



**TSENG ALGORİTMASI TABANLI YENİ BİR
PLUG-AND-PLAY YAKLAŞIMI: PNP-TSENG VE
SÜPER ÇÖZÜNÜRLÜK UYGULAMASI**

Eda Nur YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



TSENG ALGORİTMASI TABANLI YENİ BİR PLUG-AND-PLAY
YAKLAŞIMI: PNP-TSENG VE SÜPER ÇÖZÜNÜRLÜK UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Eda Nur YILDIRIM

Danışman: Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

ERZURUM, 2025

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

TSENG ALGORİTMASI TABANLI YENİ BİR PLUG-AND-PLAY
YAKLAŞIMI: PNP-TSENG VE SÜPER ÇÖZÜNÜRLÜK UYGULAMASI

Prof. Dr. İbrahim KARAHAN danışmanlığında Eda Nur YILDIRIM tarafından hazırlanan bu çalışma 19.12.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (3/3)** kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İbrahim KARAHAN
Erzurum Teknik Üniversitesi

İmza

Üye: Prof. Dr. İsa YILDIRIM
Atatürk Üniversitesi

İmza

Üye: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR
Erzurum Teknik Üniversitesi

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. İlker KAZAZ
Enstitü Müdürü

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etik ilkelere uygun davrandığımı ve tezin hazırlanması sürecinde üretken yapay zekâ programlarından, içeriğin ve sonuçların özgünlük sorumluluğunun tarafıma ait olması ve çalışmanın bilimsel niteliğini etkilemeyecek düzeyde, yalnızca yardımcı bir araç olarak sınırlı düzeyde destek alındığını beyan ederim.

19.12.2025

İmzası

Eda Nur YILDIRIM

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında ve lisans eğitimimden itibaren engin bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yön veren ve ufkumu genişleten; uzun yıllara yayılan akademik yolculuğum boyunca sabrı ve rehberliğiyle her zaman yanımda olan; karşılaştığım güçlüklerde beni teşvik eden, zor zamanlarımda moral ve desteğini esirgemeyen, hoşgörüsü ve anlayışıyla yüksek lisans eğitim sürecimi kolaylaştıran ve bu çalışmanın ortaya çıkmasına değerli katkılar sunan saygıdeğer yüksek lisans tez danışman hocam Prof. Dr. İbrahim KARAHAN'a içtenlikle teşekkür ederim.

Tez jürimde yer alarak çalışmamın değerlendirilmesinde değerli görüş ve katkılarını sunan Sayın Prof. Dr. İsa YILDIRIM ve Sayın Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ederim.

Ayrıca, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince bilgi birikimleri, emekleri ve rehberlikleriyle akademik gelişimime katkı sağlayan tüm değerli hocalarıma şükranlarımı sunarım.

Akademik eğitimim boyunca yanımda olan aileme teşekkür ederim. Özellikle hayatım boyunca şefkati, sabrı ve koşulsuz desteğiyle bana güç veren; değerleri ve öğretileriyle bugün olduğum kişiyi şekillendiren; varlığını, inancını ve desteğini her daim yanımda hissettiğim anneciğim CEVRİYE YILDIRIM'ı sevgi, saygı ve derin bir özlemle anıyor ve kendisine sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Bugün ulaştığım akademik kazanım ve elde ettiğim tüm başarılarım kıymetli anneciğimin emekleri ve bana duyduğu o sonsuz inancın sayesinde olduğunu özellikle belirtmek isterim. İlk öğretmenim olarak öğrettiği yaşam anlayışıyla hayattaki tüm zorluklara rağmen mücadele etmeye dair geride bıraktığı güçlü iç rehber, onun eksikliğiyle yüzleştiğim bu sürecin en zor anlarında yönümü bulmamı sağlamış; bugün attığım her adımda yolumu aydınlatan bir ışık olarak yaşamaya devam etmekte olup bu çalışmanın en güçlü dayanaklarından birini oluşturmaktadır.

Eda Nur YILDIRIM

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ TSENG ALGORİTMASI TABANLI YENİ BİR PLUG-AND-PLAY YAKLAŞIMI: PNP-TSENG VE SÜPER ÇÖZÜNÜRLÜK UYGULAMASI

Eda Nur YILDIRIM

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

Süper çözünürlük, bulanıklık giderme, sıkıştırılmış algılama ve tomografi gibi görüntü restorasyon problemleri genellikle bir optimizasyon problemi olarak formülize edilir. Bu problemlerin çözümünde, ISTA ve ADMM gibi proximal algoritmalar ile Plug-and-Play (PnP) yaklaşımları yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte mevcut PnP yöntemlerinin yakınsama hızı ve hesaplama maliyeti açısından iyileştirme potansiyeli bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında, mevcut PnP yöntemlerine alternatif olarak Tseng'in ileri-geri-ileri algoritması baz alınarak yeni bir algoritma olan PnP-Tseng geliştirilmiştir. Ortalamalı operatörler için tanımlanan bu algoritmanın ürettiği dizinin operatörün sabit noktasına yakınsadığı teorik olarak kanıtlanmış ve algoritmanın minimize ettiği objektif fonksiyonun varlığı gösterilmiştir. PnP-Tseng algoritmasının performansı, süper çözünürlük problemi üzerinde PnP-ISTA ve PnP-ADMM algoritmaları ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Deneysel sonuçlar, önerilen PnP-Tseng algoritmasının görüntü kalitesi ve yakınsama özellikleri açısından rekabetçi performans sergilediğini ortaya koymuştur. Bu çalışma, Tseng algoritmasının PnP çerçevesine ilk kez entegrasyonunu gerçekleştirerek görüntü restorasyon literatürüne teorik ve pratik katkı sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Plug-and-Play, Tseng algoritması, Görüntü restorasyon, Süper çözünürlük, Proximal algoritmalar.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

A NEW PLUG-AND-PLAY APPROACH BASED ON THE TSENG ALGORITHM: PNP-TSENG AND SUPER RESOLUTION APPLICATION

Eda Nur YILDIRIM

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

Image restoration problems such as super-resolution, deblurring, compressed sensing, and tomography are typically formulated as optimization problems. Proximal algorithms such as ISTA and ADMM, along with Plug-and-Play (PnP) approaches, are widely used in modern image restoration problems. However, existing PnP methods have potential for improvement in terms of convergence speed and computational cost. In this thesis, a novel algorithm called PnP-Tseng has been developed as an alternative to existing PnP methods, based on Tseng's forward-backward-forward algorithm. It has been theoretically proven that the sequence generated by this algorithm, defined for averaged operators, converges to the fixed point of the operator, and the existence of the objective function minimized by the algorithm has been demonstrated. The performance of the PnP-Tseng algorithm has been evaluated comparatively with PnP-ISTA and PnP-ADMM algorithms on the super-resolution problem. Experimental results reveal that the proposed PnP-Tseng algorithm exhibits competitive performance in terms of image quality and convergence properties. This study provides theoretical and practical contributions to the image restoration literature by realizing the first-time integration of Tseng's algorithm into the PnP framework.

Keywords: Plug-and-Play, Tseng algorithm, Image restoration, Super-resolution, Proximal algorithms.

İÇİNDEKİLER

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	v
TABLolar DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....	4
2.1. Temel Tanımlar	4
2.2 Süper Çözünürlük Problemi	8
2.2.1. Denoiser Çeşitleri	12
3. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	14
3.1. PnP-Tseng Algoritması ve Yakınsaklık Teoremleri	14
3.2. PnP-Tseng Algoritmasının Süper Çözünürlük Problemine Uygulaması	20
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	29
4.1. Sonuç	29
4.2. Öneriler.....	29
KAYNAKÇA	31
TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR.....	35

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Bazı Algoritmalar ve PnP Versiyonları.....	14
Tablo 2. Algoritmaların Performans Karşılaştırması	26



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun epigrafi.....	7
Şekil 2. Görüntü restorasyon sürecinin şematik gösterimi. (Waseem vd., 2024).....	9
Şekil 3. Alt örnekleme işlemi. (Unser, 2019)	11
Şekil 4. Algoritmaların PSNR değerlerine ait grafikler.....	24
Şekil 5. Algoritmaların SSIM değerlerine ait grafikler.	25
Şekil 6. Algoritma metriklerinin sütun grafikleri yardımıyla karşılaştırılması.....	26
Şekil 7. Süper çözünürlük problemine ait çıktı görüntüleri	27



KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

W	Gürültü Giderici Ağırlık Matrisi
$D(x)$	Gürültü Giderme Operatörü
$prox_g(x)$	Proximal Operatör
PnP	Plug-and-Play
ADMM	Alternatif Yönlü Çarpanlar Metodu
ISTA	İleri-Geri Ayırma Algoritması
DRS	Douglas–Rachford Ayırma Algoritması
SR	Süper Çözünürlük
$\{0,1\}^{m \times n}$	Girdileri 0 ve 1 Olan $m \times n$ Tipindeki Matrislerin Kümesi

1. GİRİŞ

Görüntü işleme ve makine öğrenmesi gibi alanlarda kullanılan ters problemlerin çözümüne duyulan ihtiyaç giderek artmaktadır. Bu problemlerin yapısı gereği, gözlem verisinden orijinal modele ulaşmak genellikle zor bir süreç olduğundan bu durum gelişmiş matematiksel araçların kullanılmasını zorunlu kılar. Özellikle ters problemlerin iyi tanımlanmamış yapısı; kararsız çözümler, bilgi kaybı ve çözümün güvenilirliğine dair belirsizlikler gibi çeşitli zorlukları da beraberinde getirir. Bu nedenle, güvenilir ve istikrarlı çıktılar sağlayabilmek için ileri düzey modelleme ve optimizasyon yaklaşımları büyük önem taşımaktadır.

Bu bağlamda öne çıkan temel uygulamalardan biri de görüntü restorasyonudur. Bu tür problemler, bozulma modeli ve gözlemlenen verilerden yola çıkarak orijinal görüntünün tahmin edilmesini amaçlar. Bu süreç, doğrudan gözlemlerden kaynak görüntüye ulaşmanın mümkün olmadığı durumlarda ters problem çerçevesinde ele alınır. Görüntü restorasyonu problemleri, matematiksel olarak genellikle bir optimizasyon problemi şeklinde formülize edilir ve çözüm, gözlem modelinin yanı sıra probleme özgü öncül bilgilere (prior knowledge) dayandırılır. Bu ters problemler genel olarak, bir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ veri duyarlılık terimi ve $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ düzenleme fonksiyonu olmak üzere,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + g(x)\} \quad (1.1)$$

şeklindeki optimizasyon problemi olarak formülize edilirler.

Herhangi bir optimizasyon problemini çözmeden önce, problemin yapısal özelliklerini analiz etmek ve buna en uygun çözüm yöntemini belirlemek son derece önemlidir. Bu nedenle, tercih edilecek algoritma; değişkenler arası ilişkiler, çözüm uzayının çeşitliliği ve hedef fonksiyonun davranışı gibi çeşitli etmenler göz önünde bulundurularak seçilmelidir. Bu bağlamda Daubechies vd. (2004) tarafından tanımlanan iteratif büzülme eşikleme (ISTA) veya ileri-geri ayırma (FBS) algoritması, Glowinski ve Marroco (1975) ve Gabay ve Mercier (1976) tarafından ayrı ayrı tanımlanan ve artırılmış Lagrange yöntemlerinin alternatif yön uygulaması olarak da bilinen ADMM algoritması, ve Douglas ve Rachford (1956) tarafından tanımlanan Douglas-Rachford ayırma (DRS) algoritması literatürde öne çıkan ve farklı problem türlerine başarıyla uygulanmış optimizasyon algoritmalarından bazılarıdır.

Görüntü restorasyonu alanında kullanılan bu model tabanlı yöntemler zaman içinde gelişerek, tak-çalıştır (Plug-and-Play (PnP)) yaklaşımları gibi esnek ve güçlü çözümler ortaya çıkarmıştır. Bu yaklaşımların ayırt edici yönü, güçlü ve önceden eğitilmiş denoising modellerinin doğrudan optimizasyon sürecine entegre edilerek, klasik öncül tanımlamalarının yerine kullanılabilmesidir.

PnP algoritmalarının görüntü restorasyonundaki teorik temelleri, ilk kez 2013 yılında Venkatakrishnan vd. (2013) tarafından ortaya konulan PnP-ADMM yaklaşımıyla atılmıştır. Bu çalışmada, klasik ADMM çerçevesinde lineer olmayan görüntü filtreleri proximal operatör gibi kullanılarak yeni bir algoritma önerilmiştir. Ancak, bu modelin yakınsama garantisi bulunmamakta, önerilen yapı yalnızca sezgisel başarıya dayanmaktaydı. Bu eksikliği ilk ele alan çalışma Chan vd. (2016) tarafından sunulmuştur. Araştırmacılar, algoritma çerçevesinde sınırlı denoiser kullanarak PnP-ADMM algoritmasının sabit bir noktaya yakınsadığını matematiksel olarak kanıtlamıştır. Bu çalışma, PnP çerçevesine ilk yakınsama garantisini kazandırmıştır.

PnP algoritmalarının teorik altyapısının genişletildiği bir diğer önemli katkı, Chan (2018) tarafından getirilmiştir. Bu çalışmada, PnP algoritmaları grafik sinyal işleme perspektifinden değerlendirilmiş, filtreleme işlemlerinin MAP (Maximum a Posteriori) tahmini ile nasıl ilişkilendirilebileceği açıklanmış ve denoiser kullanımının teorik temelleri daha da güçlendirilmiştir. Öte yandan, Sun vd. (2018) tarafından önerilen PnP-SGD algoritması, önceki çalışmalardan farklı olarak çevrim içi (online) öğrenme paradigmasını sistemin içine entegre ederek, veri akışına dayalı büyük ölçekli problemler için PnP yönteminin ölçeklenebilirliğini göstermiştir.

Chan vd. (2016) tarafından PnP algoritmalarının kararlılığına dair yapılan teorik analizler Gavaskar ve Chaudhury (2019) tarafından devam ettirilmiştir. Bu çalışma, Chan vd. (2016) tarafından sunulan sabit nokta yakınsaklığının ispatında bazı açılardan tamamlanmamış olduğunu belirlemiş ve bu eksikleri gidererek, daha genel koşullarda yakınsaklığın sağlandığını ispatlamıştır. Takip eden yıl, Gavaskar ve Chaudhury (2020) bu yaklaşımı ADMM dışına taşıyarak PnP-ISTA algoritması için sabit nokta yakınsaklığını çekirdek tabanlı denoiserlar çerçevesinde analiz etmiş, böylece algoritmanın farklı optimizasyon yapılarına da uygulanabileceğini göstermiştir.

Bu gelişmeleri takiben, Ryu vd. (2019) tarafından geliştirilen çalışmada, derin sinir ağlarının eğitiminde Lipschitz sürekli ve genişlemeyen koşullarını sağlayan denoiserlar kullanılarak, PnP algoritmalarının bu koşullar altında yakınsaklık garantisinin sağlanabileceği ortaya koyulmuştur.

Bu gelişmeleri temel alan Nair vd. (2021) ise daha kapsamlı bir katkı sunmuş; yalnızca sabit nokta yakınsaklığını değil, aynı zamanda algoritmanın minimize ettiği bir objektif fonksiyona da yakınsadığını kanıtlamıştır.

2020–2021 yıllarında, Sun vd. (2020) tarafından geliştirilen çalışmalar algoritmaların büyük veri ortamlarında çalışabilirliğine odaklanmış; paralel hesaplama ve bellek yönetimi gibi mühendislik boyutlarıyla PnP-ADMM’in pratik bir biçimde çalışabilmesi sağlanmıştır. 2023 yılında ise Kamilov vd. (2023) tarafından sunulan kapsamlı bir derleme çalışması ile PnP algoritmalarının tarihsel gelişimi, uygulama alanları, yakınsama analizleri ve teorik yaklaşımları bir araya getirilerek literatürde yeterince ele alınmamış konulara dikkat çekilmiştir.

Yukarıda özetlenen çalışmalardan yola çıkarak bu tez çalışmasında, görüntü restorasyonu için literatürde geniş çapta kullanılan Plug-and-Play yöntemlerine yeni bir katkı sunulmaktadır. Tseng algoritmasının bir tak çalıştır varyantı olan PnP-Tseng algoritması tanımlanmış ve teorik özellikleri incelenmiştir. Algoritmanın ortalamalı operatörler için sabit nokta yakınsaklığı matematiksel olarak ispatlanmıştır. Ayrıca, PnP-Tseng algoritmasının çözdüğü optimizasyon probleminin objektif fonksiyonunun yakınsaklığı da garanti altına alınmıştır. Önerilen yöntem, süper çözünürlük (super-resolution) problemine uygulanmış ve algoritmanın performansı literatürde yaygın olarak kullanılan PnP-ISTA ve PnP-ADMM algoritmaları ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Deneysel sonuçlar, PnP-Tseng algoritmasının rekabetçi bir performans sergilediğini göstermektedir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünün ardından ikinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar verilmektedir. Üçüncü bölüm olan araştırma bulguları bölümünde ise elde edilen temel bulgular yer almaktadır. Dördüncü ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Bu başlıkta tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilmektedir.

Tanım 2.1.1. V, F cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow F$ dönüşümü,

i. $\forall u \in V$ için $\langle u, u \rangle \geq 0$ dir.

ii. $\forall u, v \in V$ için $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ dir.

iii. $\forall u, v, w \in V$ için $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$ dir.

iv. $\forall u, v \in V$ ve $\forall k \in F$ için, $\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle$ dir.

şartlarını sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne iç çarpım dönüşümü denir (Kolmogorov & Fomin, 1970).

Tanım 2.1.2. N bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ olmak üzere bu fonksiyon,

$$N1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir norm fonksiyonu ve bu fonksiyon ile birlikte $(N, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir (Kreyszig, 2011).

Tanım 2.1.3. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a \in A'$ ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ iken, $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, $x \rightarrow a$ iken $f(x)$ 'in limiti L 'dir denir ve bu durum,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ile gösterilir (Rudin, 1976).

Tanım 2.1.4. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $|x - a| < \delta$ olacak şekildeki her $x \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ varsa, f 'ye a noktasında süreklidir denir (Rudin, 1976).

Tanım 2.1.5. (x_n) bir reel terimli dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer a sayısının her bir komşuluğu, (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimlerini içeriyorsa, (x_n) dizisi a sayısına yakınsıyor veya (x_n) dizisinin limiti a 'dır denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a \text{ veya } (x_n) \rightarrow a$$

şeklinde gösterilir (Rudin, 1976).

Tanım 2.1.6. X ve Y iki vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) için,

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

özellikliğini sağlayan $T: X \rightarrow Y$ dönüşümüne lineer operatör veya lineer dönüşüm adı verilir (Kreyszig, 2011).

Tanım 2.1.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in A$ ve her $\gamma \in [0,1]$ için

$$f(\gamma x + (1 - \gamma)y) \leq \gamma f(x) + (1 - \gamma)f(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa f 'ye konveks fonksiyon denir (Rockafellar, 1970).

Tanım 2.1.8. X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer, $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x noktasına T 'nin sabit noktası denir. T 'nin sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir (Agarwal, O'Regan, & Sahu, 2007).

Tanım 2.1.9. X ve Y iki normlu uzay $T: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde bir L sabiti varsa T dönüşümüne Lipschitz süreklidir denir. Eğer $L = 1$ ise T dönüşümüne genişlemeyen, $L < 1$ ise T 'ye daraltan dönüşüm denir (Rudin, 1976).

Tanım 2.1.10. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $\theta \in (0,1)$ olmak üzere,

$$A = (1 - \theta)I + \theta T$$

şeklinde tanımlanan A operatörüne θ -ortalamalıdır denir. Burada $I, \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı birim (özdeşlik) operatörünü ifade etmektedir.

Bir başka ifadeyle eğer

$$\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)I + \frac{1}{\theta}A$$

dönüşümü genişlemeyen ise A operatörü θ -ortalamalıdır. (Bauschke ve Combettes, 2017).

Örnek 2.1.11. $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$A(x) = |x|$$

operatörünü ele alalım. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$|A(x) - A(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

eşitsizliği sağlandığından A genişlemeyen ve aynı zamanda ortalamalı bir dönüşümdür. Her ortalamalı dönüşüm aynı zamanda genişlemeyen bir dönüşüm olsa da, bunun tersi genellikle doğru değildir. Bu duruma klasik bir örnek olarak $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüyle tanımlanan,

$$T(x) = -x$$

fonksiyonu verilebilir. Bu dönüşümün genişlemeyen bir dönüşüm olduğu açıktır ancak ortalamalı değildir.

Tanım 2.1.12. $\bar{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel uzayı yani $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ göstermek üzere $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için eğer $f(x) < +\infty$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}^n$ varsa f 'ye has (proper) fonksiyon adı verilir. f 'nin epigrafı ise

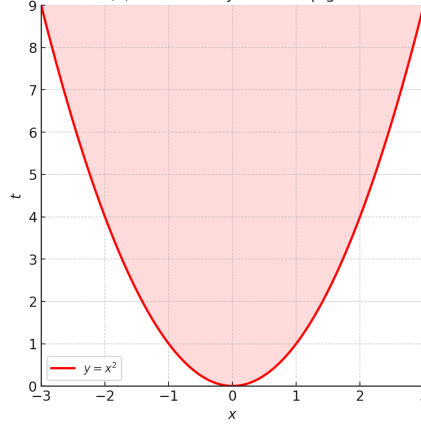
$$epi(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}: t \geq f(x)\}$$

şeklinde tanımlanır (Rockafellar, 1970).

Örneğin, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun epigrafı:

$$epi(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: t \geq x^2\}$$

şeklindedir. Geometrik olarak, $y = x^2$ parabolünün epigrafı, tanımlanan eğrinin üzerindeki noktaları ve eğrinin iç bölgesinde konumlanan tüm noktaları içermektedir. Aşağıdaki şekilde, kırmızı eğri $y = x^2$ fonksiyonunu, pembe bölge ise fonksiyonun epigrafını göstermektedir.



Şekil 1. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun epigrafi

Bir fonksiyonun epigrafi kapalı ise fonksiyon kapalı, epigrafi konveks ise fonksiyon konvektir. Buna göre $f(x) = x^2$ fonksiyonu kapalı ve konvektir.

Tanım 2.1.13. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer f' 'nin gradyanı Lipschitz sürekli ise f' 'ye β -smooth dönüşümdür denir. Yani,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq \beta \|x - y\|$$

eşitsizliği her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için sağlanıyorsa f , β -smooth bir dönüşümdür (Nesterov, 2004).

Örneğin, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun gradyanı $\nabla f(x) = x$ şeklindedir.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq |x - y|$$

eşitsizliği sağlandığından, bu fonksiyon $\beta = 1$ için smooth dönüşümdür.

Tanım 2.1.14. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kapalı, has ve konveks bir fonksiyon olsun. f 'nin v noktasındaki proximal operatörü,

$$prox_f(v) = \underset{x}{\operatorname{argmin}} (f(x) + \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2)$$

şeklinde tanımlanır (Parikh & Boyd, 2013).

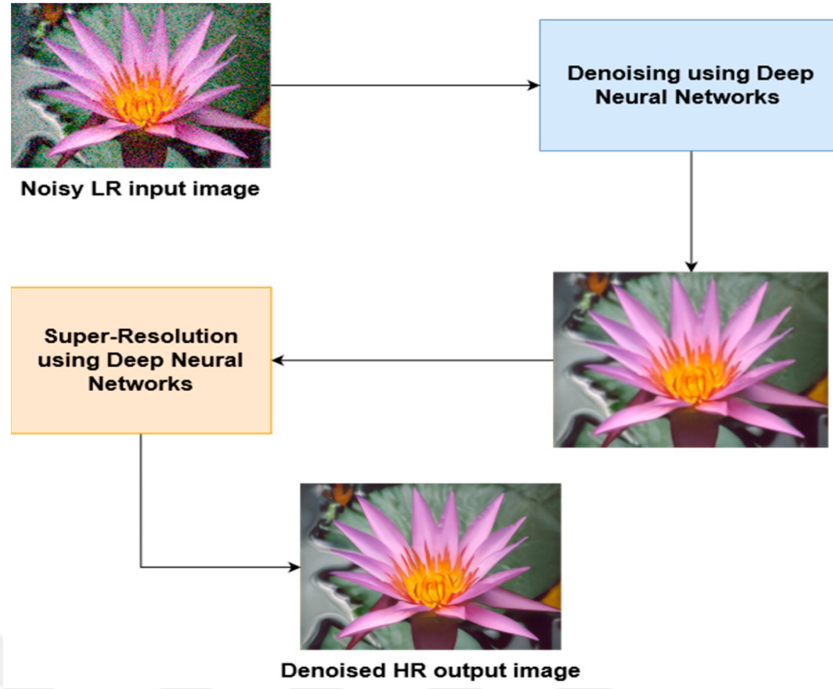
Tanıma göre proximal operatör v noktasına yakın noktalar içerisinde f 'yi minimize eden noktayı seçer.

Tanım 2.1.15. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $r > 0$ için $N'(a, r) \cap A \neq \emptyset$ ise a noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir.

2.2 Süper Çözünürlük Problemi

Süper çözünürlük (SR) problemi, bir veya birden fazla düşük çözünürlüklü görüntüden yararlanarak yüksek çözünürlüklü görüntü elde etme problemidir. Bu problem; uzaktan algılama sistemlerinde (uydu tabanlı ve hava aracı tabanlı görüntüleme), tıbbi görüntüleme, panoramik görüntü oluşturma (otomatik mozaikleme), yol işaretleri ve araç plakalarının otomatik tanınması, ultrason görüntüleme gibi pek çok farklı alanda uygulanmaktadır (Chopade ve Patil, 2015).

Süper çözünürlük probleminde gözlenen düşük çözünürlüklü görüntüler, genellikle gürültü ile bozulmuş biçimde elde edilmektedir. Bu nedenle, çözümün kararlılığını sağlamak ve elde edilen yüksek çözünürlüklü görüntünün kalitesini artırmak amacıyla gürültü giderici (denoiser) operatörler kullanılmaktadır. Bu operatörler, temel olarak gözlem verisinde rastgele gürültü bileşenlerini bastırırken görüntünün yapısal özelliklerini (kenarlar, dokular, pürüzsüz bölgeler) koruyan bir dönüşüm olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak, y bir gürültülü gözlem verisi olmak üzere, $\hat{x} = D(y)$ şeklinde ifade edilir. Burada $D(\cdot)$, gürültü azaltma fonksiyonunu, $\hat{x}$ ise gürültüden arındırılmış daha temiz görüntüyü göstermektedir. Bu tanımın uygulamadaki karşılığını, literatürde sunulan deneysel sonuçlarla görebiliriz. Gürültülü bir görüntünün gürültü giderme işlemi sonrası elde edilen temiz görüntüsü aşağıda karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.



Şekil 2. Görüntü restorasyon sürecinin şematik gösterimi (Waseem vd., 2024)

Matematiksel olarak süper çözünürlük problemi genel olarak

$$y = SBx + \eta$$

şeklinde modellenmektedir. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ yeniden elde edilmek istenen yüksek çözünürlüklü görüntüyü, $y \in \mathbb{R}^m$ gözlemlenen düşük çözünürlüklü görüntüyü, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bulanıklaştırma çekirdeğine karşılık gelen döngüsel matrisini, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ yüksek çözünürlüklü görüntüyü belirli bir faktör ile seyrelten alt örnekleme matrisini ve η ise gürültüyü temsil etmektedir. Aşağıda süper çözünürlük probleminde kullanılan temel tanımlar verilmektedir.

Tanım 2.2.1. Her satırı (sütunu) bir önceki satırın (sütunun) döngüsel bir permütasyonu olan kare matrislere döngüsel (circulant) matris denir (Gray, 2006).

Örneğin bir $n \times n$ tipinde C matrisinin her satırı bir üst satırın sağa kaydırılmasıyla elde ediliyorsa bu matris döngüseldir. Eğer $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ bir vektör ise, bu vektörden elde edilen $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ döngüsel matrisi

$$C = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \dots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanabilir. Özel olarak 5×5 boyutunda bir döngüsel matrisin ilk sütun vektörünü $c = (1,2,3,4,5)^T$ şeklinde seçelim. Bu durumda bu vektörden elde edilen döngüsel matris

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olabilir.

Tanım 2.2.2. Görüntü/ses işleme ve sinyal işleme alanında kullanılan yüksek boyutlu bir sinyali veya görüntüyü belirli bir kurala göre daha düşük boyutlu bir vektöre indirgeyen matrise alt örnekleme matrisi denir. Bu boyut azaltma işlemi $y = Sx$ olarak tanımlanmaktadır. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ orijinal yüksek boyutlu veriyi, $y \in \mathbb{R}^m$ gözlemlenen veriyi ifade eder. S ise her satırında bir adet "1" bulunan, diğer tüm elemanları sıfır olan orijinal verinin belirli bileşenlerini seçmeye yarayan bir seçim matrisidir. Matematiksel olarak $S \in \{0,1\}^{m \times n}$ şeklinde ifade edilir.

Örneğin,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

ele alalım. $S \in \{0,1\}^{2 \times 5}$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

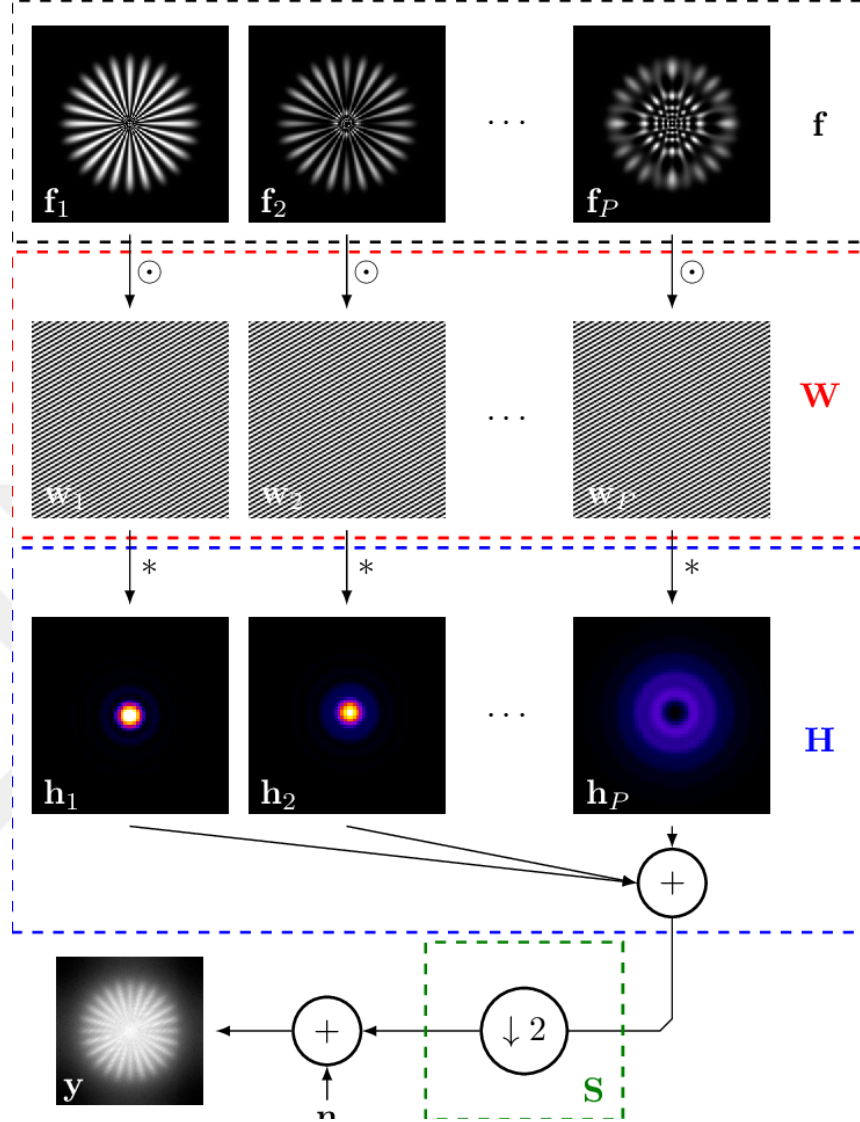
olmak üzere

$$y = Sx = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Alt örnekleme kavramının temeli, örnekleme teorisine dayanmaktadır. Örnekleme teorisinin ilk matematiksel temelleri Whittaker (Whittaker, 1915) tarafından ortaya konmuş, Nyquist (Nyquist, 1928) minimum örnekleme hızını tanımlamış ve Shannon (Shannon, 1949) bu sonuçları modern iletişim teorisi çerçevesinde sistematik hâle getirmiştir.

Alt örnekleme işleminin süper-çözünürlükte kullanılan ileri model içerisindeki rolü, aşağıdaki şekilde şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 3. Alt örnekleme işlemi (Unser, 2019)

Tanım 2.2.4. Bir görüntü üzerinde yerel filtreleme işlemi gerçekleştiren küçük boyutlu ağırlık matrisine çekirdek matrisi denir. Çekirdek boyutu genellikle $3 \times 3, 5 \times 5, \dots$ gibi tek sayı seçilir ve genellikle satırları toplamı 1 olacak şekilde alınır (Nair vd., 2021).

Tanım 2.2.5. Bir kare matrisin, yalnızca ana köşegeninde yer alan elemanlarının sıfırdan farklı, diğer tüm elemanlarının ise sıfır olduğu matrise köşegen matris denir. Matematiksel olarak, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kare matris olmak üzere,

$$D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, d_{ij} = \begin{cases} d_{ii}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

sağlanıyorsa D 'ye köşegen matris denir (Meyer, 2000).

Tanım 2.2.6. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir kare matris, P tersinir matris ve D köşegen bir matris olmak üzere, $A = PDP^{-1}$ eşitliği sağlanıyorsa, A matrisine köşegenleştirilebilir (diagonalizable) matris denir. Burada P , A 'nın özvektörlerinden oluşur, D ise A 'nın özdeğerlerini köşegenine yazarak oluşturduğumuz matristir (Strang, 2016; Meyer, 2000).

2.2.1. Denoiser Çeşitleri

Denoiser, gürültüyle bozulmuş bir görüntünün temiz (gürültüsüz) tahminini elde etmeyi amaçlayan bir operatördür. Matematiksel olarak gürültü giderme (denoising) problemi, $y = x + n$ şeklinde ifade edilir. Burada y gözlenen gürültülü görüntü, x bilinmeyen temiz (gerçek) görüntü ve n gürültüyü temsil etmektedir. Bir başka deyişle denoiser, y 'den x 'in en iyi tahminini elde etmeye çalışan bir operatör olarak da ifade edilebilir.

Gürültü gidericiler, son yıllarda hem klasik optimizasyon tabanlı hem de modern derin ağ tabanlı süper-çözünürlük algoritmalarının temel bileşenlerinden biri haline gelmiştir. Bu bağlamda literatürde sıklıkla kullanılan bazı gürültü giderici türleri verilecektir.

Gürültü giderme işleminde lineer denoiserlar giriş görüntüsüne sabit katsayılardan oluşan bir lineer dönüşüm uygular ve elde edilen çıktıyı girişin lineer bir kombinasyonu olarak üretir. Matematiksel olarak bir lineer denoiser, $D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve girdi görüntüsü $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $D(x) = Wx$ biçiminde ifade edilir. Burada $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sabit katsayılardan oluşan filtre matrisini temsil eder. Bu tür denoiserlar, girişe bağlı olarak davranışlarını değiştirmedikleri için doğrusal (lineer) olarak adlandırılır (Athalye vd., 2021).

Çekirdek (kernel) tabanlı gürültü gidericiler yapısal olarak lineer gürültü gidericilerin özel bir alt sınıfıdır. Bu bağlamda çekirdek tabanlı gürültü gidericiler, gürültülü bir görüntüyü pikseller arasındaki benzerliklere bağlı bir ağırlıklandırma ile işleyerek gürültüsüz bir çıktı üreten lineer dönüşüm olarak ifade edilir.

Sınırlı gürültü gidericiler, denoising işleminden sonra elde edilen çıktının giriş görüntüsünden belirli bir sabit kadar sapmasına izin veren operatörlerdir. Bu durum her $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|D(x) - x\| \leq c$$

şeklinde tanımlanır. Burada $D(\cdot)$ gürültü giderme operatörünü, x giriş görüntüsünü ve $c > 0$ bir sabit sınır değerini temsil eder. Böylece denoiser, görüntüyü gürültüden temizlerken orijinal görüntüden kontrolsüz biçimde uzaklaştırmaz (Ryu vd., 2019).

Ortalama filtre ve Gaussian filtre gibi klasik lineer gürültü gidericiler, standart tanımları altında sınırlı operatörlerdir. Bu filtrelerde her bir çıkış pikseli, komşu piksellerinin ağırlıklı ortalaması olarak hesaplanır, bu hesaplamada bir pikselin değeri hiçbir zaman komşulardaki değerlerin en düşüğünden daha düşük veya en yükseklerinden daha yüksek olamaz. Bu durumda çıktı, giriş değerlerinin dışına taşmayarak giriş görüntüsünden belirli bir mesafe içinde kalır (Gonzalez ve Woods, 2018).

Bir görüntüde birçok desen ve yapı görüntü boyunca tekrar eder. Yerel olmayan (Non-Local) gürültü gidericiler, görüntüdeki bir pikselin etrafında tekrar eden yamalar arasındaki benzerliği yalnızca yerel komşulukta değil, görüntü boyunca uzak bölgelerde de tahmin eder ve her pikselin temiz değerini tüm görüntüdeki benzer yamaların ağırlıklı ortalamasıyla hesaplar. Bu yaklaşım daha sonra BM3D, NLM ve NLB gibi modern non-local yöntemlerin temelini oluşturmuştur (Buades vd., 2005).

Öğrenilmiş veya derin öğrenme tabanlı denoiserlar, temiz ve gürültülü görüntülerden oluşan bir veri setinde görüntüler arasındaki farklılıkları tespit ederek, yeni gürültülü görüntüleri temizleyebilecek bir fonksiyon öğrenir. Bu veri odaklı operatörler, CNN tabanlı yöntemler (DnCNN, FFDNet, DRUNet), optimizasyon açılımı (unrolling) ile elde edilen modeller (IRCNN, TNRD), üretken (generative) model tabanlı denoiserlar (GAN, VAE, flow modelleri) ve score-based/diffusion denoiser'larını kapsamaktadır. Bu yöntemler modern süper-çözünürlük ve Plug-and-Play algoritmalarında klasik yöntemlere kıyasla çok daha yüksek modelleme kapasitesine sahiptir (Zhang vd., 2017; Wang vd., 2020).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

3.1. PnP-Tseng Algoritması ve Yakınsaklık Teoremleri

Bu bölümde literatürde yer alan Tseng algoritması (Tseng, 2000) baz alınarak yeni PnP-Tseng algoritması tanımlanmıştır. Tanımlanan algoritmanın ortalama operatörler için sabit nokta yakınsaklık teoremleri ispat edilmiş ve minimizasyon problemine uygulaması verilmiştir. Ayrıca algoritmanın etkinliğini göstermek amacıyla süper çözünürlük problemi üzerinden PnP-ISTA, PnP-ADMM algoritmaları ve Biküçük yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

PnP-Tseng algoritmasını vermeden önce literatürde yer alan ve sıkça kullanılan ADMM, ISTA ve DRS algoritmalarının klasik versiyonları ile PnP versiyonları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu tablo algoritmaların PnP versiyonlarının nasıl tanımlandığını anlamada kolaylık sağlayacaktır.

ADMM	PnP-ADMM
$x_{k+1} = \text{Prox}_{\rho^{-1}f}(y_k - z_k)$	$x_{k+1} = \text{Prox}_{\rho^{-1}f}(y_k - z_k)$
$y_{k+1} = \text{Prox}_{\rho^{-1}g}(x_{k+1} + z_k)$	$y_{k+1} = D(x_{k+1} + z_k)$
$z_{k+1} = z_k - x_{k+1} + y_{k+1}$	$z_{k+1} = z_k - x_{k+1} + y_{k+1}$
ISTA	PnP-ISTA
$z_{k+1} = x_k - \rho^{-1}\nabla f(x_k)$	$x_{k+1} = D(x_k - \rho^{-1}\nabla f(x_k))$
$x_{k+1} = \text{Prox}_{\rho^{-1}g}(z_{k+1})$	
DRS	PnP-DRS
$x_{k+1/2} = \text{Prox}_{\rho^{-1}f}(z_k)$	$x_{k+1/2} = \text{Prox}_{\rho^{-1}f}(z_k)$
$y_{k+1} = \text{Prox}_{\rho^{-1}g}(x_{k+1/2} - z_k)$	$y_{k+1} = D(x_{k+1/2} - z_k)$
$z_{k+1} = z_k - x_{k+1/2} + y_{k+1}$	$z_{k+1} = z_k - x_{k+1/2} + y_{k+1}$

Tablo 1. Bazı Algoritmalar ve PnP Versiyonları

Yukarıda verilen algoritmalarla yola çıkarak bu tez çalışmasında yeni tanımlanan PnP-Tseng algoritması,

$$\begin{cases} y_k = D(x_k - \lambda \nabla f(x_k)) \\ x_{k+1} = y_k - \lambda(\nabla f(y_k) - \nabla f(x_k)) \end{cases}$$

şeklindedir.

Aşağıda öncelikle ana teoreminin ispatı için gerekli olan ve ortalama operatorler ile ilgili bazı lemmalar ifade ve ispat edilecektir.

Lemma 3.1.1. T, λ – ortalama bir dönüşüm ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\beta = 1 - \alpha(1 - \lambda)$$

olmak üzere, αT dönüşümü β – ortalama olacaktır.

İspat: $\alpha \in (0,1]$ ve $\beta = 1 - \alpha(1 - \lambda)$ olmak üzere, $\alpha T = (1 - \beta)I + \beta U$ olacak şekilde genişlemeyen bir U dönüşümünün var olduğunu göstermek yeterlidir. S genişlemeyen bir dönüşüm ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere T, λ – ortalama olduğundan

$$T = (1 - \lambda)I + \lambda S$$

yazılır. $\beta = 1 - \alpha(1 - \lambda)$ olduğundan $\alpha\lambda = \alpha + \beta - 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha T &= \alpha(1 - \lambda)I + \alpha\lambda S \\ &= (1 - \beta)I + \beta \left(\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} \right) S\end{aligned}$$

olduğu görülür. S genişlemeyen bir dönüşüm ve $\left| \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} \right| \leq 1$ olduğundan, $U = \left| \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} \right| S$ dönüşümü de genişlemeyendir.

Lemma 3.1.2. T_1, α_1 – ortalama, T_2, α_2 – ortalama ve $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $T_1 - T_2, 1 - \alpha_2 + \alpha_1$ ortalama olacaktır.

İspat: T_1 ve T_2 ortalama operator olduğundan, $T_1 = (1 - \alpha_1)I + \alpha_1 S_1$ ve $T_2 = (1 - \alpha_2)I + \alpha_2 S_2$ olacak şekilde S_1 ve S_2 genişlemeyen dönüşümleri vardır. $\theta = 1 - \alpha_2 + \alpha_1$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}T_1 - T_2 &= (1 - \alpha_1)I + \alpha_1 S_1 - ((1 - \alpha_2)I + \alpha_2 S_2) \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)I + (\alpha_1 S_1 - \alpha_2 S_2) \\ &= (1 - \theta)I + \theta \frac{1}{1 - \alpha_2 + \alpha_1} \alpha_1 S_1 - \alpha_2 S_2\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $U = \frac{1}{1-\alpha_2+\alpha_1}\alpha_1 S_1 - \alpha_2 S_2$ dönüşümünün genişlemeyen bir dönüşüm olduğunu gösterelim. Gerçekten, $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$ olduğundan $0 < \frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_2+\alpha_1} \leq 1$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|U_x - U_y\| &= \left| \frac{1}{1-\alpha_2+\alpha_1} \right| \|(\alpha_1 S_1 x - \alpha_2 S_2 x) - (\alpha_1 S_1 y - \alpha_2 S_2 y)\| \\
&= \left| \frac{1}{1-\alpha_2+\alpha_1} \right| \|\alpha_1 (S_1 x - S_1 y) - \alpha_2 (S_2 x - S_2 y)\| \\
&\leq \left| \frac{1}{1-\alpha_2+\alpha_1} \right| (\alpha_1 \|x - y\| + \alpha_2 \|x - y\|) \\
&= \left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-\alpha_2+\alpha_1} \right| \|x - y\| \\
&\leq \|x - y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan U genişlemeyen bir dönüşüm olup $T_1 - T_2$, $1 - \alpha_2 + \alpha_1$ ortalamalıdır.

Lemma 3.1.3. f konveks ve β smooth bir fonksiyon, $\theta \in (0,1)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere D ise ortalamalı bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\Gamma \in \left[\beta + \frac{1}{2}, 1\right)$ olmak üzere,

$$T^* = \nabla f(D(I - \lambda \nabla f)) - \nabla f$$

dönüşümü Γ -ortalamalıdır.

İspat: $T^* = (1 - \Gamma)I + \Gamma S$ olacak şekilde genişlemeyen bir S dönüşümü ve bir Γ sabitinin var olduğunu göstermeliyiz. Denk olarak

$$S = \frac{1}{\Gamma} T^* - \frac{1 - \Gamma}{\Gamma} I$$

şeklinde verilen S dönüşümünün genişlemeyen olduğunu gösterelim. Bu durumda her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|Sx - Sy\| = \left\| \left(\frac{1}{\Gamma} T^* - \frac{1 - \Gamma}{\Gamma} I \right) x - \left(\frac{1}{\Gamma} T^* - \frac{1 - \Gamma}{\Gamma} I \right) y \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{\Gamma} (T^*x - T^*y) - \frac{1-\Gamma}{\Gamma} (x - y) \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma} \|T^*x - T^*y\| + \frac{1-\Gamma}{\Gamma} \|x - y\|
\end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\nabla f, \beta$ - Lipschitz sürekli ve $D(I - \lambda \nabla f)$ dönüşümü ortalamalı olduğundan

$$\|\nabla f x - \nabla f y\| \leq \beta \|x - y\| \text{ ve } \|D(I - \lambda \nabla f)x - D(I - \lambda \nabla f)y\| \leq \|x - y\|$$

yazılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|T^*x - T^*y\| &= \|\nabla f(D(I - \lambda \nabla f))x - \nabla f x - \nabla f(D(I - \lambda \nabla f))y + \nabla f y\| \\
&\leq \|\nabla f(D(I - \lambda \nabla f))x - \nabla f(D(I - \lambda \nabla f))y\| + \|\nabla f y - \nabla f x\| \\
&\leq \beta \|D(I - \lambda \nabla f)x - D(I - \lambda \nabla f)y\| + \beta \|x - y\| \\
&\leq \beta \|x - y\| + \beta \|x - y\| \\
&\leq 2\beta \|x - y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\|Sx - Sy\| &\leq \frac{1}{\Gamma} 2\beta \|x - y\| + \frac{1-\Gamma}{\Gamma} \|x - y\| \\
&= \frac{2\beta + 1 - \Gamma}{\Gamma} \|x - y\|
\end{aligned}$$

yazılır. $\beta + \frac{1}{2} \leq \Gamma < 1$, olduğundan $\frac{2\beta + 1 - \Gamma}{\Gamma} \leq 1$ elde edilir. Buradan S 'nin genişlemeyen bir dönüşüm olduğu dolayısıyla T^* dönüşümünün ortalamalı olduğu görülür.

Lemma 3.1.4. T_1, α -ortalımalı ve T_2, β -ortalımalı bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T_1 \circ T_2, \alpha + \beta(1 - \alpha)$ ortalımalıdır.

Lemma 3.1.5. T θ -ortalımalı bir operatör, $F(T) \neq \emptyset$ ve x_0 T nin tanım kümesine ait keyfi başlangıç noktası olsun. Bu durumda, $x_{k+1} = T(x_k)$ şeklindeki Picard iterasyonu tarafından üretilen $(x_k)_{k \geq 0}$ dizisi $F(T)$ içindeki bir x^* noktasına yakınsar.

Lemma 3.1.6. f konveks ve β smooth bir fonksiyon, $\theta \in (0,1)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere D ortalımalı bir dönüşüm olsun. $F(T_{Tseng}) \neq \emptyset$ olmak üzere,

$$T_{Tseng} = D \circ (I - \lambda \nabla f) - \lambda(\nabla f \circ D \circ (I - \lambda \nabla f) - \nabla f)$$

olsun. Bu durumda PnP-Tseng algoritması tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi, T_{Tseng} dönüşümünün bir sabit noktasına yakınsar.

İspat: T_{Tseng} dönüşümünün ortalamalı olduğunu göstermek yeterlidir. Teoremin şartları altında, $(I - \lambda \nabla f)$ dönüşümünün $\frac{\beta\lambda}{2}$ -ortalamalı olduğunu bilinmektedir. Lemma 3.1.4.'den $D \circ (I - \lambda \nabla f)$ dönüşümü $\theta + \frac{\beta\lambda}{2}(1 - \theta)$ ortalamalıdır. Lemma 3.1.3'e göre $T^* = (\nabla f \circ D \circ (I - \lambda \nabla f) - \nabla f)$ dönüşümü Γ ortalamalıdır. Lemma 3.1.1'den λT^* dönüşümü $1 - \lambda(1 - \Gamma)$ ortalamalıdır. Lemma 3.1.2'den T_{Tseng} dönüşümü $\lambda(1 - \Gamma) + \theta \left(\frac{\beta\lambda}{2} - 1 \right) - \frac{\beta\lambda}{2}$ ortalamalıdır. Lemma 3.1.5'den $\{x_n\}$ dizisi T_{Tseng} dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Şimdi, iki fonksiyonun toplamının minimum noktalarını bulmaya yönelik bazı sonuçlar verilecektir. Bunun için ilk olarak, bir fonksiyonun alt diferansiyelinin tanımına ihtiyaç vardır.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kapalı ve has bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f 'nin alt diferansiyeli

$$\partial f(x) := \{z \in \mathbb{R}^n : f(y) - f(x) \geq \langle z, y - x \rangle\}, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Örneğin, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = |x|$ fonksiyonunun alt diferansiyeli,

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ \{-1\}, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde dir.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks ve türevlenebilir ve $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun ise kapalı, has ve konveks olması durumunda bir x^* noktasının $f(x) + g(x)$ 'in minimizeri olması için gerek ve yeter şart x^* noktasının $Prox_{\lambda g}(I - \lambda \nabla f)$ dönüşümünün sabit noktası olmasıdır. Dolayısıyla bu ilişki kullanılarak, sabit nokta iterasyonları iki dönüşümün toplamının minimumunu bulmak için kullanılabilir.

$D(x) = Hx$ şeklinde $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı lineer denoiserların kümesi $\mathcal{Y}$ olsun. Burada H , köşegenleştirilebilir ve özdeğerleri $[0, 1]$ aralığında olan bir matristir. Eğer K , H 'nin özvektör matrisi ise

$$\langle x, y \rangle = \langle K^{-1}x, K^{-1}y \rangle_2 \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir iç çarpım dönüşümüdür. Burada $\langle ., . \rangle_2$, $\mathbb{R}^n$ 'deki standart iç çarpımdır.

Lemma 3.1.7. $D \in \mathcal{Y}$ olsun. Bu durumda,

- a. D , $\mathbb{R}^n$ 'deki (3.2) iç çarpıma göre bir kapalı, has ve konveks $s_D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun proximal operatörüdür.
- b. Her $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$ için D , $(\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$ uzayında θ –ortalamalıdır.
- c. s_D 'nin $R(H)$ kümesine kısıtlaması reel değerli ve süreklidir.

D kapalı, has ve konveks s_D fonksiyonunun proximal operatörü olduğundan, PnP-Tseng algoritmasında D yerine $Prox_{s_D}(x)$ yazılabilir. Buradan aşağıdaki önermeler açıktır.

Önerme 3.1.8. $D \in \mathcal{Y}$ olsun. PnP-Tseng algoritmasının iterasyonları,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda s_D(x) \quad (3.3)$$

minimizasyon problemini çözmek için uygulanan Tseng algoritmasının iterasyonları ile özdeştir.

Önerme 3.1.9. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kapalı, has ve konveks bir fonksiyon, $D = Prox_{\lambda g}(x)$ ve x^*, T_{Tseng} dönüşümünün sabit noktası olsun. Bu durumda $(D \circ (I - \lambda \nabla f))(x^*)$ dönüşümü $f + g$ 'in minimizeridir.

İspat: $B = D \circ (I - \lambda \nabla f)$ olsun ve x^* in T_{Tseng} dönüşümünün sabit noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (B - \lambda(\nabla f \circ B - \nabla f))(x^*) = x^* &\Leftrightarrow Bx^* - \lambda \nabla f(Bx^*) + \lambda \nabla f(x^*) = x^* \\ &\Leftrightarrow (I - \lambda \nabla f)(Bx^*) = (I - \lambda \nabla f)(x^*) \end{aligned}$$

yazılır. Son iki eşitliğin her iki tarafına D uygulanırsa $B(Bx^*) = Bx^*$ elde edilir. Bu durumda Bx^* , B 'nin sabit noktasıdır. Böylece sabit nokta ve minimizasyon problemi arasındaki ilişkiden $D \circ (I - \lambda \nabla f)(x^*)$ 'in $f(x) + g(x)$ 'in minimizeri olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.10. $D \in \mathcal{Y}$ ve $\langle ., . \rangle$, B tarafından üretilen iç çarpım olsun. f 'in konveks ve β –smooth bir fonksiyon olduğunu ve T_{Tseng} dönüşümünün sabit noktalarının kümesini boş kümeden farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi

$\lambda > 0$ ve $\mathbb{R}^n$ 'den seçilen keyfi bir başlangıç noktası için, PnP-Tseng algoritması tarafından üretilen (y_n) dizisi (3.3)'ün minimizerine yakınsar.

İspat: Teoremin varsayımları altında, Lemma 3.1.6'den PnP-Tseng algoritması tarafından üretilen (x_n) dizisinin T_{Tseng} dönüşümünün sabit noktası olan x^* a yakınsadığı sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.1.7'den D ortalomalı bir dönüşüm ve f, β -smooth bir fonksiyon olduğundan, $D \circ (I - \lambda \nabla f)$ dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Dolayısıyla D, s_D dönüşümünün proximal operatörü olmak üzere (y_n) dizisi $f(x) + s_D(x)$ operatörünün minimizeri olan $D \circ (I - \lambda \nabla f)(x^*)$ noktasına yakınsar.

3.2. PnP-Tseng Algoritmasının Süper Çözünürlük Problemine Uygulaması

Bu başlık altında süper çözünürlük problemi için geliştirilen Plug-and-Play (PnP) algoritmalarının performansını karşılaştırmak amacıyla kapsamlı deneysel çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmada, Biküçük interpolasyon yöntemi temel yöntem olarak ele alınmış PnP-ISTA, PnP-Tseng ve PnP-ADMM algoritmaları aynı test koşulları altında değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçlar hem niceliksel hem de niteliksel olarak analiz edilmiştir.

Süper çözünürlük problemi, düşük çözünürlüklü bir gözlem görüntüsünden yüksek çözünürlüklü bir görüntü elde etmeyi amaçlar. Matematiksel olarak bu problem,

$$y = SBx + n$$

şeklinde modellenebilir. Burada y düşük çözünürlüklü gözlem görüntüsünü, x aranılan yüksek çözünürlüklü görüntüyü, B bulanıklaştırma operatörünü (genellikle Gaussian çekirdek), S alt örnekleme operatörünü ve n gürültü terimini temsil etmektedir. Bu ters problemin çözümü için veri uyum terimi ile düzenlileştirme terimin toplamından oluşan bir amaç fonksiyonu minimize edilir. Genel formülasyon, $\min_x \{ \|SBx - y\|^2 + \lambda R(x) \}$ şeklinde olup buradaki $f(x) = \frac{1}{2} \|y - SBx\|_2^2$ fonksiyonunun gradyanı,

$$\nabla f(x) = D^{-1} B^T S^T (SBx - y)$$

şeklindedir. Burada D operatörü gürültü gideren denoiser operatörüdür. Bu formülasyonda $\|SBx - y\|^2$ terimi veri uyum terimini, $R(x)$ düzenlileştirme terimi ve λ bu iki terim arasındaki dengeyi kontrol eden düzenlileştirme parametresini ifade eder. Klasik yaklaşımlarda düzenlileştirme terim genellikle analitik bir fonksiyon olarak

tanımlanırken, Plug-and-Play yöntemlerinde bu terim bir gürültü giderme algoritması ile dolaylı olarak ifade edilir. Elde edilen görüntülerin kaliteleri Tepe Sinyal-Gürültü Oranı (PSNR) ve Yapısal Benzerlik Endeksi (SSIM) ile ölçülecektir. Bu değerler sırasıyla

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{L^2}{MSE}$$

ve

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2\mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu eşitliklerde MSE ortalama karesel hatayı, L tepe sinyal değerini, μ_x ve μ_y sırasıyla x ve y görüntülerinin ortalama piksel değerlerini, σ_x^2 ve σ_y^2 sırasıyla x ve y 'nin varyanslarını, σ_{xy} x ve y arasındaki kovaryansı ve C_1 ile C_2 ise paydaların küçük olduğu durumlarda bölme işlemini kararlı hâle getirmek için kullanılan sabitlerdir.

Deneyisel çalışmalarda gri seviyeli bir test görüntüsü kullanılmıştır. Görüntüye önce 9×9 boyutunda standart sapması 1,0 olan Gaussian bulanıklaştırma uygulanmış, ardından 2 kat alt-örnekleme yapılmış ve son olarak standart sapması 10/255 olan Gaussian beyaz gürültü eklenmiştir. Bu degradasyon süreci gerçek dünya uygulamalarında karşılaşılan tipik bir süper çözünürlük senaryosunu simüle etmektedir. Elde edilen düşük çözünürlüklü gözlem görüntüsünden yüksek çözünürlüklü görüntünün geri kazanılması hedeflenmiştir.

Tüm PnP algoritmaları için ortak parametreler kullanılmıştır. İterasyon sayısı 20 olarak belirlenmiş, adım büyüklüğü parametresi $\rho = 0,001$ olarak seçilmiştir. Gürültü giderme operatörü olarak Non-Local Means (NLM) algoritması kullanılmış ve gürültü giderme gücü parametresi $\sigma = 20$ olarak ayarlanmıştır. Bu parametreler deneyisel çalışmalar sonucunda optimal performans sağlayacak şekilde belirlenmiştir.

Daha önce bahsedildiği üzere PnP-ISTA algoritması, ileri-geri ayrıştırma yönteminin Plug-and-Play çerçevesiyle birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Algoritmanın her iterasyonunda önce

$$z_k = x_k - \tau \nabla f(x_k).$$

şeklinde gradyan adımı atılır. Burada $f(x) = ||DHx - y||^2$ veri uyum fonksiyonunu ve τ adım büyüklüğünü temsil eder. Gradyan hesaplaması için $A = DH$ olmak üzere, $\nabla f(x) = A^T(Ax - y)$

formülü kullanılır. Ardından

$$x_{k+1} = \text{Denoise}(z_k)$$

eşitliği ile gürültü giderme adımı uygulanır. Bu basit yapı sayesinde algoritma uygulanması kolay ve hesaplama açısından verimlidir. Ancak gradyan adımının sabit bir adım büyüklüğü ile gerçekleştirilmesi bazı durumlarda yakınsamayı yavaşlatabilmektedir.

Deneyisel çalışmalarda PnP-ISTA algoritması 6,4 saniyede tamamlanmış ve 26,15 dB PSNR değerine ulaşmıştır. SSIM değeri 0,7264 olarak ölçülmüştür. Algoritmanın yakınsama davranışı incelendiğinde, ilk birkaç iterasyonda hızlı bir iyileşme gözlenmiş, daha sonra yavaş ama istikrarlı bir ilerleme kaydedilmiştir. Bikübik interpolasyon yöntemine göre 1,68 dB PSNR artışı sağlanmıştır. Görsel karşılaştırmalar incelendiğinde, PnP-ISTA'nın kenar detaylarını koruma konusunda Bikübik'e göre belirgin üstünlük gösterdiği ancak bazı bölgelerde hafif bulanıklık oluşturduğu gözlemlenmiştir.

Bu tezde tanımlanan PnP-Tseng algoritması, PnP-ISTA'nın geliştirilmiş bir versiyonudur ve çift gradyan düzeltmesi mekanizması kullanır. Algoritmanın iterasyon yapısı şu şekildedir: önce PnP-ISTA ile aynı şekilde gradyan adımı atılır ve gürültü giderme uygulanır:

$$z_k = x_k - \tau \nabla f(x_k)$$

ve

$$v_k = \text{Denoise}(z_k)$$

Ancak Tseng algoritmasında ek bir düzeltme adımı bulunur. Gürültü giderilmiş görüntü v_k üzerinde tekrar gradyan hesaplanır ve

$$x_{k+1} = v_k - \tau(\nabla f(v_k) - \nabla f(x_k))$$

şeklinde düzeltme yapılır. Bu düzeltme terimi, gürültü giderme operatörünün neden olduğu sapmaları telafi eder ve algoritmanın yakınsama özelliklerini iyileştirir. Matematiksel olarak bu düzeltme, monoton operatörler teorisinde Tseng'in ileri-geri-ileri yönteminden türetilmiştir.

Deneyisel sonuçlara göre PnP-Tseng algoritması 6,4 saniyede çalışmayı tamamlamış ve 26,22 dB PSNR değerine ulaşmıştır. SSIM değeri 0,7269 olarak ölçülmüştür. PnP-ISTA'ya göre 0,07 dB PSNR artışı sağlanırken, hesaplama süreleri ise aynıdır. Bu sonuç, çift gradyan düzeltmesinin görüntü kalitesinde iyileşme sağladığını göstermektedir. Bikübik interpolasyona göre ise 1,74 dB PSNR artışı elde edilmiştir. Yakınsama grafikleri incelendiğinde, PnP-Tseng algoritmasının PnP-ISTA'ya göre daha düzgün bir yakınsama gösterdiği belirlenmiştir. Görsel incelemede, özellikle yüksek frekanslı detayların korunmasında PnP-Tseng'in PnP-ISTA'dan daha başarılı olduğu tespit edilmiştir.

PnP-ADMM algoritması, çarpanların alterne yön yöntemi (Alternating Direction Method of Multipliers) optimizasyon yönteminin Plug-and-Play çerçevesiyle entegrasyonuna dayanır. ADMM, orijinal problemi

$$\min ||SBx - y||^2 \text{ öyle ki } x = v$$

şeklinde iki değişkenli bir probleme dönüştürür. Bu kısıt, artırılmış Lagrangian fonksiyonu

$$L(x, v, u) = ||SBx - y||^2 + (\rho/2)||x - v + u||^2$$

kullanılarak ele alınır. Algoritma üç adımdan oluşur. İlk olarak x -güncelleme adımında veri uyum terimi ve artırılmış Lagrangian terimi birlikte minimize edilir. Bu adım gradyan inişi ile yaklaşık olarak çözülür:

$$x_{k+1} = x_k - \tau(\nabla f(x_k) + \rho(x_k - v_k + u_k)).$$

İkinci adımda v -güncelleme yapılır ve

$$v_{k+1} = \text{Denoise}(x_{k+1} + u_k)$$

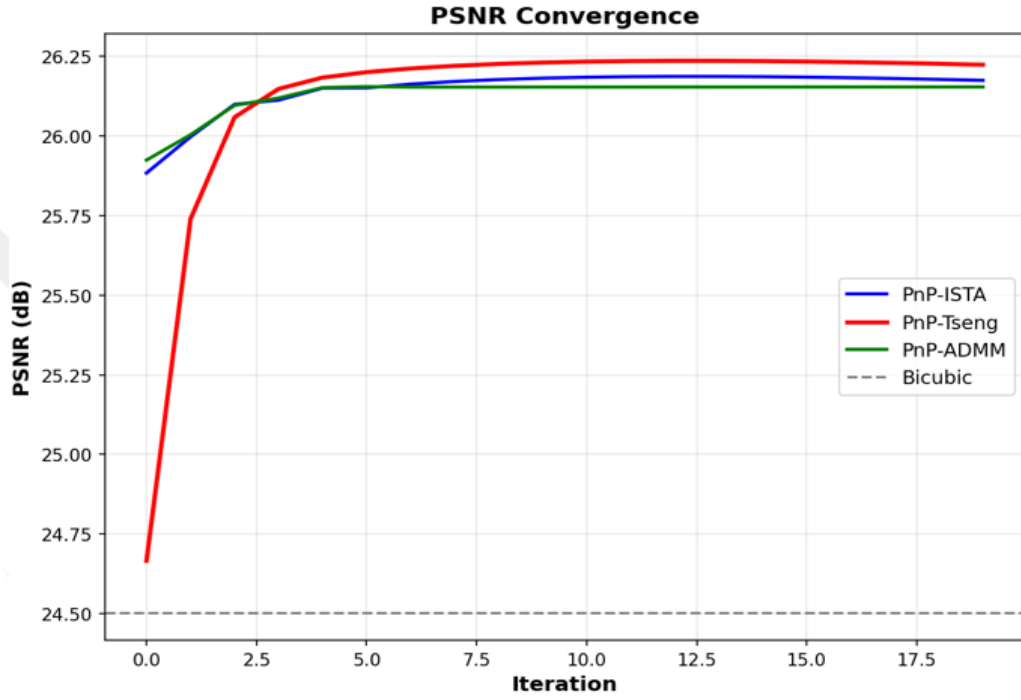
şeklinde gürültü giderme operatörü uygulanır. Üçüncü adımda ikili değişken,

$$u_{k+1} = u_k + (x_{k+1} - v_{k+1})$$

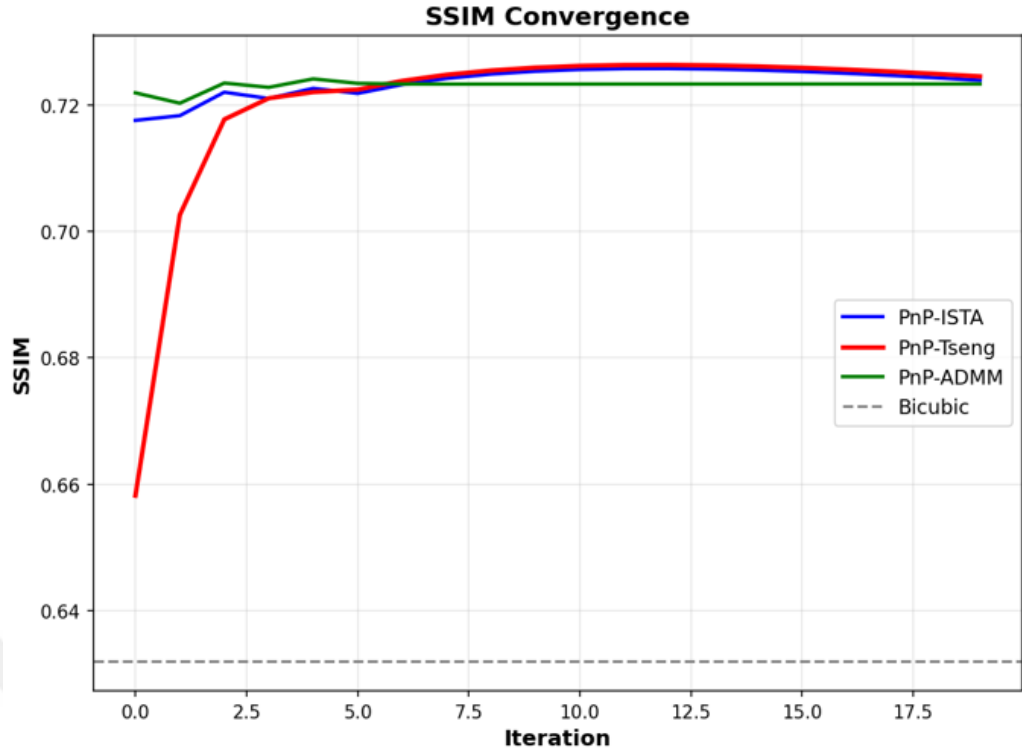
eşitliği yardımıyla güncellenir. Bu üç adımlı yapı sayesinde ADMM, veri uyum ve düzenleyici terimleri ayırıştırarak her birini en uygun şekilde işler.

PnP-ADMM algoritması deneyisel çalışmalarda 7,0 saniyede tamamlanmış ve 26,14 dB PSNR değerine ulaşmıştır. SSIM değeri 0,7256 olarak ölçülmüştür. Bikübik interpolasyona göre 1,67 dB PSNR iyileştirmesi sağlanmıştır. Hesaplama süresi açısından en yavaş algoritma olmuştur. Ancak dikkat çekici bir gözlem, PnP-ADMM'nin

yakınsama davranışında ortaya çıkmıştır. Algoritma ilk 5-6 iterasyonda hızlı bir iyileşme göstermiş, ancak daha sonra platoya ulaşmış ve ileriki iterasyonlarda belirgin bir gelişme kaydedilememiştir. Bu durum, PnP-ADMM'nin ikili değişken mekanizmasının erken yakınsamasından kaynaklanmaktadır. Görsel kalite açısından PnP-ADMM'nin sonuçları PnP-ISTA ve PnP-Tseng ile oldukça benzerdir, ancak bazı detaylarda PnP-ISTA ve PnP-Tseng kadar keskin olmadığı gözlemlenmiştir. Algoritmaların yakınsama analizleri ile ilgili grafikler aşağıdaki şekillerde görülmektedir.

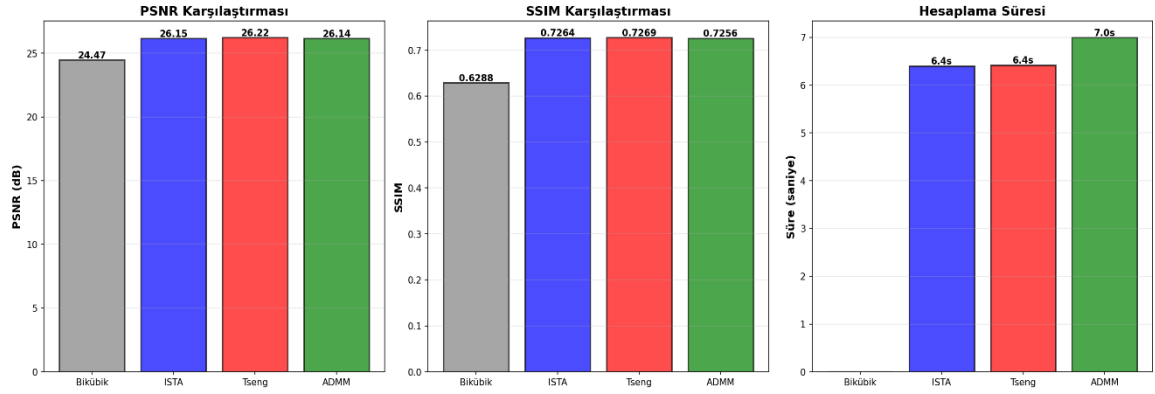


Şekil 4. Algoritmaların PSNR değerlerine ait grafikler



Şekil 5. Algoritmaların SSIM değerlerine ait grafikler

Yakınsama grafikleri, algoritmaların iteratif davranışları hakkında önemli bilgiler sunmaktadır. PSNR yakınsama grafiğinde, PnP-ADMM'nin ilk birkaç iterasyonda çok hızlı yükseldiği ancak 5-6. iterasyondan sonra sabit kaldığı görülmektedir. PnP-ISTA ve PnP-Tseng ise daha yavaş başlamakta ancak 20 iterasyon boyunca düzenli bir iyileşme göstermektedir. Tseng eğrisi ISTA eğrisinin hafif üzerinde seyretmekte ve bu da çift gradyan düzeltilmesinin katkısını göstermektedir. SSIM yakınsama grafiği de benzer bir davranış sergilemektedir. Her üç algoritma da Biküçük temel çizgisinin oldukça üzerinde değerlere ulaşmakta ve iterasyonlar ilerledikçe birbirlerine yakınsamaktadır. PSNR, SSIM ve hesaplama sürelerine ilişkin sonuçlar aşağıdaki sütun grafiklerinde görülmektedir.



Şekil 6. Algoritma metriklerinin sütun grafikleri yardımıyla karşılaştırılması

Üç algoritmanın karşılaştırmalı analizi yapıldığında, PnP-Tseng'in optimal performans dengesi sunduğu görülmektedir. PSNR değeri açısından en yüksek sonucu veren algoritma olmuş ve aynı zamanda hesaplama süresinde de PnP-ADMM'e göre avantaj sağlamıştır. PnP-ISTA ise temel algoritma olarak sağlam bir performans göstermiş ancak PnP-Tseng'in düzeltme mekanizmasından yoksun olduğu için kalite açısından geride kalmış ancak PSNR değerinde PnP-ADMM den az da olsa yüksek değer elde etmiştir. PnP-ADMM ise hem kalite hem de zamansal olarak en kötü performansı gösteren algoritma olmuştur.

SSIM metriği açısından sonuçlar incelendiğinde, üç algoritma arasındaki fark oldukça küçüktür. PnP-Tseng 0,7269 SSIM değeri ile en yüksek yapısal benzerliği sağlarken, PnP-ISTA 0,7264 ve PnP-ADMM 0,7256 değerlerine ulaşmıştır. Bu küçük farklar, algoritmaların yapısal bilgiyi koruma konusunda benzer başarı gösterdiğini ancak ince detaylarda Tseng'in daha üstün olduğunu işaret etmektedir. Bikubik interpolasyon ise 0,6288 SSIM değeri ile tüm PnP algoritmalarının oldukça gerisinde kalmıştır.

Hesaplama süreleri karşılaştırıldığında, PnP-ADMM 7,0 saniye ile en yavaş algoritma olmuştur. PnP-Tseng ve PnP-ISTA ise 6,4 saniye ile birinciliği paylaşmışlardır. Yukarıda verilen sonuçlar aşağıdaki tabloda özet şeklinde sunulmaktadır.

Yöntem	PSNR (dB)	SSIM	Süre (saniye)	Bikubik'e Göre
Bikubik	24,47	0,6288	-	Temel çizgi
PnP-ISTA	26,15	0,7264	6,4	+1,68 dB
PnP-Tseng	26,22	0,7269	6,4	+1,74 dB
PnP-ADMM	26,14	0,7256	7,0	+1,67 dB

Tablo 2. Algoritmaların Performans Karşılaştırması

Algoritmaların süper çözünürlük problemine uygulanması sonucu elde edilen görüntüler ise aşağıda yer almaktadır.



Şekil 7. Süper çözünürlük problemine ait çıktı görüntüleri

Görsel karşılaştırmalar, sayısal metriklerin desteklediği bulguları doğrulamaktadır. Gözlem görüntüsünde belirgin gürültü ve bulanıklık bulunmaktayken, Biküvik interpolasyon bu gürültüyü azaltmakta ancak keskin detayları elde edememektedir. PnP algoritmaları ise hem gürültüyü bastırmakta hem de kenar detaylarını korumaktadır. Özellikle saç, yüz hatları ve elbise dokusu gibi yüksek frekanslı bölgelerde PnP algoritmalarının üstünlüğü açıkça görülmektedir. PnP-Tseng ve PnP-ISTA sonuçları görsel olarak oldukça benzer olmakla birlikte, yakından incelendiğinde Tseng'in ince detaylarda biraz daha keskin olduğu fark edilmektedir.

Sonuç olarak, gerçekleştirilen deneysel çalışmalar PnP-Tseng algoritmasının süper-çözünürlük probleminde optimal bir seçim olduğunu göstermektedir. Algoritma, en yüksek PSNR ve SSIM değerlerini sağlarken, hesaplama süresi açısından da PnP-

ISTA ile birlikte en hızlı algoritmadır. Çift gradyan düzeltmesi mekanizması, ek hesaplama maliyeti getirmesine rağmen, daha iyi yakınsama özellikleri sayesinde hem kalite hem de hız açısından kazanç sağlamaktadır. PnP-ISTA temel bir referans algoritma olarak değerlendirilmeli ve PnP-Tseng'in üstünlüğü bu referansa göre belirlenmelidir. PnP-ADMM ise beklenenin aksine hem kalite açısından hem de hesaplama süresi açısından diğer PnP algoritmaların gerisinde kalmaktadır. Bu bulgular, PnP-Tseng algoritmasının pratik uygulamalarda tercih edilmesi gerektiğini işaret etmektedir.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1. Sonuç

Bu çalışmada, Tseng'in ileri-geri-ileri algoritmasına dayanan yeni bir Plug-and-Play algoritması geliştirilmiştir. PnP-Tseng olarak adlandırılan bu algoritma, ortalama operatörler çerçevesinde tanımlanmış ve süper çözünürlük problemlerine uygulanmıştır.

Algoritmanın en önemli teorik katkısı, sabit nokta yakınsamasının matematiksel olarak kanıtlanmış olmasıdır. Buna ek olarak, algoritmanın minimize ettiği bir objektif fonksiyonun varlığı da gösterilmiştir. Bu sonuçlar, çekirdek tabanlı doğrusal denoisers kullanıldığında geçerlidir ve PnP-ISTA ile PnP-ADMM gibi mevcut yöntemlerin teorik altyapısıyla uyumludur.

Süper çözünürlük problemi üzerinde yapılan deneyler, PnP-Tseng'in mevcut algoritmalara kıyasla rekabetçi performans gösterdiğini ortaya koymuştur. Görüntü kalitesi, yakınsama hızı ve hesaplama maliyeti açısından elde edilen sonuçlar umut vericidir. Ancak farklı denoiser seçimleri ve problem parametrelerinin algoritma davranışı üzerindeki etkisi daha detaylı incelenmelidir.

4.2. Öneriler

Gelecek çalışmalarda öncelikle algoritmanın teorik kapsamının genişletilmesi gereklidir. Derin öğrenme tabanlı denoisers için yakınsama koşullarının belirlenmesi, hem teorik hem de pratik açıdan kritik önem taşımaktadır. Ayrıca algoritmanın yakınsama hızının analitik olarak incelenmesi, optimal parametre seçimi için daha net kriterler ortaya koyabilir.

Uygulama alanları açısından, medikal görüntüleme özellikle ilgi çekicidir. MRI ve CT rekonstrüksiyonunda PnP-Tseng'in performansının test edilmesi, algoritmanın gerçek dünya problemlerindeki kullanılabilirliği hakkında önemli bilgiler verecektir. Bunun yanında, video işleme ve hiperspektral görüntüleme gibi alanlarda da algoritmanın potansiyeli araştırılmalıdır.

Sonuç olarak, bu tez Tseng algoritmasının PnP yöntemlerine başarıyla uyarlanabileceğini göstermiştir. Elde edilen teorik ve deneysel bulgular, forward-backward-forward yapısının görüntü restorasyonunda etkili bir araç olduğunu ortaya

koymaktadır. Ancak algoritmanın tam potansiyelinin ortaya çıkarılması için daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır.



KAYNAKÇA

- Agarwal, R., O'Regan, D., & Sahu, D. (2007). *Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications*. Springer.
- Athalye, C., Chaudhury, K. N., & Gavaskar, R. G. (2021). On Plug-and-Play Regularization using Linear Denoisers. *IEEE Transactions on Image Processing*, 30, 4802-4813.
- Bauschke, H., & Combettes, P. (2017). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer.
- Buades, A., Coll, B., & Morel, J.-M. (2005). A non-local algorithm for image denoising. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2, 60-65.
- Chan, S. (2018). Performance analysis of plug-and-play ADMM: A graph signal processing perspective. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 5, 274-286.
- Chan, S. H., Wang, X., & Elgendy, O. (2016). Plug-and-play ADMM for image restoration: Fixed-point convergence and applications. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 3, 84-98.
- Chopade, P., & Patil, P. (2015). Single and multi-frame image super-resolution and its performance analysis: A comprehensive survey. *International Journal of Computer Applications*, 111(15), 29-34.
- Daubechies, I., Defrise, M., & De Mol, C. (2004). An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Science*, 57(11), 1413-1457.
- Douglas, J., & Rachford, H. (1956). On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 82(2), 421-439.
- Gabay, D., & Mercier, B. (1976). A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. *Computers & Mathematics with Applications*, 2(1), 17-40.

- Gavaskar, R. G., & Chaudhury, K. N. (2019). On the proof of fixed-point convergence for plug-and-play ADMM. *IEEE Signal Processing Letters*, 26, 1817 - 1821.
- Gonzalez, R., & Woods, R. (2018). *Digital image processing (4th ed.)*. Pearson. Pearson.
- Gray, R. M. (2006). *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*. Now Publishers Inc.
- Kamilov, U., Bouman, C., & Wohlberg, B. (2023). Plug-and-play methods for integrating physical and learned models in computational imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, 40, 85 - 97.
- Kolmogorov, A., & Fomin, S. (1970). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications.
- Kreyszig, E. O. (2011). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- Liu, J., Sun, Y., Kamilov, U., & Xu, X. (2020). Boosting the performance of plug-and-play priors via denoiser scaling. *2020 54th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*. Pacific Grove, CA, USA.
- Marroco, A., & Glowinski, R. (1975). Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Revue Française d'Automatique, Informatique, et Recherche Opérationnelle. Analyse Numérique*, 10(R2), 41-76.
- Meyer, C. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Nair, P., Gavaskar, R. G., & Chaudhury, K. N. (2021). Fixed-point and objective convergence of plug-and-play algorithms. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 7, 337-348.
- Nesterov, Y. E. (2004). *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Kluwer Academic Publishers.
- Nyquist, H. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47, 617 - 644.
- Parikh, N., & Boyd, S. (2013). Proximal Algorithms. *Foundations and Trends® in Optimization*, 1, 123-231.
- R.G., G., & K.N, C. (2020). Plug-and-play ISTA converges with kernel denoisers. *IEEE Signal Processing Letters*, 27, 610-614.

- Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill.
- Ryu, E. K., Liu, J., Wang, S., Chen, X., Wang, Z., & Yin, W. (2019). Plug-and-play methods provably converge with properly trained denoisers. *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning*, (s. 5546–5557).
- Ryu, E. L., Chan, S. H., Wang, X., Elgendy, O., Venkatakrishnan, S., Sreehari, S., . . . Wohlberg, B. (2019). Plug-and-Play Methods Provably Converge with Properly Trained Denoisers. *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 97, s. 5546–5557.
- Shannon, C. E. (1949). Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the IRE*, 37, 10-21.
- Soubies, E., & Unser, M. (2019). Computational Super-Sectioning for Single-Slice Structured-Illumination Microscopy. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 5, 240 - 250.
- Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.
- Sun, Y., Wohlberg, B., & Kamilov, U. S. (2018). An online plug-and-play algorithm for regularized image reconstruction. *arXiv (preprint)*, 5, s. 395 - 408.
- Tseng, P. (2000). A modified forward–backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38, 431-446.
- Venkatakrishnan, S., Bouman, C., & Wohlberg, B. (2013). Plug-and-play priors for model based reconstruction. *2013 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*.
- Wang, Z., Chen, J., & Hoi, S. C. (2020). Deep learning for image super-resolution: A survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 43, 3365 - 3387.
- Waseem, I., Habib, M., Rehman, E., Bibi, R., Yousaf, R. M., Aslam, M., . . . Younis, M. W. (2024). Enhanced Learning Enriched Features Mechanism Using Deep Convolutional Neural Network for Image Denoising and Super-Resolution. *Applied Sciences*, 14(14), 62-81.

Whittaker, E. T. (1915). On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35, 181 - 194.

Zhang, K., Zuo, W., Gu, S., & Zhang, L. (2017). Learning deep CNN denoisers for image restoration.



TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR

1. Bildiriler

Eda Nur YILDIRIM, Ibrahim KARAHAN (2024), A New Plug And Play Algorithm And Its Applications To Super-Resolution Problem. 10th International IFS And Contemporary Mathematics And Engineering, Mersin, Türkiye.

