

155806

**TRANSVERSE ELEKTRİK ŞEKLİNDE POLARİZE EDİLEN
ELEKTROMANYETİK DALGALAR İÇİN SAÇILMA PROBLEMİ**

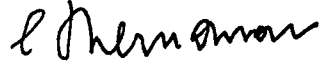
Gülten TORUN

**DOKTORA TEZİ
(MATEMATİK)**

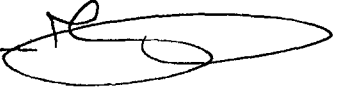
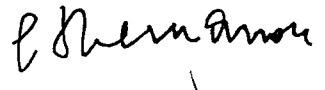
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ocak 2004
ANKARA**

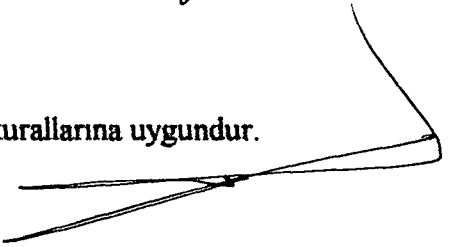
Gülten TORUN tarafından hazırlanan TRANSVERSE ELEKTRİK ŞEKLİNDE
POLARİZE EDİLEN ELEKTROMANYETİK DALGALAR İÇİN SAÇILMA
PROBLEMİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR
Tez Yöneticisi
09.12.03

Bu çalışma, jürimiz tarafından ...MATEMATİK... Anabilim Dalında
..DOKTORA... tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Abdullah ALTIN 
Üye : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU 
Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN 
Üye : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR 
Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR 

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SEMBOLLER.....	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	7
2.1. Temel Kavramlar	7
2.2.Helmholtz gösterimi ve Sommerfeld yayılma şartı	13
2.3.Uzak alan modeli ve Herglotz dalga fonksiyonu.....	16
2.4.Elektromanyetik Dalgalar	20
3. HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDAN YAYILAN TE BİÇİMİNDE POLARİZE EDİLMİŞ ELEKTROMANYETİK DALGALAR İÇİN SAÇILMA PROBLEMİ	25
3.1.Problemin Ortaya Konulması	25
3.2.Direkt Saçılma Probleminin Tanımlanması.....	27
3.3.Çözümün Tekliği ve Varlığı	28
4. İÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ	41
4.1. Problemin Tanımlanması.....	41
4.2. Çözümün Tekliği ve Varlığı	41
5. TERS SAÇILMA PROBLEMİ İÇİN BASİT METODUN FORMÜLE EDİLMESİ	50
5.1.İntegral Denklemi	50
5.2.Basit Metodun Formüle Edilmesi	55

6. SONUÇ..... 70

6.1.Sonuç 70

6.2.Sonuç 70

6.3.Sonuç 71

KAYNAKLAR 72

ÖZGEÇMİŞ 76



**TRANSVERSE ELEKTRİK ŞEKLİNDE POLARİZE EDİLEN
ELEKTROMANYETİK DALGALAR İÇİN SAÇILMA PROBLEMİ**

(Doktora Tezi)

Gülten TORUN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2004

ÖZET

Bu tez çalışmasında homogen olmayan bir ortamdan yayılan, transverse elektrik şeklinde polarize edilen elektromanyetik dalgalar incelenmiştir. Direkt saçılma probleminin çözümünün tekliği Rellich lemmasından yararlanılarak gösterilmiştir. Aynı problemin çözümünün varlığını göstermek için operatör denklemler oluşturulmuş ve Ters operatörün varlığı teoremi (Riesz teorisi) kullanılmıştır. Ters saçılma probleminin çözümü için bir iç sınır-değer problemi ele alınmıştır ve sonra bu problemin çözümünün teklik ve varlığı ispatlanmıştır. Son olarak, lineer bir integral denklemi elde edilmiştir ki bu denklemin çözümü, saçan nesnenin (engel bölgenin) desteğini belirler.

Bilim Kodu :226

Anahtar Kelimeler :Elektromanyetik dalgalar, saçılma teorisi, uzak-alan modeli, lineer örnekleme metodu

Sayfa Adedi :76

Tez Yöneticisi :Prof.Dr. İbrahim Ethem ANAR.

**THE SCATTERING PROBLEM FOR THE ELECTROMAGNETIC
WAVES POLARIZED IN THE CASE OF TRANSVERSE ELECTRIC**

(Ph. D. Thesis)

Gülten TORUN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

January 2004

ABSTRACT

In this thesis, the electromagnetic waves scattered from an inhomogeneous medium are investigated when the electromagnetic waves are polarized in the case of transverse electric. Using the Rellich lemma, the uniqueness of the solution of the direct scattering problem is showed. In order to show the existence of the solution of this problem, the operator equations are constructed and the theorem which is the existence of the inverse operator (the Riesz theory) is used. To solution of the inverse scattering problem, the interior boundary-value problem is considered and then the uniqueness and the existence of the solution of this problem are proved. Finally, a linear integral equation is obtained whose the solution yield the support of the scattering object.

Science Code	: 226
Key Words	: Electromagnetic waves, scattering theory, far-field pattern, linear sampling method.
Page Number	: 76
Adviser	: Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

TEŞEKKÜR

Çalışmam süresince değerli bilgilerinden yararlandığım, çalışmamın her safhasında bana yol gösteren ve tavsiyelerde bulunan, zamanını benden esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr. İbrahim Ethem ANAR'a teşekkür ve saygılarımı sunarım. Aynı zamanda, altısar aylık periyodik toplantılarda kıymetli zamanlarını bana ayırarak çalışmalarımı dinleyip, onaylayan ve çalışmalarımın devamı için teşvik eden saygıdeğer hocalarım Prof.Dr. Abdullah ALTIN ve Prof.Dr. İrfan Baki YAŞAR'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca, manevi destekleriyle bana güç veren sevgili aileme de sabır ve hoş görülerinden dolayı teşekkür ederim.



SEMBOLLER

Sembol	Anlam
∂D	D bölgesinin sınırı
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
$L^2(\Omega)$	$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\ \cdot \ _{L^2(\Omega)}$	$L^2(\Omega)$ uzayı üzerindeki norm
$C(D)$	$D \subset \mathbb{R}^2$ de tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı
$C^k(D)$	$D \subset \mathbb{R}^2$ de tanımlı k ıncı mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$\ \cdot \ _{C(D)}$	$C(D)$ üzerinde tanımlanan norm
$\ \cdot \ _{C^1(D)}$	$C^1(D)$ üzerinde tanımlanan norm
$C^{0,\alpha}(\partial D), C^{1,\alpha}(\partial D)$	∂D üzerinde tanımlı Hölder sürekli fonksiyonların uzayları
$H_0^{(1)}$	Sıfırıncı mertebeden, birinci tür Hankel fonksiyonu
$\bar{u} = \bar{u}(x)$	$u(x)$ fonksiyonunun eşleniği
$\nu = \nu(x)$	∂D üzerindeki birim dış normal vektör
$\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$	$\nu(x)$ normal vektörü doğrultusundaki türev
O	Landau sembolü
Δ	Laplace operatörü
$grad, \nabla$	Gradient
$curl = \nabla \times$	Vektör alanın rotasyonu ($curl$ 'u)
$div = \nabla \cdot$	Vektör alanın divergensi
$v_g = v_g(x)$	g çekirdekli Hergloltz dalga fonksiyonu
K^*	K operatörünün adjointi

1. GİRİŞ

Saçılma teorisinde iki temel problem, kompakt destekli homogen olmayan geçirgen bir ortam ve sınırlı geçirgen olmayan engelde zaman harmonik ses veya ikinci bölüm de tanımlayacağımız elektromanyetik dalgaların saçılması problemleridir. Bu problemler direkt saçılma ve ters saçılma problemleri olarak bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir.

Direkt problem, olay (gelen) dalga ve saçan bölge (engel bölge) hakkındaki bilgiden saçılan dalganın belirlenmesi problemidir. Ses dalgaları için olay alanı

$$u^i(x, t) = e^{i(kx \cdot d - \omega t)}$$

zaman-harmonik düzlemsel dalgası ile verilsin. Burada $k = \frac{\omega}{c_0}$ dalga sayısı, ω frekans, c_0 ses hızı ve d yayılmanın doğrultusudur. En basit saçılma problemi, homogen olmayan bir ortam için u toplam alanının bulunmasıdır öyle ki

$$\Delta u + k^2 n(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad [1.1]$$

$$u(x) = e^{ikx \cdot d} + u^s(x) \quad [1.2]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad [1.3]$$

Burada $r = |x|$, $n = \frac{c_0^2}{c^2}$ kırılma indisi, homogen ortamda $c_0 = c$ ve homogen olmayan ortamda $c = c(x)$ dir. [1.3] Sommerfeld yayılma şartı, saçılan dalganın dışarı doğru olduğunu garantiler. $1 - n$ in kompakt destekli olduğu kabul edilir. Eğer ortam absorbing (emilgen) bir ortam ise, n kompleks değerlidir ve ses hızının oranı basit değildir. D geçirgen olmayan engelinde saçılma durumu için en basit problem, u toplam alanının bulunmasıdır öyle ki

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \quad [1.4]$$

$$u(x) = e^{ikx \cdot d} + u^s(x) \quad [1.5]$$

$$u = 0, \quad x \in \partial D \quad [1.6]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad [1.7]$$

Burada [1.4] diferensiyel denklemi Helmholtz denklemidir ve [1.6] sınır koşulu yumuşak-ses engeline karşılık gelir. [1.6] dan başka sınır koşulları da göz önüne alınabilir. Örneğin, Neumann veya sert-ses sınır koşulu ya da

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0, \quad x \in \partial D$$

impedance (engel) sınır koşulu. Burada ν , ∂D için birim dış normal ve λ pozitif bir sabittir.

Yukarıda formüle edilen direkt saçılma problemleri ile ilgili ters saçılma problemine geçmeden önce, direkt saçılma problemi hakkında cevaplanacak ilk soru çözümün tekliği sorusudur. Tekliği kanıtlamak için temel köprüler Green teoremleri ve çözümlerinin tekliğinin devamlılık özelliğidir. [1.4] denklemi sabit katsayılı olduğundan teklik ile ilgili ilk sonuçlar ses dalgaları için 1912 de Sommerfeld tarafından verilmiştir (1) ve elektromanyetik dalgalar için ise Müller tarafından kanıtlanmıştır (2). Sommerfeld'in çalışması $\text{Im } k \geq 0$ koşulu altında Rellich (3) ve Vekua (4) tarafından genelleştirilmiştir. Elektromanyetik dalgalar için ise, $\text{Im } k \geq 0$ koşulu altında ilk sonuçlar yine Müller tarafından verilmiştir (2). İkinci soru ise, çözümün varlık ve nümerik yaklaşımıdır. Varlık için en popüler yaklaşım integral denklemler metodudur (5,6). Özellikle, her k pozitif değeri için [1.1] - [1.3] probleminin u toplam alanı

$$u(x) = e^{ikx \cdot d} - k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad [1.8]$$

Lippman-Schwinger denkleminin tek çözümüdür (6). Burada $m = 1 - n$ dir ve

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x \neq y \quad [1.9]$$

Helmholtz denkleminin temel çözümüdür.

[1.4] - [1.7] probleminin çözümü için integral denklem metodlarıyla yaklaşım çok uygundur. Bunun için

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad [1.10]$$

double layer potansiyeli formunda [1.4] - [1.7] probleminin bir çözümünü ararız. Burada ψ , belirlenmiş sürekli bir fonksiyondur. O zaman x , sınıra yaklaşırken ψ nin ikinci çeşit bir sınır integral denkleminin çözümü olduğu gösterilebilir. Maalesef k^2 , D de negatif Laplasyenin bir Neumann özdeğeri ise; bu integral denklem tek olarak çözülemez (6). Aynı zorluklar, elektromanyetik dalgalar için saçılma probleminde de ortaya çıkar. Ses ve elektromanyetik saçılma teorisinde bu zorluklar ilk olarak Vekua (4), Weyl (7,8) ve Müller (9-11) tarafından çözülmüştür.

Saçılma teorisinde önemli olan saçılan dalganın uzak-alan modelidir. Eğer u^s , [1.1] - [1.3] veya [1.4] - [1.7] nin saçılan alanı ise u^s

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left\{ u_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right\}, \quad r = |x| \rightarrow \infty \text{ iken} \quad [1.11]$$

asimptotik davranışa sahiptir. Burada $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ dir ve u_∞ , u^s nin uzak alan modelidir(6,12). Uzak alan modellerindeki önem, saçılma teorisindeki ters problem gerçeğinde yatar. Ters problem, birim çember üzerindeki $\hat{x}$ ve d birim vektörleri

için u_∞ uzak alan modeli hakkındaki bilgiden ya n yi ya da D yi belirleme problemidir.

Ters saçılma probleminin çözümünün tekliğindeki ilk sonuçlar Schiffer tarafından verilmiştir (Lax ve Phillips (13)). Schiffer, $\forall \hat{x}, d \in \Omega$ ve belirlenmiş k için uzak alan modelinin saçan D engelini tek olarak belirlediğini [1.4] - [1.7] problemi için göstermiştir. [1.1] - [1.3] problemi için karşılık gelen sonuçlar, Nachman (14), Novikov (15) ve Ramm (16) tarafından elde edilmiştir. Elektromanyetik saçılma problemi için teklik teoremleri Colton ve Päiväranta tarafından elde edilmiştir (17).

1980 lerin başlarında uzak alan verisi hakkındaki bilgiden faydalanılarak ∂D nin belirlenmesi problemi olan akustik (ses) ters engel problemi, Angel, Colton ve Kirsch (18), Roger (19), Tobocman (20) ve daha bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu araştırmacılar, ters engel problemini yeniden formüle etmek için Green formülünü veya integral denklemleri kullanmışlardır.

Ters saçılma probleminin çözümü için bir metod, lineer örnekleme metodudur ki bu basit metod ilk olarak Colton ve Kirsch (21) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada, resonance (sesi titreştiren) bölgede iki boyutlu ters saçılma probleminin ters modelinin gelişimi ile ilgilenilmiştir. Sonra bu metod, Colton, Kress ve Monk (22), Colton, Piana ve Potthast (23), Colton ve Piana (24), Colton ve Monk (25,26), Colton, Giebermann ve Monk (27), Colton, Coyle ve Monk (28) tarafından kullanılmıştır. Metodu uygulamak için ilk önce

$$(Fg)(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d), \quad \hat{x}, d \in \Omega \quad [1.12]$$

şeklinde $F: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ uzak-alan operatörü tanımlanmıştır. Burada $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ dir. Sonra

$$(Fg)(\hat{x}) = \Phi_{\infty}(\hat{x}, y) \quad [1.13]$$

lineer integral denkleminin çözümü için lineer örnekleme metodu kullanılmıştır.

Burada $\Phi_{\infty}(\hat{x}, y) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot y}$, [1.9] da tanımlanan Φ fonksiyonunun uzak-alan modelidir (6,12). Bu metoda göre,

$\forall \varepsilon > 0$ için bir $g = g(\cdot, y) \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\|Fg - \Phi_{\infty}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad [1.14]$$

olur ve $y \rightarrow \partial D$ için $\|g(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)}$ ve $\|v_g(\cdot, y)\|_{L^2(D)}$ normları sınırsız olur. Buradaki v_g fonksiyonu

$$v_g(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d)$$

ile tanımlanan g çekirdekli Herglotz dalga fonksiyonudur. Yani, [1.14] eşitsizliğinin çözümü olan $g \in L^2(\Omega)$ nın normunun sınırsız olduğu noktalar saçan bölgenin sınırını karakterize eder.

Biz bu çalışmada, sonsuz uzunluktaki homogen olmayan bir silindir için elektromanyetik dalga problemini ele aldık. Ele alınan elektromanyetik dalga problemindeki olay dalga, sonsuz uzunluktaki silindirin eksenine paralel polarize edildi. Bu durumda manyetik alan, silindirin eksenine doğrultusunda sadece bir bileşene sahiptir. Saçılma teorisinde bu problem TE modu ya da transverse elektrik olarak bilinir.

Çalışmanın ikinci bölümünde temel tanım ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde, ele aldığımız direkt sınır-değer problemini tanımladık. Bu problemin çözümünün tekliğini, Green teoremleri ve çözümlerin tekliğinin devamlılık özelliğini kullanarak gösterdik. Çözümün varlığı için ise, potansiyel teoriden (single layer ve double layer potansiyeller için sıçrama şartlarından) faydalandık.

Dördüncü bölümde, ters saçılma probleminde Colton ve Kirsch'in önerdiği basit metodu (21) kullanabilmek için bir iç sınır-değer problemi ele aldık, bu problemin çözümünün teklik ve varlığını gösterdik.

Beşinci bölümde ise önce, iç sınır-değer problemi için Lippmann-Schwinger denklemini sağlayan bir integral denklemi oluşturduk. Sonra, $u_{\infty}(\hat{x}, d)$ uzak alan modeli hakkındaki bilgiden yararlanarak, ters saçılma probleminin çözümü için önerilen metodu formüle ettik.

Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümleri tamamen özgün ve orijinal çalışmaları kapsamaktadır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1

$u, \mathbb{R}^2$ de tanımlı bir fonksiyon olsun. $\{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) \neq 0\}$ kümesinin kapanışına u fonksiyonunun desteği denir.

Tanım 2.1.2 (Hölder süreklilik)

$G \subset \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde tanımlanmış reel veya kompleks değerli fonksiyonların uzayına, eğer $\forall x, y \in G$ için

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

olacak şekilde bir C sabiti var ise $0 < \alpha \leq 1$ Hölder üslüsü ile *düzgün Hölder süreklidir* denir.

$C^{0,\alpha}(G)$ Hölder uzayı, G üzerinde tanımlanan sınırlı ve α üslüsü ile düzgün Hölder sürekli fonksiyonların lineer uzayı olarak tanımlanır. Bu uzay

$$\|\varphi\|_{C^{0,\alpha}(G)} = \sup_{x \in G} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

normlu bir Banach uzayıdır.

$C^{1,\alpha}(G)$ Hölder uzayı, düzgün Hölder sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır ve $\nabla \varphi \in C^{0,\alpha}(G)$ dir. Bu uzay

$$\|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(G)} = \|\varphi\|_{C(G)} + \|\nabla \varphi\|_{C^{0,\alpha}(G)}$$

normlu bir Banach uzayıdır (6).

Teorem 2.1.3 (Ters operatörün varlığı)

X normlu bir uzay, $A: X \rightarrow X$ kompakt lineer bir operatör ve $I - A$ bire-bir olsun. O zaman $(I - A)^{-1}: X \rightarrow X$ ters operatörü vardır ve sınırlıdır (29).

Sonuç 2.1.4

X normlu bir uzay ve $A: X \rightarrow X$ kompakt lineer operatör olsun. Eğer $\phi - A\phi = 0$ homogen denklemi yalnızca $\phi = 0$ aşikâr çözüme sahip ise, her $f \in X$ için $\phi - A\phi = f$ homogen olmayan denklemi tek bir $\phi \in X$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm f 'e sürekli bağlıdır (29).

Sonuç 2.1.5

$I - A$ operatörü $S - A$ operatörü ile yer değiştirildiğinde *Teorem 2.1.3* ve *Sonuç 2.1.4* geçerlidir. Burada S sınırlı lineer bir operatördür ve sınırlı bir terse sahiptir. Yani, $(I - S^{-1}A)\phi = S^{-1}f$ dir ve $S^{-1}A$ kompaktır (29).

Tanım 2.1.6

$D \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $x \in D$ için $\chi_D(x) = 1$ ve $x \notin D$ için $\chi_D(x) = 0$ şeklinde tanımlanan karakteristik fonksiyon, Riemann integrallenebilirse D kümesine *Jordan ölçülebilir* denir.

Tanım 2.1.7 (Zayıf Singüler Çekirdek)

$\forall x, y \in D$ ve $x \neq y$ için K çekirdeği tanımlı ve sürekli olsun. Eğer

$$|K(x, y)| \leq M |x - y|^{\alpha-2}, \alpha \in (0, 2]$$

olacak biçimde bir M pozitif sabiti var ise, K çekirdeğine *zayıf singüler çekirdek* denir.

Teorem 2.1.8 (Fredholm Alternatifi)

$D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ve Jordan ölçülebilir bir bölge, K ise zayıf singüler çekirdek olsun.

$$(K\varphi)(x) = \int_D K(x, y) \varphi(y) dy \quad \text{ve} \quad (K^*\psi)(x) = \int_D \overline{K(y, x)} \psi(y) dy, \quad x \in D$$

olmak üzere

$$(I - K)\varphi(x) = \varphi(x) - \int_D K(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

ve

$$(I - K^*)\psi(x) = \psi(x) - \int_D \overline{K(y, x)} \psi(y) dy = 0$$

homogen integral denklemleri ya sadece $\varphi = 0$ ve $\psi = 0$ aşikâr çözümlere sahiptir ya da aynı sayıda sonlu lineer bağımsız çözümlere sahiptir. Eğer homogen integral denklemleri $\varphi = 0$ ve $\psi = 0$ çözümlerine sahip ise, her $f, g \in C(D)$ için

$$\varphi(x) - \int_D K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad \text{ve} \quad \psi(x) - \int_D \overline{K(y, x)} \psi(y) dy = g(x), \quad x \in D$$

homogen olmayan integral denklemleri tek bir $\varphi \in C(D)$ ve $\psi \in C(D)$ çözümüne sahiptir. Eğer homogen integral denklemleri sonlu sayıda lineer bağımsız çözümlere sahip ise, homogen olmayan integral denklemleri çözülebilir ancak ve ancak homogen adjoint denklemin her ψ çözümü için

$$\int_D f(x) \psi(x) dx = 0$$

veya homogen denklemin her φ çözümü için

$$\int_D \varphi(x) g(x) dx = 0$$

sağlanıyor ise (29).

Tanım 2.1.9 (Single-Double Layer Potansiyeller)

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi, sınırı C^2 sınıfından ve sınırsız bir bölgenin açık tümleyeni, ν de ∂D sınırı üzerindeki birim dış normal olsun.

Verilen bir $\phi \in C(\partial D)$ integrallenebilir fonksiyonu için

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

fonksiyonuna ϕ yoğunluklu *single layer potansiyeli* denir.

Benzer şekilde verilen bir $\psi \in C(\partial D)$ fonksiyonu için

$$v(x) = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

fonksiyonuna ψ yoğunluklu *double layer potansiyeli* denir. Burada Φ fonksiyonu [1.9] da tanımlanmıştır.

Teorem 2.1.10 (Potansiyel teori için sıçrama şartı)

D bölgesi ∂D sınırı C^2 sınıfından bir bölge olsun. ϕ yoğunluklu u single layer potansiyeli $\mathbb{R}^2$ nin tamamında süreklidir ve ∂D üzerinde bir c sabiti için

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}^2)} \leq c \|\phi\|_{C(\partial D)}$$

eşitsizliği sağlanır. Sınır üzerinde

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \phi(x), \quad x \in \partial D$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x \pm h\nu(x))$$

ifadesi sınır üzerinde düzgün yakınsak anlamındadır. ψ yoğunluklu v double layer potansiyeli ise,

$$v^\pm(x) = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \partial D$$

limit değerleri ile D den $\bar{D}$ a ve $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ dan $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ye sürekli genişletilebilir. Burada

$$v^\pm(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x \pm h\nu(x))$$

dır. Ayrıca ∂D ye bağımlı bir c sabiti için

$$\|v\|_{C(\bar{D})} \leq c \|\psi\|_{C(\partial D)}, \quad \|v\|_{C(\mathbb{R}^2 \setminus D)} \leq c \|\psi\|_{C(\partial D)}$$

eşitsizlikleri elde edilir ve sınır üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x + h\nu(x)) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x - h\nu(x)) \right\} = 0, \quad x \in \partial D$$

sağlanır (6).

Teorem 2.1.11

Eğer $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu

$$(i) \Delta u + k^2 n(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$$(ii) u = u^i + u^s$$

$$(iii) \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0$$

saçılma probleminin bir çözümü ise, o zaman u fonksiyonu

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

Lippmann-Schwinger denklemini sağlar. Karşıt olarak; eğer $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonu Lippmann-Schwinger denkleminin bir çözümü ise, bu durumda $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ dir ve u fonksiyonu (i) - (iii) saçılma probleminin bir çözümüdür.

Burada $n \in C^2(\mathbb{R}^2)$ kırılma indisi olmak üzere $m = 1 - n$, $k > 0$ dalga sayısıdır ve Φ fonksiyonu [1.9] da tanımlanmıştır (6).

Teorem 2.1.12

Her bir $k > 0$ iken *Teorem 2.1.11* deki (i) - (iii) problemi için tek bir çözüm vardır ve u çözümü, u^i olay alanı üzerindeki maksimum norma sürekli bağlıdır (6).

2.2.Helmholtz gösterimi ve Sommerfeld yayılma şartı

Teorem 2.2.1 (Helmholtz gösterimi)

$D \subset \mathbb{R}^2, C^2$ sınıfından sınırlı bir bölge ve ν , D nin dışına doğru yönlendirilmiş ∂D sınırındaki birim normal vektör olsun. $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ fonksiyonunun normal doğrultudaki türevi

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x - h\nu(x)), \quad x \in \partial D$$

olmak üzere u fonksiyonu

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right] ds(y) - \int_D [\Delta u(y) + k^2 u(y)] \Phi(x, y) dy$$

$x \in D$ [2.1]

Green formülüne veya Helmholtz gösterimine sahiptir. Özellikle u fonksiyonu $x \in D$ için $\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümü ise [2.1] formülü

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right] ds(y), \quad x \in D$$

[2.2]

olur (6). Buradaki $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$; $x \neq y$ fonksiyonu Helmholtz denkleminin temel çözümüdür ve $H_0^{(1)}$ fonksiyonu *sıfıncı mertebeden birinci tür Hankel fonksiyonudur* (12).

Tanım 2.2.2 (Sommerfeld yayılma şartı)

$\forall \hat{x} = \frac{x}{|x|}$ doğrultusunda düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad r = |x| \quad [2.3]$$

koşulu sağlanıyor ise u ya *Sommerfeld yayılma şartını sağlıyor* denir. Bu şart, Helmholtz denkleminin çözümlerinin sonsuzdaki davranışlarını karakterize eder(6).

Tanım 2.2.3 (Yayılan çözüm)

$r = |x|$ ($x \in \mathbb{R}^2$) yarıçaplı bir çemberin dışındaki bölgede Helmholtz denkleminin bir u çözümü, eğer $\forall \hat{x} = \frac{x}{|x|}$ doğrultusunda düzgün olarak [2.3] Sommerfeld yayılma şartını sağlıyor ise u fonksiyonuna *yayılan (radiating) çözüm* denir.

Teorem 2.2.4

D sınırlı bölgesi, sınırı C^2 sınıfından ve sınırsız bir bölgenin açık tümleyeni olsun ve ν , ∂D üzerinde D nin dışına doğru yönlendirilmiş birim normal vektörü göstere sin. $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ da $\Delta u + k^2 u = 0$ Helmholtz denklemi için yayılan bir çözüm olsun. u fonksiyonunun normal doğrultudaki türevi

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} v(x) \cdot \text{grad } u(x + hv(x)),$$

∂D üzerinde düzgündür ve o zaman

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad [2.4]$$

Green formülü sağlanır. (6).

Lemma 2.2.5 (Rellich)

D sınırlı bölgesi, sınırsız bir bölgenin açık tümleyeni olsun. $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ fonksiyonu, [2.3] Sommerfeld yayılma şartını ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0 \quad [2.5]$$

özellikliğini sağlayan Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ da $u = 0$ olur (6).

Teorem 2.2.6

D bölgesi *Lemma 2.2.5* deki gibi tanımlansın. $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$

Helmholtz denkleminin yayılan bir çözümü ve $\text{Im } k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y) \geq 0$ olsun. O

zaman $\mathbb{R}^2 \setminus D$ de $u = 0$ olur (5).

Teorem 2.2.7 (Tekliğin devamı)

$D \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge ve $u \in C^2(D)$ fonksiyonu D de $\Delta u + k^2 n(x)u = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun. $n \in C(\overline{D})$ ve $x_0 \in D$ nin komşuluğunda $u = 0$ olsun. O zaman u fonksiyonu D de özdeş olarak sıfırdır(6).

2.3.Uzak alan modeli ve Herglotz dalga fonksiyonu

Teorem 2.3.1

Helmholtz denkleminin yayılan her u çözümü, $\forall \hat{x} = \frac{x}{|x|}$ doğrultusunda düzgün olarak

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}, d) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty \text{ iken} \quad [2.6]$$

asimptotik davranışa sahiptir. Burada u_∞ , Ω birim çemberi üzerinde tanımlanmış u fonksiyonunun uzak alan modelidir ve

$$u_\infty(\hat{x}, d) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} \right] ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega \quad [2.7]$$

formundadır. d ve $\hat{x}$ lar Ω üzerindeki birim vektörlerdir ve sırasıyla olay dalganın yönü ve gözlemlenen (yayılan) dalganın yönleridir (6).

Teorem 2.3.2 (Karşılıklı özelliği)

$u_\infty(\hat{x}, d)$, d olay dalga doğrultusuna ve $\hat{x}$ yayılan dalga doğrultusuna karşılık gelen uzak alan modeli olsun. Bu durumda, $\forall \hat{x}, d \in \Omega$ için

$$u_{\infty}(\hat{x}, d) = u_{\infty}(-d, -\hat{x}) \quad [2.8]$$

özelliği sağlanır (30).

Teorem 2.3.3

D bölgesi *Lemma 2.2.5* deki gibi tanımlansın. Ayrıca $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ Helmholtz denkleminin yayılan bir çözümü ve u fonksiyonunun uzak alan modeli özdeş olarak sıfır olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ da $u = 0$ olur (6).

Tanım 2.3.4 (Herglotz dalga fonksiyonu)

Ω , $\mathbb{R}^2$ de birim çember olmak üzere

$$v_g(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \quad [2.9]$$

şeklinde tanımlanan v_g fonksiyonuna *Herglotz dalga fonksiyonu* denir. Burada $g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu v_g nin *Herglotz çekirdeğidir*.

Teorem 2.3.5

$\mathbb{R}^2$ de, g çekirdekli bir v_g Herglotz dalga fonksiyonu sıfır olsun. Bu durumda $g = 0$ olur (6).

Lemma 2.3.6

Verilen bir $g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu için

$$v_g^i(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad [2.10]$$

olay dalgası için saçılan dalga

$$v_g^s(x) = \int_{\Omega} u^s(x, d) g(d) ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad [2.11]$$

ile verilir ve v_g^s ,

$$v_{g_{\infty}}(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in \Omega \quad [2.12]$$

uzak alan modeline sahiptir (6).

Tanım 2.3.7 (Uzak alan operatörü)

$\hat{x}, d \in \Omega$ için $u_{\infty}(\hat{x}, d)$ uzak alan modelleri olmak üzere

$$Fg(\hat{x}, d) = \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d)$$

operatörüne *uzak alan operatörü* denir. Burada $g \in L^2(\Omega)$ dir.

Teorem 2.3.8

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $\partial D, C^2$ sınıfından olsun. $v, w \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ olmak üzere

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \Delta w + k^2 w = 0, \quad D \text{ içinde} \quad [2.13]$$

$$v = w \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu}, \quad \partial D \text{ üzerinde} \quad [2.14]$$

sınır-değer problemi tanımlansın.

a-) $g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) = 0, \quad \hat{x} \in \Omega \quad [2.15]$$

homogen integral denkleminin bir çözümüdür $\Leftrightarrow w \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonu vardır öyle ki (v, w) , [2.13] – [2.14] sınır değer problemini çözer. Burada v , [2.9] da tanımlanmış Herglotz dalga fonksiyonudur.

b-) $y \in D$ için

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} e^{-ik\hat{x} \cdot y}, \quad \hat{x} \in \Omega \quad [2.16]$$

integral denkleminin bir $g \in L^2(\Omega)$ çözümü vardır $\Leftrightarrow$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \Delta w + k^2 n w = 0, \quad D \text{ de} \quad [2.17]$$

$$w - v = \Phi(., y) \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi(., y)}{\partial \nu}, \quad \partial D \text{ üzerinde} \quad [2.18]$$

sınır-değer probleminin bir (v, w) çözümü vardır. Burada v , Herglotz dalga fonksiyonudur (30).

2.4.Elektromanyetik Dalgalar

2.4.1 Maxwell Denklemleri

Elektromanyetik dalga,

$$\text{curl}E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{curl}H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \sigma E \quad [2.19]$$

Maxwell denklemlerini sağlayan E elektrik alanı ve H manyetik alanı ile tanımlanır. Burada ε elektrik yalıtkanlığı, μ manyetik geçirgenlik ve σ elektrik iletkenliğidir (6,12). Bu denklemler adını elektromanyetik teori için temel katkılarından dolayı fizikçi James Clerk Maxwell (1831-1879) dan almıştır.

IR^3 de homogen olmayan bir ortamda elektromanyetik dalga yayılması gözönüne alındığında, bu ortamda $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, $\mu = \mu_0 > 0$ sabit ve $\sigma = \sigma(x)$ dir. Yeterince büyük bir küre dışındaki her x için $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ sabit ve $\sigma(x) = 0$ kabul edilsin. O zaman [2.19] Maxwell denklemleri

$$\text{curl}E + \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{curl}H - \varepsilon_0(x) \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad [2.20]$$

şeklinde olur. σ sonlu ise, homogen olmayan ortam kusurlu bir iletken olarak kabul edilir. $\sigma \neq 0$ ise ortam bir iletken olarak adlandırılır, oysaki $\sigma = 0$ ise ortam bir yalıtkan olarak adlandırılır(6).

$w > 0$ elektromanyetik dalganın frekansı (titreşim sayısı) olmak üzere

$$E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} E(x) e^{-iwt} \quad H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} H(x) e^{-iwt} \quad [2.21]$$

formundaki zaman harmonik elektromanyetik dalgalar için [2.20] zamana bağlı Maxwell denklemlerinden E ve H alanları

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0 \quad \operatorname{curl} H + ikn(x)E = 0 \quad [2.22]$$

zaman harmonik Maxwell denklemlerini sağlar. Burada k pozitif dalga sayısı $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ ile tanımlanır ve $n = n(x)$ kırılma indisi

$$n(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon(x) + i \frac{\sigma(x)}{\omega} \right) \quad [2.23]$$

ile verilir. $m = 1 - n$ in kompakt desteğe sahip olduğu kabul edilir ve $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : m(x) \neq 0\}$ şeklinde tanımlanır. Ses dalgalarında olduğu gibi sabit katsayılı Maxwell denklemlerin çalışması, homogen olmayan bir ortamda saçılan elektromanyetik dalga çalışması için bir önceliktir. Helmholtz denklemine gelince, elektromanyetik engel saçılmasında geçirgen olmayan ve geçirgen nesnelerin arasında bir ayrım yapılmalıdır. Kusursuz iletken bir engel için toplam dalganın elektrik alanının tanjant bileşeni sınır üzerinde sıfır olur. Kusursuz bir D iletkeni için verilen bir E^i, H^i olay dalgasının yayılması göz önüne alındığında, giriş bölümündeki [1.4] – [1.7] problemine benzer bir şekilde elektromanyetik saçılma problemi $E = E^i + E^s$, $H = H^i + H^s$ toplam dalganın bulunmasıdır öyle ki

$$\operatorname{curl} E - ikH = 0 \quad \operatorname{curl} H + ikE = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \text{ de} \quad [2.24]$$

$$\nu \times E = 0, \quad \partial D \text{ üzerinde} \quad [2.25]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H^s \times x - rE^s) = 0, \quad r = |x| \quad [2.26]$$

olur. Buradaki ν , ∂D sınırı için birim dış normaldir. E^s, H^s ler $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ da Maxwell denklemlerini sağlayan saçılan (yayılan) alanlardır. [2.26] ise Silver-Müller yayılma

koşulu olarak adlandırılır. E^i ve H^i olay dalgaları da [2.24] Maxwell denklemlerini sağlar. Kusurlu iletken bir engelde saçılma için

$$\nu \times \text{curl} E - i\lambda (\nu \times E) \times \nu = 0, \quad \partial D \text{ üzerinde}$$

formunda impedance (direnç) sınır koşulu ele alınır. Burada λ pozitif bir sabittir. $IR^3 \setminus \bar{D}$ ortamının ε elektrik yalıtkanlığından, μ manyetik geçirgenliğinden ve $\sigma = 0$ elektrik iletkenliğinden farklı $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ elektrik yalıtkanlığı, $\mu = \mu_0$ (sabit) manyetik geçirgenliği ve $\sigma = \sigma(x)$ elektrik iletkenliği ile D geçirgen engelindeki saçılma bir transmission (geçiş) problemine yol açar (24). Buna ek olarak, D içinde [2.22] Maxwell denklemlerini sağlayan bir geçiş dalgası vardır. E elektrik alan ve H manyetik alanın tanjant bileşenlerinin sürekliliği sınır üzerinde geçiş koşullarına yol açar. Son zamanlarda geçiş koşullarına ek olarak, daha genel olan resistive (kısıtlayıcı) ve conductive (iletken) sınır koşulları takdim edilmiştir (31).

2.4.2 *TM ve TE şeklinde polarize edilmiş (kutuplaştırılmış) elektromanyetik dalga problemi*

Sonsuz uzunlukta homogen (ya da homogen olmayan) bir silindirde saçılan elektromanyetik dalga problemi göz önüne alınsın.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3$ olmak üzere sonsuz uzunluktaki silindirin eksenini x_3 eksenine doğrultusunda kabul edilsin. Silindirin yüzeyi, silindirin eksenini boyunca kesit çizgilerinden oluşsun. Yani; kesit çizgisinin şekli ve boyutu silindirin eksenini boyunca sabittir. O zaman $E(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$ ve $H(x) = (H_1(x), H_2(x), H_3(x))$ alanları x_3 den bağımsızdır.

Eğer ortam homogen ise [2.24] Maxwell denklemleri

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1} = -ikH_2, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = ikH_1, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -ikE_3 \quad [2.27]$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_1} = ikE_2, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = -ikE_1, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = ikH_3 \quad [2.28]$$

şeklinde iki gruba indirgenir. [2.27] deki denklemler $H_1(x)$, $H_2(x)$ ve $E_3(x)$ leri, [2.28] deki denklemler $E_1(x)$, $E_2(x)$ ve $H_3(x)$ leri içerir. e_{x_1} , e_{x_2} , e_{x_3} ler sırasıyla x_1 , x_2 , x_3 doğrultusundaki birim vektörler olsun. Eğer $H_1(x)$, $H_2(x)$ ve $E_3(x)$ ler [2.27] yi sağlıyor ise, $E(x) = E_3(x)e_{x_3}$ ve $H(x) = H_1(x)e_{x_1} + H_2(x)e_{x_2}$ ler x_3 eksenine dikey polarize edilmiş bir elektromanyetik dalgayı sağlar. Buna saçılma teorisinde *transverse (enine) manyetik* veya *TM modu* denir. Yani; olay dalga, silindirin eksenine dik polarize edilir ve elektrik alan, silindirin eksenine doğrultusunda sadece bir bileşene sahiptir. Benzer şekilde; $E_1(x)$, $E_2(x)$ ve $H_3(x)$ ler [2.28] i sağlıyor ise, $E(x) = E_1(x)e_{x_1} + E_2(x)e_{x_2}$ ve $H(x) = H_3(x)e_{x_3}$ ler x_3 eksenine paralel polarize edilmiş bir elektromanyetik dalgayı sağlar. Buna da saçılma teorisinde *transverse (enine) elektrik* ya da *TE modu* denir. Burada ise; olay dalga, silindirin eksenine paralel polarize edilir ve manyetik alan, silindirin eksenine doğrultusunda sadece bir bileşene sahiptir.

[2.27] den $E_3(x)$, Helmholtz denklemini sağlar ve $E_3(x)$ belirlenebilirse $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ ler de bulunur. Burada $E_1(x) = E_2(x) = H_3(x) = 0$ olur. Benzer şekilde, [2.28] den $H_3(x)$, Helmholtz denklemini sağlar ve $H_3(x)$ belirlendikten sonra $E_1(x)$ ve $E_2(x)$ ler bulunur. Burada ise $H_1(x) = H_2(x) = E_3(x) = 0$ olur. Böylece $E(x)$ ve $H(x)$ in bulunması problemi, $E_3(x)$ ve $H_3(x)$ için Helmholtz denkleminin çözümü problemine indirgenir. Ayrıca, [2.26] Silver-Müller yayılma koşulunu sağlayan $E^s(x)$, $H^s(x)$ ler için $E_3^s(x)$ ve $H_3^s(x)$ ler de Sommerfeld yayılma koşulunu sağlamalıdır (12).

Eğer ortam homogen değil ise, [2.22] Maxwell denklemleri de yukarıda bahsedilen homogen ortamdaki uygulanan yöntemle,

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1} = -ikH_2, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = ikH_1, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -ikn(x)E_3 \quad [2.29]$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_1} = ikn(x)E_2, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = -ikn(x)E_1, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = ikH_3 \quad [2.30]$$

şeklinde iki gruba indirgenir.



3. HOMOGEN OLMAYAN BİR ORTAMDAN YAYILAN TE BİÇİMİNDE POLARİZE EDİLMİŞ ELEKTROMANYETİK DALGALAR İÇİN SAÇILMA PROBLEMİ

3.1.Problemin Ortaya Konulması

Sonsuz uzunlukta homogen olmayan bir silindirde yayılan elektromanyetik dalgalar göz önüne alınsın. Elektromanyetik dalgalar 2.4.1 de tanımlanan *Maxwell denklemleri* ile elde edilir.

Eğer dalga zaman harmonik ise, saçılma

$$\nu \times H_0 = \nu \times H, \quad x \in \partial D \quad [3.1]$$

$$\nu \times \text{curl} E_0 + \frac{k}{\lambda} (\nu \times E_0) \times \nu = \frac{1}{n_0} (\nu \times \text{curl} E) + \frac{k}{\lambda} (\nu \times E) \times \nu, \quad x \in \partial D \quad [3.2]$$

olmak üzere

$$\text{curl} E_0 - ikH_0 = 0 \quad \text{curl} H_0 + ikE_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad [3.3]$$

$$\text{curl} E - ikH = 0 \quad \text{curl} H + ikn(x)E = 0, \quad x \in D \quad [3.4]$$

zaman harmonik Maxwell denklemleri ile tanımlanır. Burada $k > 0$ pozitif dalga sayısıdır. (E_0, H_0) ve (E, H) lar sırasıyla silindirin dışındaki ve içindeki elektromanyetik alanlardır. Ayrıca $\lambda \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ ve $\text{Im } \lambda \geq 0$ olsun. $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi silindirin eksenine dik düzlemlerle kestirilerek elde edilen bölge ve D nin ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun. ν , ∂D üzerindeki birim dış normaldir. $n(x)$ ise,

$$n(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon(x) + \frac{i\sigma(x)}{w} \right) \quad [3.5]$$

biçiminde tanımlanmış kırılma indisidir. Burada $\varepsilon_0, IR^2 \setminus \overline{D}$ da saçılmanın yalıtkanlık sabitidir. $\varepsilon(x)$ ve $\sigma(x)$ ler sırasıyla silindirin yalıtkanlık ve iletkenliğidir. w ise frekansıdır. $n(x)$ aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(i) \ n(x) \in C^2(IR^2) \text{ ve } x \in IR^2 \setminus D \text{ için } n(x) = n_0 > 1 \text{ ve } \text{Im } n_0 = 0 \text{ olsun.} \quad [3.5.a]$$

$$(ii) \ \text{Im } n(x) \geq 0 \text{ ve } D_0 = \{x \in D : \text{Im } n(x) > 0\} \text{ boş olmasın.} \quad [3.5.b]$$

Elektromanyetik dalgalar TE biçiminde polarize edildiği için 2.4.2 den $H_0 = (H_{0_1}, H_{0_2}, H_{0_3}) = (0, 0, H_{0_3}) = (0, 0, u_0), H = (H_1, H_2, H_3) = (0, 0, H_3) = (0, 0, u)$ olacak şekilde u_0 ve u skaler alanları ortaya çıkar. [2.28] ve [2.30] denklem gruplarından, [3.3] ve [3.4] Maxwell denklemleri ile [3.1] ve [3.2] sınır koşulları

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in IR^2 \setminus \overline{D} \quad [3.6]$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D \quad [3.7]$$

$$u_0 - u = 0, \quad x \in \partial D \quad [3.8]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = 0, \quad x \in \partial D \quad [3.9]$$

sınır – değer problemini sağlar. u_0 dış alanı

$$u_0(x) = e^{ikx \cdot d} + u^s(x), \quad [3.10]$$

formunda yazılabilir. Burada $d \in \Omega = \{x \in IR^2 : |x| = 1\}$ ve $e^{ikx \cdot d}$ olay dalgadır. $u^s(x)$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad r = |x| \quad [3.11]$$

Sommerfeld yayılma şartını sağlar. *Teorem 2.3.1* den u^s saçılan alanı $r=|x| \rightarrow \infty$ iken

$$u^s(x) = u_\infty(\hat{x}, d) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + O\left(r^{-3/2}\right), \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|} \quad [3.12]$$

asimptotik davranışa sahiptir. Burada, u_∞ uzak – alan modelidir.

3.2.Direkt Saçılma Probleminin Tanımlanması

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde zaman harmonik dalgaların saçılmasını aşağıdaki sınır - değer problemi ile oluşturalım. Bu problem, $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ ve $\lambda, g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ için sınır koşulları

$$u_0 - u = f, \quad x \in \partial D \quad [3.13]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = g, \quad x \in \partial D \quad [3.14]$$

olmak üzere

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad [3.15]$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D \quad [3.16]$$

denklemlerini sağlayan $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ve $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonlarının bulunmasıdır. Burada ν , ∂D üzerindeki birim dış normaldir. n_0 ve n ler [3.5.a] ve [3.5.b] ile tanımlanmıştır. u_0

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} - iku_0 \right) = 0, \quad r = |x| \quad [3.17]$$

Sommerfeld yayılma koşulunu sağlar. Ayrıca, D nin sınırı üzerinde $\text{Im } \lambda \geq 0$ olsun.

3.3.Çözümün Tekliği ve Varlığı

Teorem 3.3.1

[3.13] – [3.17] sınır - değer probleminin en çok bir çözümü vardır.

İspat

[3.13] – [3.17] sınır - değer probleminin çözümü tek olmasın.

$u_{0_1}, u_{0_2} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ve $u_1, u_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ fonksiyonları

[3.13] – [3.17] probleminin çözümleri olsun. $u_0 = u_{0_1} - u_{0_2}$ ve $u = u_1 - u_2$ diyelim. Bu durumda u_0 ve u fonksiyonları

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \quad [3.18]$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D \quad [3.19]$$

$$u_0 - u = 0, \quad x \in \partial D \quad [3.20]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = 0, \quad x \in \partial D \quad [3.21]$$

homogen sınır - değer problemini sağlar. İlk önce

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} |u_0|^2 ds = 0 \quad [3.22]$$

olduğunu gösterelim. Burada ds yay uzunluğudur. Ω_r , orjin merkezli ve r yarıçaplı bir çember olsun.

$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - iku_0 \right|^2 = \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} \right) + k^2 |u_0|^2$$

Ω_r üzerinden integralini alalım.

$$\int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - iku_0 \right|^2 ds = \int_{\Omega_r} \left[\left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} \right) + k^2 |u_0|^2 \right] ds$$

$r \rightarrow \infty$ iken limit alırsak, [3.17] yayılma şartından

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega_r} \left[\left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u_0|^2 \right] ds + 2k \operatorname{Im} \int_{\Omega_r} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds \right\} = 0 \quad [3.23]$$

olur. Yeterince büyük r alalım öyle ki $D \subset \Omega_r$ dir. $D_r = \{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} : |y| < r\}$ bölgesine Birinci Green Teoremini (6) uygulayalım.

$$\int_{D_r} \left[u_0 \Delta \bar{u}_0 + |\operatorname{grad} u_0|^2 \right] dy = \int_{\partial D_r} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y)$$

$$\int_{D_r} -k^2 |u_0|^2 dy + \int_{D_r} |\operatorname{grad} u_0|^2 dy = - \int_{\Omega_r} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y) + \int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y)$$

Eşitliğin her iki tarafını imajinerini alıp, $2k$ ile çarpalım.

$$2k \operatorname{Im} \int_{\Omega_r} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds = 2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds$$

ifadesini [3.23] de yerine yazarsak,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left[\left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u_0|^2 \right] ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds \quad [3.24]$$

olur. Şimdi $u \left(\frac{1}{\bar{n}} \nabla \bar{u} \right)$ fonksiyonuna Divergens Teoremini (12) uygulayalım.

$$\int_D \operatorname{div} \left[u \left(\frac{1}{\bar{n}} \nabla \bar{u} \right) \right] dy = \int_{\partial D} u \frac{1}{\bar{n}} \nabla \bar{u} \cdot \nu ds(y)$$

$$\int_D \left[-k^2 |u|^2 + \frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 \right] dy = \int_{\partial D} u \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y)$$

[3.5.a] şartı ve [3.20] ve [3.21] homogen sınır koşullarından

$$\int_D \left[-k^2 |u|^2 + \frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 \right] dy = \int_{\partial D} \left[u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} + \bar{\lambda} k |u_0|^2 - \frac{\bar{\lambda} k}{n_0} |u_0|^2 \right] ds(y)$$

olur. Bu eşitliğin imajinerini alalım.

$$\operatorname{Im} \int_D \frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 dy = \operatorname{Im} \int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y) + \operatorname{Im} \int_{\partial D} \left(1 - \frac{1}{n_0} \right) \bar{\lambda} k |u_0|^2 ds(y) \quad [3.25]$$

Sol taraftaki integralli ifadedeki $\operatorname{Im} \frac{1}{\bar{n}}$ ni inceleyelim : [3.5.b] den

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\bar{n}} = \operatorname{Im} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon - \frac{i\sigma}{w} \right)} = \operatorname{Im} \frac{\varepsilon_0 n}{\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{w^2} \right)} \geq 0$$

olur. Bu durumda [3.25] deki eşitliğin sol tarafı ≥ 0 olur. ∂D üzerinde $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$

olduğundan $\operatorname{Im} \bar{\lambda} \leq 0$ olur. Ayrıca [3.5.a] dan $1 - \frac{1}{n_0} > 0$ olur. Bu durumda [3.25]

deki eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integral de ≤ 0 olur. Bu nedenle

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y) \geq 0$$

olur. Böylece, [3.24]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left[\left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u_0|^2 \right] ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds \leq 0$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafı negatif olmadığından [3.22] sağlanmış olur. *Lemma 2.2.5*

den $IR^2 \setminus \bar{D}$ da $u_0 = 0$ olur. *Teorem 2.2.6* dan ise $IR^2 \setminus D$ de $u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0$ olur.

[3.20] ve [3.21] homogen sınır koşullarından ∂D üzerinde $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ olur. *Teorem*

2.2.7 den D de $u = 0$ olur. Böylece [3.13] – [3.17] sınır - değer probleminin çözümü tektir.

[3.13] – [3.17] probleminin çözümünün varlığını göstermek için, *Teorem 2.1.3*, *Sonuç 2.1.4* ve *Sonuç 2.1.5* i kullanacağız.

$u(x) = \sqrt{n(x)}w(x)$ dönüşümü ile [3.13] – [3.17] problemi

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad [3.26]$$

$$\Delta w + (k^2 n + q) w = 0, \quad x \in D \quad [3.27]$$

$$u_0 - \sqrt{n_0} w = f, \quad x \in \partial D \quad [3.28]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}} w \right) = g, \quad x \in \partial D \quad [3.29]$$

halini alır. Burada u_0 , [3.17] yayılma şartını sağlar ve

$$q(x) = -\sqrt{n(x)} \Delta \frac{1}{\sqrt{n(x)}} \quad [3.30]$$

dir. O zaman $\psi, \phi \in C(\partial D)$ ve $\psi_1 \in C(D)$ için

$$u_0(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + \Phi_0(x, y) \phi(y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad [3.31]$$

ve

$$w(x) = \int_{\partial D} \left[\sqrt{n_0} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + \Phi(x, y) \phi(y) \right] ds(y) + \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad [3.32]$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada

$$p(x) = k^2 n_0 - [k^2 n(x) + q(x)] \quad [3.33]$$

dir. $x \neq y$ için $\Phi_0(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$ ve $\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \sqrt{n_0}|x-y|)$

fonksiyonları sırasıyla

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 \quad [3.34]$$

ve

$$\Delta u + k^2 n_0 u = 0 \quad [3.35]$$

Helmholtz denklemlerinin temel çözümleridir. [3.31] de tanımlanan u_0 fonksiyonu [3.26] denklemini ve [3.17] yayılma şartını sağlar. [3.32] de tanımlanan w fonksiyonu [3.27] denklemini sağlar. Ayrıca u_0 ve w fonksiyonları [3.28] ve [3.29] sınır koşullarını da sağlarlar. Son olarak aşağıdaki integral operatörlerini verelim:

$$K : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(K\psi)(x) = 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad [3.36]$$

$$S : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(S\phi)(x) = 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad [3.37]$$

$$T : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(T\psi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad [3.38]$$

$$K' : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(K'\phi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad [3.39]$$

$$\tilde{K} : C(\partial D) \rightarrow C(D)$$

$$(\tilde{K}\psi)(x) = 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in D \quad [3.40]$$

$$\tilde{S}: C(\partial D) \rightarrow C(D)$$

$$(\tilde{S}\phi)(x) = 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in D \quad [3.41]$$

$$S_p: C(D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(S_p \psi_1)(x) = 2 \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy, \quad x \in \partial D \quad [3.42]$$

$$K'_p: C(D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(K'_p \psi_1)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy, \quad x \in \partial D \quad [3.43]$$

$$\tilde{S}_p: C(D) \rightarrow C(D)$$

$$(\tilde{S}_p \psi_1)(x) = 2 \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy, \quad x \in D \quad [3.44]$$

K_0, S_0, T_0 ve K'_0 ler Φ_0 ile Φ nin yer değiştirmesiyle K, S, T ve K' lere karşılık gelsin.

Teorem 3.3.2

[3.26] – [3.30] sınır - değer probleminin çözümleri olan u_0 ve w fonksiyonlarının sırasıyla $IR^2 \setminus \bar{D}$ ve D ye kısıtlanmış halleri göz önüne alınsın. [3.31] ve [3.32] deki ψ, ϕ ve ψ_1 fonksiyonları, sınır üzerinde

$$(K_0 - n_0 K) \psi + (1 + n_0) \psi + (S_0 - \sqrt{n_0} S) \phi - \sqrt{n_0} S_p \psi_1 = 2f \quad [3.45]$$

$$(T_0 - T) \psi + \left(K'_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}} K' \right) \phi - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \right) \phi - \frac{1}{\sqrt{n_0}} K'_p \psi_1$$

$$+\lambda k \left[(K_0 - K)\psi + \left(S_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}} S \right) \phi + 2\psi - \frac{1}{\sqrt{n_0}} S_p \psi_1 \right] = 2g \quad [3.46]$$

ve D de

$$\sqrt{n_0} \tilde{K} \psi + \tilde{S} \phi + \tilde{S}_p \psi_1 - 2\psi_1 = 0 \quad [3.47]$$

operatör denklemlerini sağlar. Burada $\psi, \phi \in C(\partial D)$ ve $\psi_1 \in C(D)$ dir.

İspat

Teorem 2.1.10 dan ve [3.36] – [3.44] operatörlerinden faydalanacağız. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ a [3.31] deki u_0 fonksiyonunu ve D ye [3.32] deki w fonksiyonunu kısıtlayalım.

[3.45] denklemini elde etmek için [3.31] de tanımlanan u_0 fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$u_0^+(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \frac{1}{2} \psi(x) + \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \phi(y) ds(y) \quad [3.48]$$

olur. [3.32] de tanımlanan w fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$\begin{aligned} w^-(x) = \sqrt{n_0} \left[\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) - \frac{1}{2} \psi(x) \right] + \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y) \\ + \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy \end{aligned} \quad [3.49]$$

olur. [3.48] ve [3.49] değerlerini [3.28] sınır koşulunda yerlerine yazdığımızda [3.36], [3.37] ve [3.42] operatörlerinden

$$2f(x) = (K_0\psi)(x) + \psi(x) + (S_0\phi)(x) - n_0(K\psi)(x) + n_0\psi(x) - \sqrt{n_0}(S\phi)(x) \\ - \sqrt{n_0}(S_p\psi_1)(x)$$

elde ederiz. Bu durumda $\forall x \in \partial D$ için [3.45] denklemi sağlanmış olur.

[3.46] denklemini elde etmek için [3.31] de tanımlanan $u_0(x)$ fonksiyonunu $v(x)$ doğrultusundaki türevini alalım.

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$$

türev fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \phi(y) ds(y) - \frac{1}{2} \phi(x) \quad [3.50]$$

olur. [3.32] de tanımlanan w fonksiyonunun $v(x)$ doğrultusundaki türevini alalım.

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = \sqrt{n_0} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y) \\ + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy, \quad x \in D$$

türev fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^-}{\partial \nu}(x) = & \sqrt{n_0} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y) \\
& + \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy
\end{aligned} \quad [3.51]$$

olur. [3.48] – [3.51] değerlerini [3.29] sınır koşulunda yerlerine yazdığımızda [3.36] – [3.39], [3.42] – [3.43] operatörlerinden

$$\begin{aligned}
2g(x) = & (T_0 \psi)(x) + (K'_0 \phi)(x) - \phi(x) - (T \psi)(x) - \frac{(K' \phi)(x)}{\sqrt{n_0}} - \frac{\phi(x)}{\sqrt{n_0}} - \frac{(K'_p \psi_1)(x)}{\sqrt{n_0}} \\
& + \lambda(x) k \left[(K_0 \psi)(x) + \psi(x) + (S_0 \phi)(x) - (K \psi)(x) + \psi(x) - \frac{(S \phi)(x)}{\sqrt{n_0}} - \frac{(S_p \psi_1)(x)}{\sqrt{n_0}} \right]
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda $\forall x \in \partial D$ için [3.46] denklemi sağlanmış olur.

[3.47] denklemini elde etmek için [3.32] de tanımlanan w fonksiyonunu [3.40], [3.41] ve [3.44] operatörleri cinsinden yazalım.

$$2w(x) = \sqrt{n_0} (\tilde{K} \psi)(x) + (\tilde{S} \phi)(x) + (\tilde{S}_p \psi_1)(x), \quad [3.52]$$

$w(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ve $\psi_1(x) \in C(D)$ olduğundan

$$w(x) = \psi_1(x) \quad [3.53]$$

yazabiliriz. [3.53] ü [3.52] de yerine yerleştirdiğimizde $\forall x \in D$ için [3.47] denklemini elde etmiş oluruz.

[3.45] ve [3.47] denklemleri

$$[A+B] \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f \\ 2g \\ 0 \end{bmatrix} \quad [3.54]$$

operatör notasyonunda yazabilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} (1+n_0)I & 0 & 0 \\ 2\lambda kI & -\left(1+\frac{1}{\sqrt{n_0}}\right)I & 0 \\ 0 & 0 & -2I \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} K_0 - n_0 K & S_0 - \sqrt{n_0} S & -\sqrt{n_0} S_p \\ (T - T_0) + \lambda k (K_0 - K) & \left(K'_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}} K'\right) + \lambda k \left(S_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}} S\right) & -\frac{1}{\sqrt{n_0}} (K'_p + \lambda k S_p) \\ \sqrt{n_0} \tilde{K} & \tilde{S} & \tilde{S}_p \end{bmatrix}$$

dir.

A operatörü sınırlı bir terse sahiptir (32). B matrisindeki integral operatörler *Tanım 2.1.7* den zayıf singüler operatörlerdir. Zayıf singüler operatörler kompakt olduğundan B, $C(\partial D) \times C(\partial D) \times C(D)$ uzayında kompaktır (5). $A+B$ operatörünün bire-bir olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlayabiliriz.

Teorem 3.3.3

[3.13] – [3.17] sınır – değer probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat

İspat için [3.26] – [3.29] problemini ele almak yeterlidir. *Teklik teoremi 3.3.1* den $f = g = 0$ ise $IR^2 \setminus \bar{D}$ da $u_0 = 0$ ve D de $u = 0$ olur. $u = \sqrt{n}w$ olduğundan D de $w = 0$ olur. Burada u_0 ve w fonksiyonları sırasıyla [3.31] ve [3.32] ile tanımlanmıştır. [3.47] de $\sqrt{n_0}\tilde{K}\psi + \tilde{S}\phi + \tilde{S}_p\psi_1 = 2w$ dir. Dolayısıyla, $x \in D$ için $w - \psi_1 = 0$ olur. D de $w = 0$ olduğundan $\psi_1 = 0$ olur. Böylece [3.45] ve [3.46] denklemleri sırasıyla

$$(K_0 - n_0K)\psi + (1 + n_0)\psi + (S_0 - \sqrt{n_0}S)\phi = 0, \quad [3.55]$$

$$(T - T_0)\psi + \left(K'_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}}K'\right)\phi - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}\right)\phi + \lambda k \left[(K_0 - K)\psi + \left(S_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}}S\right)\phi + 2\psi\right] = 0 \quad [3.56]$$

denklemlerine indirgeriz. *Teorem 2.1.10* daki sıçrama şartlarından

$$u_0^+ - u_0^- = \psi \quad \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} = -\phi, \quad x \in \partial D \quad [3.57]$$

$$w^+ - w^- = \sqrt{n_0}\psi \quad \frac{\partial w^+}{\partial \nu} - \frac{\partial w^-}{\partial \nu} = -\phi, \quad x \in \partial D \quad [3.58]$$

elde ederiz. $IR^2 \setminus \bar{D}$ da $u_0 = 0$ ve D de $w = 0$ olduğundan $u_0^+ = \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} = w^- = \frac{\partial w^-}{\partial \nu} = 0$

olur. Bu durumda [3.57] ve [3.58] denklemleri sırasıyla

$$u_0^- = -\psi \quad \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} = \phi \quad [3.59]$$

$$w^+ = \sqrt{n_0}\psi \quad \frac{\partial w^+}{\partial \nu} = -\phi \quad [3.60]$$

denklemlerine indirgendiğinden

$$u_0^- + \frac{1}{\sqrt{n_0}} w^+ = 0 \quad \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} + \frac{\partial w^+}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial D \quad [3.61]$$

elde edilir. Divergens Teoreminden ve (3.61) den

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} w^+ \frac{\partial \overline{w^+}}{\partial \nu} ds = \operatorname{Im} \sqrt{n_0} \int_{\partial D} u_0^- \frac{\partial \overline{u_0^-}}{\partial \nu} ds = 0$$

olur. [3.5.a] ve [3.30] dan $IR^2 \setminus \overline{D}$ da $q=0$ olduğundan w fonksiyonu $IR^2 \setminus \overline{D}$ de Helmholtz denklemini sağlar. Ayrıca Φ fonksiyonu yayılma şartını sağladığı için w fonksiyonu da yayılma şartını sağlar. Tanım 2.2.3 den $IR^2 \setminus \overline{D}$ da w , Helmholtz denkleminin yayılan çözümü olduğundan, Lemma 2.2.5 den $IR^2 \setminus \overline{D}$ da $w=0$ ve dolayısıyla $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ olur. Böylece ∂D da $w^+ = \frac{\partial w^+}{\partial \nu} = 0$ olduğundan [3.61] den $u_0^- = \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} = 0$ olur. [3.59] ve [3.60] dan $\psi = \phi = 0$ elde ederiz. [3.54] e ilişkin homogen problemde $\psi = \phi = \psi_1 = 0$ olduğundan $A+B$ bire-birdir (29).

B kompakt ve $A+B$ bire-bir olduğundan Teorem 2.1.3, Sonuç 2.1.4 ve Sonuç 2.1.5 den [3.54] homogen olmayan problemin tek bir ψ, ϕ, ψ_1 çözümü vardır. Böylece [3.26] – [3.29] sınır - değer probleminin tek çözümü mevcuttur.

4. İÇ SINIR DEĞER PROBLEMİ

4.1. Problemin Tanımlanması

İç sınır - değer problemi, $k > 0$ dalga sayısı olmak üzere $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi için

$$u_0 - u = f, \quad x \in \partial D \quad [4.1]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = g, \quad x \in \partial D \quad [4.2]$$

sınır koşulları sağlanmak üzere

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in D \quad [4.3]$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D \quad [4.4]$$

denklemlerini sağlayan $u_0, u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonlarının bulunmasıdır. Burada f, g ve λ fonksiyonları bir önceki bölümdeki gibi tanımlansın. n_0 ve n ler sırasıyla [3.5.a] ve [3.5.b] şartlarını sağlasın. ∂D sınırı C^2 sınıfından ve ν de sınır üzerinde birim dış normal olsun.

4.2. Çözümün Tekliği ve Varlığı

Teorem 4.2.1

Eğer $D_0 = \{x \in D : \text{Im } n(x) > 0\}$ kümesi boş değil ise [4.1] – [4.4] iç sınır değer probleminin en çok bir çözümü vardır.

İspat

Kabul edelim ki [4.1] – [4.4] sınır - değer probleminin çözümü tek olmasın. Bu durumda $x \in \partial D$ için $u_0, u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonları homogen sınır koşullarını sağlar. Böylece u_0 ve u fonksiyonları homogen iç sınır - değer probleminin çözümüdür.

Homogen problemi ele alalım (yani; $f = g = 0$). $\bar{u} \left(\frac{1}{n} \nabla u \right)$ fonksiyonuna Divergens Teoremini uyguladığımızda

$$\int_D \left[\frac{1}{n} |\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \right] dy = \int_{\partial D} \bar{u} \frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(y)$$

olur. [3.5.a] ve homogen sınır koşullarından

$$\int_D \left[\frac{1}{n} |\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \right] dy = \int_{\partial D} \bar{u}_0 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} ds(y) + \int_{\partial D} \lambda k \left(1 - \frac{1}{n_0} \right) |u_0|^2 ds(y) \quad [4.5]$$

olur. Green Teoremi ve [4.3] denklemden

$$\int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y) = \int_{\partial D} \bar{u}_0 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} ds(y) \quad [4.6]$$

elde ederiz. Tekrar [3.5.a] şartı ve homogen sınır koşullarını kullanarak Divergens Teoremini uyguladığımızda

$$\int_{\partial D} u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} ds(y) = \int_{\partial D} u_0 \left[\frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) \right] ds(y)$$

$$= \int_D \left[\frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \right] dy - \int_{\partial D} \left(1 - \frac{1}{n_0} \right) \bar{\lambda} k |u_0|^2 ds(y) \quad [4.7]$$

olur. [4.6] ve [4.7] yi sırasıyla [4.5] de yerlerine yerleştirdiğimizde

$$\int_D \left[\frac{1}{n} |\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \right] dy = \int_D \left[\frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 \right] dy + \int_{\partial D} \left(1 - \frac{1}{n_0} \right) (\lambda - \bar{\lambda}) k |u_0|^2 ds(y) \quad [4.8]$$

elde ederiz. [4.8] in imajinerini aldığımızda

$$\operatorname{Im} \int_D \frac{1}{n} |\nabla u|^2 dy = \operatorname{Im} \int_D \frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 dy + \operatorname{Im} \int_{\partial D} \left(1 - \frac{1}{n_0} \right) (\lambda - \bar{\lambda}) k |u_0|^2 ds(y) \quad [4.9]$$

olur. $\operatorname{Im} \frac{1}{n} \leq 0$ olduğundan [4.9] daki eşitliğin sol tarafı ≤ 0 olur. $\operatorname{Im} \frac{1}{\bar{n}} \geq 0$ olduğundan [4.9] daki eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral ≥ 0 olur. [3.5.a] şartından ve $\operatorname{Im}(\lambda - \bar{\lambda}) \geq 0$ olduğundan [4.9] eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integralde ≥ 0 olur. Böylece

$$\operatorname{Im} \int_D \frac{1}{\bar{n}} |\nabla u|^2 dy = 0 \quad [4.10]$$

olur. $D_0 \subset D$ ve D_0 da $\operatorname{Im} \frac{1}{\bar{n}} > 0$ olduğundan $|\nabla u|^2 = 0$ olur ki buradan $\nabla u = 0$ olduğunu görürüz. u fonksiyonu D içinde [4.4] denklemini sağladığı için D de $u = 0$ olur. Bu durumda *Teorem 2.2.7* den $\forall x \in D$ nin komşuluğunda ve dolayısıyla ∂D de $u = 0$ olur ki ∂D de $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ olur. Üstelik u_0 , D de [4.3] denklemini

sağladığı için [2.2] Helmholtz gösterimi ve homogen sınır koşullarından D de $u_0 = 0$ olur. Böylece [4.1] – [4.4] sınır - değer probleminin çözümü tektir.

[4.1] – [4.4] probleminin çözümünün varlığı *Teorem 3.3.2* ve *Teorem 3.3.3* ün ispatlarına benzer şekilde kanıtlanabilir. Üçüncü bölümdeki gibi $u(x) = \sqrt{n(x)} w(x)$ dönüşümü ile [4.1] – [4.4] iç sınır değer problemi

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in D \quad [4.11]$$

$$\Delta w + (k^2 n + q)w = 0, \quad x \in D \quad [4.12]$$

$$u_0 - \sqrt{n_0} w = f, \quad x \in \partial D \quad [4.13]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{\sqrt{n_0}} w \right) = g, \quad x \in \partial D \quad [4.14]$$

şeklini alır. q fonksiyonu [3.30] da tanımlanmıştır. Şimdi $\psi, \phi \in C(\partial D)$ ve $\psi_1 \in C(D)$ için

$$u_0(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + \Phi_0(x, y) \phi(y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad [4.15]$$

$$w(x) = \int_{\partial D} \left[\sqrt{n_0} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) - \Phi(x, y) \phi(y) \right] ds(y) + \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy,$$

$$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad [4.16]$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Buradaki p , [3.33] de tanımlanan fonksiyondur.

Teorem 4.2.2

[4.11] – [4.14] iç sınır değer probleminin çözümleri olan u_0 ve w fonksiyonlarının D bölgesine kısıtlanmış halleri göz önüne alınsın. [4.15] ve [4.16] daki ψ, ϕ ve ψ_1 fonksiyonları, sınır üzerinde

$$(K_0 - n_0 K)\psi - (1 - n_0)\psi + (S_0 + \sqrt{n_0}S)\phi - \sqrt{n_0}S_p\psi_1 = 2f \quad [4.17]$$

$$\begin{aligned} (T_0 - T)\psi + \left(K'_0 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}K'\right)\phi + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}\right)\phi - \frac{1}{\sqrt{n_0}}K'_p\psi_1 \\ + \lambda k \left[(K_0 - K)\psi + \left(S_0 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}S\right)\phi - \frac{1}{\sqrt{n_0}}S_p\psi_1 \right] = 2g \end{aligned} \quad [4.18]$$

ve D de

$$\sqrt{n_0}\tilde{K}\psi - \tilde{S}\phi + \tilde{S}_p\psi_1 - 2\psi_1 = 0 \quad [4.19]$$

operatör denklemlerini sağlar. Burada $\psi, \phi \in C(\partial D)$ ve $\psi_1 \in C(D)$ dir.

İspat

Teorem 2.1.10 dan ve [3.36] – [3.44] operatörlerinden faydalanacağız. [4.15] de tanımlanan u_0 fonksiyonu ve [4.16] da tanımlanan w fonksiyonunu D ye kısıtlayalım.

[4.17] denklemini elde etmek için u_0 fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$u_0^-(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) - \frac{1}{2} \psi(x) + \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \phi(y) ds(y) \quad [4.20]$$

olur. w fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$w^-(x) = \sqrt{n_0} \left[\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) - \frac{1}{2} \psi(x) \right] - \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y) + \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy \quad [4.21]$$

olur. [4.20] ve [4.21] değerlerini [4.13] sınır koşulunda yerlerine yazdığımızda [3.36], [3.37] ve [3.42] operatörlerinden [4.17] denklemini elde ederiz.

[4.18] denklemini elde etmek için $u_0(x)$ fonksiyonunu $\nu(x)$ doğrultusundaki türev fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$\frac{\partial u_0^-}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \phi(y) ds(y) + \frac{1}{2} \phi(x) \quad [4.22]$$

olur. $w(x)$ fonksiyonun $\nu(x)$ doğrultusundaki türev fonksiyonu ise $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$\frac{\partial w^-}{\partial \nu}(x) = \sqrt{n_0} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) - \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y) - \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_D \Phi(x, y) p(y) \psi_1(y) dy \quad [4.23]$$

olur. [4.20] – [4.23] değerlerini [4.14] sınır koşulunda yerlerine yazdığımızda [3.36] – [3.39], [3.42] – [3.43] operatörlerinden [4.18] denklemini elde ederiz.

[4.19] denklemini elde etmek için w fonksiyonunu [3.40], [3.41] ve [3.44] operatörleri cinsinden yazdığımızda

$$2w(x) = \sqrt{n_0}(\tilde{K}\psi)(x) - (\tilde{S}\phi)(x) + (\tilde{S}_p\psi_1)(x) \quad [4.24]$$

olur. $w(x) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ve $\psi_1(x) \in C(D)$ olduğundan

$$w(x) = \psi_1(x) \quad [4.25]$$

yazabiliriz. [4.25] i [4.24] de yazdığımızda [4.19] denklemini elde etmiş oluruz.

Teorem 4.3.3

[4.1] – [4.4] iç sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat

[4.11] – [4.14] problemini ele alalım. *Teklik teoremi 4.3.1* den $f = g = 0$ ise D de $u_0 = w = 0$ olur. Buradaki u_0 ve w fonksiyonları sırasıyla [4.15] ve [4.16] ile tanımlanmıştır. [4.19] da $\sqrt{n_0}\tilde{K}\psi - \tilde{S}\phi + \tilde{S}_p\psi_1 = 2w$ olduğundan $w - \psi_1 = 0$ olur. D de $w = 0$ olduğu için $\psi_1 = 0$ olur. Böylece [4.17] ve [4.18] denklemleri

$$(K_0 - n_0K)\psi - (1 - n_0)\psi + (S_0 + \sqrt{n_0}S)\phi = 0 \quad [4.26]$$

$$(T_0 - T)\psi + \left(K'_0 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}K'\right)\phi + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}\right)\phi + \lambda k \left[(K_0 - K)\psi + \left(S_0 + \frac{1}{\sqrt{n_0}}S\phi\right)\right] = 0$$

[4.27]

denklemlerine indirgenir. u_0 ve w fonksiyonlarına sıçrama şartlarını uyguladığımızda

$$u_0^+ - u_0^- = \psi \quad \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} = -\phi, \quad x \in \partial D \quad [4.28]$$

$$w^+ - w^- = \sqrt{n_0} \psi \quad \frac{\partial w^+}{\partial \nu} - \frac{\partial w^-}{\partial \nu} = \phi, \quad x \in \partial D \quad [4.29]$$

elde ederiz. D de $u_0 = w = 0$ olduğundan $u_0^- = \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} = w^- = \frac{\partial w^-}{\partial \nu} = 0$ olur. Bu durumda [4.28] ve [4.29]

$$u_0^+ = \psi \quad \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} = -\phi \quad [4.30]$$

$$w^+ = \sqrt{n_0} \psi \quad \frac{\partial w^+}{\partial \nu} = \phi \quad [4.31]$$

denklemlerine indirgendiğinden

$$u_0^+ - \frac{1}{\sqrt{n_0}} w^+ = 0 \quad \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} + \frac{\partial w^+}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial D \quad [4.32]$$

elde edilir. [3.5.a] dan n_0 pozitif reel olduğundan

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u_0^+ \frac{\overline{\partial u_0^+}}{\partial \nu} ds = -\frac{1}{\sqrt{n_0}} \operatorname{Im} \int_{\partial D} v^+ \frac{\overline{\partial v^+}}{\partial \nu} ds \quad [4.33]$$

olur. [4.33] deki integraller negatif değildir. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ için u_0 ve w fonksiyonları Helmholtz denkleminin yayılan çözümleri olduklarından *Lemma 2.2.5* den $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ da $u_0 = 0$ veya $w = 0$ olur. Böylece ∂D da $u_0^+ = \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} = 0$ veya $w^+ = \frac{\partial w^+}{\partial \nu} = 0$ olur.

[4.30] ve [4.31] den $\psi = \phi = 0$ elde edilir. *Teorem 2.1.3*, *Sonuç 2.1.4* ve *Sonuç 2.1.5* den dolayı [4.11] – [4.14] iç sınır değer probleminin tek çözümü vardır.



5. TERS SAÇILMA PROBLEMİ İÇİN BASİT METODUN FORMÜLE EDİLMESİ

Bu bölümde amacımız, [3.6] – [3.11] denklemleri ile tanımlanan ters saçılma probleminin çözümü için Colton ve Kirsch (21) tarafından önerilen lineer örnekleme metodunu (basit metodu) formüle etmektir. [2.7] de tanımlanan $u_{\infty}(\hat{x}, d)$ uzak - alan modeli hakkındaki bilgiden $n(x) - n_0$ ın desteği olan $\overline{D}$ ı belirlemek istiyoruz. Eğer y, D de her hangi bir nokta ise her $\varepsilon > 0$ için $g_y \in L^2(\Omega)$ vardır öyle ki

$$\left\| \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g_y(d) ds(d) - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad [5.1]$$

olur ve $y, \partial D$ sınırına yaklaşırken $\|g_y\|_{L^2(\Omega)}$ ve $\|v_g\|_{L^2(D)}$ sınırsız olur(21,23). Buradaki v_g fonksiyonunu Tanım 2.3.4 de tanımlanmış g çekirdekli Herglotz dalga fonksiyonudur.

5.1.İntegral Denklemi

[4.12] denklemini yani

$$\Delta w + (k^2 n + q)w = 0, \quad x \in D \quad [5.2]$$

denklemini sağlayan temel bir çözüm kuracağız.

$\Omega_{\varepsilon} = \{y : |x - y| \leq \varepsilon\} \subset D$ olsun. $\Gamma \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ olmak üzere

$$I(x, z) = \int_D \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy, \quad z \in \mathbb{R}^2 \quad [5.3]$$

integralini ele alalım ve $I(x, z)$, [5.2] denklemini sağlasın. Burada

$$m(y) = -n_0 + n(y) + \frac{q(y)}{k^2} \quad [5.4]$$

dir. $I(x, z)$ integralini

$$\begin{aligned} I(x, z) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy + \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy \\ &= I_1(x, z) + I_2(x, z) \end{aligned} \quad [5.5]$$

şeklinde yazalım.

$x \neq y$ için $\Phi(x, y)$ fonksiyonu $\Delta u + k^2 n_0 u = 0$ denklemini sağladığı için

$$(\Delta + k^2 n_0) I_2(x, z) = 0$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2 n_0) I(x, z) &= (\Delta + k^2 n_0) I_1(x, z) \\ &= \Delta \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy + k^2 n_0 \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy \end{aligned} \quad [5.6]$$

olur. [5.6] eşitliğinin sağ tarafındaki ilk integrale Divergens Teoremini uyguladığımızda

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy = \int_{\Omega_\varepsilon} -\nabla_y [\nabla_x \Phi(x, y)] m(y) \Gamma(y, z) dy, \quad \nabla_x = -\nabla_y$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \nabla_x \Phi(x, y) \nu(y) m(y) \Gamma(y, z) ds(y) \\
&= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \nabla_y \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{n_0}|x-y|) \right] \nu(y) m(y) \Gamma(y, z) ds(y) \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{n_0}\varepsilon) m(x+\varepsilon\theta) \Gamma(x+\varepsilon\theta, z) \varepsilon d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ik\sqrt{n_0}}{4} H_1^{(1)}(k\sqrt{n_0}\varepsilon) m(x+\varepsilon\theta) \Gamma(x+\varepsilon\theta, z) \varepsilon d\theta
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{n_0} \varepsilon H_1^{(1)}(k\sqrt{n_0}\varepsilon) = -\frac{i}{\pi} \left(\frac{2}{k} \right)$ (33) olduğundan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy = m(x) \Gamma(x, z) \quad [5.7]$$

olur. Şimdi de [5.6] eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integrali ele alalım. Ortalama değer teoreminden (34)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy &= \Phi(x, a) m(a) \Gamma(a, z) \left| \int_{\Omega_\varepsilon} dy \right|, \quad 0 < x-a < \varepsilon \\
&= \frac{i\pi\varepsilon^2}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{n_0}|x-a|) m(a) \Gamma(a, z)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x, y) m(y) \Gamma(y, z) dy = 0 \quad [5.8]$$

olur. [5.7] ve [5.8] den [5.6] denklemi

$$(\Delta + k^2 n_0) I(x, z) = m(x) \Gamma(x, z) \quad [5.9]$$

şeklini alır. [5.4] den [5.9] denklemi

$$\left(\Delta + k^2 \left[n(x) + \frac{q(x)}{k^2} - m(x) \right] \right) I(x, z) = m(x) \Gamma(x, z) \quad [5.10]$$

olur. $I(x, z)$, [5.2] denklemini sağladığı için [5.10] dan

$$-k^2 I(x, z) = \Gamma(x, z) \quad [5.11]$$

elde edilir. $\Phi(x, y)$, [3.35] Helmholtz denkleminin bir çözümü olduğu için eğer $\Gamma(x, z)$,

$$\Gamma(x, z) = \Phi(x, z) - k^2 I(x, z) \quad [5.12]$$

integral denkleminin bir çözümü ise [5.9] ve [5.4] sırasıyla kullanıldığında

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma(x, z) + k^2 n_0 \Gamma(x, z) &= \Delta [\Phi(x, z) - k^2 I(x, z)] + k^2 n_0 [\Phi(x, z) - k^2 I(x, z)] \\ &= (\Delta + k^2 n_0) \Phi(x, z) - k^2 (\Delta + k^2 n_0) I(x, z) \\ &= -k^2 (\Delta + k^2 n_0) I(x, z) = -k^2 m(x) \Gamma(x, z) \\ &= k^2 n_0 \Gamma(x, z) - k^2 \left[n(x) + \frac{q(x)}{k^2} \right] \Gamma(x, z) \end{aligned}$$

olur ki böylece $\Gamma(x, z)$, [5.2] denklemini sağlar.

[5.3] integrali [5.12] de yerine yazıldığında

$$\Gamma(x, z) = \Phi(x, z) + \int_D \Phi(x, y) [k^2 n_0 - (k^2 n(y) + q(y))] \Gamma(y, z) dy \quad [5.13]$$

Lippmann Schwinger [1.8] denklemi sağlanır. Bu durumda $\Gamma(x, z)$, [5.2] denklemini için bir temel çözümdür. *Teorem 2.1.11* den [5.13] denkleminin bir çözümü

$$\Delta w + (k^2 n + q)w = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad [5.14]$$

$$w(x) = \Phi(x, z) + w^s(x) \quad [5.15]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial w^s}{\partial r} - i k w^s \right) = 0 \quad [5.16]$$

problemin bir çözümüdür. $u(x) = \sqrt{n(x)} w(x)$ dönüşümü ile [5.14] – [5.16] problemi

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad [5.17]$$

$$u(x) = \sqrt{n(x)} \Phi(x, z) + u^s(x) \quad [5.18]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0 \quad [5.19]$$

problemine eşdeğerdir. *Teorem 2.1.12* den ve [3.5.b] kabulünden [5.17] – [5.19] problemi en fazla bir çözüme sahiptir. Böylece [5.14] – [5.16] orijinal problemi de en fazla bir çözüme sahiptir ve [4.12] denklemini için temel bir çözümün varlığını *Teorem 2.1.8* ile verilen *Fredholm alternatifleri* garantiler.

5.2.Basit Metodun Formüle Edilmesi

İlk olarak aşağıdaki lemmayı ele alalım.

Lemma 5.2.1

D sınırlı bir bölge ve ∂D , C^2 sınıfından olsun. x^* , ∂D üzerinde bir nokta ve $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^*| \leq R\}$ olsun. Eğer $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ fonksiyonu D içinde

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0 \quad [5.20]$$

denkleminin bir çözümü ise, o zaman $C > 0$ sabit olmak üzere

$$\|u\|_{C(\partial D)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} + \|u\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \right) \quad [5.21]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat

(35) deki *lemma 4.4* ün ispatı gibi sonuçlar. $\lambda \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ fonksiyonu $\partial D \setminus B_R$ de destekli ve $\text{Im } \lambda \geq 0$ olsun. İlk önce [5.20] denkleminin

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda k u = g \quad [5.22]$$

sınır koşulunu sağlayan herhangi bir çözümünün D de sıfır olduğunu göstereceğiz.

[5.20] ve [5.21] probleminin çözümü tek olmasın. Yani; $u_1, u_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$

fonksiyonları [5.20] ve [5.21] probleminin çözümleri olsun. Bu durumda u fonksiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda k u = 0 \quad [5.23]$$

homogen sınır koşulunu sağlar. [5.20] ve [5.23] homogen problemini ele alalım.

$\bar{u} \left(\frac{1}{n} \nabla u \right)$ fonksiyonuna Divergens Teoremini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \int_D \left[-k^2 |u|^2 + \frac{1}{n} |\nabla u|^2 \right] dy &= \int_{\partial D} \bar{u} \left(\frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds(y) \\ &= \frac{1}{n_0} \int_{\partial D} \lambda k |u|^2 ds(y) \end{aligned} \quad [5.24]$$

[5.24] eşitliğinin her iki tarafının imajinerini aldığımızda

$$\operatorname{Im} \int_D \left[-k^2 |u|^2 + \frac{1}{n} |\nabla u|^2 \right] dy = \operatorname{Im} \frac{1}{n_0} \int_{\partial D} \lambda k |u|^2 ds(y) \quad [5.25]$$

olur. $\operatorname{Im} \frac{1}{n} \leq 0$ olduğundan [5.25] in sol tarafı ≤ 0 olur. [3.5.a] dan n_0 reel

olduğundan ve $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ olduğundan [5.25] in sağ tarafı ≥ 0 olur. $\partial D \setminus B_R$ üzerinde

$\lambda \neq 0$ olduğundan $u = 0$ olur. [5.23] homogen sınır koşulundan $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ dır. *Teorem*

2.2.7 den D de $u = 0$ olur. Böylece [5.20] ve [5.22] sınır - değer problemi en fazla bir çözüme sahiptir. [5.20] ve [5.22] probleminin çözümünün varlığını göstermek için *Teorem 2.1.3* ü kullanırız. İlk önce

$$\Phi_1(x, y) = \sqrt{\frac{n(x)}{n_0}} \Gamma(x, y) \quad [5.26]$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon, [5.20] denkleminin temel bir çözümü olsun.

Üçüncü bölümde [3.37], [3.39] ile tanımlanan S ve K' operatörlerindeki Φ fonksiyonu ile Φ_1 fonksiyonunun yer değiştirmesiyle S ve K' operatörleri

$$S : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(S\phi)(x) = 2 \int_{\partial D} \Phi_1(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad [5.27]$$

$$K' : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

$$(K'\phi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi_1(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad [5.28]$$

şeklinde ifade edilirler. O zaman $\phi \in C(\partial D)$ için

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi_1(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad [5.29]$$

fonksiyonunu tanımlayalım. [5.29] da tanımlanan u fonksiyonunun D ye kısıtlanmış [5.20] ve [5.22] problemini çözer. [5.29] daki ϕ fonksiyonu ∂D üzerinde

$$K'\phi + \phi - \lambda k S\phi = 2g \quad [5.30]$$

integral denkleminin çözümüdür. Bu integral denklemini elde etmek için *Teorem 2.1.10* dan ve [5.22] sınır koşulundan yararlanacağız. [5.29] da tanımlanan ve D ye kısıtlanmış u fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$u^-(x) = \int_{\partial D} \Phi_1(x, y) \phi(y) ds(y) \quad [5.31]$$

olur. u fonksiyonunun $\nu(x)$ doğrultusundaki türevini alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi_1(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in D$$

fonksiyonu $x \in D \rightarrow x \in \partial D$ iken

$$\frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \Phi_1(x, y) \phi(y) ds(y) + \frac{1}{2} \phi(x) \quad [5.32]$$

olur. [5.31] ve [5.32] değerlerini [5.22] sınır koşulunda yerlerine yazdığımızda [5.27] ve [5.28] integral operatörlerinden

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[(K'\phi)(x) + \phi(x) - \lambda(x)k(S\phi)(x) \right]$$

elde ederiz. Bu durumda $\forall x \in \partial D$ için [5.30] denklemi sağlanmış olur. Eğer $g = 0$ ise, *Teorem 2.2.7* den D de $u = 0$ olduğundan $u^- = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = 0$ olur. *Teorem 2.1.10* daki single layer potansiyellerin sürekliliğinden ve Dış dirichlet probleminin tekliğinden (6), $u^- = u^+ = \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0$ olur. *Teorem 2.1.10* dan

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = -\phi$$

olduğundan $\phi = 0$ olur. Bu da çözümün varlığını garanti eder. Yani;

$$(I + K' - \lambda kS)\phi = 0$$

homogen denklemi $\phi = 0$ çözümüne sahip olduğu için $I + K' - \lambda kS$ operatörü bire bir dir. Böylece *Teorem 2.1.3* ve *Sonuç 2.1.4* den, $\forall g \in C(\partial D)$ için [5.30] homogen

olmayan denklemi tek bir ϕ çözümüne sahiptir ve çözüm sınır üzerinde g fonksiyonuna sürekli bağlıdır.

$$(I + K' - \lambda kS)^{-1} : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$$

ters operatörü mevcut ve sınırlı olduğundan

$$\|u\|_{C(\partial D)} \leq C_1 \|g\|_{C(\partial D)} \quad [5.33]$$

olacak şekilde bir C_1 pozitif sabiti vardır. [5.22] sınır koşulundan ve λ fonksiyonu $\partial D \setminus B_R$ de destekli olduğundan

$$\begin{aligned} \|g\|_{C(\partial D)} &= \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \lambda k u \right\|_{C(\partial D)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} + c \|u\|_{C(\partial D \setminus B_R)}, \quad c > 0 \end{aligned} \quad [5.34]$$

olur. [5.34] ü [5.33] de yerine yazdığımızda [5.21] eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 5.2.2

Eğer $u_{0,j}$ ve u_j dizileri

$$\Delta u_{0,j} + k^2 u_{0,j} = 0, \quad x \in D \quad [5.35]$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u_j \right) + k^2 u_j = 0, \quad x \in D \quad [5.36]$$

$$u_{0,j} - u_j = -\Phi_0(\cdot, y_j), \quad x \in \partial D \quad [5.37]$$

$$\frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_{0,j} - \frac{1}{n_0} u_j \right) = -\frac{\partial \Phi_0(\cdot, y_j)}{\partial \nu} - \lambda k \Phi_0(\cdot, y_j), \quad x \in \partial D \quad [5.38]$$

probleminin çözümleri ise

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{0,j}\|_{C^1(\partial D)} = \infty \quad [5.39]$$

olur. Burada

$$y_j = y^* - \frac{R}{j} \nu(y^*) \quad [5.40]$$

$R > 0$ yeterince küçük ve y^* , ∂D üzerinde bir noktadır.

İspat

$j \rightarrow \infty$ iken $\|u_{0,j}\|_{C^1(\partial D)}$ nin sınırlı olduğunu kabul edelim. Yani; bir c_1 pozitif sabiti vardır öyle ki

$$\|u_{0,j}\|_{C^1(\partial D)} \leq c_1, \quad j \rightarrow \infty \text{ iken} \quad [5.41]$$

olsun. Yeterince küçük $R > 0$ ve $y^* \in \partial D$ için

$$z_j = y^* + \frac{R}{j} \nu(y^*) \quad [5.42]$$

ile tanımlanan $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ daki noktaların kümesini alalım ve D içinde

$$\widetilde{u}_j = u_j + \sqrt{n} \Gamma(\cdot, z_j) \quad [5.43]$$

dizisini tanımlayalım. [5.37] koşulu ve [5.42] den, ∂D üzerinde

$$u_{0,j} - \widetilde{u}_j = - \left[\Phi_0(., y_j) + \sqrt{n_0} \Gamma(., z_j) \right] \quad [5.44]$$

olur. [5.38] koşulu ve [5.43] deki $\widetilde{u}_j$ fonksiyonunun ν doğrultusuna göre türevinden, ∂D üzerinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_{0,j} - \frac{1}{n_0} \widetilde{u}_j \right) = & - \left[\frac{\partial \Phi_0(., y_j)}{\partial \nu} + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial \Gamma(., z_j)}{\partial \nu} \right] \\ & - \lambda k \left[\Phi_0(., y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(., z_j) \right] \end{aligned} \quad [5.45]$$

olur. [5.44] ve [5.45] deki eşitliklerinin sağ taraflarını ∂D üzerinde sırasıyla

$$f_j = \Phi_0(., y_j) + \sqrt{n_0} \Gamma(., z_j) \quad [5.46]$$

$$g_j = \frac{\partial \Phi_0(., y_j)}{\partial \nu} + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial \Gamma(., z_j)}{\partial \nu} + \lambda k \left[\Phi_0(., y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(., z_j) \right] \quad [5.47]$$

dizileri ile tanımlayalım. *Lemma 5.2.1* deki gibi $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - y^*| \leq R\}$ şeklinde tanımlansın ve λ fonksiyonu $\partial D \setminus B_R$ de destekli olsun.

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{C(\partial D \setminus B_R)} &= \|\Phi_0(., y_j) + \sqrt{n_0} \Gamma(., z_j)\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \\ &\leq \|\Phi_0(., y_j)\|_{C(\partial D \setminus B_R)} + \|\sqrt{n_0} \Gamma(., z_j)\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \\ &\leq \sup_{. \in \partial D \setminus B_R} |\Phi_0(., y_j)| + \sup_{. \in \partial D \setminus B_R} |\sqrt{n_0} \Gamma(., z_j)| \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|f_j\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \leq c_2 \quad [5.48]$$

olacak şekilde bir c_2 pozitif sabiti vardır. (22) deki *Lemma 4.2* nin ispatından ve λ , $\partial D \setminus B_R$ de destekli olduğundan

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{C(\partial D)} &= \left\| \frac{\partial \Phi_0(., y_j)}{\partial \nu} + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial \Gamma(., z_j)}{\partial \nu} + \lambda k \left[\Phi_0(., y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(., z_j) \right] \right\|_{C(\partial D)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial \Phi_0(., y_j)}{\partial \nu} + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial \Gamma(., z_j)}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} + \left\| \lambda k \left[\Phi_0(., y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(., z_j) \right] \right\|_{C(\partial D)} \\ &\leq c_3 + \left\| \lambda k \left[\Phi_0(., y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(., z_j) \right] \right\|_{C(\partial D \setminus B_R)}, \quad c_3 > 0 \text{ sabit} \\ &\leq c_3 + \sup_{., \in \partial D \setminus B_R} \left| \lambda k \left[\Phi_0(., y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(., z_j) \right] \right| \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|g_j\|_{C(\partial D)} \leq c_4 \quad [5.49]$$

olacak şekilde c_4 pozitif sabiti vardır.

Lemma 5.2.1 den

$$\|\widetilde{u}_j\|_{C(\partial D)} \leq c_5 \left(\|\widetilde{u}_j\|_{C(\partial D \setminus B_R)} + \left\| \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} \right) \quad [5.50]$$

tahminini bir c_5 pozitif sabiti için elde ederiz. [5.37] sınır koşulu, [5.41] kabulü ve [5.48] den

$$\begin{aligned}
 \|\widetilde{u}_j\|_{C(\partial D \setminus B_R)} &= \|u_j + \sqrt{n_0} \Gamma(\cdot, z_j)\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \\
 &= \|u_{0,j} + \Phi_0(\cdot, y_j) + \sqrt{n_0} \Gamma(\cdot, z_j)\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \\
 &\leq \|u_{0,j}\|_{C(\partial D \setminus B_R)} + \|f_j\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \\
 &\leq c_1 + c_2
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

elde ederiz. [5.37], [5.38] ve [5.44] sınır koşulları, [5.41] kabulü, [5.49] ve [5.51] den

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} &= \left\| \frac{\partial u_j}{\partial \nu} + \sqrt{n_0} \frac{\partial \Gamma(\cdot, z_j)}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} \\
 &\leq \left\| n_0 \left(\frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu} + \lambda k u_{0,j} \right) - \lambda k \widetilde{u}_j \right\|_{C(\partial D)} \\
 &\quad + \left\| n_0 \left[\frac{\partial \Phi_0(\cdot, y_j)}{\partial \nu} + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \frac{\partial \Gamma(\cdot, z_j)}{\partial \nu} + \lambda k \left(\Phi_0(\cdot, y_j) + \frac{1}{\sqrt{n_0}} \Gamma(\cdot, z_j) \right) \right] \right\|_{C(\partial D)} \\
 &\leq |n_0| \left\| \frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu} + \lambda k u_{0,j} \right\|_{C(\partial D)} + \left\| -\lambda k \widetilde{u}_j \right\|_{C(\partial D)} + |n_0| \|g_j\|_{C(\partial D)} \\
 &\leq |n_0| \left[\left\| \frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} + \left\| \lambda k u_{0,j} \right\|_{C(\partial D \setminus B_R)} \right] + \left\| -\lambda k \widetilde{u}_j \right\|_{C(\partial D \setminus B_R)} + |n_0| c_4
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} \leq c_6 \tag{5.52}$$

olacak şekilde bir c_6 pozitif sabiti vardır. Böylece [5.51] ve [5.52] değerlerini [5.50] de yerlerine yazdığımızda

$$\|\widetilde{u}_j\|_{C(\partial D)} \leq c_7 \quad [5.53]$$

olacak şekilde bir c_7 pozitif sabiti elde ederiz. [5.46] da tanımladığımız f_j dizisinin $C(\partial D)$ uzayına göre normunu alıp, [5.44] koşulunu kullandığımızda

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{C(\partial D)} &= \|\Phi_0(\cdot, y_j) + \sqrt{n_0} \Gamma(\cdot, z_j)\|_{C(\partial D)} \\ &= \|\widetilde{u}_j - u_{0,j}\|_{C(\partial D)} \leq \|\widetilde{u}_j\|_{C(\partial D)} + \|-1\| \|u_{0,j}\|_{C(\partial D)} \end{aligned}$$

elde ederiz. [5.41] kabulü ve [5.53] den $\|f_j\|_{C(\partial D)}$ sınırlı olur ki, bu bir çelişkidir.

Çünkü f_j , $\partial D \cap B_R$ de tanımsızdır ve $C(\partial D \setminus B_R)$ üzerindeki norma göre sınırlıdır.

Dolayısıyla, $j \rightarrow \infty$ iken $\|u_{0,j}\|_{C(\partial D)}$ sınırsız olur.

Şimdi ters saçılma probleminin çözümü için basit metodu formüle edeceğiz. Bunun

için $u_\infty(\hat{x}, d)$ uzak alan modeli hakkındaki bilgiden faydalanacağız. Burada $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$

ve d ler Ω birim çemberi üzerindeki birim vektörlerdir. Bu son için, Tanım 2.3.4 de verilen [2.9]

$$v_g(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d) \quad [5.54]$$

formundaki Herglotz dalga fonksiyonunun Helmholtz denkleminin bir çözümü olduğunu hatırlayalım. Burada $g \in L^2(\Omega)$, v_g nin çekirdeğidir.

Amacımız, [5.40] da tanımlanmış $y_j \in D$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot y_j} \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad [5.55]$$

olacak biçimde bir $g = g(\cdot, y_j) \in L_2(\Omega)$ fonksiyonunun var olduğunu göstermektedir. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g(\cdot, y_j)\|_{L^2(\Omega)} = \infty$$

olduğunu göstereceğiz. Böylece ∂D sınırı $\|g(\cdot, y_j)\|_{L^2(\Omega)}$ nun sınırsız olduğu noktalar tarafından karakterize edilir (21,23).

İlk önce

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot y_j} \quad [5.56]$$

olduğunu göstereceğiz. Buradaki $u_{\infty}(\hat{x}, d)$, D engeli için $e^{ikx \cdot d}$ olay dalgasının saçılmasına karşılık gelen uzak alan modelidir. (5.56) nın sağ tarafı $\Phi_0(x, y_j)$ temel çözümünün uzak alan modeli olduğundan, *Lemma 2.2.5* den

$$\int_{\Omega} u^s(x, d) g(d) ds(d) = \Phi_0(x, y_j), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \quad [5.57]$$

olur.

Teorem 5.2.3

Her $\varepsilon > 0$ için $g = g(\cdot, y_j) \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\left\| \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot y_j} \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad [5.58]$$

ve $\lim_{j \rightarrow \infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} = \infty$ olur. Üstelik eğer v_g , [5.54] ile tanımlanmış Herglotz dalga fonksiyonu ise $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_g\|_{L^2(D)} = \infty$ olur.

İspat

Teorem 4.3.3 den [5.35] – [5.38] iç problemi bir çözüme sahiptir ki bu çözüm genel olarak bir Herglotz dalga fonksiyonu değildir. Bununla birlikte, g çekirdekli bir $U_{0,j}$ Herglotz dalga fonksiyonunun var olduğu gösterilir ki, bu fonksiyon $C^1(\overline{D})$ içinde $u_{0,j}$ ’e yaklaşır (22,23). [3.6] – [3.11] orijinal dış sınır – değer problemini çözen toplam alanı u_0 ile gösterelim ve u_0^* ile u^* fonksiyonlarını sırasıyla $u_0^*(y) = u_0(y, -\hat{x})$ ve $u^*(y) = u(y, -\hat{x})$ ile tanımlayalım.

Teorem 2.3.2 deki karşılıklı özelliğinden ve [2.7] den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) &= \int_{\Omega} u_{\infty}(-d, -\hat{x}) g(d) ds(d) \\ &= \int_{\Omega} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \left\{ \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial e^{-ikd \cdot y}}{\partial \nu} - e^{-ikd \cdot y} \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \right\} g(d) ds(d) \\ &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\Omega} e^{-ikd \cdot y} g(d) ds(d) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) \int_{\Omega} e^{-ikd \cdot y} g(d) ds(d) \right] ds(y) \\ &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial U_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) U_{0,j}(y) \right] ds(y) \end{aligned} \quad [5.59]$$

elde ederiz. $C^1(\overline{D})$ da $U_{0,j} \approx u_{0,j}$ olduğundan, [5.59] ın sağ tarafındaki integral

$$\int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial U_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) U_{0,j}(y) \right] ds(y) \approx \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) u_{0,j}(y) \right] ds(y) \quad [5.60]$$

olur. [5.37] ve [5.38] sınır koşullarından

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) u_{0,j}(y) \right] ds(y) = \\ \int_{\partial D} u_0^*(y) \left[\frac{1}{n_0} \frac{\partial u_j}{\partial \nu}(y) - \lambda k \left(u_j(y) - \phi_0(y, y_j) - \frac{1}{n_0} u_j(y) \right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}(y, y_j) - \lambda k \Phi_0(y, y_j) \right] ds(y) \\ - \int_{\partial D} \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) \left[u_j(y) - \Phi_0(y, y_j) \right] ds(y) \quad [5.61] \end{aligned}$$

elde edilir. [5.61] de [3.8] – [3.9] sınır koşullarını kullandığımızda

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial u_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) u_{0,j}(y) \right] ds(y) \\ = \frac{1}{n_0} \int_{\partial D} \left[u^*(y) \frac{\partial u_j}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(y) u_j(y) \right] ds(y) \\ - \int_{\partial D} \left[u^*(y) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}(y, y_j) - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(y) \Phi_0(y, y_j) + \lambda k \left(u^*(y) - \frac{1}{n_0} u^*(y) \right) \Phi_0(y, y_j) \right] ds(y) \\ = \frac{1}{n_0} \int_{\partial D} \left[u^*(y) \frac{\partial u_j}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(y) u_j(y) \right] ds(y) \\ - \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}(y, y_j) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) \Phi_0(y, y_j) \right] ds(y) \quad [5.62] \end{aligned}$$

olur. [5.62] yi [5.60] da yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(u_0^*(y) \frac{\partial U_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) U_{0,j}(y) \right) ds(y) &\approx \frac{1}{n_0} \int_{\partial D} \left[u^*(y) \frac{\partial u_j}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(y) u_j(y) \right] ds(y) \\ &\quad - \int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}(y, y_j) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) \Phi_0(y, y_j) \right] ds(y) \end{aligned} \quad [5.63]$$

[5.63] ün sağ tarafındaki ilk ifadeye Divergens teoremini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_0} \int_{\partial D} \left[u^*(y) \frac{\partial u_j}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(y) u_j(y) \right] ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \left[u(y, -\hat{x}) \frac{1}{n_0} \nabla u_j(y) \nu(y) - u_j(y) \frac{1}{n_0} \nabla u(y, -\hat{x}) \nu(y) \right] ds(y) \\ &= \int_D \left[\operatorname{div} \left[u(y, -\hat{x}) \frac{1}{n(y)} \nabla u_j(y) \right] - \operatorname{div} \left[u_j(y) \frac{1}{n(y)} \nabla u(y, -\hat{x}) \right] \right] dy \\ &= \int_D \left[u(y, -\hat{x}) (-k^2 u_j(y)) - u_j(y) (-k^2 u(y, -\hat{x})) \right] dy = 0 \end{aligned} \quad [5.64]$$

[5.63] ün sağ tarafındaki ikinci ifade, *Teorem 2.2.1* ve *Teorem 2.2.4* den

$$\int_{\partial D} \left[u_0(y, -\hat{x}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu}(y, y_j) - \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(y, -\hat{x}) \Phi_0(y, y_j) \right] ds(y) = -u_0(y_j, -\hat{x}) = e^{-ik\hat{x} \cdot y_j} \quad [5.65]$$

olur. [5.64] ve [5.65] den [5.63],

$$\int_{\partial D} \left[u_0^*(y) \frac{\partial U_{0,j}}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u_0^*}{\partial \nu}(y) U_{0,j}(y) \right] ds(y) \approx e^{-ik\hat{x} \cdot y_j} \quad [5.66]$$

şeklini alır. [5.66] yı [5.59] da yerine yazdığımızda

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d) \approx \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot y_j}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece [5.58] i gerçekleyen bir $g \in L^2(\Omega)$ fonksiyonu vardır.

Şimdi $j \rightarrow \infty$ iken $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ nın sınırsız olduğunu göstermek için aksini kabul edelim.

Yani; $j \rightarrow \infty$ iken $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ sınırlı olsun. Böylece $\|U_{0,j}\|_{C^1(D)}$ sınırlıdır. Bu da $j \rightarrow \infty$

iken $\|u_{0,j}\|_{C^1(D)}$ nin sınırlı olduğunu sağlar ki, bu sonuç *Teorem 5.2.2* ile çelişir.

Çelişkidten dolayı kabulümüz yanlıştır. Yani $\lim_{j \rightarrow \infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} = \infty$ olur. Böylece,

$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_g\|_{L^2(D)} = \infty$ olur.



6. SONUÇ

6.1.Sonuç

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde zaman harmonik dalgaların $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ ve $\lambda, g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ için

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D$$

$$u_0 - u = f, \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = g, \quad x \in \partial D$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} - i k u_0 \right) = 0, \quad r = |x|$$

şeklindeki saçılma problemini sağlayan $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ve $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonlarının tekliği ve varlığı gösterildi.

6.2.Sonuç

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ ve $\lambda, g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ için

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in D$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D$$

$$u_0 - u = f, \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = g, \quad x \in \partial D$$

denklemlerini sağlayan $u_0, u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonlarının tekliği ve varlığı gösterildi.

6.3.Sonuç

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{n} \nabla u \right) + k^2 u = 0, \quad x \in D$$

$$u_0 - u = 0, \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda k \left(u_0 - \frac{1}{n_0} u \right) = 0, \quad x \in \partial D$$

$$u_0(x) = e^{ikx \cdot d} + u^s(x)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad r = |x|$$

denklemleri ile tanımlanan ters saçılma probleminin çözümü için (21) de verilen basit metod formüle edildi.

KAYNAKLAR

1. Sommerfeld, A., "Die Greensche Funcktion der Schwingungsgleichung", *Jber.Deutsch.Mat.Verein*, 21: 309-353 (1912).
2. Müller, C., "Zur Mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen", *Abh.deutsch.Akad.Wiss.*, Berlin., 3: 5-56 (1945/46).
3. Rellich, F., "Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten", *Jber. Deustch. Math. Verein.*, 53: 57-65 (1943) .
4. Vekua, I.N., "Metaharmonic functions", *Trudy Tbilisskogo matematicheskogo Instituta*, 12: 105-174 (1943).
5. Colton, D. and Kress, R., "Integral Equations Methods in Scattering Theory" *John Wiley* , New York, 2-106 (1983).
6. Colton, D. and Kress, R., "Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory" , *Springer – Verlag* , Berlin, 2-86,147-148,207-240 (1992).
7. Weyl, H., "Kapazität von Strahlungsfeldern", *Math. Z.*, 55: 187-198 (1952).
8. Weyl, H., "Die natürlichen Randwertaufgaben im Aussenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimensionen und beliebigen Ranges", *Math. Z.*, 56: 105-119 (1952).
9. Müller, C., "Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern", *Math. Ann.*, 123: 345-378 (1951).
10. Müller, C., "Zur Methode der Strahlungskapazität von H.Weyl.", *Math.Z.*, 56: 80-83 (1952).

11. Müller, C., "Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen", *Math.Z.*, 56: 261-270 (1952).
12. Colton, D., "Partial Differential Equations 1st ed." , *The Random House* , New York, 152-153,196-285 (1988).
13. Lax, P.D. and Phillips, R.S., "Scattering Theory", *Academic Press*, Newyork, 173-174 (1967).
14. Nachman, A., "Reconstructions from boundary measurements", *Annals of Math.*, 128: 531-576 (1998).
15. Novikov, R., "Multidimensional inverse spectral problems for the equations $-\Delta\Psi + (v(x) - Eu(x))\Psi = 0$ ", *Translations in Func. Anal. and its Appl.*, 22: 263-272 (1988).
16. Ramm, A. G., "Recovery of the potential from fixed energy scattering data", *Inverse Problems*, 4: 877-886 (1988).
17. Colton, D. and Päiväranta, L., "The uniqueness of a solution to an inverse scattering problem for electromagnetic waves", *Arch.Rational Mech. Anal.*, 119: 59-70 (1992).
18. Angell, T.S., Colton, D. and Kirsch, A., "The three dimensional inverse scattering problem for acoustic waves", *J.Diff. Equations*, 46: 46-58 (1982).
19. Roger, A., "Newton Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem", *IEEE Trans.Ant.Prop.*, AP-29: 232-238 (1981).

20. Tobocman, W., "Inverse acoustic wave scattering in two dimensions from impenetrable targets", *Inverse Problems*, 5: 1131-1144 (1989).
21. Colton, D. and Kirsch A., "A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region", *Inverse Problems*, 12: 383-393 (1996).
22. Colton, D., Kress, R. and Monk, P., "Inverse scattering from an orthotropic medium", *J. Comput. Apply Math.*, 81: 269-298 (1997).
23. Colton, D., Piana, M. and Potthast, R., "A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems", *Inverse Problems*, 13: 1477-1493 (1997).
24. Colton, D. and Piana, M., "The simple method for solving the electromagnetic inverse scattering problem : the case of TE polarized waves", *Inverse Problems*, 14: 597-614 (1998).
25. Colton, D. and Monk, P., "A linear sampling method for the detection of leukemia using microwaves", *SIAM J. Appl.Math.* 58 (3): 926-941 (1998).
26. Colton, D. and Monk P., "A linear sampling method for the detection of leukemia using microwaves II", *SIAM J. Appl.Math.*, 60 (1): 241-255 (1999).
27. Colton, D., Giebermann, K. and Monk, P., "A regularized sampling method for solving three – dimensional inverse scattering problems", *SIAM J.Sci. Comput.*, 21 (6): 2316 – 2330 (2000).
28. Colton, D., Coyle, J. and Monk, P., "Recent developments in inverse acoustic scattering theory", *SIAM Review*, 42 (3): 369-414 (2000).
29. Kress, R., "Linear Integral Equations", *Springer-Verlag*, Berlin, 14-45 (1989).

30. Kirsch, A., "An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems", *Springer-Verlag*, Newyork, 173-214 (1996).
31. Angell, T.S. and Kirsch, A., "The conductive boundary condition for Maxwell's equations", *SIAM J.Appl.Math.*, 52 (6): 1597-1610 (1992).
32. Gerlach, T. and Kress, R., "Uniqueness in inverse obstacle scattering with conductive boundary condition", *Inverse Problems* 12: 619-625(1996).
33. Lebedev, N.N. "Special Functions and Their Applications", Silverman, R.A., *Dover Publications*, Newyork, (107,134-135) (1972).
34. Adams, R.A., "A Complete Course Calculus 4th ed.", *Addison-Wesley*, Canada, 834-835 (1998).
35. Kirsch, A. and Kress, R., "Uniqueness in inverse obstacle scattering", *Inverse Problems*, 9: 285-299 (1993).
36. Cakoni F., Colton, D. and Monk P., "The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles", *Inverse Problems*, 17: 1997-2015(2001).
37. Colton, D. and Kirsch, A., "Target signatures for imperfectly conducting obstacles at fixed frequency", *Q.Jl.Mech.Appl.Math.*, 47:1-15 (1994).
38. Seydou, F., "Profile inversion in scattering theory: the TE case", *J. Comput. Appl. Math.*, 137: 49-60 (2001).

ÖZGEÇMİŞ

Bu çalışmayı yapan Gülten TORUN 1962 yılında Tokat'ta doğdu. İlk öğrenimini Seyranbağları İlkokulunda, orta öğrenimini Ankara 50. Yıl Lisesi'nde tamamladı. 1982-1984 yılları arasında Adalet Bakanlığı'nda memur olarak görev yaptı. Üniversite Lisans öğrenimini Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde tamamladı. 1991 yılında tekrar Adalet Bakanlığı'ndaki eski görevine döndü. 1993 yılında Gazi Üniversitesi Kastamonu Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Anabilim Dalına Araştırma görevlisi olarak atandı. 1995 yılında Yüksek Lisans öğrenimini Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde tamamladı. Halen Gazi Üniversitesi Kastamonu Eğitim Fakültesi'nde görevini sürdürmektedir.

