

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TRİGONOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Ercihan GÜNGÖR

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç.Dr.Sercan TURHAN

**Ocak 2022
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TRİGONOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ercihan GÜNGÖR

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez ../01/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

ERCİHAN GÜNGÖR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın başlangıcından bu yana bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, bu araştırmanın yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu, her türlü destek, yardım ve büyük katkılarından dolayı değerli danışman hocam Doç. Dr. Sercan TURHAN 'a ve ders aldığım matematik bölümü öğretim üyelerine saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	III
ŞEKİLLER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY.....	VI
BÖLÜM1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler.....	4
2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	12
2.3. Bazı Özel Ortalamalar	13
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	14
3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler ve Elde Edilmiş Bazı Sonuçlar.....	14
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	27
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$L[k, l]$	: $[k, l]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
ξ'	: ξ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
ξ''	: ξ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	: $\mathbb{R}'$ de Her Hangi Bir Aralık
I°	: I 'nin İçi
$\mathbb{R}^n$	: n-Boyutlu Öklid Uzayı
[TC]	:Trigonometrik Konveks Fonksiyon

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.1. Konveks Kümeler

Şekil 2.1.2. Konveks Olmayan Kümeler

Şekil 2.1.3. Konveks Fonksiyonun Şekli

Şekil 2.1.4. Konkav Fonksiyonun Şekli

Şekil 2.1.5. Konveks Fonksiyonun Geometrik Yorumu

Şekil 2.1.6. Bir Aralıkta Konveks Fonksiyon



TRİGONOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

ÖZET

Bu tezde trigonometrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli integral eşitsizlikleri üzerine çalışıldı. Birinci bölümde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi, konvekslik teorisi hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde tez için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teoremler verilmiş ayrıca konveks fonksiyon sınıflarının birbiriyle olan ilişkisi literature çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır. Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Hermite-Hadamard-Fejér tipli yeni eşitsizliklere yer verilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin literatürle uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, Trigonometrik Konveks Fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği.

FEJER TYPE INEQUALITIES FOR TRIGONOMETRIC KONVEKS FUNCTIONS

ABSTRACT

In this thesis, Hermite-Hadamard-Fejer type integral inequalities for trigonometric convex functions were studied. In the first chapter, there are introductory information about the theory of inequality, the history of convex functions, and the theory of convexity, respectively. In the second part, the basic concepts, definitions and theorems required for the thesis are given, and the relationship between the convex function classes is supported by the literature study. In the fourth chapter, new inequalities of the Hermite-Hadamard-Fejér type are included.

Keywords: Convex functions, Trigonometric convex function, Hermite-Hadamard Inequality, Hermite-Hadamard-Fejér Inequality.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Son yüzyılda çok önemli bir yere sahip ve matematiğin tüm alanlarında etkili olan eşitsizlikler, günümüzde de ilgi çekici ve çok aktif olan bir araştırma alanıdır. Eşitsizlikler, iki değerin birbirine göre durumlarını ifade eden ilişkidir. Eşitsizlikler teorisinin temeli 18. yüzyıla kadar dayanmakta, 19. yüzyıldan itibaren ise matematiğin çeşitli alanlarında önemli rol oynamaktadır. Eşitsizliklerin fizik ve mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında birçok uygulaması bulunmaktadır. Bu yüzden eşitsizlik teorisi birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve tarihsel gelişimini diğer alanlarla ilişkili olarak bugüne kadar sürdürmüştür. G.H. Hardy, D.S. Mitronovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink, Niculescu, S.S. Dragomir gibi çok sayıda bilim insanı eşitsizlikler üzerine eserler literatüre kazandırmıştır. Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser bu alanda verilen ilk eserdir ve temel bir kaynaktır. Bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler, ispat yöntemleri ve sonuçları bulunur [1]. Eşitsizlikler teorisi için E.F. Beckenbach ve R. Bellman'ın birlikte yazdığı eşitsizlikler ile ilgili bazı ilginç sonuçları kapsayan "Inequalities" adlı eser [2], Mitronovic tarafından yazılan "Analytic Inequalities" [3] ve "Classical and New Inequalities in Analysis" adlı iki eserler [4] ve Pachpatte'nin "Mathematical Inequalities" [5] adlı eseri önemli kaynaklar arasında yer almıştır. Bu eserler birçok matematikçiye etkilemiş ve daha sonraki dönemlerde bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi bilim insanları tarafından eşitsizlikler üzerine birçok makale ve kitap yazılmıştır.

Eşitsizlikler daha çok matematik ve uygulamalı matematiğin gelişmesindeki ana kaynaklardan biri olarak düşünülmektedir. Son yıllarda matematiğin birçok alanındaki uygulamalara, literatürde yerini almış temel eşitsizlikler büyük bir katkı sağlamıştır. Eşitsizlikler alanının gelişmesinde etkili olan kavramlardan birisi de konveks fonksiyonlar kavramıdır. Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve geometrik olarak bir karşılaştırma içerdiğinden, Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır.

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in π değerini hesaplamasına kadar uzanan bilinen basit bir kavramdır [6]. Aslında biz konveksliği sürekli olarak ve birçok yolla yaşamaktayız. Örneğin; ayakta durma pozisyonumuz, ayaklarımızın kapladığı konveks alan içinde ağırlık merkezimizin dik iz düşümü dengemizi korumamızı sağlar. Bu kavram fizik, endüstri, tıp, mühendislik, veri analizi, bankacılık, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Günümüzde uygulanmasının artması ve gelişmiş disiplini sayesinde matematiksel analizin odak noktası halini almıştır. Konvekslik matematikte bir çok alanda farklı konularda kullanılmaktadır.

“Konvekslik” kavramı ilk olarak 1883 yılında Charles Hermite tarafından dile getirilmiştir [7]. Sonrasında Hadamard'ın 1893 yılında yapmış olduğu çalışmada[8] konveksliğe saptansa da, sistematik olarak konveks fonksiyonlar üzerine yapılan çalışma 1905- 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar. 19.-20. yy'da keşfedilen eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler oluşturulmuştur. Konveks fonksiyonlar detaylı olarak A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde değerlendirilmiştir. Pedaric'in 1987 yılında yayınlamış olduğu "Convex Functions: Inequalities" adlı eserinde sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında bilgiler yer almaktadır.

Birçok eşitsizlik, eşitsizlik teorisi içerisinde ön plana çıkmıştır. Konveks fonksiyonlar için önemli integral eşitsizlikleri Hermite-Hadamard (veya Hadamard), Ostrowski, Simpson, Jensen...vb eşitsizlikleridir. Bu önemli eşitsizlikler, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerinin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav veya konvekslik durumuna göre değişir. Çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımı S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard-Inequalitiesand- Applications" adlı eserde bulunabilir.

1906 yılında ise Fejér, trigonometrik polinomları çalışırken Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmesi olan

$$\frac{k+l}{2} \int_k^l \gamma(m) dm \leq \int_k^l \xi(m) \gamma(m) dm \leq \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l \gamma(m) dm$$

eşitsizliklerini elde etmiştir. $\gamma(m) = 1$ ve $m \in (k, l)$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin elde edildiği açıkça görülmektedir. Fejér'in bu sonucu ile ilgili özellikle son yıllarda olmak üzere birçok çalışma literatürde mevcuttur.

Bu tezde son dönemlerde konveks fonksiyon teorisinde önemli yer alan trigonometrik konveks fonksiyonlar üzerine bir çalışma yapılmıştır. Literatürde konveks fonksiyonlar üzerine yapılan Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizliklerin trigonometrik konveks fonksiyonlar üzerine çalışması yapılmıştır. Burada yeni kavram ve sonuçlar elde edilip özel durumlarında literatüre yapılan çalışmalara indirğendiği gösterilmiştir.



BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

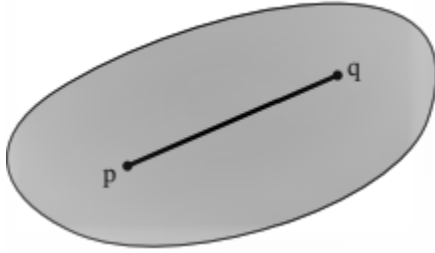
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde literatürde geçen ve tezin hazırlanmasında kullanılan tanımlar, teoremler, bazı önemli eşitsizlikler ve temel kavramlara yer verilecektir.

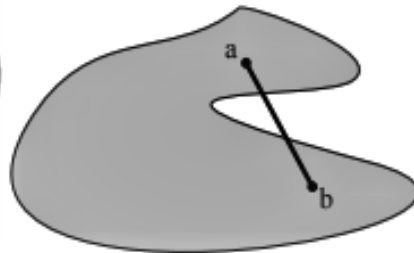
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olmak üzere $\forall m, n \in A$ için ve

$$B = \{z \in L : z = \alpha m + (1 - \alpha)n, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.1)$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha m + (1 - \alpha)n$ eşitliğindeki m ve n nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alınabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları m ve n olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümesidir [9].



Şekil 2.1.1. Konveks Kümeler



Şekil 2.1.2. Konveks Olmayan Kümeler

Tanım 2.1.2. (J-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere her $m, n \in I$ için,

$$\xi\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq \frac{\xi(m) + \xi(n)}{2} \quad (2.2)$$

şartını sağlayan bir ξ fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir [2].

Tanım 2.1.3. (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $m, n \in I$ ve $m \neq n$ için,

$$\xi\left(\frac{m+n}{2}\right) < \frac{\xi(m) + \xi(n)}{2} \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, ξ fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir [2].

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $m, n \in I$ için ve $t \in [0,1]$ için,

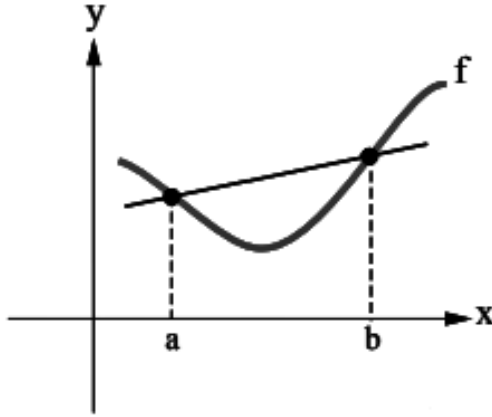
$$\xi(tm + (1 - t)n) \leq t\xi(m) + (1 - t)\xi(n) \quad (2.4)$$

eşitsizliği geçerli ise ξ fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir [10].

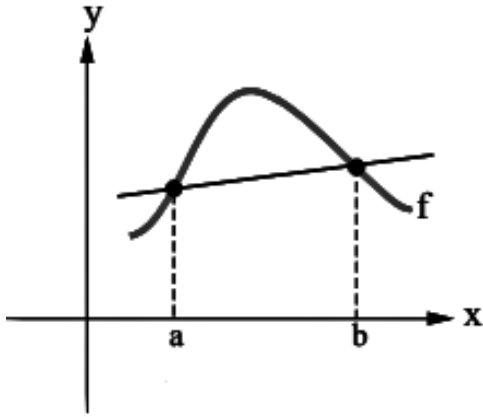
Eşitsizlikte " $\geq$ " olması durumunda ise

$$\xi(tm + (1 - t)n) \geq t\xi(m) + (1 - t)\xi(n) \quad (2.5)$$

ξ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.



Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyon şekli



Şekil 2.1.4. Konkav fonksiyon şekli

Eğer ξ fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise ξ afin dönüşüm olur. (2.4) eşitsizliğinde $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki " $\leq$ " yerine " $<$ " gelir, ve

$$\xi(tm + (1 - t)n) < t\xi(m) + (1 - t)\xi(n) \quad (2.6)$$

olur. Bu durumda ξ fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir.

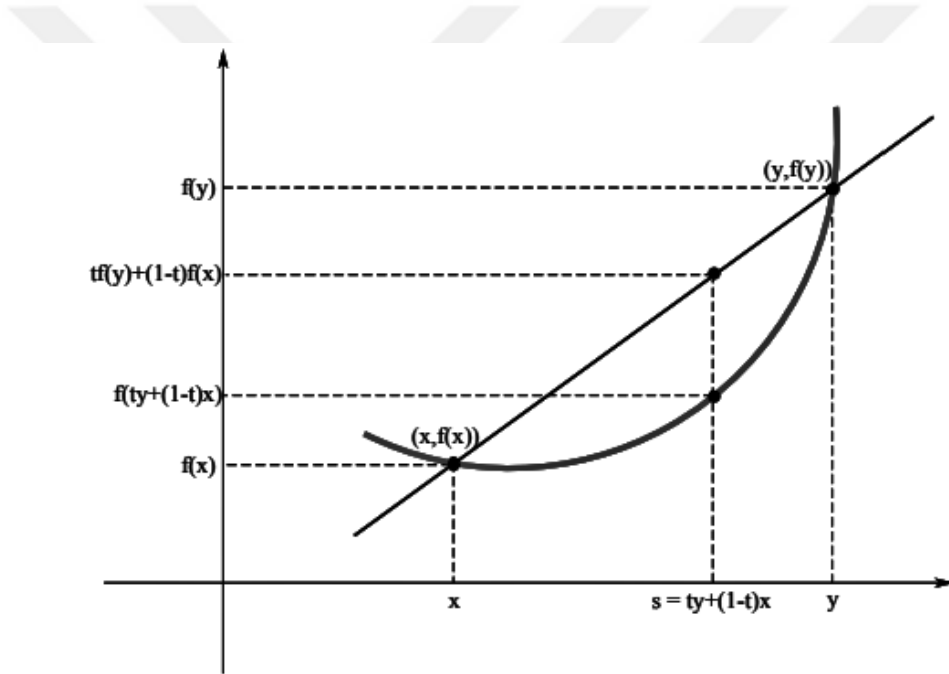
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J –konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir ξ fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $m, n \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

$$\xi\left(\frac{pm + qn}{p + q}\right) \leq \frac{p\xi(m) + q\xi(n)}{p + q} \quad (2.7)$$

olmasıdır [2].

Geometrik olarak $tm + (1 - t)n$ noktasında ξ 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(m, \xi(m))$ ve $(n, \xi(n))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerlerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[m, n]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.



Şekil 2.1.5. Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Gerçekten, $(m, \xi(m))$ ve $(n, \xi(n))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

$$L(s) = \xi(m) + \frac{\xi(n) - \xi(m)}{n - m}(s - m)$$

dir. Burada $s = tn + (1 - t)m$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L(tn + (1 - t)m) &= \xi(m) + \frac{\xi(n) - \xi(m)}{n - m}(t(n - m)) \\ &= \xi(m) + t(\xi(n) - \xi(m)) \end{aligned}$$

$$= t\xi(n) + (1 - t)\xi(m)$$

olur. Böylece (2.1.1) eşitsizliği

$$\xi(tn + (1 - t)m) \leq L(tn + (1 - t)m) = t\xi(n) + (1 - t)\xi(m) \quad (2.8)$$

elde edilir.

Şekil 2.1.5'ten de görüldüğü üzere, eğer $\xi(m) \leq \xi(n)$ ise her $t \in [0,1]$ için $\xi(m) \leq t\xi(m) + (1 - t)\xi(n) \leq \xi(n)$ dir. Konkav fonksiyon için doğru parçası ξ 'nin grafiğinin $[m, n]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Eğer ξ fonksiyonu, $[k, l]$ aralığında tanımlı ve konveks (konkav) ve m_0 noktasında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise $m \in (k, l)$ için,

$$\xi(m) - \xi(m_0) \leq (\geq) \xi'(m_0)(m - m_0) \quad (2.9)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (k, l) aralığında diferansiyellenebilen konveks fonksiyon (2.9) eşitsizliğini sağlar [11].

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir [11].

a. I aralığı üzerinde ξ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $c \in I$ noktası için, $\frac{\xi(m) - \xi(c)}{(m - c)}$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

b. $\xi : (k, l) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $c, m \in (k, l)$ için,

$$\xi(m) - \xi(c) = \int_c^m \gamma(t) dt$$

olacak şekilde $\gamma : (k, l) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

c. ξ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, ξ 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul ξ' fonksiyonunun artan olmasıdır.

d. ξ'' , (α, l) de mevcut olsun. Bu durumda ξ 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\xi''(m) \geq 0$ olmasıdır.

e. $\xi : (k, l) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $m_0 \in (k, l)$ için ξ fonksiyonun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$\xi(m) \geq \xi(m_0) + \lambda(m - m_0) \quad \forall m \in (\alpha, l) \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, m_0 'a bağlıdır ve eğer ξ' varsa o zaman $\lambda = \xi'(x_0)$ ya da $\xi'_-(m_0) \neq \xi'_+(m_0)$ ise $\lambda \in [\xi'_-(m_0), \xi'_+(m_0)]$ dir.

- f. $\xi : (k, l) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul P, Q ve R noktaları ξ fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Aşağıda konveks fonksiyonun bazı özellikleri verilmiştir:

- i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I° (I nın içi) inde herhangi bir $[k, l]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, ξ fonksiyonu $[k, l]$ aralığında mutlak sürekli ve I° de sürekli.
- iii. $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I° de $\xi'_-(m)$ ve $\xi'_+(m)$ türevleri vardır ve artandır.
- iv. $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde ξ' mevcuttur ve sürekli.
- v. k tane fonksiyon $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$\xi(u) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \xi_j(m), \quad \alpha_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonu da konvektir.

- vi. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(m) = (goh)(m)$ bileşke fonksiyonu da konvektir [10].

Örnek 2.1.1. Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerindeki konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

- a. Herhangi bir $k, l \in \mathbb{R}$ için $\xi(m) = km + l$ afın fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- b. $|m|^p$ mutlak değer fonksiyonu $p \geq 1$ için $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- c. $\xi(m) = m^t$ fonksiyonu $t \geq 1$ veya $t \leq 0$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_{++} = (0, \infty)$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- d. Herhangi bir $k \in \mathbb{R}$ için $\xi(m) = e^{ku}$ üstel fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Örnek 2.1.2. $\xi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(m) = |m|$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Çözüm: ξ fonksiyonu konveks ise $m, n \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\xi(tm + (1 - t)n) \leq t\xi(m) + (1 - t)\xi(n)$$

olmalıdır. Buna göre

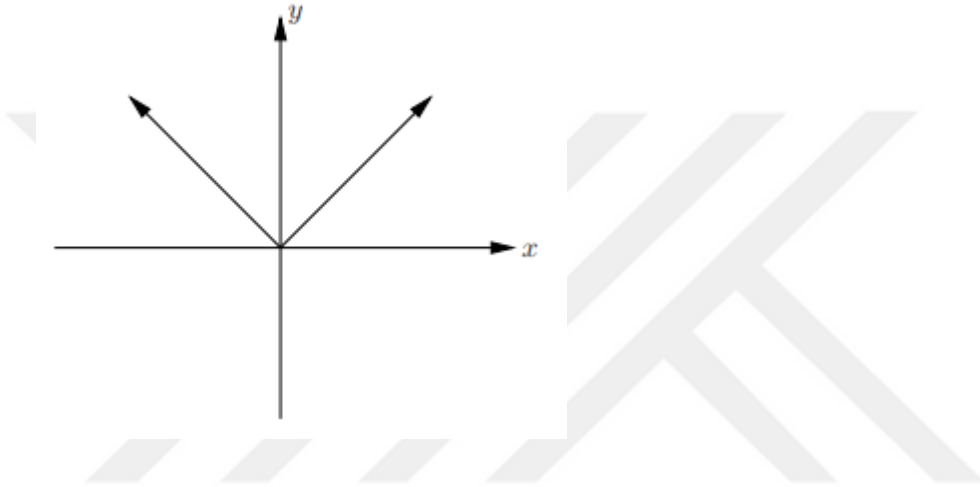
$$\xi(tm + (1 - t)n) = |t\xi(m) + (1 - t)\xi(n)|$$

$$\leq |t\xi(m)| + |(1-t)\xi(n)|$$

$$\leq |t|\xi(m) + |(1-t)|\xi(n)$$

$$\leq t\xi(m) + (1-t)\xi(n)$$

elde edilir ve ξ fonksiyonunun konveks olduğu ispatlanmış olur. $\xi(m) = m$ mutlak değer fonksiyonu $m = 0$ 'da türeve sahip olmamasına rağmen konveks bir fonksiyondur.



Şekil 2.1.6. Bir aralıkta konveks fonksiyon

Örnek 2.1.3. Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerindeki konkav fonksiyon örnekleri verilmiştir.

- a. Herhangi bir $k, l \in \mathbb{R}$ için $\xi(x) = km + l$ afın fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.
- b. $\xi(m) = \log(m)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.
- c. $\xi(m) = m^t$ fonksiyonu $0 \leq t \leq 1$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.1. ξ fonksiyonu $[k, l]$ aralığında konveks ise

- a. ξ , (k, l) aralığında süreklidir.
- b. ξ , $[k, l]$ aralığında sınırlıdır [12].

Önerme 2.1.1.

- i. ξ fonksiyonu $[k, l]$ aralığında konveks ise bu aralığın herhangi bir alt aralığı olan $[m, n]$ üzerinde de aynı şekilde konvektir.
- ii. Herhangi $m, n \in [k, l]$ için,

$$\xi\left(\frac{m+n}{2}\right) \leq \frac{\xi(m) + \xi(n)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada konveks fonksiyon için verilen tanımda $t = \frac{1}{2}$ yapıldığı açık bir şekilde görülmektedir.

- iii. ξ fonksiyonu $[k, l]$ aralığında konveks, $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ için $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ ve $m_1, m_2, \dots, m_n \in [k, l]$ olmak üzere,

$$\xi(t_1 m_1 + t_2 m_2 + \dots + t_n m_n) \leq t_1 \xi(m_1) + t_2 \xi(m_2) + \dots + t_n \xi(m_n)$$

olarak verilen 'Jensen eşitsizliği' geçerlidir.

- iv. Özel olarak $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ seçimi yapılırsa $m_1, m_2, \dots, m_n \in [k, l]$ için

$$\xi\left(\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(\xi(m_1) + \xi(m_2) + \dots + \xi(m_n))$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Tanım 2.1.5. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): ξ , I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $m_1 < m_2$

olan $\forall m_1, m_2 \in I$ için

- i. $\xi(m_2) > \xi(m_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde artandır,
- ii. $\xi(m_2) < \xi(m_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- iii. $\xi(m_2) \geq \xi(m_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- iv. $\xi(m_2) \leq \xi(m_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

denir [14].

Teorem 2.1.2. ξ fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, ξ fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $m \in I$ için

$$\xi''(m) \geq 0$$

olmasıdır [2].

Örnek 2.1.4. $\xi(m) = e^m$ üstel fonksiyonu $\forall m \in \mathbb{R}$ için $\xi''(m) = e^m > 0$ olduğundan konvektir.

Örnek 2.1.5. $n \geq 1$ için $\xi(m) = m^n$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da konveks iken n çift olmak şartıyla $\xi(m) = m^n$ fonksiyonu da $\mathbb{R}$ üzerinde konvektir.

Gerçekten de $\xi''(m) = n(n-1)m^{n-2} > 0$ olduğundan her iki durumda da ξ konvektir.

Tanım 2.1.6. (Süreklilik): $\xi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_0 \in S$ olsun. Her $\epsilon > 0$ ve her $m \in S$ için $|m - m_0| < \delta$ iken $|\xi(m) - \xi(m_0)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa ξ , m_0 da süreklidir denir [15].

Tanım 2.1.7. (Lipschitz Şartı): $\xi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|\xi(m) - \xi(n)| \leq M|m - n| \quad (2.11)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa ξ , S de Lipschitz şartını sağlıyordendir [15].

Tanım 2.1.8. (Düzgün Süreklilik): $\xi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$m \in S$ ve $|m_1 - m_2| < \delta$ şartını sağlayan $\forall m_1, m_2 \in S$ için $|\xi(m_1) - \xi(m_2)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa ξ , S de düzgün süreklidir denir [15].

Sonuç 2.1.3. ξ, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa ξ , S de düzgün süreklidir [15].

Tanım 2.1.9. (Mutlak Süreklilik): I , $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I 'nin $\{(k_i, l_i)\}_{i=1}^n$ ayırık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |l_i - k_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |\xi(l_i) - \xi(k_i)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa ξ fonksiyonuna I kümesinde mutlak süreklidir denir [16].

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.3. L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $\xi: U \rightarrow R$ fonksiyon olsun.

- a. ξ, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer ξ , U 'da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise U 'da yerel Lipschitz'dir ve bu nedenle U 'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U 'da süreklidir.
- b. $\xi: U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise ξ, U 'nun her kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U 'da süreklidir [10].

2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1.(Üçgen Eşitsizliği): Herhangi m, n reel sayıları için

$$|m + n| \leq |m| + |n|$$

$$||m| - |n|| \leq |m - n|$$

$$||m| - |n|| \leq |m + n|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|m_1 + \dots + m_n| \leq |m_1| + \dots + |m_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [4].

Teorem 2.2.2.(Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): ξ , $[k, l]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left| \int_k^l \xi(m) dm \right| \leq \int_k^l |\xi(m)| dm \quad (k < l) \quad (2.12)$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

Teorem 2.2.3.(İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. ξ ve γ , $[k, l]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\xi|^p$ ve $|\gamma|^q$, $[k, l]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_k^l |\xi(m)\gamma(m)| dm \leq \left(\int_k^l |\xi(m)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_k^l |\gamma(m)|^q dm \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.13)$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-Mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.2.1.(Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ ve olsun. ξ ve γ , $[k, l]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\xi|$ ve $|\gamma|^q$, $[k, l]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_k^l |\xi(m)\gamma(m)| dm \leq \left(\int_k^l |\xi(m)| dm \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_k^l |\xi(m)||\gamma(m)|^q dm \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.14)$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.3.Bazı Özel Ortalamalar

Bu başlık altında k, l gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir.

- Aritmetik ortalama:

$$A = A(k, l) := \frac{k + l}{2}$$

- Geometrik ortalama:

$$G = G(k, l) := \sqrt{kl}$$

- Harmonik ortalama:

$$H = H(k, l) := \frac{2kl}{k + l}$$

- Logaritmik ortalama:

$$L = L(k, l) := \begin{cases} k & , k = l \\ \frac{l - k}{\ln l - \ln k} & , k \neq l \end{cases}$$

- p -logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(k, l) := \begin{cases} k & , k = l \\ \left[\frac{l^{p+1} - k^{p+1}}{(p+1)(l - k)} \right]^{\frac{1}{p}} & , k \neq l \end{cases}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p 'nin monoton artan olduğu bilinir. $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

şeklinde yer almaktadır.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin konusunu oluşturan bazı temel teoremler ve sonuçlar verilmiş olup bazı teoremlerin ispatları sunulmuştur.

Teorem 3.1.1.(Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Eğer $k, l \in I$, $k < l$ ise

$$\xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \leq \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) dm \leq \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \quad (3.1)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada ξ fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir [7,8].

İspat. ξ fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan dolayı $[k, l]$ aralığında integrallenebilir. Konvekslik tanımından,

$$\xi(tk + (1-t)l) \leq t\xi(k) + (1-t)\xi(l)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t 'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi(tk + (1-t)l) dt &\leq \int_0^1 t\xi(k) dt + \int_0^1 (1-t)\xi(l) dt \\ &= \int_0^1 t\xi(k) dt + \int_0^1 (1-t)\xi(l) dt \\ &= \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan,

$$\frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) dx = \int_0^1 \xi(tk + (1-t)l) dt$$

olur ki bu Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) dm$$

belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) dm = \frac{1}{l-k} \left[\int_k^{\frac{k+l}{2}} \xi(m) dm + \int_{\frac{k+l}{2}}^l \xi(m) dm \right]$$

olarak yazıp bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integrallere sırasıyla $m = k + t(l-k)/2$ ve $m = l - t(l-k)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) dm &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\xi \left(k + \frac{t(l-k)}{2} \right) + \xi \left(l - \frac{t(l-k)}{2} \right) \right] dt \\ &\geq \xi \left(\frac{k+l}{2} \right)\end{aligned}$$

elde edilir ve Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı da ispat edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2.(Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği): $\xi: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. $w: [k, l] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik ve $w \in L[k, l]$ ise

$$\xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_k^l w(m) dm \leq \int_k^l \xi(m) w(m) dm \leq \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m) dm \quad (3.2)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlarda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genellemesi olan Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği denir [17].

İspat. Her $t \in [0, 1]$ için ξ , $[k, l]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned}\xi \left(\frac{k+l}{2} \right) &= \xi \left(\frac{tk + (1-t)l + tl + (1-t)k}{2} \right) \\ &\leq \frac{\xi(tk + (1-t)l) + \xi(tl + (1-t)k)}{2}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı da $w(tl + (1-t)k)$ ile çarpılıp $[0, 1]$ aralığında t 'ye göre integral aldığımızda,

$$\begin{aligned}\xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_0^1 \xi(tl + (1-t)k) dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^1 w(tl + (1-t)k) [\xi(tk + (1-t)l) + \xi(tl + (1-t)k)] dt\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $m = tl + (1-t)k$ dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned}\xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \frac{1}{(l-k)} \int_k^l w(m) dm \\ \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(l-k)} \left\{ \int_k^l \xi(k+l-m) w(m) dm + \int_k^l \xi(m) w(m) dm \right\} \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{(l-k)} \left\{ \int_k^l \xi(m) w(k+l-m) dm + \int_k^l \xi(m) w(m) dm \right\} \\ = \frac{1}{(l-k)} \int_k^l \xi(m) w(m) dm\end{aligned}$$

bulunarak eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Sağ tarafın ispatı için ξ konveks fonksiyon olduğundan her $t \in [0,1]$ için,

$$\xi(tk + (1-t)l) + \xi(tl + (1-t)k) \leq \xi(k) + \xi(l)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını da $w(tl + (1-t)k)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t 'ye göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 w(tl + (1-t)k) \xi(tk + (1-t)l) dt \\ & + \int_0^1 w(tl + (1-t)k) \xi(tl + (1-t)k) dt \\ & \leq [\xi(k) + \xi(l)] \int_0^1 w(tl + (1-t)k) dt \end{aligned}$$

yazılır. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$\frac{1}{2(l-k)} \int_k^l \xi(m) w(m) dm \leq [\xi(k) + \xi(l)] \frac{1}{(l-k)} \int_k^l w(m) dm$$

bulunarak eşitsizliğin sağ tarafı ispatlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

[19]' da Kadakal trigonometrik konveks fonksiyonları tanımlayıp özelliklerini vermiştir. Bu konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği üzerine yaptığı çalışmalar aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.1.1. ξ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere, $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall k, l \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\xi(tk + (1-t)l) \leq \left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) \xi(k) + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) \xi(l) \quad (3.3)$$

eşitsizliğini sağlayan ξ fonksiyonuna trigonometrik konveks fonksiyon denir. Eşitsizliğin tersini sağlıyorsa trigonometrik konkav fonksiyon denir ve burada TC(I) kümesine ile I aralığında tüm trigonometrik konveks fonksiyonların kümesidir [19].

Trigonometrik konveks fonksiyonlar ile diğer fonksiyon sınıfları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilmektedir:

Uyarı 3.1.1. $h(t) = \sin \frac{\pi t}{2}$ için her trigonometrik konveks fonksiyon bir h-konveks fonksiyondur.

Uyarı 3.1.2. Açıkçası $\xi(k)$, negatif olmayan bir trigonometrik konveks fonksiyon ise $\forall k, l \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\xi(tk + (1-t)l) \leq \left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) \xi(k) + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) \xi(l) \leq \xi(k) + \xi(l) \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlandığından $\xi(x)$ fonksiyonu P - fonksiyondur.

Örnek 3.1.1. Negatif olmayan sabit fonksiyonlar trigonometrik konvektir, $\forall t \in [0,1]$ için $\sin \frac{\pi t}{2} + \cos \frac{\pi t}{2} \geq 1$.

Lemma 3.1.1.

i) Negatif olmayan konveks fonksiyon trigonometrik konvektir.

ii) $h(t) = \sin \frac{\pi t}{2}$ için her h –konveks fonksiyon trigonometrik konveks fonksiyondur [19].

İspat.

i) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kapalı aralığında, $\frac{\sin k}{k}$ fonksiyonu azalan ve $t \in [0,1]$ için $t \leq \sin \frac{\pi t}{2} \leq \frac{\pi t}{2}$ ve $1 - t \leq \cos \frac{\pi t}{2} \leq \frac{\pi}{2}(1 - t)$ dir.

ii) ξ trigonometrik konveks fonksiyon olsun. Eğer $h_2(t) = \sin \frac{\pi t}{2}$ alınırsa ξ , h_2 -konveks fonksiyondur.[11] de kanıtlanmış olup, $h_2 \leq h_1$ ve ξ h_2 -konveks ise ξ h_1 -konvektir. Eğer $t \in [0,1]$ için $h_1(t) = h(t) = \frac{\pi t}{2}$ alınırsa, aynı zamanda $t \in [0,1]$ için $h_2(t) \leq h(t)$ ise ξ de h -konvektir.

$\xi: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının vektör uzayındaki trigonometrik olarak konveks bir koni boşluğunun konveks fonksiyonlarının görüldüğünü görebiliriz.

Teorem 3.1.3. $\xi, \psi: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer ξ ve ψ trigonometrik konveks fonksiyon ise,

(i) $\xi + \psi$, trigonometrik konveks fonksiyondur.

(ii) $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $c\xi$, trigonometrik konveks fonksiyondur [19].

Teorem 3.1.4. Eğer $\xi: I \rightarrow J$ konveks ve $\psi: I \rightarrow J$ trigonometrik konveks ve artan ise $\xi \circ \psi: I \rightarrow J$ trigonometrik konveks fonksiyondur [19].

İspat. $k, l \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \xi)(tk + (1 - t)l) &= \psi(\xi(tk + (1 - t)l)) \\ &\leq \psi\left(t\xi(k) + (1 - t)\xi(l)\right) \leq \left(\sin \frac{\pi t}{2}\right) \psi(\xi(k)) + \left(\cos \frac{\pi t}{2}\right) \psi(\xi(l)) \\ &= \left(\sin \frac{\pi t}{2}\right) (\psi \circ \xi)(k) + \left(\cos \frac{\pi t}{2}\right) (\psi \circ \xi)(l) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. $k, l > 0$ ve $\xi_\alpha: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ keyfi bir trigonometrik konveks fonksiyon ve $\xi(k) = \sup_\alpha \xi_\alpha(k)$ olsun. Eğer boş kümeden farklı bir $J = \{u \in [k, l]: \xi(u) < \infty\}$ için ξ , bu küme üzerinde trigonometrik konveks fonksiyondur [19].

İspat. $t \in [0, 1]$ ve $k, l \in J$ de keyfi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \xi(tk + (1-t)l) &= \sup_\alpha \xi_\alpha(tk + (1-t)l) \\ &\leq \sup_\alpha \left[\left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) \xi_\alpha(k) + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) \xi_\alpha(l) \right] \\ &\leq \left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) \sup_\alpha \xi_\alpha(k) + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) \sup_\alpha \xi_\alpha(l) \\ &= \left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) \xi(k) + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) \xi(l) < \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

J üzerinde sonlu görüntülere sahip olan bir aralık olduğunu gösteren noktaların herhangi birini ifade eder ve böylece ξ , trigonometrik olarak J üzerinde konveks fonksiyondur. Böylece ispat tamamlanır.

[20]' da Kırmacı ve Özdemir aşağıdaki özdeşlikleri ifade etmişlerdir. Bu lemma oluşturulan çalışmanın ana çatısını oluşturmaktadır.

Lemma 3.1.2. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $k, l \in I^\circ$ için $\xi' \in L[k, l]$ ise

$$\begin{aligned} &\frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) dm - \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \\ &= (l-k) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t \xi'(tk + (1-t)l) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \xi'(tk + (1-t)l) dt \right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [20].

Lemma 3.1.3. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ$ ve $k < l$ olsun. $w: [k, l] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $\xi' \in L[k, l]$ ise,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) w(m) dm - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(m) dm \\ &= (l-k) \int_0^1 k(t) \xi'(tk + (1-t)l) dt \quad (3.6) \end{aligned}$$

olur. Burada $t \in [0, 1]$ için

$$k(t) = \begin{cases} \int_0^t w(ks + (1-s)l)ds & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds & , \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Şeklindedir [18].

İspat. (3.6) eşitliğinin sağ tarafında $k(t)$ fonksiyonunu yerine yazarsak

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 k(t) \xi'(tk + (1-t)l) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l) ds \right) \xi'(tk + (1-t)l) dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\int_t^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \xi'(tk + (1-t)l) dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l) ds \right) \left\{ \frac{\xi(tk + (1-t)l) \big|_0^{\frac{1}{2}}}{k-l} - \int_0^{\frac{1}{2}} w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt \right\} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) ds \right) \left\{ \frac{\xi\left(\frac{k+l}{2}\right)}{k-l} - \int_0^{\frac{1}{2}} w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt \right\} \end{aligned}$$

benzer şekilde,

$$I_2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \left\{ \frac{\xi\left(\frac{k+l}{2}\right)}{k-l} - \int_{\frac{1}{2}}^1 w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt \right\}$$

olacağından,

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \left(\int_0^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \left\{ \frac{\xi\left(\frac{k+l}{2}\right)}{k-l} - \int_0^1 w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt \right\}$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için $m = tk + (1-t)l$ değişken değişimi yapılırsa ve her iki taraf $(l-k)$ ile çarpılırsa (3.12) ifadesine ulaşılarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.1. (3.6) eşitliğinde $w(x) = 1$ alınırsa (3.5) elde edilir [18].

Teorem 3.1.6. [18] $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ$, $k < l$, $w: [k, l] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|\xi'|$, $[k, l]$ üzerinde konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(x) dx \\ & \leq \left(\frac{1}{(l-k)^2} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) [(x-k)^2 - (l-x)^2] dx \right) \left(\frac{|\xi'(k)| + |\xi'(l)|}{2} \right) \quad (3.7) \end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.1.3. ve $|\xi'|$ konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(x) dx \right| \\ & \leq \left\{ \left(\frac{1}{(l-k)^2} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) [(x-k)^2 - (l-x)^2] dx \right) \right. \\ & \quad \times \left(\frac{|\xi'(k)| + |\xi'(l)|}{2} \right) \\ & \leq (l-k) \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l) ds \right) [t|\xi'(k)| + (1-t)|\xi'(l)|] dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) [t|\xi'(k)| + (1-t)|\xi'(l)|] dt \right\} \\ & = Q_1 + Q_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Q_1 integralinde integrasyon sırasını değiştirip, $s \in [0,1]$ olmak üzere $x = ks + (1-l)s$ için değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l) ds \right) [t|\xi'(k)| + (1-t)|\xi'(l)|] ds dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_8^t w(ks + (1-s)l) ds \right) [t|\xi'(k)| + (1-t)|\xi'(l)|] ds dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) \left[\left(\frac{1}{8} - \frac{s^2}{2} \right) |\xi'(k)| + \left(\frac{(1-s)^2}{2} - \frac{1}{8} \right) |\xi'(l)| \right] ds. \\
&= \frac{1}{8(l-k)^3} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) [(l-k)^2 - 4(l-x)^2] |\xi'(k)| \\
&\quad + (4(x-k)^2 - (l-k)^2) |\xi'(l)| dx
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, entegrasyonun sırasını değiştirerek

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 w(ks + (1-s)l) \left[\left(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{8} \right) |\xi'(k)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{8} - \frac{(1-s)^2}{2} \right) |\xi'(l)| \right] ds \\
&= \frac{1}{8(l-k)^3} \int_k^{\frac{k+l}{2}} w(x) [(4(l-x)^2 - (l-k)^2) |\xi'(k)| \\
&\quad + ((l-k)^2 - 4(x-k)^2) |\xi'(l)|] dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Q_1 ve Q_2 integrallerinde $w(x)$ fonksiyonu $x = \frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan

$$Q_1 = Q_2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.7. [18] $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ, k < l$, $w: [k, l] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|\xi'|^q$, $[k, l]$ üzerinde konveks ve $q > 1$ ise $1/p + 1/q = 1$ için,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) w(m) dm - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(m) dm \right| \\
&\leq (l-k) \left\{ \left(\frac{1}{(l-k)^2} \int_{\frac{k+l}{2}}^l \left(m - \frac{k+l}{2}\right) w^p(m) dm \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \\
&\quad \left. \left[\left(\frac{|\xi'(k)|^q + 2|\xi'(l)|^q}{24} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|\xi'(k)|^q + |\xi'(l)|^q}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.1.3. 'den ve integrasyon sırası değişikliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(m)dm \right| \\
& \leq (l-k) \left\{ \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l)ds \right) |\xi'(tk + (1-t)l)|dt \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds \right) |\xi'(ta + (1-t)b)|dt \right] \right\} \\
& = (l-k) \left\{ \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) |\xi'(tk + (1-t)l)|dt ds \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) \right) |\xi'(tk + (1-t)l)|dt \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(m)dm \right| \\
& \leq (l-k) \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} |\xi'(tk + (1-t)l)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s |\xi'(tk + (1-t)l)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

olur. $|\xi'|^q$ konveks fonksiyon olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(m)dm \right| \leq (l-k) \\
& \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} (t|\xi'(k)|^q + (1-t)|\xi'(l)|^q) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s (t|\xi'(k)|^q + (1-t)|\xi'(l)|^q) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& = R_1 + R_2.
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikteki integralleri aşağıdaki şekilde

$$R_1 = \left(\frac{1}{2(l-k)^2} \int_{\frac{k+l}{2}}^l (2m-k-l)w^p(m)dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\xi'(k)|^q + 2|\xi'(l)|^q}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.10)$$

ve

$$R_2 = \left(\frac{1}{2(l-k)^2} \int_k^{\frac{k+l}{2}} (k+l-2m)w^p(m)dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|\xi'(k)|^q + |\xi'(l)|^q}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.11)$$

elde edilip burada $w(m)$ fonksiyonunun $m = \frac{k+l}{2}$ ye göre simetrik olduğundan

$$R_2 = \left(\frac{1}{2(l-k)^2} \int_k^{\frac{k+l}{2}} (k+l-2m)w^p(m)dm \right)^{\frac{1}{p}} = R_1 \quad (3.12)$$

olur. (3.10), (3.11) ve (3.12) kullanarak (3.9) elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, (3.2) 'nin sağ tarafıyla bağlantılı bazı yeni sonuçlar vereceğiz.

Lemma 3.1.4. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ$, $k < l$ ve $w: [k, l] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $\xi' \in L[k, l]$ ise,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m)dm - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm \\ &= \frac{(l-k)}{2} \int_0^1 p(t)\xi'(tk + (1-t)l)dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitliği sağlanır. Burada her $t \in [0,1]$ için

$$p(t) = \int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds - \int_0^t w(ks + (1-s)l)ds$$

dir [18].

İspat. (3.13) eşitliğinin sağ tarafı düzenlenirse

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 P(t)\xi'(tk + (1-t)l)dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds \right) \xi'(tk + (1-t)l)dt \\ &+ \int_0^1 \left(- \int_0^t w(ks + (1-s)l)ds \right) \xi'(tk + (1-t)l)dt \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} \Big|_0^1 \\
&+ \int_0^1 w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt \\
&= - \left(\int_0^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \frac{\xi(l)}{k-l} \\
&+ \int_0^1 w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
J_2 &= - \left(\int_0^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \frac{\xi(k)}{k-l} \\
&+ \int_0^1 w(kt + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$J = J_1 + J_2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 w(tk + (1-t)l) \frac{\xi(tk + (1-t)l)}{k-l} dt \\
&- \left(\int_0^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) \frac{\xi(k) + \xi(l)}{k-l}
\end{aligned}$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için $m = tk + (1-t)l$ değişken değişimi yapılırsa ve her iki tarafı $\frac{(l-k)}{2}$ ile çarpılırsa (3.13) ifadesine ulaşılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.8. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ$, $k < l, w: [k, l] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilebilir ve $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik olsun.

Eğer $|\xi'|$, $[k, l]$ üzerinde konveks ise,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m) dm - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m) w(m) dm \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(m)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\xi'(k)|^q + |\xi'(l)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur ve burada $u \in [0,1]$ için $\gamma(u) = \left| \int_{k+(l-k)u}^{l-(l-k)u} w(m)dm \right|$ dır [18].

İspat. (3.13) ifadesinden her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m)dm - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm \right| \\ & \leq \frac{l-k}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds - \int_0^t w(ks + (1-s)l)ds \right| |\xi'(tk + (1-t)l)|dt \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_k^{l-(l-k)t} w(m)dm - \int_{l-(l-k)t}^l w(m)dm \right| |\xi'(tk + (1-t)l)|dt \right] \end{aligned}$$

olur. $w(m), \frac{k+l}{2}$ 'ye göresimetrik ve $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$\int_k^{l-(l-k)t} w(m)dm - \int_{l-(l-k)t}^l w(m)dm = \int_{k+(l-k)t}^{l-(l-k)t} w(m)dm$$

$t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$\int_k^{l-(l-k)t} w(m)dm - \int_{l-(l-k)t}^l w(m)dm = - \int_{l-(l-k)t}^{k+(l-k)t} w(m)dm$$

olacağından bu değerler eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m)dm - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)du \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(m) |\xi'(tk + (1-t)l)|dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\gamma(m) = \left| \int_{k+(l-k)t}^{l-(l-k)t} w(m)dm \right|$ olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m)dm - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(m)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 |\xi'(tk + (1-t)l)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir ve $|\xi'|^q$ konveks olduğundan

$$\left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(m)dm - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(m)w(m)dm \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(m)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\xi'(k)|^q + |\xi'(l)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.2. Eğer Teorem (3.1.8)' de $w(m) = 1$ alınırsa

$$\int_0^1 \left(\left| \int_{k+(l+k)t}^{l-(l-k)t} dt \right| \right)^p dt = (l-k)^p \int_0^1 |1-2t|^p dt = \frac{(l-k)^p}{(p+1)} \quad (3.15)$$

elde edilir [18].

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, trigonometrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlik ile ilgili fonksiyonlar için yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon $k, l \in I^\circ, k < l$, $w: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, $\xi', [k, l]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x)w(x)dx - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(x)dx \right| \\ & \leq \frac{4\sqrt{2}}{(l-k)} \int_k^l w(x) \sin\left(\frac{\pi(2x-k-l)}{4(l-k)}\right) \left[\frac{|\xi'(k)| + |\xi'(l)|}{2} \right] dx \quad (4.1) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.1.3. eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x)w(x)dx - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(x)dx \right| \\ & \leq (l-k) \left| \int_0^{1/2} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l)ds \right) \xi'(tk + (1-t)l)dt \right. \\ & \quad \left. - \int_{1/2}^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds \right) \xi'(tk + (1-t)l)dt \right| \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.3. ve $|\xi'|$ 'nin trigonometrik konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x)w(x)dx - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(x)dx \right| \\ & \leq (l-k) \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l)ds \right) |\xi'(tk + (1-t)l)| dt \\ & \quad + (l-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds \right) |\xi'(tk + (1-t)l)| dt \\ & \leq (l-k) \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l)ds \right) \left[\left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(k)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(l)| \right] dt \\ & \quad + (l-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l)ds \right) \left[\left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(k)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(l)| \right] dt \end{aligned}$$

elde edilir. Son elde edilen integrallerde $t, s \in [0,1]$ için integrasyon sırası değiştirilip $x = ks + (1-s)l$ değişken değişimleri yapılır ve $w(x)$ ' in $x = \frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{s=0}^{s=t} w(ks + (1-s)l) ds \right) \left[\left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(k)| + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(l)| \right] dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t=s}^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) \right) \left[\left(\sin \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(k)| + \left(\cos \frac{\pi t}{2} \right) |\xi'(l)| \right] dt ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) \right) \sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_s^{\frac{1}{2}} (w(ks + (1-s)l)) \cos \frac{\pi t}{2} |\xi'(l)| dt \right] ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) \left[\left(|\xi'(k)| \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi t}{2} \right) \right) \Big|_s^{\frac{1}{2}} + \left(|\xi'(l)| \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2} \right) \Big|_s^{\frac{1}{2}} \right] ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} w \left(\begin{matrix} ks + \\ (1-s)l \end{matrix} \right) \left[\begin{matrix} -\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \frac{\pi s}{2} \right) \\ +\frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi s}{2} \right) \end{matrix} \right] ds \\
&= \frac{1}{l-k} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) \left[\begin{matrix} -\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{l-x}{l-k} \right) \right) \\ +\frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{l-x}{l-k} \right) \right) \end{matrix} \right] dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{t=\frac{1}{2}}^{t=s} w(ks + (1-s)l) ds \right) \left[\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)| + \cos \frac{\pi s}{2} |\xi'(l)| \right] dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{s=t}^{s=1} w(ks + (1-s)l) \right) \left[\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)| + \cos \frac{\pi s}{2} |\xi'(l)| \right] dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 w(ks + (1-s)l) \left[\begin{matrix} -\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(\cos \frac{\pi s}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ +\frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(\sin \frac{\pi s}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{matrix} \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l-k} \int_k^{\frac{k+l}{2}} w(x) \left[-\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(\cos \frac{\pi(l-x)}{2(l-k)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(\sin \frac{\pi(l-x)}{2(l-k)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] dx \\
I_2 &= \frac{1}{l-k} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(k+l-x) \left[-\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(\cos \frac{\pi(x-k)}{2(l-k)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(\sin \frac{\pi(x-k)}{2(l-k)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] dx
\end{aligned}$$

elde edilir. İki integral taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \frac{1}{l-k} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) \left[-\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(\cos \frac{\pi(x-k)}{2(l-k)} - \cos \frac{\pi(l-x)}{2(l-k)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(\sin \frac{\pi(x-k)}{2(l-k)} - \sin \frac{\pi(l-x)}{2(l-k)} \right) \right] dx \\
&= \frac{1}{l-k} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) \left[-\frac{2|\xi'(k)|}{\pi} \left(-2 \sin \frac{\pi(l-k)}{4(l-k)} \cdot \sin \frac{\pi(2x-k-l)}{4(l-k)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\xi'(l)|}{\pi} \left(2 \cos \frac{\pi(l-k)}{4(l-k)} \cdot \sin \frac{\pi(2x-k-l)}{4(l-k)} \right) \right] dx \\
&= \frac{1}{l-k} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) \left[\frac{2\sqrt{2}|\xi'(k)|}{\pi} \sin \left(\frac{\pi(2x-k-l)}{4(l-k)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}|\xi'(l)|}{\pi} \sin \left(\frac{\pi(2x-k-l)}{4(l-k)} \right) \right] dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{(l-k)\pi} \int_{\frac{k+l}{2}}^l w(x) [|\xi'(k)| + |\xi'(l)|] \sin \left(\frac{\pi(2x-k-l)}{4(l-k)} \right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ, k < l$, $w: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $\frac{k+l}{2}$ ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, $|\xi'|^q, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, [k, l]$ aralığında konveks olduğunda

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_k^l w(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(l-k)}{(l-k)^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{\frac{k+l}{2}}^l \left(x - \frac{k+l}{2} \right) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\times \left[|\xi'(k)|^q \left(\sqrt{2} + \frac{4}{\pi} \right) + |\xi'(l)|^q \frac{4}{\pi} \right] \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.1.3. eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_k^l w(x) dx \right| \\ & \leq (l-k) \left\{ \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(ks + (1-s)l) ds \right) |\xi'(tk + (1-t)l)| dt \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(ks + (1-s)l) ds \right) |\xi'(tk + (1-t)l)| dt \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadede integral sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_k^l w(x) dx \right| \\ & \leq (l-k) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(ks + (1-s)l) |\xi'(tk + (1-t)l)| dt ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(ks + (1-s)l) |\xi'(tk + (1-t)l)| dt ds \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_k^l w(x) dx \right| \\ & \leq (l-k) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right. \\ & \quad \times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} |\xi'(tk + (1-t)l)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad \left. + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right. \\ & \quad \times \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s |\xi'(tk + (1-t)l)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve $|\xi'|^q$ trigonometrik konveks olduğundan

$$\left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi \left(\frac{k+l}{2} \right) \int_k^l w(x) dx \right|$$

$$\leq (l-k) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)|^q + \cos \frac{\pi t}{2} |\xi'(l)|^q \right) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s \left(\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)|^q + \cos \frac{\pi t}{2} |\xi'(l)|^q \right) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

olur. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci integrali T_1 ile gösterip aşağıdaki şekilde hesaplanırsa

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)|^q dt ds \right. \\ &\quad \left. + |\xi'(l)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi t}{2} dt ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi s}{2} \right] ds \right. \\ &\quad \left. + |\xi'(l)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \right] ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi s}{2} \right] ds \right. \\ &\quad \left. + |\xi'(l)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \right] ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \left(-\frac{\sqrt{2}}{\pi} s + \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi s}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + |\xi'(l)|^q \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} s + \frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi s}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \left[-\frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right. \\ \left. + |\xi'(l)|^q \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right] \right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. İkinci integrali ise T_2 ile gösterip aşağıdaki şekilde hesaplanırsa

$$T_2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s \sin \frac{\pi t}{2} dt ds \right. \\ \left. + |\xi'(l)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s \cos \frac{\pi t}{2} dt ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi s}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{4} \right] ds \right. \\ \left. + |\xi'(l)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} \right] ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \left(-\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi s}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} s \right) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ + |\xi'(l)|^q \left(-\frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi s}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} s \right) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \left[-\frac{4}{\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right] \right. \\ \left. + |\xi'(l)|^q \left[-\frac{\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right] \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

$w(x)$ fonksiyonu $\frac{k+l}{2}$ ye göre simetrik olduğundan yararlanıp değişken değişimi yapılsa

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} w^p(ks + (1-s)l) t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) w^p(ks + (1-s)l) ds \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(l-k)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{\frac{k+l}{2}}^l \left(\frac{1}{2} - \frac{l-x}{l-k} \right) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(ks + (1-s)l) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 w^p(ks + (1-s)l) t \Big|_{\frac{1}{2}}^s ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) w^p(ks + (1-s)l) ds \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(l-k)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_k^{\frac{k+l}{2}} \left(\frac{l-x}{l-k} - \frac{1}{2} \right) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx - \frac{1}{l-k} \xi\left(\frac{k+l}{2}\right) \int_k^l w(x) dx \right| \\ &\leq \begin{cases} \frac{(l-k)}{(l-k)^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{\frac{k+l}{2}}^l \left(x - \frac{k+l}{2} \right) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ x \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \right)^{\frac{1}{q}} \left[|\xi'(k)|^q \left(\sqrt{2} + \frac{4}{\pi} \right) + |\xi'(l)|^q \frac{4}{\pi} \right]^{\frac{1}{q}} \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ$, $k < l$, $w: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, ξ' , $[k, l]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(x) dx - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[|\xi'(k)| \int_0^1 h(t) \sin \frac{\pi t}{2} dt + |\xi'(l)| \int_0^1 h(t) \cos \frac{\pi t}{2} dt \right] \quad (4.3) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\forall t \in [0, 1]$ için

$$h(t) = \left| \int_{k+(l-k)t}^{l-(l-k)t} w(x) dx \right|$$

dir.

İspat: Lemma 3.1.4.daki (3.13) eşitliğinin mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(x) dx - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{l-k}{2} \int_0^1 \left| \int_t^1 w(ks + (1-s)l) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t w(ks + (1-s)l) ds \right| |\xi'(kt + (1-t)l)| dt \end{aligned}$$

olur. $w(x)$ fonksiyonu $x = \frac{k+l}{2}$ simetrik olduğundan her $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$\int_k^{l-(l-k)t} w(x) dx - \int_{l-(l-k)t}^l w(x) dx = \int_{k+(l-k)t}^{l-(l-k)t} w(x) dx \quad (4.4)$$

ve her $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$\int_k^{l-(l-k)t} w(x) dx - \int_{l-(l-k)t}^l w(x) dx = - \int_{l-(l-k)t}^{k+(l-k)t} w(x) dx \quad (4.5)$$

yazılabilir ve ξ' , $[k, l]$ aralığında konveks olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.3. 'de $w(x) = 1$ alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) dx \right| \\ & \leq \frac{l-k}{2} \left[|\xi'(k)| \left(-\frac{2(-4 + 4\sqrt{2} - \pi)}{\pi^2} \right) + |\xi'(l)| \left(-\frac{2(-4 + 4\sqrt{2} - \pi)}{\pi^2} \right) \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat: (4.3) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınır

$$\begin{aligned} h(t) &= \left| \int_{k+(l-k)t}^{l-(l-k)t} w(x) dx \right| \\ &= |l - (l-k)t - k - (l-k)t| = (l-k)|1 - 2t| \end{aligned}$$

olur ve bu ifade eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l dx - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) dx \right| \\ & \leq \frac{l-k}{2} \left[\int_0^1 |1 - 2t| \sin \frac{\pi t}{2} dt |\xi'(k)| + \int_0^1 |1 - 2t| \cos \frac{\pi t}{2} dt |\xi'(l)| \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikteki integraller aşağıdaki şekilde hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t| \sin \frac{\pi t}{2} dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) \sin \frac{\pi t}{2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) \sin \frac{\pi t}{2} dt \\ &= -\frac{2(-4+4\sqrt{2}-\pi)}{\pi^2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t| \cos \frac{\pi t}{2} dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) \cos \frac{\pi t}{2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) \cos \frac{\pi t}{2} dt \\ &= -\frac{2(-4+4\sqrt{2}-\pi)}{\pi^2}\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $k, l \in I^\circ$, $k < l$, $w: [k, l] \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, $|\xi'|^q, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $[k, l]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned}&\left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(x) dx - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (h(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)|^q + \cos \frac{\pi t}{2} |\xi'(l)|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Burada $\forall t \in [0,1]$ için

$$h(t) = \left| \int_{k+(l-k)t}^{l-(l-k)t} w(x) dx \right|$$

dir.

İspat. (3.13) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp (4.4) ve (4.5) eşitlikleri $w(x)$ in $\frac{k+l}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olduğundan elde edilen $h(t)$ fonksiyonundan yararlanıp Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(x) dx - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 h^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\xi'(kt + (1-t)l)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $|\xi'|^q$ 'in trigonometrik fonksiyon olduğundan

$$\left| \frac{1}{l-k} \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} \int_k^l w(x) dx - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) w(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (h(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)|^q + \cos \frac{\pi t}{2} |\xi'(l)|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.4' de $w(x)=1$ alınırsa

$$\left| \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{l-k}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{2}{q}} \cdot \pi^{-\frac{1}{q}} \cdot A^{\frac{1}{q}}(|\xi'(k)|^q, |\xi'(l)|^q) \quad (4.8)$$

elde edilir.

İspat. Teorem 4.1.4 de $w(x) = 1$ alınırsa $h(t) = (l-k)|1-2t|$ olduğundan

$$\left| \frac{\xi(k) + \xi(l)}{2} - \frac{1}{l-k} \int_k^l \xi(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} (l-k) \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\sin \frac{\pi t}{2} |\xi'(k)|^q + \cos \frac{\pi t}{2} |\xi'(l)|^q \right) dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{l-k}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[|\xi'(k)|^q \int_0^1 \sin \frac{\pi t}{2} dt + |\xi'(l)|^q \int_0^1 \cos \frac{\pi t}{2} dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{l-k}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{2(|\xi'(k)|^q + |\xi'(l)|^q)}{\pi} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{l-k}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot 2^{\frac{2}{q}} \cdot \pi^{-\frac{1}{q}} \cdot A^{\frac{1}{q}}(|\xi'(k)|^q, |\xi'(l)|^q)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Son yıllarda yapılan çalışmalarda çeşitli konveks fonksiyonlar için farklı integral eşitsizliklerine uygulandığı bilinmektedir. Bunlardan birisi de trigonometrik konveks fonksiyonlardır. Trigonometrik konveks fonksiyonlar Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler üzerinde farklı yazarlar tarafından irdelenmiştir. Bu tezde trigonometrik konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard Fejer tipli eşitsizliklerin hem sağ tarafı hemde sol tarafı için yeni teoremler ve yeni sonuçlar elde ettik.

Bu alanda çalışan ve çalışmak isteyen yazarlar için bu trigonometrik konveks fonksiyonlar farklı integral eşitsizliklerine uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., Inequalities 2nd Ed., Cambridge, 1952.
- [2] Beckenbach, E.F., Bellman, R., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 198, 1961.
- [3] Mitrinović, D. S., Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [4] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Classic and new inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1993.
- [5] Pachpatte, B.G., Mathematical inequalities, Elsevier B.V., Volume 67, Amsterdam, The Netherlands, 591, 2005.
- [6] Niculescu, C.P., Persson, L.E., Convex Functions and Their Application, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [7] Hermite, C., Sur deux limites d'une integrale, Mathesis, 3, 82-83, 1883.
- [8] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées, 58, 171-215, 1893.
- [9] Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1, 2000.
- [10] Pečarić, J., Proschan, F. And Tong, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc. , 469 pp, Boston, Y.L. 1992.
- [11] Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300pp, New York. 1973.
- [12] Azpeitia, A. G., Convex function and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12, 1994.
- [13] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., & Delgado, R. V., Inequalities: A Mathematical, 2009.
- [14] Adams, R. A., Essex, C., Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, pp 934, 2010.

- [15] Bayraktar, M., Analiz, ISBN 978-605-395-412-5, 2010.
- [16] Carter, M., Van Brunt, B., The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction, ISBN: 0387950125, 2000.
- [17] Fejér, L., Über die Fourierreihen II, Hungarian, 1906.
- [18] Sarıkaya, M.Z., On new Hermite Hadamard Fejer type integral inequalities, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 57, N.3, 377-386, 2012.
- [19] Kadakal, H., Hermite-Hadamard Type Inequalities for trigonometric ally convex functions, "Vasile Alecsandri" University of Bacău Faculty of Sciences Scientific St. And Res. Series Math. And Inform., 28 (2), 2018, 19-28.
- [20] Kırmacı, U.S., Özdemir, M.E., On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint Formula, Appl. Math.

ÖZGEÇMİŞ

Ercihan GÜNGÖR İlk, orta ve lise eğitimini Giresun Bulancak'ta tamamladı. 1994 yılında Bulancak Lisesi'nden mezun oldu. 1997 yılında başladığı Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2002 yılında bitirdi. 2003-2016 yılları arasında çeşitli dershanelerde çalıştı. 2016 yılından itibaren MEB'de çalışmaya başladı. 2019 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Bulancak Kovanlık Beldesinde Kovanlık ÇPAL'de görev yapmaktadır.

