0, 2, 2, 1, 2) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j+1), (3, j+2), (4, j); 2, 0, 1, 1, 2, 1) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j+2), (3, j), (4, j+2); 2, 1, 0, 2, 1, 2) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j+2), (3, j+1), (4, j); 0, 1, 2, 1, 2, 1) | j \in \mathbb{Z}_3\}; \\ & \{((1, j), (2, j+2), (3, j+2), (4, j+1); 1, 1, 1, 0, 0, 0) | j \in \mathbb{Z}_3\}. \end{aligned}$$

Böylece (X, G, B) üçlüsünün bir $LRTD_3(4, 3)$ tasarımı oluşturduğu söylenebilir.

9.3. Teorem

Bir $LRTD_3(4, 5)$ tasarımı mevcuttur [27].

$X = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} G_i$, $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ olsun. Burada,

$G_i = \{(i, j) | j \in \mathbb{Z}_5\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere, B aşağıdaki 15 paralel sınıfın birleşiminden meydana gelsin.

$$\begin{aligned} & \{((1, j), (2, j), (3, j), (4, j); 2, 0, 0, 1, 1, 0) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+1), (3, j+2), (4, j+3); 0, 2, 1, 2, 1, 2) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+2), (3, j+4), (4, j+1); 0, 0, 0, 0, 0, 0) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+3), (3, j+1), (4, j+4); 2, 0, 2, 1, 0, 2) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+4), (3, j+3), (4, j+2); 1, 1, 1, 0, 0, 0) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j), (3, j), (4, j+2); 1, 1, 0, 0, 2, 2) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+1), (3, j+2), (4, j); 1, 1, 2, 0, 1, 1) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+2), (3, j+4), (4, j+3); 2, 1, 0, 2, 1, 2) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+4), (3, j+3), (4, j+4); 0, 2, 0, 2, 0, 1) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+3), (3, j+1), (4, j+1); 1, 1, 2, 0, 1, 1) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j), (3, j), (4, j+3); 0, 2, 2, 2, 2, 0) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+1), (3, j+2), (4, j+1); 2, 0, 1, 1, 2, 1) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+2), (3, j+4), (4, j+4); 1, 2, 1, 1, 0, 2) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+3), (3, j+1), (4, j+2); 0, 2, 2, 2, 2, 0) | j \in \mathbb{Z}_5\}; \\ & \{((1, j), (2, j+4), (3, j+3), (4, j); 2, 0, 1, 1, 2, 1) | j \in \mathbb{Z}_5\}. \end{aligned}$$

Böylece (X, G, B) üçlüsünün bir $LRTD_3(4, 5)$ tasarımı oluşturduğu söylenebilir.

9.4. Teorem

Bir $LRTD_3(4, 8)$ tasarımı mevcuttur [27].

$X = \bigcup_{1 \leq i \leq 4} G_i$, $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, $G_i = \{(i, j) | j \in \mathbf{Z}_8\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ olsun.

$0 \leq t \leq 7$ için π_t , $\mathbf{Z}_8$ üzerindeki permütasyonları gösterebilirsin.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_0(i)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_1(i)$	1	0	4	7	2	6	5	3
$\pi_2(i)$	2	4	0	5	1	3	7	6
$\pi_3(i)$	3	7	5	0	6	2	4	1
$\pi_4(i)$	4	2	1	6	0	7	3	5
$\pi_5(i)$	5	6	3	2	7	0	1	4
$\pi_6(i)$	6	5	7	4	3	1	0	2
$\pi_7(i)$	7	3	6	1	5	4	2	0

B aşağıdaki 24 paralel sınıfın birleşiminden meydana gelsin.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_0(j)), (3, \pi_0(j)), (4, \pi_0(j))); 2, 1, 0, 2, 1, 2 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_1(j)), (3, \pi_2(j)), (4, \pi_3(j))); 2, 1, 0, 2, 1, 2 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_2(j)), (3, \pi_3(j)), (4, \pi_4(j))); 2, 0, 1, 1, 2, 1 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_3(j)), (3, \pi_4(j)), (4, \pi_5(j))); 2, 2, 1, 0, 2, 2 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_0(j)), (3, \pi_0(j)), (4, \pi_1(j))); 0, 0, 1, 0, 1, 1 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_1(j)), (3, \pi_2(j)), (4, \pi_7(j))); 0, 0, 2, 0, 2, 2 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
 & \left\{ ((1, j), (2, \pi_2(j)), (3, \pi_3(j)), (4, \pi_2(j))); 0, 2, 0, 2, 0, 1 \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_3(j)), (3, \pi_4(j)), (4, \pi_6(j)); 0, 1, 0, 1, 0, 2 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_0(j)), (3, \pi_0(j)), (4, \pi_5(j)); 1, 2, 2, 1, 1, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_1(j)), (3, \pi_2(j)), (4, \pi_2(j)); 1, 2, 2, 1, 1, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_2(j)), (3, \pi_3(j)), (4, \pi_7(j)); 1, 1, 0, 0, 2, 2 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_3(j)), (3, \pi_4(j)), (4, \pi_0(j)); 1, 0, 2, 2, 1, 2 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_4(j)), (3, \pi_5(j)), (4, \pi_6(j)); 1, 1, 1, 0, 0, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_5(j)), (3, \pi_6(j)), (4, \pi_7(j)); 2, 2, 1, 0, 2, 2 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_6(j)), (3, \pi_7(j)), (4, \pi_1(j)); 2, 2, 2, 0, 0, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_7(j)), (3, \pi_1(j)), (4, \pi_2(j)); 0, 1, 1, 1, 1, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_4(j)), (3, \pi_5(j)), (4, \pi_5(j)); 0, 2, 0, 2, 0, 1 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_5(j)), (3, \pi_6(j)), (4, \pi_3(j)); 1, 0, 1, 2, 0, 1 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_6(j)), (3, \pi_7(j)), (4, \pi_0(j)); 1, 0, 1, 2, 0, 1 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_7(j)), (3, \pi_1(j)), (4, \pi_4(j)); 1, 0, 0, 2, 2, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_4(j)), (3, \pi_5(j)), (4, \pi_1(j)); 2, 0, 0, 1, 1, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_5(j)), (3, \pi_6(j)), (4, \pi_4(j)); 0, 1, 2, 1, 2, 1 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_6(j)), (3, \pi_7(j)), (4, \pi_6(j)); 0, 1, 2, 1, 2, 1 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}; \\
& \left\{ \left((1, j), (2, \pi_7(j)), (3, \pi_1(j)), (4, \pi_3(j)); 2, 2, 2, 0, 0, 0 \right) \mid j \in \mathbf{Z}_8 \right\}.
\end{aligned}$$

Böylece (X, G, B) üçlüsünün bir $LRTD_3(4, 8)$ tasarımı oluşturduğu söylenebilir.

9.5. Teorem

Bir $RGD(4,1,m;\nu)$, bir $LRTD(4,3,t)$ ve bir $LRB(4,3;tm)$ tasarımı mevcut ise bir $LRB(4,3;tv)$ tasarımı da mevcuttur [27].

(X, G, A) üçlüsü bir $RGD(4,1,m;\nu)$ tasarımını oluştursun. Ardışık her bir $x \in X$ noktası t ile ağırlıklandırılır. Bir başka ifade ile x , $x = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ olarak tanımlanan bir t -set olarak düşünülebilir. P , $RGD(4,1,m;\nu)$ tasarımında keyfi seçilmiş bir paralel sınıf olsun. B de P de $B = \{x, y, z, w\}$ olmak üzere bir blok olsun.

$\{x_1, \dots, x_t\}, \{y_1, \dots, y_t\}, \{z_1, \dots, z_t\}$ ve $\{w_1, \dots, w_t\}$, $LRTD(4,3,t)$ tasarımında gruplar olmak üzere, $Q_1(B), Q_2(B), \dots, Q_{3t}(B)$ de aynı tasarımda paralel sınıfları gösterebilir.

$$Q_i(P) = \bigcup_{B \in P} Q_i(B), \quad 1 \leq i \leq 3t \text{ olsun.}$$

$Q_i(P)$ lerin her biri $LRB(4,3;tv)$ tasarımının birer paralel sınıflarıdır. B_i de tüm bu paralel sınıfların birleşimi olsun.

$G \in G$ olan her bir grup, $\bigcup_{x \in G} \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ seti üzerinde $LRB(4,3;tm)$ tasarımını biçimlendirir.

$R_1(G), R_2(G), \dots, R_{tm-1}(G)$, $LRB(4,3;tm)$ tasarımının paralel sınıfları olsun.

$$R_i = \bigcup_{G \in G} R_i(G), \quad 1 \leq i \leq tm-1 \text{ olsun.}$$

Böylece her bir R_i de $LRB(4,3;tm)$ tasarımının paralel sınıfıdır.

$B_2 = \bigcup_{i=1}^{tm-1} R_i$, $B = B_1 \cup B_2$ ve $Y = \bigcup_{x \in X} \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ olsun. Böylece, (Y, B) ikilisi $LRB(4,3;tv)$ tasarımını oluşturur.

9.6. Teorem

Bir $RGD(4,1,m;v)$ tasarımı mevcutsa, bir $LRTD(4,3,t)$, $LRB(4,3;tm)$ ve $LRB(4,3;tv)$ tasarımı mevcuttur [27].

9.4. Örnek

1⁹ tipinde 3- RGD tasarımı:

$\{1,2,3\}, \{1,4,7\}, \{1,5,9\}, \{1,6,8\}$
 $\{4,5,6\}, \{2,5,8\}, \{2,6,7\}, \{2,4,9\}$
 $\{7,8,9\}, \{3,6,9\}, \{3,4,8\}, \{3,5,7\}$

10.SONUÇ

Bu tez, transversal tasarımı ve türlerini tanıtarak ilgili düzenlerle aralarındaki ilişkiyi ortaya koymak amacıyla yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle transversal tasarım, transversal örtü, transversal paket, örtü düzen, ortogonal düzen, Hadamard tasarım, dengeli tamamlanmamış blok tasarımı, grup bölünebilir tasarım, net ve t-tasarımlarının tanımları yapılmıştır. Daha sonra transversal tasarımların bu tasarımlar ile ilişkisinin matematiksel anlamda incelenme aşamasında farklı transversal tasarım tipleri (simetrik transversal tasarım, tamamlanmamış transversal tasarım, transversal paket, transversal örtü, kesik transversal tasarım, etiketli transversal tasarım) de tanıtılmaya çalışılmıştır.

Tasarım teorisinde önemli bir yere sahip olan transversal tasarımlar uygulamada, kriptolojiden optik iletişime, iletişim protokollerinden algoritma tasarımı ve analizi ile kablosuz iletişim ve DNA testlerine kadar bir çok alanda kendine yer bulmaktadır.

Bu tezin hazırlanması sırasında, literatürdeki örnek yetersizliği dikkatimizi çekmiştir. Örneklerin elde edilmesinde bilgisayar programlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu aşamadan sonraki amacımız transversal tasarım türlerine ilişkin örneklerin elde edilebileceği bilgisayar yazılım programları konusunda araştırma yaparak ya da bir program geliştirerek transversal tasarımlara ilişkin örnekler elde etmektir.

KAYNAKLAR

1. Hanani, H., "On Transversal Designs", *In: Proceedings of the Advanced Study Institute on Combinatorics*, 55: 42-52 (1974).
2. Colbourn, C.J., Dinitz, J.H., "Mutually Orthogonal Latin Squares: A Brief Survey Of Constructions", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 95: 9-14 (2001).
3. Bulut, H., "Ortogonal Dengeli Tamamlanmamış Blok Düzenleri", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 7-14 (2005).
4. Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A., Stufken, J., "Orthogonal Arrays", *Springer-Verlag*, New York, 1 (1999).
5. Hartmann, S., "On Simple and Supersimple Transversal Designs", *FB Mathematik Universität Rostock*, 1: 3-6 (1998).
6. Stevens, B., "Transversal Covers and Packings", Yüksek Lisans Tezi, *Department of Mathematics University of Toronto*, Toronto, 4-30 (1998).
7. Ngo, H.Q., Du, D.Z., "A Survey on Combinatorial Group Testing Algorithms with Applications to DNA Library Screening", *American Mathematical Society*, 5:1-6 (2000).
8. Stinson, D.R., "Combinatorial Designs", *Springer-Verlag*, New York, 145-151 (1956).
9. Devillers, A., "Classification Of Some Homogeneous And Ultrahomogeneous Structures", *Université Libre de Bruxelles Faculté des Sciences Département de Mathématiques*, 1:56-59 (2002).
10. Internet: Stinson, D.R., Lee, J., "A Combinatorial Approach To Key Predistribution For Distributed Sensor Networks", <http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/~dstinson/papers/MCCCCbw.pdf> (2005).
11. Colbourn, C.J., Dinitz, J.H., "The CRC Handbook of Combinatorial Designs", *CRC Press*, New York, 44, 111-113, 143-144, 186, 415 (1996).
12. Milici, S., Quattrocchi, G., "On Nesting Of G -decompositions Of λK_n , Where G Has Four Nonisolated Vertices Or Less", *Discrete Mathematics*, 255 (1-3): 297-315 (2002).
13. Street, A.P., Street, D.J., "Combinatorics of Experimental Design",

Clarendon Press Oxford, England, 298-299 (1987).

14. Brandt, J., "Asymptotic Existence Theory For Block Designs" **Ramsey Theory**, 2 (1): 20 (2005).
15. Mohacsy, H., Ray-Chaudhuri, D.K., "A Construction For Group Divisible t -Designs With Strenght $t \geq 2$ And Index Unity", **The Ohio State University Pres.**, 1: 1-3 (1999).
16. Hedayat, A.S., Stufken, J., "Compound Orthogonal Arrays", **Technometrics**, 41 (1):57-61 (1999).
17. Bush, K.A., "Orthogonal Arrays Of Index Unity", **Ann.Math.Statist.**, 23: 426-434, (1952).
18. Bose, R.C., "A Note On Orthogonal Arrays", **Annals of Math.Stat.** 21 (1): 304-305 (1950).
19. Bayrak, H., "Hadamard Matrisleri Ve Deney Düzeninde Bazı Uygulamaları", **G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi**, 9 (3):355-366 (1996).
20. Bruen, A.A., Colbourn, C.J., "Transversal Designs in Classical Planes and Spaces", **University of Vermont Burlington Pres.**, 92 (1):1-2 (2000).
21. Suetake, C., "Symmetric Transversal Designs With Group Size 3", **Fukushima National College of Technology**, 1: 1-5 (2005).
22. Jonhson, S.J., Weller, S.R., "Codes for Iterative Decoding From Partial Geometries", **IEEE Transactions On Communications**, 52 (2):240 (2004).
23. Jungnickel, D., Sane, S.S., "On Extensions Of Nets", **Pacific Journal Of Mathematics**, 103 (2):437 (1982).
24. Mavron, V.C., "Frequency Squares And Affine Designs", **The Electronic Journal Of Combinatorics** 7:1-6, (2000).
25. Rees, R.S., "Truncated Transversal Designs: A New Lower Bound On The Number of Idempotent MOLS of Side n ", **Journal of Combinatorial Theory**, 90: 257-266 (2000).
26. Danziger, P., Stevens, B., "Class-Uniformly Resolvable Group Divisible Structures I: Resolvable Group Divisible Designs" **The Electronic Journal Of Combinatorics** 11:2-6 (2004).
27. Shen, H., Wang, M., "Existence of Labeled Resolvable Block Designs",

***Bull.Belg.Mah.Soc.*, 5: 427-434 (1998).**

28. Internet: Smith, C., "On The Existence Of $(v,5,1)$ -BIBDs", <http://www.argilo.net/papers/bibd.pdf> (2004).
29. Meagher, K., "Covering Arrays on Graphs: Connections to Design Theory, Extremal Combinatorics and Algebraic Combinatorics", Doktora tezi, ***Ottawa-Carleton Institute of Mathematics and Statistics***, Ottawa, 6-8 (2004).
30. MacNeish, H.F., "Euler's Squares", ***Annals of Mathematics***, 23: 221-227 (1922).
31. Colbourn, C.J., "Some Direct Constructions for Incomplete Transversal Designs", ***Journal of Statistical Planning and Inference***, 56: 93-94 (1996).
32. Bose, R.C., Shrikhande, S.S., Parker, E.T., "Further Results On The Construction Of Mutually Orthogonal Latin Squares and The Falsity Of Euler's Conjecture", ***Canadian Journal of Mathematics***, 12 (1):189-203 (1960).
33. Brouwer, A.E., Rees, V., "More Mutually Orthogonal Latin Squares", ***Discrete Math.*** 39: 263-281 (1982).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı :YAMAÇ, Aytekin
 Uyuğu :T.C.
 Doğum tarihi ve yeri :08.08.1976 Bursa
 Medeni hali :Evli
 Telefon :0 (312) 417 51 90
 e-mail :ayamac@kho.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Anadolu Üni./İstatistik Bölümü	1997
Lise	Bursa Çınar Lisesi	1993

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1996-1997	DİE Bursa Böl. Md.lüğü	Geçici Personel
1998-1999	Kara Harp Okulu	Öğretim Elemanı
1999-2001	K.K.Gn.P.P.Bşk.lığı	İstatistik Ks.A.V.
2002-2003	Azerbaycan KHO	Ölçme Değ.Sb.
2003-20..	Kara Harp Okulu	Öğretim Elemanı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. YAMAÇ, A., "Temel Bileşenler Analizi İle Türkiye'nin AB Ülkeleri İçindeki Yeri" Kara Harp Okulu Bilim Dergisi, Cilt 12, Sayı 2, 37-48, 2002.

Hobiler

İnternet, Futbol.