

**T.C.
MUNZUR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**TÜRDEŞ OLMAYAN UZAY ZAMAN MODELİ İÇİN GÖKKUŞAĞI
KÜTLEÇEKİM KURAMI ÇERÇEVESİNDE ENERJİ MOMENTUM
GÖSTERİMLERİ**

Öner KARATEKE

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
HESAPLAMALI BİLİMLER VE MÜHENDİSLİK ANABİLİMDALI**

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Murat KORUNUR**

TUNCELİ-2026

T.C.
MUNZUR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**TÜRDEŞ OLMAYAN UZAY ZAMAN MODELİ İÇİN GÖKKUŞAĞI
KÜTLEÇEKİM KURAMI ÇERÇEVESİNDE ENERJİ MOMENTUM
GÖSTERİMLERİ**

Öner KARATEKE
(220210019)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HESAPLAMALI BİLİMLER VE MÜHENDİSLİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. Murat KORUNUR

TUNCELİ-2026

T.C.
MUNZUR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM
ENSTİTÜSÜ

**TÜRDEŞ OLMAYAN UZAY ZAMAN MODELİ İÇİN GÖKKUŞAĞI KÜTLEÇEKİM
KURAMI ÇERÇEVESİNDE ENERJİ MOMENTUM GÖSTERİMLERİ**

Öner KARATEKE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HESAPLAMALI BİLİMLER VE MÜHENDİSLİK ANABİLİM DALI

Bu tez 06/01/ 2026 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

İmza
Prof. Dr. Nurettin
PİRİNÇÇİOĞLU
(Dicle Üniversitesi)

BAŞKAN

İmza
Prof. Dr. Murat
KORUNUR
(Munzur Üniversitesi)

DANIŞMAN

İmza
Dr. Öğr. Üyesi Bilgin
ZENGİN
(Munzur Üniversitesi)

ÜYE

Bu tez, Enstitümüz Hesaplamalı Bilimler ve Mühendislik Anabilim Dalı'nda hazırlanmıştır.

Doç. Dr. Nagihan KARAASLAN AYHAN
Enstitü Müdürü

NOT: Bu seminerde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı “Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu”ndaki hükümlere tabidir.



06/01/2026

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

İmza

Öner KARATEKE

Danışman

Prof. Dr. Murat KORUNUR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarının başından sonuna kadar öncelikle mütevazı kişiliği, bilgeliği ve olağanüstü hoş görüşüyle, değerli katkılarını benden esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Murat KORUNUR' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca manevi desteğini ve emeğini her zaman hissettiğim sevgili Anneme teşekkürü bir borç bilirim.

Öner KARATEKE
TUNCELİ 2026



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	III
TABLolar LİSTESİ.....	IV
SEMBOLLER LİSTESİ.....	V
KISALTMALAR LİSTESİ.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI VE METOD.....	5
2.1. Kaynak araştırmaları.....	5
2.2. Metod.....	11
2.2.1. Enerji gösterimleri.....	11
2.2.1.1. Einstein enerji-momentum gösterimi.....	11
2.2.1.2. Bergmann–thomson enerji-momentum gösterimi.....	12
2.2.1.3. Landau–lifshitz enerji-momentum gösterimi.....	13
2.2.1.4. Papapetrou enerji-momentum gösterimi.....	14
2.2.1.5. Tolman enerji-momentum gösterimi.....	15
2.2.1.6. Weinberg enerji-momentum gösterimi.....	16
2.2.1.7. Møller enerji-momentum gösterimi.....	17
2.3. Gökkuşağı kütleçekim kuramı (GKK).....	18
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	21
3.1. Model.....	21
3.2. Gökkuşağı kütleçekim kuramı çerçevesinde enerji yoğunluğu hesaplamaları.....	24
3.2.1. Einstein enerji-momentum gösterimi.....	24
3.2.2. Bergmann–thomson enerji-momentum gösterimi.....	26
3.2.3. Landau–lifshitz enerji-momentum gösterimi.....	28
3.2.4. Papapetrou enerji-momentum gösterimi.....	30
3.2.5. Tolman enerji-momentum gösterimi.....	32
3.2.6. Weinberg enerji-momentum gösterimi.....	38
3.2.7. Møller enerji-momentum gösterimi.....	39
3.3. Bazı gökkuşağı fonksiyonları için enerji yoğunluklarının yeniden değerlendirilmesi.....	40
3.3.1. Modifiye dağınım modeli.....	42
3.3.2. Üstel model.....	49
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	55
5. KAYNAKÇA.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 3.1.** Einstein gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi
- Şekil 3.2.** Bergmann-Thomson gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.3.** Landau-Lifshitz gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi
- Şekil 3.4** Papapetrou gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.5.** Tolman gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.6.** Weinberg gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi
- Şekil 3.7.** Møller gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.8.** Einstein gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi
- Şekil 3.9.** Bergmann-Thomson gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.10.** Papapetrou gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.11.** Tolman gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.
- Şekil 3.12.** Møller gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 2.1: Sıkça kullanılan gökkuşaağı kütleçekimi fonksiyonları

Tablo 3.1 Literatürde sıkça karşılaşılan bazı gökkuşaağı fonksiyonları



SEMBOLLER LİSTESİ

$\Theta_0^0, B^{00}, L^{00}, \Omega^{00}, T_0^0, W^{00}, M_0^0$: Enerji yoğunluğu

$\Theta_i^0, B^{\alpha 0}, L^{\alpha 0}, \Omega^{\alpha 0}, T_\beta^0, W^{\mu 0}, M_\mu^0$: Momentum yoğunluğu

E : Test parçacığının enerjisi

m : Test parçacığının kütlesi

p : Test parçacığının momentumunu

$f_1(\chi), f_2(\chi)$: Gökkuşağı fonksiyonları

$P_\mu, P^\mu, P^\alpha, P_\beta$: Toplam enerji-momentum

KISALTMALAR LİSTESİ

AdS: Anti-de Sitter

FRW: Friedmann–Robertson–Walker

FLRW: Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

GGG: Genel Göreliliğin Gökkuşağı

GKK: Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı

KG: Klein–Gordon

PDM: Konum-bağımlı kütle koşulları

UV: Ultraviyole

TEGR: Teleparalel kütleçekim (Genel Göreliliğin Teleparalel Eşdeğeri)

ÖZET

Bu tezde, genel görelilikte uzun yıllardır tartışmalı olan enerji-momentumun yerelleştirilmesi problemi, klasik enerji-momentum kompleksleri (Einstein, Bergmann–Thomson, Landau–Lifshitz, Papapetrou, Tolman, Weinberg ve Møller) kullanılarak incelenmiş ve bu tanımlar Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı (Rainbow Gravity) çerçevesine genelleştirilmiştir. Çalışmada türdeş olmayan bir uzay-zaman modeli olarak Van Stockum’un dönen silindirik toz çözümü ele alınmış; model kartezyen koordinatlara dönüştürülerek enerji yoğunluğu hesaplamaları gerçekleştirilmiştir. Gökkuşağı kütleçekimi, parçacık enerjisine bağlı iki fonksiyon üzerinden metrik geometrisini değiştirdiğinden, test parçacıklarının yüksek enerjilerde uzay-zamanı farklı şekilde “algılaması” beklenmektedir. Yapılan hesaplamalar, tüm enerji-momentum gösterimlerinin klasik limitte ($f_1 = f_2 = 1$) birbiriyle tutarlı sonuçlar verdiğini ve genel görelilikle uyumlu enerji dağılımları sunduğunu göstermiştir. Ancak enerjiye bağlı düzeltmeler eklendiğinde, özellikle Einstein, Bergmann–Thomson ve Møller gösterimlerinde enerji yoğunluğu üzerinde belirgin değişimler ortaya çıkmıştır. Modifiye Dağınım ve Üstel Model gibi literatürde yaygın kullanılan çeşitli Gökkuşağı fonksiyonları için enerji yoğunluklarının grafiksel davranışları incelenmiş; bazı modellerde düzeltmeler baskın hale gelirken, özellikle Landau–Lifshitz ve Weinberg gösterimlerinde Gökkuşağı etkilerinin zayıf kaldığı görülmüştür. Møller gösterimi ise koordinat bağımsız yapısı sayesinde modele en genel yorumu sağlamış ve yüksek enerjili test parçacıklarında enerji yoğunluğunun düzenli şekilde azaldığını göstermiştir.

Anahtar kelimeler:Gökkuşağı kütleçekimi, enerji-momentum gösterimleri, van Stockum uzay-zaman modeli

ABSTRACT

(Energy Momentum Prescriptions in the Framework of Rainbow Gravitation Theory for the Inhomogenous Space Time Model)

In this thesis, the long-standing problem of energy–momentum localization in general relativity is examined through classical energy-momentum complexes (Einstein, Bergmann–Thomson, Landau–Lifshitz, Papapetrou, Tolman, Weinberg, and Møller) and generalized within the framework of the Rainbow Gravity theory. As a non-homogeneous space-time model, the Van Stockum rotating dust solution is employed, transformed into Cartesian coordinates, and energy density expressions are computed accordingly. Rainbow Gravity modifies the space-time metric through two energy-dependent functions, implying that test particles with higher energies may “experience” space-time differently. Calculations show that all energy-momentum complexes yield mutually consistent and physically meaningful results in the classical limit ($f_1 = f_2 = 1$), matching general relativity. However, when Rainbow corrections are introduced, significant deviations appear, particularly in the Einstein, Bergmann–Thomson, and Møller prescriptions. Energy densities are re-evaluated for widely used Rainbow functions such as the Modified Dispersion and Exponential Models. While some functions produce strong modifications, others—especially in the Landau–Lifshitz and Weinberg prescriptions—lead to results nearly identical to general relativity. The Møller prescription, owing to its coordinate-independent formulation, provides the most general physical interpretation and reveals a monotonic decrease in energy density with increasing test-particle energy.

Keywords: Rainbow gravity, energy-momentum prescriptions, van Stockum space-time model

1. GİRİŞ

Genel görelilik kuramında kütleçekim alanının enerjisini tanımlamak klasik mekanik ve özel görelilikten farklı zorluklar içerir. Denklemler yerel enerji-momentum korunumunu ifade etse de, kütleçekim alanının kendisi için kovaryant bir enerji tensörü tanımlanamaz. Bu durum, enerji-momentumun uzay-zamandaki dağılımını ifade edecek kesin bir denklemin bulunamamasına yol açar. Bu nedenle birçok araştırmacı, enerji-momentum gösterimleri adını verdikleri pseüdo-tensorik yapılar geliştirerek kütleçekim enerjisinin betimlenmesini denemiştir. Bu karmaşalar, enerji-momentum korunumu prensibi ile uyumlu olacak şekilde tanımlansa da çoğunlukla belirli koordinat sistemlerine bağımlıdır. Örneğin, Xulu (2003) kütleçekim enerjisinin “genel kabul gören bir tanımının hâlâ bulunmadığını” belirtmekte ve farklı enerji-momentum komplekslerinin fiziksel anlamının tartışmalı olduğuna dikkat çekmektedir. Bu karmaşalarla yapılan hesaplamalar, özellikle Schwarzschild veya Kerr-Schild koordinat sistemlerinde tutarlı sonuçlar vermiş; ancak bir tanımın evrensel geçerliliği sorunu çözülmemiştir.

Literatürde öne çıkan başlıca enerji-momentum kompleksleri şunlardır:

- **Einstein (1916):** Einstein, kütleçekimsel alan için ilk enerji-momentum pseütensörünü tanımlamıştır. Bu karmaş, enerjiyi uzay-zaman içerikli bir süperpotansiyel üzerinden verir; ancak koordinat-bağımlı olması nedeniyle yalnızca özel koordinat sistemlerinde anlamlı sonuçlar verir. Örneğin Einstein’ın karmaş, Schwarzschild çözümündeki kütleçekim enerjisi hesabında kullanılmış ve fiziksel sonuçlar vermiştir.
- **Landau–Lifshitz (1951):** Landau ve Lifshitz, enerjinin simetrik bir karmaşıyla ifade edilmesi amacıyla orijinal Einstein tanımını geliştirmişlerdir. Landau–Lifshitz karmaş, tüm tensör bileşenlerini içeren simetrik bir formdadır ve metrik genleşmesiyle elde edilir. Bu tanım da koordinat-bağımlıdır ve sonuçların elde edilmesinde genellikle minkovskiye (düz uzay) referans koordinatları kullanılır.
- **Papapetrou (1948):** Papapetrou, Einstein alan denklemlerinin simetri özelliklerinden yararlanarak benzer bir pseütensör önermiştir. Bu karmaş, özellikle simetrik enerji akışları için tanımlıdır ve yine belirli koordinat sistemlerine bağlıdır. Virbhadra ve arkadaşlarının çalışmaları, Papapetrou karmaşının da diğer klasik

karmaşalarla pek çok çözümde (örneğin Kerr-Schild sınıfı uzay-zamanlar) aynı enerji dağılımını ürettiğini göstermiştir.

- **Bergmann–Thomson (1953):** Bergmann ve Thomson karmaşı, enerji ile birlikte açısal momentumun taşınmasını da kapsayacak şekilde geliştirilmiştir. Fiziksel açıdan simetrik bir yapı sunar, ancak koordinat-bağımlı bir tanımdır. Sonuçları bakımından diğer karmaşalarla uyumludur; Xulu’ya (2007) göre Bergmann–Thomson karmaşı da Kerr-Schild sınıfı ötesindeki bazı metriklerde diğer karmaşalarla “çakışan” sonuçlar vermektedir.
- **Møller (1958):** Christian Møller, geleneksel karmaşaların koordinat kısıtlamasını aşmak amacıyla genel koordinat bağımsızlığına sahip bir pseütensör önermiştir. Møller karmaşı, tanımını itibariyle herhangi bir koordinat sisteminde uygulanabilir ve bu sayede Schwarzschild gibi sade koordinatlar dışında da enerji hesabı yapma olanağı sağlar. Bu özelliğiyle Møller karmaşısı, farklı uzay-zaman geometrilerinde başarılı sonuçlar üretmiştir.
- **Tolman (1934):** Richard C. Tolman, özellikle kozmolojiye yönelik enerjinin tanımlanmasını içeren bir karmaşı formüle etmiştir. Tolman’ın kitabındaki ifade, enerji aktarımını tanımlamak için özellikli bir pseütensördür ve kütleçekimsel enerji dağılımının hesaplanmasında klasik çalışmalar arasında yer alır.
- **Weinberg (1972):** Steven Weinberg, genel göreliliği lineer dalgalar bakış açısından inceleyerek bir enerji-momentum pseütensörü tanımlamıştır. Weinberg karmaşısı, düz uzayda metrik dalgalanmaların enerjisini hesaplamak üzere geliştirilmiştir ve Einstein’dan farklı olarak alan-teorisi yaklaşımıyla ele alınmıştır.

Bütün bu karmaşaların ortak sınırlaması, koordinat-bağımlılıklarıdır. Bir enerji-momentum gösterimleri, uygun bir koordinat transformasyonu ile istenen anda sıfırlanabilir hale gelebilir ve bu durum fiziksel yorumu belirsizleştirir. Xulu (2003) da benzer şekilde çeşitli karmaşaların “fiziksel anlamının sorgulandığını” belirtmiş ve hala genel kabul gören bir enerji tanımı olmadığını vurgulamıştır. Öte yandan, bu karmaşalarla yapılan uygulamalı çalışmalar çok sayıda uzay-zaman geometrisinde enerji dağılımlarını hesaplamış; çoğunlukla makul fiziksel sonuçlar elde etmiştir. Bu durum, enerji-momentum gösterimlerinin belirli durumlarda işe yarayabileceğini; ancak enerjinin kesin olarak yerleşmesi konusunda tam bir uzlaşa sağlamadığını göstermektedir. Sonuç olarak, genel

görelilikte enerji-momentumun nasıl tanımlanacağı hâlâ aktif bir araştırma konusudur. Einstein ve takipçilerinin geliştirdiği karmaşalar, bugün hâlâ bu tartışmanın merkezinde yer alır. Modern yaklaşımlar, kuasi-lokal kütle tanımları veya teleparalel gravite gibi yeni teorik çerçevelerde de benzer karmaşalar üretmeye devam etse de, klasik enerji-momentum kompleksleri literatürde enerjinin lokalizasyonu sorununu anlamaya yönelik önemli bir temel oluşturur.

Gökkuşağı gravite (*rainbow gravity*), kuantum kütleçekimi ile genel görelilik arasındaki uyumsuzluğu çözmeye yönelik alternatif bir yaklaşımdır. 2003 yılında Lee Smolin ve João Magueijo tarafından önerilen bu teori, uzay-zamanın yapısının, parçacıkların enerjisine bağlı olarak değişebileceğini öne sürer. Bu yaklaşım, özellikle Planck enerjisi gibi yüksek enerjilerde, ışığın farklı dalga boylarının uzay-zamanı farklı şekilde deneyimlemesine neden olabileceğini savunur.

Geleneksel genel görelilikte, tüm parçacıklar ve ışık, uzay-zamanın eğriliğini aynı şekilde hisseder. Ancak gökkuşağı gravite teorisi, enerjiye bağlı olarak bu deneyimin değişebileceğini öne sürer. Bu, özellikle yüksek enerjili fotonların (örneğin gama ışınları) düşük enerjili fotonlara göre uzay-zamanda farklı yollar izlemesine yol açabilir. Bu durum, ışığın farklı renklerinin (dalga boylarının) farklı hızlarda hareket etmesi anlamına gelir.

Gökkuşağı gravite teorisinin en dikkat çekici sonuçlarından biri, evrenin başlangıcına dair alternatif bir bakış açısı sunmasıdır. Standart kozmoloji, evrenin yaklaşık 13.8 milyar yıl önce Büyük Patlama (Big Bang) ile başladığını varsayar. Ancak gökkuşağı graviteye göre, uzay-zamanın enerjiye bağlı yapısı, bu başlangıç noktasının bir tekillik (sonsuz yoğunluk) olmasını engelleyebilir. Bu da evrenin sonsuz geçmişe sahip olabileceği anlamına gelir.

Kara deliklerin son evreleri ve bilgi paradoksu, modern fiziğin önemli problemlerindendir. Stephen Hawking'in öne sürdüğü bu paradoksa göre, kara delikler buharlaşarak yok olurken, içine düşen bilginin ne olduğu belirsizdir. Gökkuşağı gravite, bu soruna alternatif bir çözüm sunar. Teoriye göre, kara delikler tamamen buharlaşmaz; bunun yerine, belirli bir kütleyle ulaştıklarında buharlaşma durur ve geride bir "kara delik kalıntısı" bırakır. Bu kalıntı, içine düşen bilgiyi saklayabilir.

Gökkuşağı gravite teorisinin test edilebilirliği, özellikle yüksek enerjili astrofiziksel olaylar üzerinden değerlendirilmektedir. Örneğin, gama ışını patlamaları sırasında farklı

enerjili fotonların Dünya'ya ulaşma zamanlarındaki küçük farklar, teorinin öngördüğü etkileri gösterebilir. Ancak şu ana kadar bu tür gözlemler kesin sonuçlar vermemiştir. Gökkuşaağı gravite, evrenin başlangıcı, kara deliklerin doğası ve kuantum kütleçekimi gibi konularda alternatif bakış açıları sunan ilginç bir teoridir. Her ne kadar henüz deneysel olarak doğrulanmamış olsa da bu tür kuramlar, fiziksel yasaların sınırlarını zorlayarak bilimin ilerlemesine katkıda bulunur.



2.KAYNAK ARAŞTIRMALARI VE METOD

2.1 Kaynak araştırmaları

Genel görelilikte enerji–momentum gösterimleri üzerine yapılan çalışmalar, özellikle 1990’lı yıllardan sonra belirgin şekilde artış göstermiştir. İlk dönemlerde (1910–1980) enerji–momentumun eğrilik etkisi altında yerelleştirilememesi ve psödotesör tanımlarının koordinat bağımlılığı nedeniyle bu konu daha çok tartışmalı ve kavramsal bir çerçevede ele alınmıştır. Ancak 1990’larda bazı metriklerde farklı enerji–momentum komplekslerinin aynı sonuçları verdiğinin gösterilmesiyle bu alana ilgi yeniden canlanmış, farklı uzay–zaman geometrilerinde enerji dağılımı hesaplamalarına yönelik çok sayıda uygulama çalışması yapılmıştır. Bu dönemi izleyen 2000’li yıllarda konu kuramsal olarak daha sağlam bir zemine oturtulmuş, literatürde hem yöntemsel bütünlük sağlanmış hem de yayın sayısı en yoğun seviyesine ulaşmıştır.

2010’lu ve 2020’li yıllarda ise ilgi daha çok belirli problem alanlarına yönelmiş, literatür önceki döneme kıyasla daha özel başlıklar etrafında şekillenmiştir. Bu dönemde çalışmaların önemli bir kısmı kuasi-yerel enerji yaklaşımlarıyla ilişkilendirilmiş, kozmolojik modeller (Bianchi evrenleri gibi), kara delik çözümleri, kütleçekim dalgaları ve değiştirilmiş yerçekimi teorileri (örneğin $f(R)$ kütleçekimi) bağlamında enerji–momentum gösterimlerinin uygulanmasına odaklanmıştır. Güncel literatürde temel tartışma artık “hangi enerji–momentum tanımı doğrudur?” sorusundan ziyade, “hangi fiziksel durumda hangi yaklaşım daha anlamlı sonuç verir?” sorusuna evrilmiş durumdadır. Böylece konu olgunlaşmış bir araştırma alanına dönüşmüş ve uygulama odaklı yayınlar hâlâ güncelliğini korumaktadır. Bu kesimde literatürdeki bazı önemli çalışmalara değinilerek tezin literatür ile ilişkisi ele alınacaktır.

Genel görelilikte enerji-momentum tanımlarını kullanarak, diyagonal metriklere sahip uzay-zaman modellerinin enerji dağılımı incelenmiştir. Çalışmada, Einstein’ın genel görelilik teorisinde enerji-momentum tanımları kullanılarak, diyagonal metriklere sahip uzay-zaman modellerinin enerji dağılımı hesaplanmıştır. Bu bağlamda, Einstein, Bergmann–Thomson, Landau–Lifshitz, Papapetrou ve Møller enerji-momentum tanımları uygulanmıştır. Sonuçlar, bu tanımların her birinin, diyagonal metriklere sahip uzay-zaman modelleri için aynı enerji dağılımını verdiğini göstermiştir. Bu durum, enerji-momentum gösterimlerinin diyagonal metrikler için tutarlı sonuçlar sağladığını ve genel görelilikte

enerji tanımının belirli koşullar altında bağımsız olduğunu göstermektedir (Korunur ve ark., 2007).

Aygün ve arkadaşlarının çalışması Yılmaz–Rosen metriği altında skaler alan teorisinin enerji-momentum dağılımını incelemekte ve genel görelilik ile teleparalel yerçekimi teorileri arasındaki ilişkiyi tartışmaktadır. Sonuçlar, her iki teorinin de benzer enerji-momentum yapıları sunduğunu ve Yılmaz–Rosen metriğinin bu bağlamda önemli bir çözüm olduğunu göstermektedir (Aygün ve ark., 2008).

Gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde Friedmann–Robertson–Walker (FRW) kozmolojileri incelenmiştir. Çalışmada, FRW kozmolojilerinin tekillik içermeyen çözümlerinin elde edilebilmesi için gerekli genel koşullar tartışılmıştır. Ayrıca, literatürde önerilen iki modifiye dağılım ilişkisi kullanılarak gökkuşağı yerçekimi fonksiyonlarının belirlenmesi önerilmiştir. Bu yaklaşımla, FRW benzeri modeller incelenmiş ve tam çözümler elde edilmiştir (Awad ve ark., 2013).

Deforme olmuş dağılım ilişkileriyle ilişkili spektral boyutun ultraviyole (UV) değerine doğru akışının, kozmolojik dalgalanmaların ölçekten bağımsız bir spektrumunu enflasyona ihtiyaç duymadan nasıl üretebileceği yeniden incelenmektedir. Bu senaryoda, Einstein yerçekimi varsayılmıştır. Teori, dalga boyuna bağlı bir ışık hızı sergilemekte, ancak uygun bir “gökkuşağı çerçevesine” dönüştürülerek bu özellik ortadan kaldırılabilen, bunun bedeli olarak yerçekimi modifiye edilmektedir. Elde edilen gökkuşağı yerçekimi teorisi, yüksek enerjilerde yerçekiminin etkisinin azaldığını veya en azından evrensel bir konformal bağlanmaya yol açtığını göstermektedir. Bu durum, dalgalanmaların tüm ölçeklerde neden ölçekten bağımsız olduğunu açıklar: belirli bir ufuk ölçeği yoktur. Tam olarak ölçekten bağımsızlık sağlamayan dağılım ilişkileri için, gökkuşağı çerçevesinde “egzotik enflasyon” bulunmuştur. Bu sonuçların, boyutsal indirgenme fenomeni altında yerçekiminin davranışına ışık tuttuğu öne sürülmektedir (Amelino-Camelia ve ark., 2013).

Gökkuşağı kozmolojisinde ilk tekillik sorununu daha derinlemesine incelemek amacıyla, bir boyutlu minisuperspace modeli kullanılarak kapalı bir gökkuşağı evreninin kuantum düzeyinde incelenmesi yapılmıştır. Homojen ve izotropik bir klasik uzay-zaman arka planı altında, kozmolojik sabitli ideal bir sıvı için Schutz formalizmi çerçevesinde klasik Hamiltonyen türetilmiştir. Erken evren evrimi sırasında sistemin davranışı, çeşitli

madde kaynakları ve bunlara bağılı gökkuşağı fonksiyonlarının etkisi analiz edilmiştir. Sonuçlar, her iki gökkuşağı evren modeli için başlangıç tekilliğinin ortadan kaldırılmasının, potansiyel bir bariyer ve ölçek faktörünün sıfır olmayan bir değeriyle statik bir evrenin oluşumu yoluyla mümkün olduğunu göstermektedir. Ayrıca, enerjiye bağılı uzay-zaman geometrisinin, Planck enerjisiyle karşılaştırılabilir enerjilerde, sıfır olmayan ölçek faktörünün kararlılığını sağlayabileceği ve belirli kısıtlamalar altında egzotik madde içeren bir evren modelinin tekillik içermeyen harmonik bir evren oluşturabileceği gösterilmiştir. Çalışma, Schrödinger–Wheeler–DeWitt denklemi kullanılarak evrenin dalga fonksiyonunun erken evrim aşamaları için elde edilmesiyle tamamlanmıştır (Santos ve ark., 2015).

Kütlesel yerçekimi ve gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde tekillik içermeyen evren modelleri incelenmiştir. Öncelikle, kütlesel yerçekimi teorisinin FRW kozmolojisini nasıl modifiye ettiği ve büyük patlama tekilliğini ortadan kaldırmada yetersiz olduğu gösterilmiştir. Ardından, enerjiye bağılı uzay-zamanı içeren gökkuşağı yerçekimi formalizması kullanılarak, kütlesel yerçekimi ve gökkuşağı yerçekiminin birleşiminin erken evren tekilliğini ortadan kaldırabileceği ortaya konmuştur. Çalışma, tekillik içermeyen bir evren için gerekli koşulları belirlemiş ve bu koşulların, kütlesel yerçekimi ve gökkuşağı yerçekimi etkileri altında nasıl değiştiğini incelemiştir (Hendi ve ark., 2017).

Verlinde'nin yerçekimini entropik bir kuvvet olarak yorumlayan yaklaşımı temel alınarak, gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde entropi–alan ilişkisi incelenmiştir. Bu bağlamda, yüksek enerjili fizik alanında, entropik kuvvet perspektifinden yerçekimsel kuvvetin nasıl değiştiği araştırılmış ve bu değişikliklerin FRW evreninde Friedmann denklemlerine nasıl yansıdığı ele alınmıştır. Gökkuşağı yerçekimi, parçacıkların enerjilerine bağılı olarak farklı metrikler deneyimlediği bir çerçeve sunar. Bu çerçevede entropi–alan ilişkisi modifiye edilerek, entropik kuvvet yaklaşımıyla yerçekimsel kuvvetin yüksek enerjili düzeltmeleri türetilmiştir. Bu modifiye edilmiş yerçekimsel kuvvet kullanılarak FRW evreninde Friedmann denklemlerine yüksek enerji düzeltmeleri eklenmiştir. Çalışma, gökkuşağı yerçekimi teorisinin kozmolojik denklemler üzerindeki etkilerini anlamak için önemli bir adım olup, yüksek enerjili fizik koşullarında evrenin genişlemesini ve evrimini daha iyi anlamamıza katkı sağlar (Sefiedgar, 2017).

Joule–Thomson genişleme süreci, yani bir sistemin sabit entalpi altında yüksek basınçtan düşük basınca geçerken yaşadığı ısı değişimi, gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde

incelenmiştir. Çalışmada, kozmolojik sabitin termodinamik basınç olarak kabul edildiği genişletilmiş faz uzayında, yüklü Anti-de Sitter (AdS) kara deliklerin termodinamik özellikleri ele alınmaktadır. Araştırmada kara deliğin kütlesi entalpi olarak yorumlanmakta ve yüzey çekimi modifiye edilmiş gökkuşağı fonksiyonları üzerinden yeniden tanımlanmaktadır. Joule–Thomson katsayısı, tersinir olmayan genleşme sürecinde elde edilerek tersine dönüşüm (inversion) sıcaklığı ve eğrileri analitik ve sayısal yöntemlerle hesaplanmıştır. Çalışma, kara delik parametreleri (yük, basınç, kütle) ve gökkuşağı yerçekiminin ek parametresi η 'nın ısı alışverişi ve tersine dönüşüm noktası üzerindeki etkilerini detaylandırarak, klasik kara delik termodinamiğinden farklarını ortaya koymaktadır (Yekta ve ark., 2019).

Gökkuşağı yerçekimi etkileri altında, global monopole uzay-zamanında Klein–Gordon osilatörü incelenmiştir. Üç farklı gökkuşağı yerçekimi versiyonu kullanılarak Klein–Gordon denkleminin çözümü elde edilmiş ve enerji seviyeleri analiz edilmiştir. Sonuçlar, gökkuşağı yerçekiminin özellikle düşük enerji seviyelerinde enerji spektrumunu önemli ölçüde etkilediğini göstermektedir. Bu bulgu, kuantum alan teorisi ve kozmoloji alanlarında yeni perspektifler sunmaktadır (Bragança ve ark., 2019).

Enerjiye bağlı bir uzay-zaman ortamında, Einstein– Λ teorisinin doğrusal olmayan elektrodinamik ile birleşimi incelenmiştir. Güç yasası modelini kullanarak ve uygun parametreleri belirleyerek, AdS asimptotuna sahip iki yeni sınıf doğrusal olmayan yüklü kara delik çözümleri elde edilmiştir. Bu kara deliklerin termodinamik özelliklerini incelemek amacıyla kütle, elektriksel yük, elektriksel potansiyel, sıcaklık ve entropi gibi korunumlu ve termodinamik nicelikler hesaplanmıştır. Gökkuşağı fonksiyonlarının bu nicelikler üzerindeki etkilerine rağmen, ilginç bir şekilde, birinci yasa standart formunda geçerliliğini korumuştur. Kanonik ansambl yöntemi kullanılarak ve kara deliğin ısı kapasitesi hesaplanarak kara deliğin yerel kararlılığı ve termodinamik faz geçişleri analiz edilmiştir. Son olarak, kara deliğin termal dalgalanmaları dikkate alınarak kuantum yerçekimi düzeltmelerinin termodinamik özellikler üzerindeki etkileri incelenmiştir (Dehghani, 2020).

Planck enerjisinin üzerindeki enerji ölçeklerinde, geometrinin ve temel fiziksel sabitlerin (yük, kütle, ışık hızı ve Newton'un yerçekimi sabiti) enerjiye bağlı olduğunu varsayan Gökkuşağı Yerçekimi teorisi bağlamında, doğrusal olmayan elektrodinamiğin bu çerçeveye birleşimi ele alınmış ve yeni bir kütle fonksiyonu tanımlanarak tüm uzay-

zamanda eğrilik değişmezlerinin iyi davrandığı küresel simetrik düzenli kara delik çözümleri formüle edilmiştir. Elektrik alanının şiddetinin enerji ölçeğiyle ters orantılı olduğu; enerji ölçeği arttıkça elektrik alanının şiddetinin azaldığı; güçlü enerji koşulunun ihlal edildiği bölgenin enerji ölçeği arttıkça daraldığı ve orijine yaklaştığı gösterilmiştir. Bu sonuçlar, düzenli kara delik çözümlerinin fiziksel özellikleri ve enerji koşulları üzerindeki etkileri anlamak açısından önemlidir (Junior ve ark., 2020).

Gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde fotonların kuantum dinamiği incelenmiştir. Özellikle, kütesiz alan denklemlerinin ilgili formülasyonları çözülerek fotonların davranışı analiz edilmiştir. Sonuçlar, gökkuşağı yerçekimi etkilerinin fotonların kuantum özellikleri üzerinde belirgin etkileri olduğunu göstermektedir (Sogut ve ark., 2021).

Gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde, topolojik olarak basit bir Gödel tipi uzay-zamanda Klein–Gordon denklemi incelenmiştir. Çalışmada, skaler parçacıkların enerji spektrumları ve tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca, Klein–Gordon osilatör potansiyeli varlığında da benzer analizler yapılmış ve sonuçlar iki farklı gökkuşağı fonksiyonu kullanılarak değerlendirilmiştir (Kangal ve ark., 2021).

Gökkuşağı yerçekimi evreninde, Regge–Wheeler formalizmi kullanılarak aksiyal yerçekimi dalgalarının evrimi incelenmiştir. Gökkuşağı FLRW arka planında sıfıncı ve birinci mertebeden alan denklemleri kullanılarak aksiyal modların metrik, madde içeriği ve dört-ivme vektörü üzerindeki etkileri analiz edilmiştir. Sonuçlar, aksiyal modların arka plan metrik ve dört-ivme vektörünün belirli bileşenlerini etkilediğini, ancak arka plan madde dağılımını etkilemediğini göstermektedir (Aydoğdu ve Salti, 2022).

de Sitter evreninde Møller enerji dağılımı, enerjiye bağlı uzay-zaman etkileriyle birlikte incelenmiştir. Çalışma, de Sitter uzay-zamanının enerjiye bağlı uzay-zaman çerçevesinde nasıl davrandığını ve bu durumun Møller enerji dağılımı üzerindeki etkilerini analiz etmektedir (Salti, 2022).

Gökkuşağı yerçekimi bağlamında Bianchi I tipi uzay-zamanda parçacık üretimi analiz edilmiş hem skaler hem de spin-1/2 parçacıkların elektromanyetik ve yerçekimi alanlarından kaynaklanan üretim süreçleri ele alınmıştır. Zamanla azalan harici elektrik alanı altında, gökkuşağı metrikli Bianchi I uzay-zamanında Klein–Gordon ve Dirac denklemleri çözülerek oluşturulan parçacıkların sayı yoğunlukları hesaplanmış; elde edilen sonuçlar her iki parçacık türü için grafiksel olarak sunulmuştur (Bilim ve ark., 2022).

Gökkuşağı yerçekimi teorisi çerçevesinde kara iplik (black string) çözümleri analiz edilmiştir. Dört boyutlu kara iplik çözümleri, enerjinin Planck enerjisine oranına bağlı olan $f_1\left(\frac{E}{E_p}\right)$ ve $f_2\left(\frac{E}{E_p}\right)$ fonksiyonları cinsinden analitik olarak elde edilmiştir. Hawking sıcaklığının seçilen gökkuşağı fonksiyonlarına bağlı olarak belirli bir olay ufku yarıçapı için artabileceği veya azalabileceği gösterilmiş; entropi, özgül ısı ve serbest enerji gibi termodinamik büyüklükler incelenmiş, entropi ve özgül ısıнын gökkuşağı fonksiyonlarına bağlı olarak değiştiği, serbest enerjinin ise etkilenmediği bulunmuştur. Ayrıca gökkuşağı yerçekiminin kara iplik etrafındaki kütesiz ve kütleli parçacıkların yörüngeleri üzerindeki etkileri değerlendirilmiş ve her iki durumda da kararlı yörüngelerin bulunmadığı tespit edilmiştir (Dárlla ve ark., 2023).

Kozmik iplik gökkuşağı yerçekimi uzay-zamanında ve düzgün manyetik alan altında, konum-bağımlı kütle (PDM) koşulları altında Klein–Gordon parçacıkları incelenmiştir. Elde edilen Klein–Gordon denklemi iki boyutlu bir radyal Schrödinger–Coulomb modeline indirgenmiş; bu modelin tam çözümü kullanılarak hem sabit kütleli hem de PDM’li KG–Coulombik parçacıkların enerji seviyeleri ve dalga fonksiyonları hesaplanmıştır (Mustafa, 2023).

İki boyutlu de Sitter (dS_2) uzayında, gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde çift üretim oranı incelenmiştir. Çalışma, dS_2 uzayında çift üretim oranını hesaplamış ve bu oranın uzay-zamanın eğriliği ile enerji düzeylerine bağlı olarak nasıl değiştiğini analiz etmiştir (Şahin ve ark., 2023).

Teleparalel yerçekimi bağlamında doku metriği için enerji–momentum problemleri incelenmiştir. Einstein, Bergmann–Thomson ve Landau–Lifshitz enerji–momentum dağılımları kullanılarak doku metrikli uzay-zamanındaki enerji ve momentum yoğunlukları analiz edilmiştir. Sonuçlar, bu enerji–momentum dağılımlarının belirli koşullar altında nasıl davrandığını ve teleparalel yerçekimi çerçevesinde nasıl yorumlanması gerektiğini ortaya koymaktadır (Aygün ve Aktaş, 2023).

Gökkuşağı yerçekimi çerçevesinde, topolojik olarak basit bir Gödel tipi uzay-zamanda Dirac denkleminin tam çözümleri incelenmiştir. Araştırmada, spin-1/2 parçacıkların etkili dinamikleri ve enerji spektrumları elde edilmiş, gökkuşağı senaryoları dikkate alınarak sonuçlar ayrıntılı biçimde analiz edilmiştir (Kangal ve ark., 2022).

2.2. METOD

2.2.1. Enerji-momentum gösterimleri

Genel görelilikte enerji-momentum gösterimleri, kütleçekimin geometrik doğası nedeniyle uzun yıllar boyunca tartışmalı bir konu olmuş ve farklı yaklaşımların geliştirilmesine yol açmıştır. Einstein, Landau–Lifshitz, Møller, Bergmann–Thomson gibi çeşitli enerji-momentum kompleksleri başlangıçta eleştirilse de, zamanla bu tanımların uygun fiziksel koşullar altında tutarlı sonuçlar verebildiği görülmüştür. Günümüzde bu gösterimlerin amacı, evrenin toplam enerjisini belirlemekten çok, belirli bir uzay-zaman geometrisinde enerji ve momentumun dağılımını anlamak olarak görülmektedir. Literatür, artık bu yaklaşımları rakip yöntemler olarak değil, farklı geometrik ve fiziksel durumlarda tamamlayıcı araçlar olarak değerlendirmekte; böylece enerji-momentum gösterimleri genel görelilikte fiziksel içerik analizinde önemli bir araç olmaya devam etmektedir.

2.2.1.1. Einstein enerji-momentum gösterimi

Einstein enerji-momentum gösterimi, genel görelilikte enerji ve momentumun ifade edilmesine yönelik geliştirilen ilk tanımlardan biridir ve bu yönüyle literatürde tarihsel ve kavramsal açıdan önemli bir yere sahiptir. Her ne kadar koordinat bağımlılığı ve psödotensör yapısı nedeniyle eleştirilmiş olsa da özellikle zayıf alan yaklaşımında ve asimptotik olarak düz uzay-zamanlarda fiziksel olarak anlamlı sonuçlar vermesi, bu tanımın yaygın şekilde kullanılmasını sağlamıştır. Einstein'ın yaklaşımı, kütleçekim alanının enerjisinin tamamen yok sayılamayacağını, ancak klasik anlamda yerel bir enerji yoğunluğundan söz etmenin mümkün olmadığını vurgular. Bu nedenle Einstein enerji-momentum gösterimi, yerçekimsel enerjinin dağılımını analiz etmede temel bir referans noktası olarak kabul edilir ve günümüzde hâlâ birçok uzay-zaman çözümünde enerji içeriğini incelemek için başvuru olan önemli bir yöntem olmayı sürdürmektedir.

Einstein enerji momentum gösterimi (Einstein, 1916)

$$\Theta_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{16\pi} \Omega_{\mu,\alpha}^{\nu\alpha} \quad (2.1)$$

$$\Omega_{\mu}^{\nu\alpha} = g_{\mu\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} [-g(g^{\mu\beta} g^{\alpha\xi} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\xi})]_{,\xi} \quad (2.2)$$

ile verilir. Burada Θ_0^0 enerji yoğunluğunu, Θ_i^0 momentum yoğunluğunu gösterir. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial \Theta_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (2.3)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P_{\mu} = \iiint \Theta_{\mu}^0 dx dy dz. \quad (2.4)$$

2.2.1.2. Bergmann-thomson enerji-momentum gösterimi

Bergmann–Thomson enerji–momentum gösterimi, genel görelilikte enerji ve momentumun tanımlanması sorununa alternatif bir yaklaşım sunarak Einstein’ın önerisini geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu gösterim, özellikle karmaşık uzay–zaman geometrilerinde uygulama kolaylığı sağlaması ve bazı durumlarda açısal momentumu da doğal biçimde içermesiyle dikkat çeker. Koordinat bağımlılığı nedeniyle klasik enerji-momentum kompleksleriyle benzer sınırlılıklara sahip olsa da, çeşitli kara delik ve kozmolojik modellerde fiziksel olarak makul enerji dağılımları verdiği görülmüştür. Literatürde sıkça Einstein ve Landau–Lifshitz tanımlarıyla birlikte karşılaştırmalı olarak kullanılan Bergmann–Thomson yaklaşımı, enerji-momentumun korunumu ve dağılımı konularında genel göreliliğe tamamlayıcı bir perspektif kazandırmıştır.

Bergmann-Thomson enerji momentum gösterimi (Bergman ve Thomson, 1953)

$$B^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \Pi^{\mu\nu\alpha}_{,\alpha}, \quad (2.5)$$

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = g^{\mu\beta} V^{\nu\alpha}_{\beta}, \quad (2.6)$$

$$V^{\nu\alpha}_{\beta} = -V^{\alpha\nu}_{\beta} = g_{\beta\xi} \left[-g(g^{\nu\xi} g^{\alpha\rho} - g^{\alpha\xi} g^{\nu\rho}) \right]_{,\rho} \quad (2.7)$$

ile verilir. B^{00} enerji yoğunluğunu, B^{i0} momentum yoğunluğunu gösterir. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial B^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (2.8)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P^\mu = \iiint B^{\mu 0} dx dy dz \quad (2.9)$$

2.2.1.3. Landau-lifshitz enerji-momentum gösterimi

Landau–Lifshitz enerji–momentum gösterimi, genel görelilikte enerji ve momentumun tanımlanması problemine daha simetrik ve matematiksel olarak düzenli bir yaklaşım sunmasıyla öne çıkan önemli yöntemlerden biridir. Bu gösterim, özellikle enerji ve momentumun korunumu ilkesini açıkça içermesi ve hesaplamalarda simetrik bir tensör yapısı kullanması nedeniyle literatürde geniş kabul görmüştür. Koordinat bağımlılığına sahip olması bakımından diğer klasik komplekslerden ayrılmasa da, özellikle asimptotik olarak düz uzay–zamanlarda güvenilir sonuçlar verdiği ve fiziksel yorumlanabilirlik açısından tatmin edici bulunduğu için pek çok çalışmada tercih edilmektedir. Landau–

Lifshitz yaklaşımı, enerji-momentumun sadece madde dağılımıyla sınırlı olmadığını, kütleçekim alanının da enerji katkısı olduğunu ortaya koyarak genel göreliliğin temel ilkeleriyle tutarlı bir çerçeve sunmaktadır.

Landau-Lifshitz enerji-momentum gösterimi (Landau ve Lifshitz, 1975)

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} S^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.10)$$

$$S^{\mu\nu\alpha\beta} = [-g(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})] \quad (2.11)$$

ile verilir. L^{00} enerji yoğunluğunu, L^{i0} momentum yoğunluğunu gösterir. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial L^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (2.12)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P^\mu = \iiint L^{\mu 0} dx dy dz \quad (2.13)$$

2.2.1.4. Papapetrou enerji-momentum gösterimi

Papapetrou enerji-momentum gösterimi, genel görelilikte enerji ve momentumun korunumu ilkesini simetrik bir yapı içinde ele almasıyla dikkat çeken bir yaklaşımdır. Özellikle simetrik enerji-momentum tensörünün türetilmesiyle açısız momentumun da tanım içine doğal biçimde dâhil edilebilmesi, bu gösterimin önemli bir avantajı olarak kabul edilir. Diğer klasik komplekslerde olduğu gibi koordinat bağımlılığı eleştirilerine maruz kalsa da, Papapetrou yaklaşımı çeşitli kara delik ve kozmolojik modellerde uygulanarak fiziksel olarak uyumlu enerji dağılımları üretmiştir. Literatürde çoğunlukla

Einstein, Landau–Lifshitz ve Bergmann–Thomson tanımlarıyla karşılaştırmalı olarak kullanılan bu yöntem, enerji-momentum probleminin farklı geometrilere analizi için önemli bir alternatif araç olarak değerlendirilmektedir.

Papapetrou enerji-momentum kompleksi (Papapetrou, 1948) aşağıdaki biçimde verilir:

$$\Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi} N^{\alpha\beta\gamma\sigma}_{,\gamma\sigma} \quad (2.14)$$

$$N^{\alpha\beta\gamma\sigma} = \sqrt{-g} (g^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\sigma} - g^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\sigma} + g^{\gamma\sigma} \eta^{\alpha\beta} - g^{\beta\sigma} \eta^{\alpha\gamma}). \quad (2.15)$$

Ω^{00} enerji yoğunluğunu, Ω^{i0} momentum yoğunluğunu gösterir. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial \Omega^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (2.16)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P^\alpha = \iiint \Omega^{\alpha 0} dx dy dz \quad (2.17)$$

2.2.1.5. Tolman enerji-momentum gösterimi

Tolman enerji-momentum gösterimi, özellikle durağan ve simetrik uzay-zamanlarda fiziksel olarak tutarlı sonuçlar vermesi, Tolman'ın tanımını uygulamalı çalışmalarda kullanılabilir kılmıştır. Koordinat bağımlılığı yönüyle klasik enerji-momentum kompleksleriyle benzer sınırlamalara sahip olsa da, özellikle Einstein'ın yaklaşımıyla uyumlu sonuçlar üretmesi ve hesaplama kolaylığı sağlaması nedeniyle

literatürde sıkça tercih edilmiştir. Tolman gösterimi, yerçekimsel enerjinin dağılımının incelenmesi ve belirli metriklerin enerji içeriğinin analiz edilmesi açısından temel ve güvenilir yöntemlerden biri olarak değerlendirilmektedir.

Tolman enerji-momentum kompleksi (Tolman, 1934) aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{8\pi} U_{\beta}^{\alpha\xi}{}_{,\xi} \quad (2.18)$$

$$U_{\beta}^{\alpha\xi} = \sqrt{-g} \left[-g^{\rho\alpha} (-\Gamma_{\beta\rho}^{\xi} + \frac{1}{2} g_{\beta}^{\xi} \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} + \frac{1}{2} g_{\rho}^{\xi} \Gamma_{\lambda\beta}^{\lambda}) + \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} g^{\eta\mu} (-\Gamma_{\eta\mu}^{\xi} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} + \frac{1}{2} g_{\nu}^{\xi} \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) \right] \quad (2.19)$$

T_0^0 enerji yoğunluğunu, T_i^0 momentum yoğunluğunu gösterir. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (2.20)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P_{\beta} = \iiint T_i^0 dx dy dz \quad (2.21)$$

2.2.1.6. Weinberg enerji-momentum gösterimi

Weinberg enerji-momentum gösterimi, genel görelilikte enerji ve momentum tanımını ele alan klasik yaklaşımlardan biridir ve özellikle zayıf alan yaklaşımı ile uyumlu yapısı nedeniyle dikkat çeker. Weinberg'in tanımı, Minkowski uzay-zamanından küçük sapmalar içeren durumlarda uygulanabilirliği yüksek olduğundan, enerji ve momentumun kütleçekimsel etkiler altındaki davranışını inceleyen çalışmalarda sıklıkla tercih edilmiştir.

Koordinat bağımlılığı ve psödotesör niteliği yönünden diğer komplekslerle benzer sınırlılıklar taşısa da hesaplamalarda sağladığı sadelik ve fiziksel yoruma elverişli sonuçları nedeniyle özellikle asimptotik düz uzay-zaman geometrilerinde etkili bir yöntem olarak kabul edilmektedir. Bu özellikleri sayesinde Weinberg yaklaşımı, enerji-momentum analizi yapan araştırmalarda karşılaştırmalı değerlendirmelerde yer alan önemli gösterimlerden biri olmuştur.

Weinberg enerji-momentum gösterimi

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \zeta^{\mu\nu\alpha}_{,a}, \quad (2.22)$$

$$\zeta^{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial h^{\beta}_{\beta}}{\partial x_{\mu}} \eta^{va} - \frac{\partial h^{\beta}_{\beta}}{\partial x_v} \eta^{\mu a} - \frac{\partial h^{\beta\mu}}{\partial x^{\beta}} \eta^{va} - \frac{\partial h^{\beta\nu}}{\partial x^{\beta}} \eta^{\mu a} + \frac{\partial h^{\mu a}}{\partial x_v} - \frac{\partial h^{va}}{\partial x_{\mu}} \quad (2.23)$$

biçiminde ifade edilir. Burada W^{00} enerji yoğunluğunu, W^{i0} momentum yoğunluğunu gösterir. $\zeta^{\mu\nu\alpha}$ Weinberg süperpotansiyeli olup ilk iki indeks için antisimetrik bir tensördür. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial W^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (2.24)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P^{\mu} = \iiint W^{\mu 0} dx dy dz. \quad (2.25)$$

2.2.1.7. Möller enerji-momentum gösterimi

Möller'in formülasyonu diğer komplekslerin aksine yalnızca kartezyen koordinatlarda değil, herhangi bir koordinat sisteminde kullanılabilir. Bu, özellikle eğrisel (örneğin küresel veya silindirik) koordinatlarda çalışan araştırmacılar için büyük kolaylık

sağlar. Bu nedenle Møller enerji-momentum gösterimi, özellikle silindirik simetrik veya Bianchi tip uzay zamanlar gibi modellerin enerji dağılımı incelemelerinde sıkça tercih edilir.

Møller, enerji-momentum gösterimi şu şekilde tanımlanır (Møller, 1958):

$$M_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{8\pi} \chi_{\mu}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} \quad (2.26)$$

burada $\chi_{\mu}^{\nu\sigma}$ süper potansiyeli temsil eder ve

$$\chi_{\mu}^{\nu\sigma} = \sqrt{-g}(g_{\mu\lambda,\eta} - g_{\mu\eta,\lambda})g^{\nu\eta}g^{\sigma\lambda} \quad (2.27)$$

biçiminde tanımlıdır. M_{μ}^0 enerji yoğunluğunu, M_{μ}^i momentum yoğunluğunu gösterir. Enerji ve momentum yoğunluğu aşağıdaki korunum yasasını sağlar:

$$\frac{\partial M_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 . \quad (2.28)$$

Toplam enerji-momentum ise aşağıdaki integral ile verilir:

$$P_{\mu} = \iiint M_{\mu}^0 dx dy dz \quad (2.29)$$

2.3. Gökkuşağı kütleçekim kuramı (GKK)

Genel görelilik kuramının bir diğer açmazı ise son zamanlardaki astrofiziksel gözlemler ve keşiflerdir. Evrenin günümüzde ivmeli genişleme fazında olduğunu gösteren gözlemsel veriler genel görelilik kuramında açıklanamamıştır. Ayrıca karadeliklerin resmedilmesi ve gravitasyonel dalgaların keşfedilmesi gibi çarpıcı gelişmeler süper kuvvet

yolunda gravitasyonel alanın kuantize edilmesini yani çalışan bir kuantum gravite kuramının oluşturulmasını elzem hale getirmiştir. Bu bağlamda birçok testten başarı ile geçen genel görelilik kuramından vazgeçmek yerine modifiye kuramlara yönelmek bilim insanlarının tercihi olmuştur. Bunun neticesinde ortaya çıkan kuramlardan biri de genel göreliliğin gökkuşağı (GGG) formalizmidir. Bu formalizmin kuantum gravite için en önemli aday kuramlardan biri olduğu düşünülmektedir.

Kurama göre cisimlerin enerjisi uzay-zaman dokusuna doğrudan etki etmektedir, bu nedenle ele alınan uzay-zaman metriği bu fonksiyonlar yardımıyla yeniden yazılabilir.

$$f_1^2(\chi)E^2 - f_2^2(\chi)p^2 = m^2. \quad (2.30)$$

Burada E , m ve p sırasıyla test parçacığının enerjisi, kütlesi ve momentumunu göstermektedir. Ayrıca E_{pl} Planck enerjisi olmak üzere, $\chi = E/E_{pl}$ olarak tanıdır. Kuantum gravite modelinin ana fikrini matematiksel olarak temsil eden $f_1(\chi)$ ve $f_2(\chi)$ ifadeleri gökkuşağı fonksiyonları olarak önerilmiştir. Gravitenin gökkuşağı yaklaşımına göre bir çizgi-elemanı ile betimlenen uzay-zaman modelinde aşağıdaki değişiklikler yapıldığında gökkuşağı tipi bir metrik elde edilebilmektedir:

$$dt \rightarrow \frac{dt}{f_1(\chi)}, \quad dx_i \rightarrow \frac{dx_i}{f_2(\chi)}. \quad (2.31)$$

Literatürde “Gökkuşağı Kütleçekimi” ya da “Rainbow Gravity” çalışmalarında sıkça kullanılan gökkuşağı kütleçekimi fonksiyonları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 2.1: Sıkça kullanılan gökkuşağı kütleçekimi fonksiyonları.

No	$f_1(E/E_p)$	$f_2(E/E_p)$	Referans
1	1	$\sqrt{1 - \eta \left(\frac{E}{E_p}\right)^n}$	Amelino-Camelia ve ark. (1997); Magueijo ve Smolin (2004)
2	$\frac{1}{1 - \lambda \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	1	Magueijo ve Smolin (2002)
3	$e^{\alpha \frac{E}{E_p}}$	1	Magueijo ve Smolin (2004)
4	$\ln \left(1 + \beta \left(\frac{E}{E_p}\right)\right)$	1	Ling ve Liu (2007)
5	1	$\sqrt{1 - \gamma \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	Ali (2014)
6	$\frac{e^{\xi \left(\frac{E}{E_p}\right)} - 1}{\xi \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	1	Awad et al. (2013)
7	1	$\sqrt{1 - \eta \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	Hendi ve ark. (2017)
8	$\frac{1}{1 + \lambda \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	$\frac{1}{1 + \lambda \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	Santos ve ark. (2015)
9	$1 + \alpha \left(\frac{E}{E_p}\right)^2$	1	Garattini (2012)
10	$\sqrt{1 + \beta \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	$\sqrt{1 + \beta \left(\frac{E}{E_p}\right)}$	Sefiedgar (2017)

Burada $\eta, \alpha, \beta, \lambda, \xi$, vb. sabit parametrelerdir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Model

Çalışmada türdeş olmayan uzay zaman modeli olarak Van Stockum (1937) çözümü kullanılmaktadır. Willem Jacob van Stockum tarafından sunulmuş bu çalışma ve genel görelilik kuramında dönen silindirik simetrlili bir toz (basıncısız madde) dağılımının yerçekimi alanının çözümü olarak önem kazanmıştır. Bu model, sabit açısal hızla dönen sonsuz silindirik bir toz katmanının Einstein alan denklemleri altında davranışını tanımlar. Silindirik koordinatlarda (t, ρ, ϕ, z) türdeş olmayan Van Stockum modeli için çizgi elemanı aşağıda verilmektedir (Bonnor, 1980):

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\psi(\rho)}(d\rho^2 + dz^2) + L^2(\rho)d\phi^2 + 2H(\rho)dtd\phi. \quad (3.1)$$

Bu denklemde yer alan fonksiyonlar

$$H(\rho) = \omega\rho^2; \quad L(\rho) = \rho(1 - \omega^2\rho^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \psi(\rho) = -\frac{1}{2}\omega^2\rho^2 \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Denklem (3.2) ifadesinde yer alan ω ifadesi sabit bir dönme açısal hızı temsil eder. Aynı zamanda dönen, sonsuz, homojen toz dağılımı için Einstein alan denklemlerinin bir çözümüdür. Ancak zaman benzeri sınırın korunması için çözüm yalnızca $\omega^2 \rho^2 < 1$ durumunda fiziksel anlam taşır.

Møller enerji-momentum gösterimi dışındaki tüm enerji momentum gösterimleri kartezyen koordinat bileşen bağımlılığı vardır. Dolayısıyla ele alınan modelin çizgi elemanı ifadesinin kartezyen koordinatlarda ifade edilmesi gerekir. Şimdi

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \quad (3.3)$$

dönüşümleri yapılırsa,

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

$$d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 = dx^2 + dy^2, \quad d\phi = \frac{xdy - ydx}{\rho^2} \quad (3.5)$$

elde edilir. Denklemler (3.3)-(3.4) ve (3.5) denklem (3.1) ifadesinde yerine yazılırsa kartezyen koordinatlarda van Stockum çizgi elemanı

$$ds^2 = -dt^2 + 2H(x, y) \left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \right) dt + L^2(x, y) \left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \right)^2 + e^{2\psi(x, y)} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.6)$$

biçiminde elde edilir. Denklem (3.2) kullanılarak çizgi elemanın açık hali

$$ds^2 = -dt^2 + (A + By^2)dx^2 + (A + Bx^2)dy^2 + Adz^2 + 2\omega x dt dy - 2\omega y dt dx \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Burada

$$A = e^{-\omega^2(x^2 + y^2)} \quad (3.8)$$

$$B = \frac{[1 - \omega^2(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Gökuşağı kütleçekim kuramı çerçevesinde metriği tekrar yazılacak olursa aşağıdaki çizgi elemanı elde edilir:

$$ds^2 = -\frac{1}{f_1^2} dt^2 + \frac{(A+By^2)}{f_2^2} dx^2 + \frac{(A+Bx^2)}{f_2^2} dy^2 + \frac{A}{f_2^2} dz^2 + \frac{2\omega x}{f_1 f_2} dt dy - \frac{2\omega y}{f_1 f_2} dt dx. \quad (3.10)$$

Denklem (3.10) kullanılarak metrik tensör ve tersi sırasıyla

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f_1^2} & \frac{-y\omega}{f_1 f_2} & \frac{x\omega}{f_1 f_2} & 0 \\ \frac{-y\omega}{f_1 f_2} & \frac{A+y^2 B}{f_2^2} & \frac{-xyB}{f_2^2} & 0 \\ \frac{x\omega}{f_1 f_2} & \frac{-xyB}{f_2^2} & \frac{A+x^2 B}{f_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{f_2^2} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{f_1^2(A+(x^2+y^2)B)}{A+(x^2+y^2)(\omega^2+B)} & -\frac{f_1 f_2 y \omega}{A+(x^2+y^2)(\omega^2+B)} & \frac{f_1 f_2 x \omega}{A+(x^2+y^2)(\omega^2+B)} & 0 \\ -\frac{f_1 f_2 y \omega}{A+(x^2+y^2)(\omega^2+B)} & \frac{f_2^2(A+x^2(\omega^2+B))}{A(A+(x^2+y^2)(\omega^2+B))} & \frac{f_2^2 x y (\omega^2+B)}{A(A+(x^2+y^2)(\omega^2+B))} & 0 \\ \frac{f_1 f_2 x \omega}{A+(x^2+y^2)(\omega^2+B)} & \frac{f_2^2 x y (\omega^2+B)}{A(A+(x^2+y^2)(\omega^2+B))} & \frac{f_2^2(A+y^2(\omega^2+B))}{A(A+(x^2+y^2)(\omega^2+B))} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_2^2}{A} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Denklem (3.2) denklem (3.11) ve denklem (3.12) de yerine yazılırsa hesaplarda kullanılacak olan metrik tensör ve tersi sırasıyla

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f_1^2} & \frac{-y\omega}{f_1 f_2} & \frac{x\omega}{f_1 f_2} & 0 \\ -\frac{y\omega}{f_1 f_2} & \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} + \frac{y^2(1-(x^2+y^2)\omega^2)}{x^2+y^2}}{f_2^2} & -\frac{xy(1-(x^2+y^2)\omega^2)}{(x^2+y^2)f_2^2} & 0 \\ \frac{x\omega}{f_1 f_2} & -\frac{xy(1-(x^2+y^2)\omega^2)}{(x^2+y^2)f_2^2} & \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} + \frac{x^2(1-(x^2+y^2)\omega^2)}{x^2+y^2}}{f_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}{f_2^2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(-1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}(-1 + x^2\omega^2 + y^2\omega^2))f_1^2}{1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}} & -\frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}y\omega f_1 f_2}{1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}} & \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}x\omega f_1 f_2}{1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}} & 0 \\ -\frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}y\omega f_1 f_2}{1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}} & \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}((1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2 + y^2)f_2^2}{(1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2 + y^2)} & \frac{e^{2(x^2+y^2)\omega^2}xyf_2^2}{(1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2 + y^2)} & 0 \\ \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}x\omega f_1 f_2}{1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}} & \frac{e^{2(x^2+y^2)\omega^2}xyf_2^2}{(1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2 + y^2)} & \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}(x^2 + (1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2})y^2)f_2^2}{(1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2 + y^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(x^2+y^2)\omega^2}f_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır. Bununla birlikte metrik tensörün determinantı (g) yardımıyla

$$\sqrt{-g} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2}(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{\frac{1}{2}}}{f_1 f_2^3} \quad (3.15)$$

olarak hesaplanır. Modelle ilgili olarak tetra matrisleri $h^a{}_\mu$ ve $h_a{}^\mu$ sırasıyla $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}h^a{}_\mu h^b{}_\nu$ ifadesi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_1} & \frac{y\omega}{\sqrt{f_1 f_2}} & \frac{-x\omega}{\sqrt{f_1 f_2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_2 \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_2 \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_2 \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$h_a{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}\sqrt{f_1 f_2}y\omega & \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}f_2 & 0 & 0 \\ \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}\sqrt{f_1 f_2}x\omega & 0 & \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}f_2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

3.2. Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı Çerçevesinde Enerji Yoğunluğu Hesaplamaları

Bu kısımda van Stockum modeli için enerji yoğunlukları Gökkuşığı kütleçekim kuramı çerçevesinde hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuçlar için literatürde iyi bilinen bazı Gökkuşığı fonksiyonları için sonuçlar değerlendirilmektedir.

3.2.1. Einstein Enerji Momentum Gösterimi

Denklem (2.2) ve denklemler (3.13)-(3.14)-(3.15) kullanılarak Einstein enerji-momentum gösterimi için potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\Omega_0^{01} = -\Omega_0^{10} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x [4(x^2+y^2)\omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 1)]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2} \quad (3.18)$$

$$\Omega_0^{02} = -\Omega_0^{20} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y [4(x^2+y^2)\omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 1)]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2} \quad (3.19)$$

$$\Omega_0^{12} = -\Omega_0^{21} = \frac{2e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1^2} \quad (3.20)$$

$$\Omega_1^{01} = -\Omega_1^{10} = -\frac{2e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} x y \omega^3}{f_2^2} \quad (3.21)$$

$$\Omega_1^{02} = -\Omega_1^{20} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega [1+2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}) y^2 \omega^2]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_2^2} \quad (3.22)$$

$$\Omega_1^{12} = -\Omega_1^{21} = -\frac{2e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \omega^2}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2} \quad (3.23)$$

$$\Omega_2^{01} = -\Omega_2^{10} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} [\omega + 2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}) x^2 \omega^3]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_2^2} \quad (3.24)$$

$$\Omega_2^{02} = -\Omega_2^{20} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} xy\omega^3}{f_2^2} \quad (3.25)$$

$$\Omega_2^{12} = -\Omega_2^{21} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x\omega^2}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2} \quad (3.26)$$

$$\Omega_3^{03} = -\Omega_3^{30} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x [2(x^2+y^2)\omega^2 - e^{(x^2+y^2)\omega^2}]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2} \quad (3.27)$$

$$\Omega_3^{23} = -\Omega_3^{32} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y [2(x^2+y^2)\omega^2 - e^{(x^2+y^2)\omega^2}]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2} \quad (3.28)$$

Denklem (2.1) içinde denklemler (3.18)...(3.28) kullanılırsa ele alınan model için Einstein enerji yoğunluğu Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı çerçevesinde

$$\begin{aligned} \Theta_0^0 = & \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega^2}{16f_1 f_2 \pi (1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2}} [4(x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 2) - 8e^{2(x^2+y^2)\omega^2} + \\ & e^{(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 15)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklinde hesaplanır.

3.2.2. Bergmann-Thomson enerji momentum gösterimi

Denklem (2.7) ve denklemler (3.13)-(3.14)-(3.15) kullanılarak Bergman-Thomsonn enerji-momentum gösterimi için potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}
V^{001} &= -V^{010} = \\
&= -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x \left\{ e^{(x^2+y^2)\omega^2} [1-5y^2\omega^2+2x^4\omega^4+2y^4\omega^4+x^2\omega^2(4y^2\omega^2-5)] - 4(x^2+y^2)\omega^2 \right\} f_1}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_2}
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
V^{002} &= -V^{020} = \\
&= -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \left\{ e^{(x^2+y^2)\omega^2} [1-5y^2\omega^2+2x^4\omega^4+2y^4\omega^4+x^2\omega^2(4y^2\omega^2-5)] - 4(x^2+y^2)\omega^2 \right\} f_1}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_2}
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

$$V^{012} = -V^{021} = \frac{2e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega (x^2\omega^2+y^2\omega^2-1)}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}} \tag{3.32}$$

$$V^{101} = -V^{110} = \frac{2e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} xy\omega^3}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}} \tag{3.33}$$

$$V^{102} = -V^{120} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega (2y^2\omega^2-1)}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}} \tag{3.34}$$

$$V^{112} = -V^{121} = -\frac{2e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y\omega^2 f_2}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1} \tag{3.35}$$

$$V^{201} = -V^{210} = -\frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega (2x^2\omega^2-1)}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}} \tag{3.36}$$

$$V^{202} = -V^{220} = -\frac{2e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} xy\omega^3}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}} \tag{3.37}$$

$$V^{212} = -V^{221} = \frac{2e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x \omega^2 f_2}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1} \quad (3.38)$$

$$V^{313} = -V^{331} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x [2(x^2+y^2)\omega^2 - e^{(x^2+y^2)\omega^2}] f_2}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1} \quad (3.39)$$

$$V^{323} = -V^{332} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y [2(x^2+y^2)\omega^2 - e^{(x^2+y^2)\omega^2}] f_2}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1} \quad (3.40)$$

Denklem (2.5) içinde denklemler (3.30)...(3.40) kullanılırsa ele alınan model için Bergmann-Thomson enerji yoğunluğu Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı çerçevesinde

$$B^{00} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega^2}{16(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} \pi f_2} \{4(x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 2) + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 5) + e^{(x^2+y^2)\omega^2} [11y^2\omega^2 - 17 + 2x^4\omega^4 + 2y^4\omega^4 + x^2\omega^2(11 + 4y^2\omega^2)]\} f_1 \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir.

3.2.3. Landau-Lifshitz enerji momentum gösterimi

Denklem (2.11) ve denklemler (3.13)-(3.14)-(3.15) kullanılarak Landau-Lifshitz enerji-momentum gösterimi için potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} S^{0011} &= -S^{0110} = -S^{1001} \\ &= S^{1100} = \frac{e^{-2(x^2+y^2)\omega^2} [e^{(x^2+y^2)\omega^2} x^4 \omega^2 - y^2 + x^2 e^{(x^2+y^2)\omega^2} (y^2 \omega^2 - 1) - x^2]}{(x^2+y^2) f_2^4} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
S^{0012} &= -S^{0021} = -S^{0120} = -S^{0210} = -S^{1002} = -S^{1200} \\
&= S^{2001} = -S^{2100} = \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} xy(x^2\omega^2+y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)f_2^4}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
S^{0022} &= -S^{0220} = -S^{2002} \\
&= S^{2200} = \frac{e^{-2(x^2+y^2)\omega^2} \{x^2(e^{(x^2+y^2)\omega^2} y^2\omega^2)-1+y^2[e^{(x^2+y^2)\omega^2} (-1+y^2\omega^2)-1]\}}{(x^2+y^2)f_2^4}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$S^{0033} = -S^{0330} = -S^{3003} = S^{3300} = \frac{e^{-2(x^2+y^2)\omega^2} [e^{(x^2+y^2)\omega^2} (x^2\omega^2+y^2\omega^2-1)-1]}{f_2^4} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
S^{0112} &= -S^{1120} = S^{1201} = -S^{2011} = -S^{2033} = S^{2110} = S^{2330} \\
&= S^{3023} = S^{3203} = -S^{3302} = -S^{3320} = -\frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} x\omega}{f_1 f_2^3}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
S^{0122} &= S^{0133} = -S^{0221} = -S^{0331} = S^{1022} = S^{1033} \\
&= -S^{1220} = -S^{1330} = -S^{2012} = -S^{2102} = S^{2201} \\
&= S^{2210} = -S^{3013} = -S^{3103} = S^{3301} = S^{3310} = -\frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} y\omega}{f_1 f_2^3}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$S^{1122} = -S^{1221} = -S^{2112} = S^{2211} = \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}{f_1^2 f_2^2} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
S^{1133} &= -S^{1331} = S^{3113} \\
&= -S^{3311} = \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} [(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2+y^2]}{(x^2+y^2)f_1^2 f_2^2}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
S^{2233} &= -S^{2332} = S^{3223} \\
&= -S^{3322} = \frac{e^{-(x^2+y^2)\omega^2} [x^2 + (1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})y^2]}{(x^2+y^2)f_1^2 f_2^2}
\end{aligned}
\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
S^{1332} &= -S^{2133} = S^{2331} = S^{3123} = S^{3213} \\
&= -S^{3312} = -S^{3321} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)f_1^2 f_2^2} .
\end{aligned}
\tag{3.51}$$

(3.42) ile (3.51) arasındaki denklemler denklem (2.10) Landau-Lifshitz enerji yoğunluğu ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L^{00} &= \frac{e^{-2(x^2+y^2)\omega^2} \omega^2}{8\pi f_2^4} \\
&\{4 - 8x^2 \omega^2 - 8y^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} [6 - 9y^2 \omega^2 + 2x^4 \omega^4 + 2y^4 \omega^4 + x^2 \omega^2 (4y^2 \omega^2 - 9)]\}
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

elde edilir.

3.2.4. Papapetrou enerji momentum gösterimi

Denklem (2.15) ve denklemler (3.13)-(3.14)-(3.15) kullanılarak Papapetrou enerji-momentum gösterimi için potansiyeller aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}
N^{0011} &= -N^{0101} = -N^{1010} = N^{1100} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2}}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}(x^2+y^2)f_1f_2^3} \{e^{(x^2+y^2)\omega^2}[(1 + \\
&e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2 + y^2]f_2^2 - (x^2 + y^2)[e^{(x^2+y^2)\omega^2}(-1 + x^2\omega^2 + y^2\omega^2) - 1]f_1^2\} \\
(3.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N^{0012} &= N^{0021} = -N^{0102} = -N^{0201} = -N^{1020} = N^{1200} \\
&= -N^{1233} = N^{1323} = -N^{2010} = N^{2100} = N^{2133} = N^{2313} \\
&= N^{3132} = N^{3231} = -N^{3312} = -N^{3321} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2}xy}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}(x^2+y^2)f_1f_2} \\
(3.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N^{0022} &= -N^{0202} = -N^{2020} = N^{2200} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2}}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}(x^2+y^2)f_1f_2^3} \{e^{(x^2+y^2)\omega^2}[(1 + \\
&e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2 + y^2]f_2^2 - (x^2 + y^2)[e^{(x^2+y^2)\omega^2}(x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 1) - 1]f_1^2\} \\
(3.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N^{0033} &= -N^{0303} = -N^{3030} = N^{3300} = \\
&\frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2}}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}f_1f_2^3} \{[1 - e^{(x^2+y^2)\omega^2}(x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 1)]f_1^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}[1 + \\
&e^{(x^2+y^2)\omega^2}]f_2^2\} \\
(3.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N^{0121} &= -N^{0211} = -N^{0233} = N^{0323} = N^{1012} = -N^{1102} \\
&= -N^{1120} = N^{1210} = -N^{2011} = -N^{2033} = N^{2101} = N^{2303} \\
&= N^{3032} = N^{3230} = -N^{3302} = -N^{3320} = \\
&\frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2}}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}f_1f_2^3} \{[e^{(x^2+y^2)\omega^2}(x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 1) - 1]f_1^2 - \\
&e^{(x^2+y^2)\omega^2}[1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}]f_2^2\} \\
(3.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N^{0122} &= N^{0133} = -N^{0212} = -N^{0313} = N^{1022} = N^{1033} \\
&= -N^{1202} = -N^{1303} = -N^{2021} = -N^{2120} = N^{2201} = N^{2210} \\
&= -N^{3031} = -N^{3130} = N^{3301} = N^{3310} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \omega}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_2^2}
\end{aligned}
\tag{3.58}$$

$$N^{1122} = -N^{1212} = -N^{2121} = N^{2211} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (2+e^{(x^2+y^2)\omega^2})}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2}
\tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
N^{1133} &= -N^{1313} = -N^{3131} = N^{3311} = \\
&= -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} [2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2(2+e^{(x^2+y^2)\omega^2})y^2]}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2}
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
N^{2233} &= -N^{2323} = -N^{3232} = N^{3322} = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (-(2+e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2-2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})y^2)}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2}
\end{aligned}
\tag{3.61}$$

Denklem (3.53) ile denklem (3.61) arasındaki bileşenler enerji yoğunluğu ifadesi olan denklem (2.14) de yerine yazılırsa Papapetrou için enerji yoğunluğu ifadesi aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\begin{aligned}
\xi^{00} &= -\frac{1}{16(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{5/2} \pi f_1 f_2^3} e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega^2 \\
&\times \{ [6 - 9x^2\omega^2 - 9y^2\omega^2 + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} (11 - 18y^2\omega^2 + x^4\omega^4 + y^4\omega^4 + \\
&2x^2\omega^2(y^2\omega^2 - 9)) + 4e^{3(x^2+y^2)\omega^2} (2 - 4y^2\omega^2 + x^4\omega^4 + y^4\omega^4 + \\
&2x^2\omega^2(y^2\omega^2 - 2)) + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (20 - 29y^2\omega^2 + x^4\omega^4 + y^4\omega^4 + \\
&x^2\omega^2(2y^2\omega^2 - 29))] f_1^2 - e^{(x^2+y^2)\omega^2} (1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2}) [x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 2 +
\end{aligned}$$

$$e^{(x^2+y^2)\omega^2} (2x^2\omega^2 + 2y^2\omega^2 - 1) f_2^2 \} \quad (3.62)$$

3.2.5. Tolman enerji momentum gösterimi

Denklem (2.19) ve denklemler (3.13)-(3.14)-(3.15) kullanılarak Papapetrou enerji-momentum gösterimi eldesinde kullanılan potansiyelleri elde etmek için Christoffel sembollerine ihtiyaç duyulmaktadır. Christoffel sembolleri ifadesi

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \quad (3.63)$$

ile verilir. Denklemler (3.13) ve (3.14) denklem (3.63) de kullanılırsa Christoffel sembollerinin ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilir;

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2} x \omega^2}{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} \quad (3.64)$$

$$\Gamma_{11}^0 = -\Gamma_{22}^0 = \frac{2xy\omega^3 f_1}{f_2} \quad (3.65)$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2} y \omega^2}{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} \quad (3.66)$$

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = -\frac{(x^2-y^2)\omega^3 f_1}{f_2} \quad (3.67)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^0 = \frac{e^{2(x^2+y^2)\omega^2} xy \omega f_2}{(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2+y^2)f_1} \quad (3.68)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -x\omega^2 + \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}xy^2(2x^2\omega^2+2y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)^2} \quad (3.69)$$

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = -\frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}[(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})x^2+y^2]\omega f_2}{(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2+y^2)f_1} \quad (3.70)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -y\omega^2 - \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}x^2y(2x^2\omega^2+2y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)^2} \quad (3.71)$$

$$\Gamma_{22}^1 = x\omega^2 + \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}x^3(2x^2\omega^2+2y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)^2} \quad (3.72)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{31}^3 = x\omega^2 \quad (3.73)$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}[x^2+(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})y^2]\omega f_2}{(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2+y^2)f_1} \quad (3.74)$$

$$\Gamma_{11}^2 = y\omega^2 + \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}y^3(2x^2\omega^2+2y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)^2} \quad (3.75)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = -\frac{e^{2(x^2+y^2)\omega^2}xy\omega f_2}{(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})(x^2+y^2)f_1} \quad (3.76)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -x\omega^2 - \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}xy^2(2x^2\omega^2+2y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)^2} \quad (3.77)$$

$$\Gamma_{22}^2 = -y\omega^2 + \frac{e^{(x^2+y^2)\omega^2}x^2y(2x^2\omega^2+2y^2\omega^2-1)}{(x^2+y^2)^2} \quad (3.78)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{32}^3 = y\omega^2. \quad (3.79)$$

Christoffel sembolleri kullanılarak Tolman enerji momentum gösterimi için potansiyeller

$$U_1^{00} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x [4(x^2+y^2)\omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 1)]}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2} \quad (3.80)$$

$$U_2^{00} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y [4(x^2+y^2)\omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 1)]}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2} \quad (3.81)$$

$$U_0^{01} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (3+4e^{(x^2+y^2)\omega^2}) x \omega^2}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2} \quad (3.82)$$

$$U_2^{01} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1^2} \quad (3.83)$$

$$U_2^{02} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (3+4e^{(x^2+y^2)\omega^2}) y \omega^2}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2} \quad (3.84)$$

$$U_1^{02} = -\frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega}{\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1^2} \quad (3.85)$$

$$U_0^{10} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x \omega^2 \left[e^{(x^2+y^2)\omega^2} (x^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 - 7) - 3 + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} (x^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 - 2) \right] f_1}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^3} \quad (3.86)$$

$$U_1^{10} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (3+6e^{(x^2+y^2)\omega^2} + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2}) x y \omega^3}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.87)$$

$$U_2^{10} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega (2-x^2 \omega^2 + 2y^2 \omega^2 + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} y^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (2-2x^2 \omega^2 + 4y^2 \omega^2))}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.88)$$

$$U_0^{11} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (1+2e^{(x^2+y^2)\omega^2} + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2}) x y \omega^3}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.89)$$

$$U_1^{11} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x [y^2 (y^2 \omega^2 - 1 - e^{(x^2+y^2)\omega^2}) + x^2 (1 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} + y^2 \omega^2)]}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2} \quad (3.90)$$

$$U_2^{11} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2}$$

$$\begin{aligned} & \times \\ & \{e^{2(x^2+y^2)\omega^2} (y^2 - x^2) + 2(x^2 + y^2)^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} [y^2 + 3x^4 \omega^2 + \\ & 2y^4 \omega^2 + x^2(5y^2 \omega^2 - 1)]\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$U_0^{12} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} [(1+2e^{(x^2+y^2)\omega^2}) x^2 + 2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^2 y^2] \omega^3}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.92)$$

$$U_1^{12} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \{ 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} x^2 + (x^2+y^2)^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} [y^4 \omega^2 + x^2(2+y^2 \omega^2)] \}}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2} \quad (3.93)$$

$$U_2^{12} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x \{ 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} y^2 + (x^2+y^2)^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} [2x^4 \omega^2 + y^4 \omega^2 + y^2(2+3x^2 \omega^2)] \}}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2} \quad (3.94)$$

$$U_3^{13} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x \omega^2}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2} \quad (3.95)$$

$$U_0^{20} = \frac{e^{-\frac{3}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \omega^2 [e^{(x^2+y^2)\omega^2} (x^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 - 7) - 3 + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} (x^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 - 2)] f_1}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^3} \quad (3.96)$$

$$U_1^{20} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega [2 + 2x^2 \omega^2 + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} x^2 \omega^2 - y^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (2 + 4x^2 \omega^2 - 2y^2 \omega^2)]}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.97)$$

$$U_2^{20} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (3 + 6e^{(x^2+y^2)\omega^2} + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2}) x y \omega^3}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.98)$$

$$U_0^{21} = - \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} [2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^2 x^2 + (1+2e^{(x^2+y^2)\omega^2}) y^2] \omega^3}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2} \quad (3.99)$$

$$U_1^{21} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \{ 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} x^2 + (x^2+y^2)^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} [x^4 \omega^2 + 2y^4 \omega^2 + x^2(2+3y^2 \omega^2)] \}}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2} \quad (3.100)$$

$$U_2^{21} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x [2e^{2(x^2+y^2)\omega^2} y^2 + (x^2+y^2)^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (x^4 \omega^2 + y^2(2+x^2 \omega^2))]}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2}$$

(3.101)

$$U_0^{22} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} (1+2e^{(x^2+y^2)\omega^2} + 2e^{2(x^2+y^2)\omega^2}) xy \omega^3}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} f_2^2}$$

(3.102)

$$U_1^{22} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2} [e^{2(x^2+y^2)\omega^2} (x^2 - y^2) + 2(x^2 + y^2)^2 \omega^2 + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (x^2 - y^2 + 2x^4 \omega^2 + 5x^2 y^2 \omega^2 + 3y^4 \omega^2)]$$

(3.103)

$$U_2^{22} = \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y [(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}) y^2 + x^4 \omega^2 - x^2 (1+e^{(x^2+y^2)\omega^2} - y^2 \omega^2)]}{2(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2} (x^2+y^2)^2 f_1 f_2}$$

(3.104)

$$U_3^{23} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \omega^2}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2}$$

(3.105)

$$U_3^{31} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x \omega^2}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2}$$

(3.106)

$$U_3^{32} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y \omega^2}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} f_1 f_2}$$

(3.107)

$$U_1^{33} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} x (e^{(x^2+y^2)\omega^2} - 2(x^2+y^2)\omega^2)}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}} (x^2+y^2) f_1 f_2}$$

(3.108)

$$U_2^{33} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} y(e^{(x^2+y^2)\omega^2} - 2(x^2+y^2)\omega^2)}{2\sqrt{1+e^{(x^2+y^2)\omega^2}}(x^2+y^2)f_1f_2} \quad (3.109)$$

şeklinde elde edilir. Bu bileşenler ve denklem (2.18) yardımıyla Tolman enerji momentum yoğunluğu ifadesi

$$T_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2} \omega^2 [4(x^2\omega^2 + y^2\omega^2 - 2) - 8e^{2(x^2+y^2)\omega^2} + e^{(x^2+y^2)\omega^2} (4x^2\omega^2 + 4y^2\omega^2 - 15)]}{16(1+e^{(x^2+y^2)\omega^2})^{3/2}\pi f_1f_2} \quad (3.110)$$

biçiminde elde edilir.

3.2.6. Weinberg enerji momentum gösterimi

Denklem (2.23) ve denklemler (3.13)-(3.14)-(3.15)-(3.16) ve (3.17) kullanılarak Weinberg enerji-momentum gösterimi için potansiyeller

$$\zeta^{010} = -\zeta^{100} = \frac{2x\omega^2}{\sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}f_2} \quad (3.111)$$

$$\zeta^{012} = -\zeta^{021} = \zeta^{201} = -\frac{\omega}{\sqrt{f_1f_2}} \quad (3.112)$$

$$\zeta^{020} = -\zeta^{200} = \frac{2y\omega^2}{\sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}f_2} \quad (3.113)$$

$$\zeta^{121} = -\zeta^{211} = \zeta^{323} = -\frac{y\omega^2}{\sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}}f_2} \quad (3.114)$$

$$\zeta^{122} = \zeta^{133} = -\zeta^{212} = -\zeta^{313} = \frac{x\omega^2}{\sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}f_2}} \quad (3.115)$$

olarak bulunur. Denklemler (3.111) ile (3.115) arasındaki denklemler ve denklem (2.22) kullanılarak Weinberg enerji yoğunluğu aşağıdaki gibi elde edilir;

$$W^{00} = -\frac{\omega^2(2+x^2\omega^2+y^2\omega^2)}{8\pi\sqrt{e^{-(x^2+y^2)\omega^2}f_2}}. \quad (3.116)$$

3.2.7. Møller enerji momentum gösterimi

Møller gösterimi için koordinat dönüşümüne gerek yoktur. İşlemler silindirik koordinatlarda yapılacaktır. Denklemler (3.1) ve (3.2) kullanılarak silindirik koordinatlarda metrik tensör ve tersi sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f_1^2} & 0 & \frac{\rho^2\omega}{f_1f_2} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-\rho^2\omega^2}}{f_2^2} & 0 & 0 \\ \frac{\rho^2\omega}{f_1f_2} & 0 & \frac{\rho^2(1-\rho^2\omega^2)}{f_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-\rho^2\omega^2}}{f_2^2} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f_1^2(\rho^2\omega^2 - 1) & 0 & f_1f_2\omega & 0 \\ 0 & e^{\rho^2\omega^2}f_2^2 & 0 & 0 \\ f_1f_2\omega & 0 & \frac{f_2^2}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\rho^2\omega^2}f_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

Denklemler (2.27), (3.117) ve (3.118) kullanılarak Møller gösterimi için potansiyeller

$$\chi_0^{01} = -\chi_0^{10} = \chi_3^{13} = \chi_3^{31} = -\frac{2\rho^2\omega^2}{f_1f_2} \quad (3.119)$$

$$\chi_0^{12} = -\chi_0^{21} = \frac{2\omega}{f_1^2} \quad (3.120)$$

$$\chi_2^{01} = -\chi_2^{10} = \frac{2\rho^4\omega^3}{f_2^2} \quad (3.121)$$

$$\chi_2^{12} = -\chi_2^{21} = \frac{2-2\rho^2\omega^2}{f_1f_2} \quad (3.122)$$

olarak bulunur. Elde edilen bileşenler Møller enerji yoğunluğu olan denklem (2.26) ifadesinde yerine yazılırsa Van Stockum modeli için Møller enerji yoğunluğu

$$M_0^0 = -\frac{4\rho\omega^2}{f_1f_2} \quad (3.123)$$

biçiminde yazılır.

3.3 Bazı Gökkuşağı Fonksiyonları için Enerji Yoğunluklarının Yeniden Değerlendirilmesi

Önceki alt bölümde ele alınan tüm gösterimler için elde edilen enerji yoğunlukları ifadelerini tekrardan silindirik koordinatlarda ifade edilirse

$$\Theta_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}}{16f_1f_2\pi(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}} [4(\rho^2\omega^2 - 2) - 8e^{2\rho^2\omega^2} + e^{\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2 - 15)] \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned}
B^{00} = & -\frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi f_2}\{4(\rho^2\omega^2-2)+2e^{2\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2-5)+ \\
& e^{\rho^2\omega^2}[11\rho^2\omega^2-17+ \\
& 2\rho^2\omega^4+\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi]\}f_1
\end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
L^{00} = & \frac{e^{-2\rho^2\omega^2}\omega^2}{8\pi f_2^4}\left[4-8\rho^2\omega^2+ \right. \\
& \left. e^{\rho^2\omega^2}(6-9\rho^2\omega^2+2\rho^4\omega^4+\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi)\right]
\end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned}
\xi^{00} = & -\frac{1}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{5/2}\pi f_1 f_2^3}e^{-\frac{3}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2 \\
& \times \\
& \{[6-9\rho^2\omega^2+2e^{2\rho^2\omega^2}(11-18\rho^2\omega^2+\rho^4\omega^4+2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi)+ \\
& 4e^{3\rho^2\omega^2}(2-4\rho^2\omega^2+\rho^2\omega^4+2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi)+e^{\rho^2\omega^2}(20-29\rho^2\omega^2+ \\
& \rho^2\omega^4+2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi)]f_1^2-e^{\rho^2\omega^2}(1+ \\
& e^{\rho^2\omega^2})[\rho^2\omega^2-2+e^{\rho^2\omega^2}(2\rho^2\omega^2-1)]f_2^2\}
\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$T_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2[4(\rho^2\omega^2-2)-8e^{2\rho^2\omega^2}+e^{\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2-15)]}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi f_1 f_2} \tag{3.128}$$

$$W^{00} = -\frac{\omega^2(2+\rho^2\omega^2)}{8\pi\sqrt{e^{-\rho^2\omega^2}}f_2}. \tag{3.129}$$

$$M_0^0 = -\frac{4\rho\omega^2}{f_1 f_2} \quad (3.130)$$

denklemleri elde edilir.

Literatürde iyi bilinen Gökkuşağı fonksiyonları olarak aşağıdaki tablodaki fonksiyonlar kullanılır.

Tablo 3.1 Literatürde sıkça karşılaşılan bazı gökkuşağı fonksiyonları

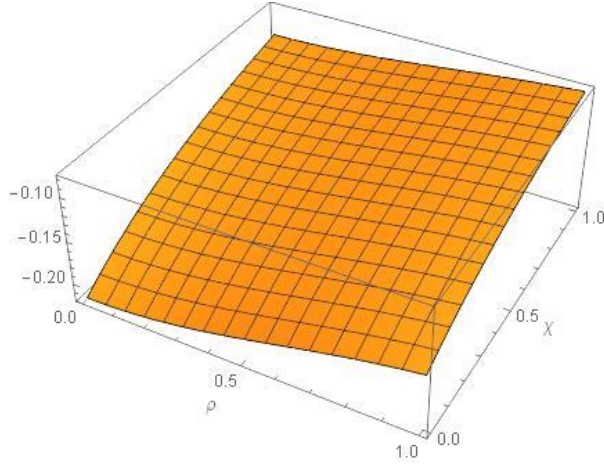
Model Adı	$f_1(E/E_{Pl})$	$f_2(E/E_{Pl})$	Kaynak
Amelino-Camelia 2004	1	$\sqrt{1 - \eta \left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n}$	Amelino-Camelia ve ark. (2004)
Modifiye Dağınım	1	$1 + \lambda \left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n$	Ling ve ark. (2006)
Üstel	$\frac{(e^{\alpha \frac{E}{E_{Pl}}} - 1)}{\alpha \frac{E}{E_{Pl}}}$	1	Garattini ve Mandanici (2012)
DSR	1	$\frac{1}{(1 - \lambda E/E_{Pl})}$	Magueijo ve Smolin (2004)
Logaritmik Model	1	$\ln(1 + \gamma E/E_{Pl})$	Fenomenolojik model

3.3.1 Modifiye dağınım modeli

Tablo 3.1 de yer alan $\lambda, \gamma, n, \alpha$ sabitlerdir. Şimdi Modifiye Dağınım modeli kullanılırsa Einstein gösterimi için enerji yoğunluğu

$$\Theta_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi(1+(\frac{E}{E_{Pl}})^n\lambda)} [4(\rho^2\omega^2 - 2) - 8e^{2\rho^2\omega^2} + e^{\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2 - 15)] \quad (3.131)$$

şeklinde elde edilir. Sabitler 1 olacak şekilde ayarlama yapılırsa 3 boyutlu olarak enerji yoğunluğu ifadesinin grafiksel gösterimi aşağıdaki şekilde olur.



Şekil 3.1. Einstein gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.

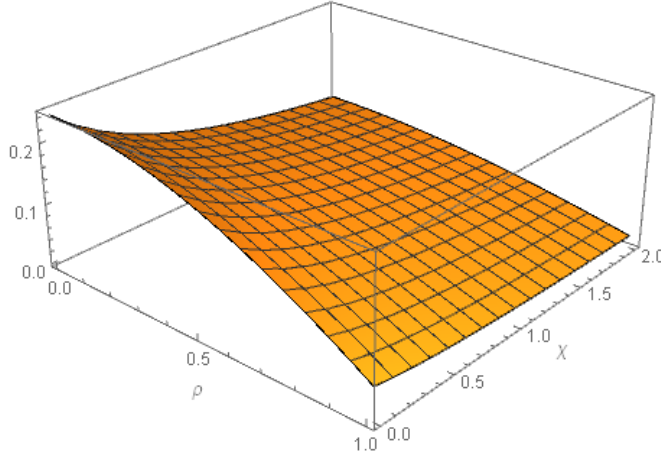
Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır. Şekil 3.1 de yüzey incelendiğinde enerji yoğunluğunun tüm bölgede negatif değerler aldığı, ancak ρ arttıkça sayısal olarak yükseldiği (yani daha az negatif hale geldiği) açıkça görülmektedir. Bu durum, Van Stockum'un dönel silindirik uzay-zamanında kütleçekimsel etkinin merkez bölgeye yakın alanlarda daha güçlü, merkezden uzaklaştıkça ise daha zayıf olduğunu göstermektedir. χ doğrultusunda ise enerji yoğunluğundaki değişimin oldukça sınırlı ve düzgün olduğu, dolayısıyla Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı'ndan gelen enerjiye bağlı düzeltmelerin Einstein gösteriminde ikincil bir etki olarak ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

Bergmann-Thomson gösterimi için enerji yoğunluğu

$$B^{00} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi(1+(\frac{E}{E_{Pl}})^{n\lambda})}\{4(\rho^2\omega^2 - 2) + 2e^{2\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2 - 5) + e^{\rho^2\omega^2}[11\rho^2\omega^2 - 17 + 2\rho^2\omega^4 + \omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi]\}$$

(3.132)

biçiminde ifade edilir. Grafiksel olarak gösterilirse:



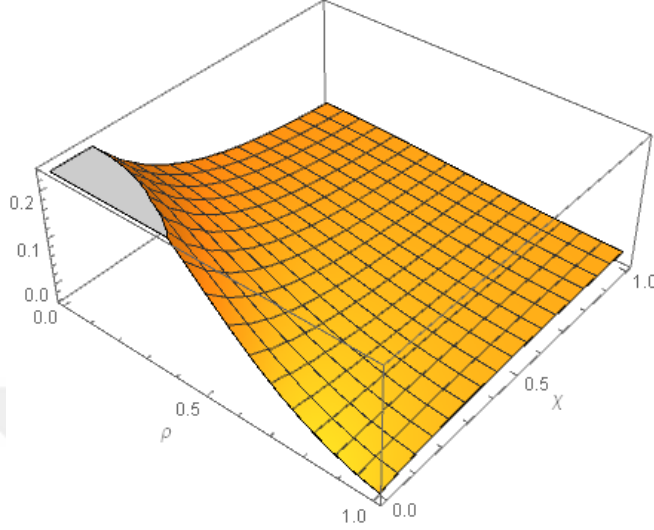
Şekil 3.2. Bergmann-Thomson gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi. $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır. Açısal kısımdan gelen katkı ihmal edilmiştir.

elde edilir. Şekil 3.2’de Bergmann–Thomson gösterimiyle elde edilen enerji yoğunluğunun, test parçacığının enerjisine ($\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$) ve silindirik koordinatlardaki ışınsal uzaklığa (ρ) bağlı grafiği sunulmaktadır. Grafik incelendiğinde, her iki değişkenin artışıyla birlikte enerji yoğunluğunun düzenli biçimde azaldığı gözlemlenir. Bu durum, Rainbow Gravity yaklaşımının karakteristik bir sonucu olarak, yüksek enerjili parçacıkların uzay-zamanı farklı biçimlerde “algılayabileceği” fikrini destekler. Özellikle, test parçacığının enerjisi arttıkça Bergmann–Thomson enerji yoğunluğu azalmakta ve bu azalma, klasik Genel Görelilik’te elde edilen ifadelerle karşılaştırıldığında Rainbow fonksiyonlarının etkisini açıkça göstermektedir.

Landau-Lifshitz gösterimi için enerji yoğunluğu

$$L^{00} = \frac{e^{-2\rho^2\omega^2}}{8\pi\left(1+\left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n\lambda\right)^4} \left[4 - 8\rho^2\omega^2 + e^{\rho^2\omega^2} (6 - 9\rho^2\omega^2 + 2\rho^4\omega^4 + \omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) \right] \quad (3.133)$$

şeklinde olur. Açısal kısımlardan gelen katkı diğer terimlerin yanında ihmal edilebilir. Dolayısıyla Landau-Lifshitz gösterimi için elde edilen enerji yoğunluğu grafiği aşağıdaki gibi olur:



Şekil 3.3. Landau-Lifshitz gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.

Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

Şekil 3.3. grafiği, Landau–Lifshitz enerji-momentum gösterimi kullanılarak elde edilen enerji yoğunluğunun, hem silindirik koordinatlardaki ışımsal uzaklık ρ hem de Gökkuşağı Kütleçekim Kuramı’nda test parçacığının normalize enerjisini ifade eden $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ değişkenine bağlı davranışını göstermektedir. Yüzey incelendiğinde enerji yoğunluğunun, ρ arttıkça belirgin biçimde azaldığı, yani merkezden uzaklaştıkça kütleçekimsel etkinin zayıfladığı görülmektedir. χ yönünde ise değişimin oldukça sınırlı olduğu, dolayısıyla Landau–Lifshitz gösteriminin enerjiye bağlı Rainbow düzeltmelerine diğer komplekslere göre daha zayıf tepki verdiği anlaşılmaktadır. Bu durum, bu gösterimin simetrik yapısı gereği Gökkuşağı fonksiyonlarının çoğunu sönmülemesinden kaynaklanmakta; sonuçta enerji yoğunluğu uzay-zaman geometrisine duyarlı olmakla birlikte yüksek enerjili parçacıkların etkisi Landau–Lifshitz tanımında oldukça hafif hissedilmektedir.

Papapetrou enerji yoğunluğu ifadesi denklem (3.127) den

$$\xi^{00} = -\frac{1}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{5/2}\pi\left(1+\left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n\lambda\right)^3}e^{-\frac{3}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2$$

$$\times$$

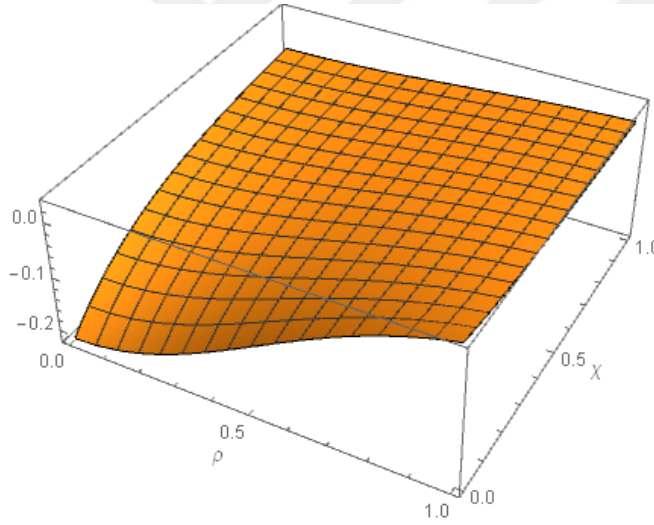
$$\left\{ \left[6 - 9\rho^2\omega^2 + 2e^{2\rho^2\omega^2}(11 - 18\rho^2\omega^2 + \rho^4\omega^4 + 2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) + \right. \right.$$

$$4e^{3\rho^2\omega^2}(2 - 4\rho^2\omega^2 + \rho^2\omega^4 + 2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) + e^{\rho^2\omega^2}(20 - 29\rho^2\omega^2 +$$

$$\rho^2\omega^4 + 2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) \left. \right] - e^{\rho^2\omega^2}(1 + e^{\rho^2\omega^2})[\rho^2\omega^2 - 2 + e^{\rho^2\omega^2}(2\rho^2\omega^2 -$$

$$1) \left(1 + \left(\frac{E}{E_{Pl}} \right)^n \lambda \right)^2 \Big\} \quad (3.134)$$

olarak elde edilir. Açısal kısımlardan gelen katkı diğer terimlerin yanında ihmal edilirse Papapetrou enerji yoğunluğu ifadesi için grafiksel gösterim aşağıdaki biçimde olur:



Şekil 3.4 Papapetrou gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.

Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

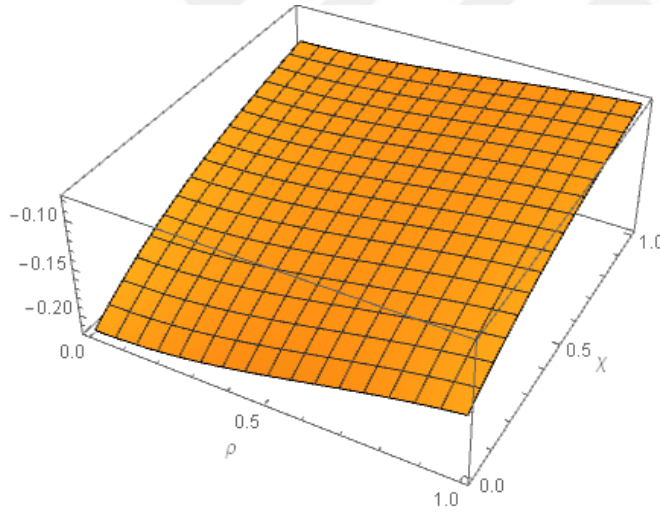
Şekil 3.4. e göre yüzey incelendiğinde enerji yoğunluğunun özellikle kütle dağılımının merkezine yakın bölgelerde ($\rho \approx 0$) daha belirgin negatif değerlere sahip olduğu görülmektedir; bu durum Papapetrou gösteriminin simetrik yapısı gereği dönen uzay-zaman geometrisinin oluşturduğu baskın kütleçekimsel katkıya duyarlı olduğunu göstermektedir. χ yönündeki değişim ise orta düzeydedir: test parçacığının enerjisi arttıkça enerji yoğunluğu hafifçe yükselme eğilimi gösterse de, değişim sınırlıdır ve Landau–

Lifshitz'e göre daha belirgin fakat Møller veya Einstein gösterimlerine kıyasla daha zayıf bir gökkuşağı etkisi ortaya çıkmaktadır. Genel olarak grafik, Papapetrou gösteriminin enerji yoğunluğunda hem merkezdeki eğrilik etkisini hem de enerjiye bağlı metrik düzeltmelerini orta seviyede hissettirdiğini, ancak uzay-zamanın dönel yapısından kaynaklanan negatif enerji bölgelerinin baskın kaldığını ortaya koymaktadır.

Tolman enerji momentum gösterimi için enerji yoğunluğu seçilen Gökkuşağı Fonksiyonu için denklem (3.28) ve Tablo 2.1 kullanılarak

$$T_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2[4(\rho^2\omega^2-2)-8e^{2\rho^2\omega^2}+e^{\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2-15)]}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi\left(1+\left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n\lambda\right)} \quad (3.135)$$

ifadesi elde edilir. Grafikselsel gösterim ile çizilecek olursa aşağıdaki şekil elde edilir:



Şekil 3.5. Tolman gösterimi için enerji yoğunluğunun grafikselsel gösterimi. Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

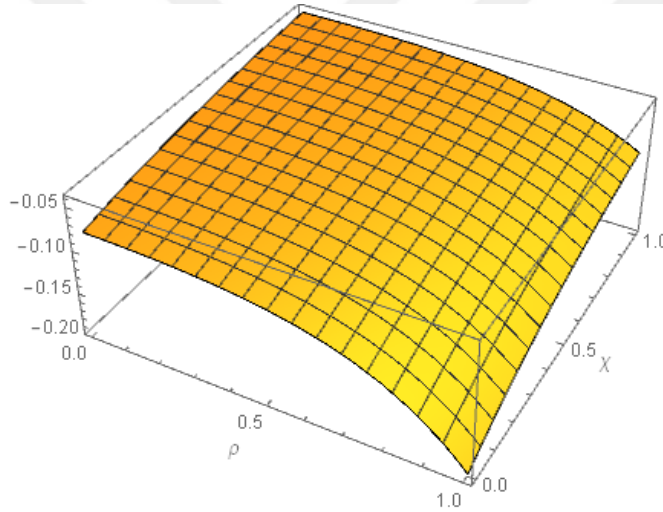
Şekil 3.5. genel olarak negatif bir değer aralığında seyrettiği ve bunun Tolman kompleksinin özellikle dönen silindirik uzay-zamanlarda kütleçekimsel potansiyel kaynaklı negatif katkılara duyarlı olduğunu ortaya koyduğu görülmektedir. Enerji yoğunluğu, ρ arttıkça yavaş bir artış eğilimi gösterse de merkez bölgesindeki ($\rho \approx 0$) minimum değer belirgin şekilde daha derindir. χ yönünde ise eğrinin oldukça düşük duyarlılığa sahip olduğu, yani gökkuşağı düzeltmelerinin Tolman gösteriminde enerji yoğunluğunu yalnızca

hafifçe etkilediği anlaşılmaktadır. Bu da Tolman gösteriminin gökkuşağı fonksiyonlarına karşı görece daha durağan davrandığını, enerjinin artmasının enerji yoğunluğu üzerinde yalnızca sınırlı değişimlere yol açtığını göstermektedir.

Weinberg gösterimi için ele alınan gökkuşağı fonksiyonları kullanılsa denklem (3.129) ve Tablo 2.1 den

$$W^{00} = -\frac{\omega^2(2+\rho^2\omega^2)}{8\pi\sqrt{e^{-\rho^2\omega^2}}\left[1+\left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n\lambda\right]} \quad (3.136)$$

elde edilir. Weinberg gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel biçimi aşağıdaki biçimde elde edilir.



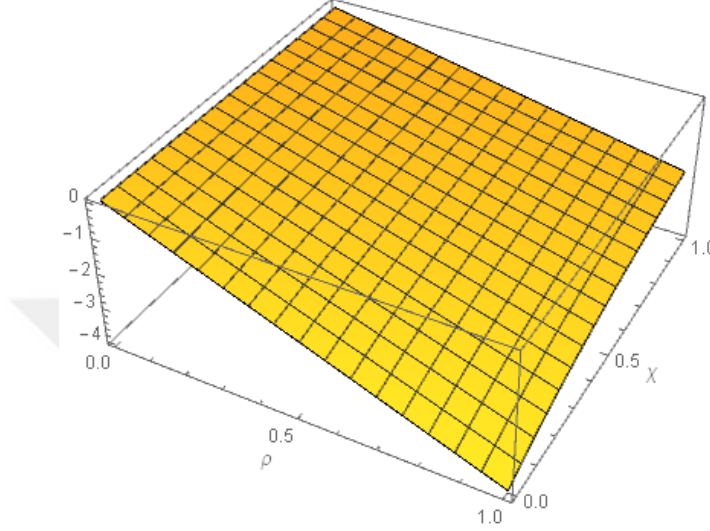
Şekil 3.6. Weinberg gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.

Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

Şekil 3.6 ya göre enerji yoğunluğunun tüm bölgede negatif kaldığı ve özellikle $\rho \rightarrow 1$ bölgesinde mutlak değerinin arttığı görülmektedir; bu durum Weinberg gösteriminin Van Stockum tipi dönel uzay-zamanlarda negatif enerji katkılarının baskın şekilde korunduğunu göstermektedir. χ doğrultusunda değişimin oldukça sınırlı olması ise, Weinberg gösteriminin gökkuşağı fonksiyonlarından gelen yüksek enerji düzeltmelerine karşı zayıf tepki veren bir yapıya sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Son olarak Möller gösterimi için seçili gökkuşağı fonksiyonları cinsinde enerji yoğunluğu ifadesi

$$M_0^0 = -\frac{4\rho\omega^2}{1+\left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^n\lambda} \quad (3.137)$$

gibi yazılır. Buradan Møller gösterimi için enerji yoğunluğu grafiği



Şekil 3.7. Møller gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi. Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

olarak çizilir. Grafik incelendiğinde enerji yoğunluğunun özellikle ρ arttıkça çok daha hızlı bir azalış sergilediği görülmektedir; bu durum Møller kompleksinin koordinat bağımsız yapısı sayesinde uzay-zamanın gerçek geometrik etkisini daha güçlü biçimde yansıttığını göstermektedir. χ doğrultusundaki eğilim ise oldukça nettir: test parçacığının enerjisi yükseldikçe enerji yoğunluğu daha az negatif değerlere doğru yaklaşmakta, ancak bu değişim ρ yönündeki güçlü düşüşe kıyasla daha sınırlı kalmaktadır.

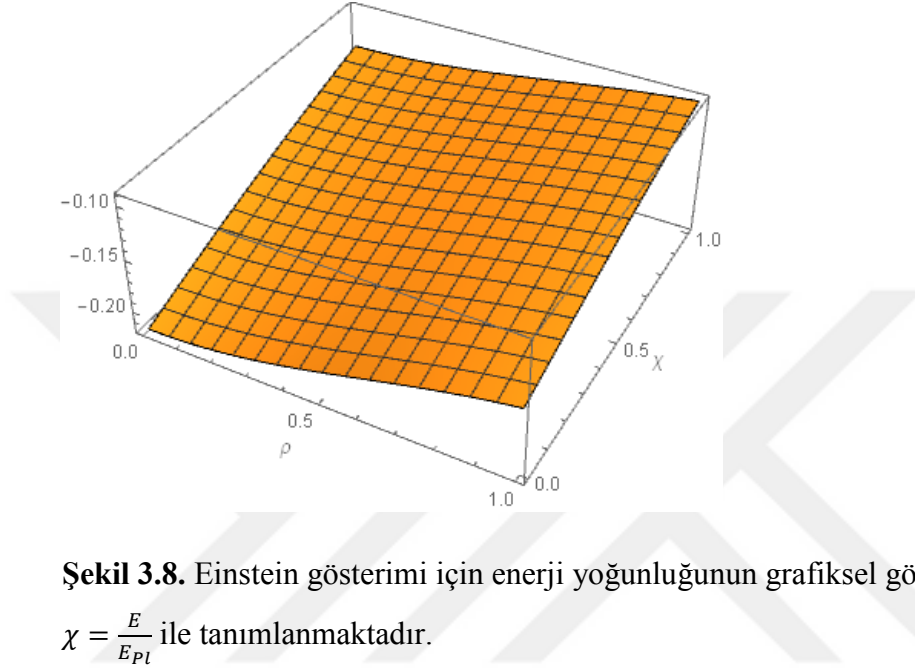
3.3.2 Üstel model

Tablo 2.1. den f_1 fonksiyonun 1 den farklı durumu için Üstel Model seçilsin. Bu durumda;

Einstein gösterimi için enerji yoğunluğu denklem (3.124) kullanılırsa

$$\Theta_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2\alpha E}{16(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi E_{Pl}(e^{\frac{\alpha E}{E_{Pl}}} - 1)} [4(\rho^2\omega^2 - 2) - 8e^{2\rho^2\omega^2} + e^{\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2 - 15)]$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda enerji yoğunluğu ifadesinin grafiksel gösterimi aşağıdaki şekilde olur.



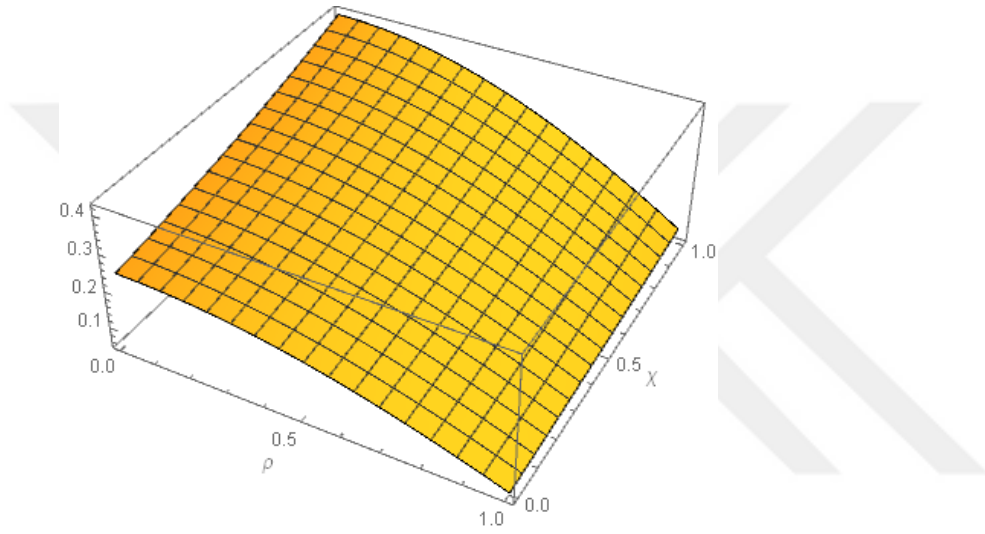
Şekil 3.8. Einstein gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi. Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

Şekil 3.8 incelendiğinde Einstein enerji-momentum gösterimi için enerji yoğunluğunun, Üstel Gökkuşağı modeli altında ışınsal uzaklık ρ ve normalize enerji parametresi $\chi = E/E_{Pl}$ değişkenlerine bağlı davranışını göstermektedir. Yüzey incelendiğinde enerji yoğunluğunun tüm bölgede negatif değerler aldığı, ancak ρ arttıkça enerji yoğunluğunun sayısal olarak yükseldiği (daha az negatif hale geldiği) görülmektedir. Başka bir ifadeyle, enerji yoğunluğu merkez bölgeye yakın alanlarda daha düşük (daha negatif) değerler alırken, merkezden uzaklaştıkça kütleçekimsel katkı zayıflamakta ve enerji yoğunluğu sıfıra doğru yaklaşmaktadır. χ yönünde ise üstel Gökkuşağı düzeltmeleri nedeniyle hafif ve düzenli bir artış eğilimi gözlenmekte, ancak bu etki ρ yönündeki geometrik değişime kıyasla daha sınırlı kalmaktadır.

Bergmann-Thomson gösterimi için enerji yoğunluğu denklem (3.125) kullanılarak

$$B^{00} = -\frac{E_{Pl}(e^{\frac{\alpha E}{E_{Pl}}} - 1)e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2}\omega^2}{16\alpha E(1+e^{\rho^2\omega^2})^{3/2}\pi} \{4(\rho^2\omega^2 - 2) + 2e^{2\rho^2\omega^2}(4\rho^2\omega^2 - 5) + e^{\rho^2\omega^2}[11\rho^2\omega^2 - 17 + 2\rho^2\omega^4 + \omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi]\} \quad (3.139)$$

şeklinde olur. Grafiksel olarak gösterilirse:



Şekil 3.9. Bergmann-Thomson gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi. $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır. Açısal kısımdan gelen katkı ihmal edilmiştir.

elde edilir.

Şekil 3.9 grafiğinin yüzey yapısı incelendiğinde enerji yoğunluğunun pozitif değerlerde seyrettiği ve özellikle ρ arttıkça belirgin biçimde azaldığı görülmektedir; bu durum Bergmann–Thomson kompleksinin, Van Stockum uzay-zamanındaki dönel yapıdan kaynaklanan kütleçekimsel enerjiyi pozitif bir katkı olarak değerlendirdiğini gösterir.

Landau-Lifshitz gösterimi için enerji yoğunluğu ifadesi denklem (3.126) kullanılarak

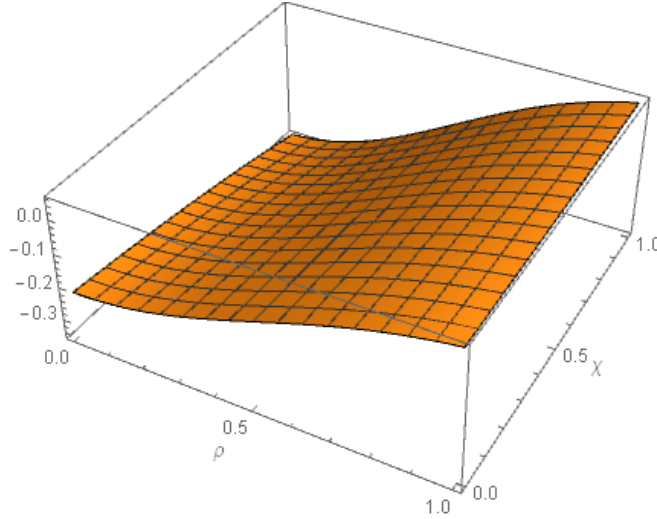
$$\begin{aligned}
L^{00} = & \frac{e^{-2\rho^2\omega^2}\omega^2}{8\pi} \left[4 - 8\rho^2\omega^2 + \right. \\
& e^{\rho^2\omega^2} (6 - 9\rho^2\omega^2 + 2\rho^4\omega^4 + \omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) \left. \right] \\
& (3.140)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Landau-Lifshitz gösterimi için gökkuşağı fonksiyonlarından gelen katkı Üstem model için bulunmamaktadır. Dolayısıyla genel görelilikteki enerji ifadesi elde edilmektedir.

Papapetrou enerji yoğunluğu ifadesi denklem (3.127) den

$$\begin{aligned}
\xi^{00} = & - \frac{\alpha E}{E_{Pl} 16 \left(1 + e^{\rho^2\omega^2}\right)^{5/2} \pi \left(e^{\frac{\alpha E}{E_{Pl}}} - 1\right)} e^{-\frac{3}{2}\rho^2\omega^2} \omega^2 \\
& \times \\
& \left\{ \left[6 - 9\rho^2\omega^2 + 2e^{2\rho^2\omega^2} (11 - 18\rho^2\omega^2 + \rho^4\omega^4 + 2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) + \right. \right. \\
& 4e^{3\rho^2\omega^2} (2 - 4\rho^2\omega^2 + \rho^2\omega^4 + 2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) + e^{\rho^2\omega^2} (20 - 29\rho^2\omega^2 + \\
& \rho^2\omega^4 + 2\omega^4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi) \left. \right] \left[\frac{\left(e^{\frac{\alpha E}{E_{Pl}}} - 1\right)}{\alpha \frac{E}{E_{Pl}}} \right]^2 - e^{\rho^2\omega^2} (1 + e^{\rho^2\omega^2}) [\rho^2\omega^2 - 2 + \\
& e^{\rho^2\omega^2} (2\rho^2\omega^2 - 1)] \left. \right\} \quad (3.141)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Açısal kısımlardan gelen katkı diğer terimlerin yanında ihmal edilirse Papapetrou enerji yoğunluğu ifadesi için grafiksel gösterim aşağıdaki biçimde olur:



Şekil 3.10. Papapetrou gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi.

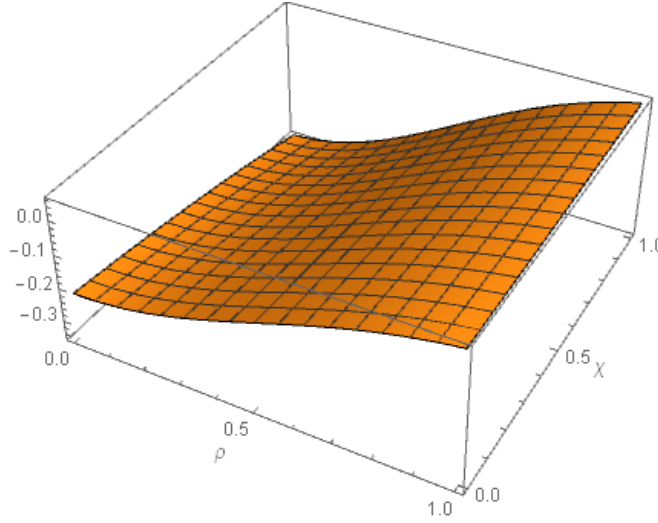
Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

Şekil 3.10 daki grafik, Papapetrou enerji-momentum gösterimi için enerji yoğunluğunun ışınsal uzaklık ρ ve normalize enerji parametresi $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ değişkenlerine bağlı davranışını göstermektedir. Yüzey incelendiğinde enerji yoğunluğunun tüm bölgede negatif kaldığı, ancak merkezden uzaklaşıldıkça ($\rho \rightarrow 1$) mutlak değerinin azaldığı görülmektedir; bu durum Papapetrou kompleksinin dönel Van Stockum uzay-zamanında kütleçekimsel etkileri negatif enerji yoğunluğu şeklinde yorumladığını göstermektedir. χ doğrultusunda ise belirgin bir artış eğilimi vardır: test parçacığının enerjisi yükseldikçe enerji yoğunluğu daha az negatif değerlere yaklaşmaktadır.

Tolman enerji momentum gösterimi için enerji yoğunluğu seçilen Gökkuşağı Fonksiyonu için denklem (3.28) ve Tablo 2.1. kullanılarak

$$T_0^0 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\rho^2\omega^2} \alpha_{\frac{E}{E_{Pl}}} \omega^2 [4(\rho^2\omega^2 - 2) - 8e^{2\rho^2\omega^2} + e^{\rho^2\omega^2} (4\rho^2\omega^2 - 15)]}{16(1 + e^{\rho^2\omega^2})^{3/2} \pi (e^{\alpha_{\frac{E}{E_{Pl}}}} - 1)} \quad (3.142)$$

ifadesi elde edilir. Grafiksel gösterim ile çizilecek olursa aşağıdaki şekil elde edilir:



Şekil 3.11. Tolman gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi. Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

Şekil 3.11. de enerji yoğunluğunun tüm bölgede negatif kaldığı ve özellikle merkezden ($\rho \approx 0$) uzaklaştıkça mutlak değerinin hafifçe azaldığı görülmektedir; bu durum Tolman gösteriminin Van Stockum uzay-zamanındaki dönel yapıdan kaynaklanan kütleçekimsel etkileri negatif enerji yoğunluğu şeklinde yorumladığını göstermektedir. χ yönünde ise belirgin fakat ılımlı bir artış eğilimi vardır: test parçacığının enerjisi arttıkça enerji yoğunluğu daha az negatif değerlere yaklaşmaktadır

Weinberg gösterimi için ele alınan gökkuşağı fonksiyonları kullanılsa denklem (3.129) ve Tablo 2.1 den

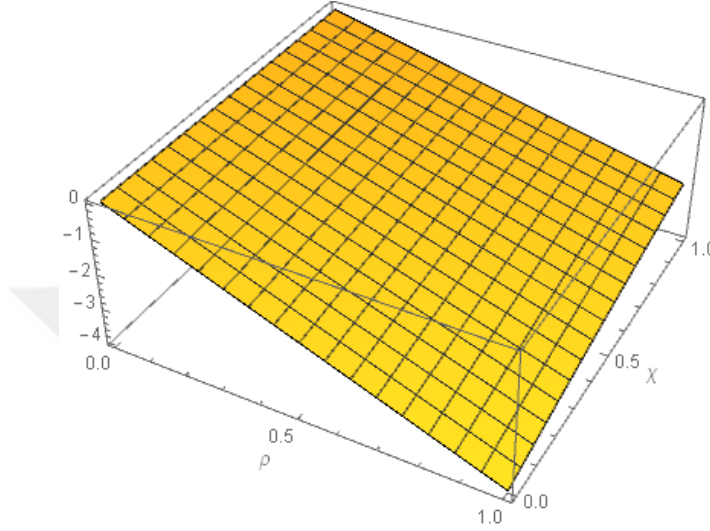
$$W^{00} = -\frac{\omega^2(2+\rho^2\omega^2)}{8\pi\sqrt{e^{-\rho^2\omega^2}}} \quad (3.143)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere Weinberg gösterimi için enerji yoğunluğu ifadesi Üstel Model için genel görelilikteki sonucunu vermektedir. Yani test parçacığının bu model ile birlikte uzayın enerji yoğunluğuna bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

Møller gösterimi için seçili gökkuşağı fonksiyonları cinsinde enerji yoğunluğu ifadesi

$$M_0^0 = - \frac{4\rho\omega^2\alpha_{\frac{E}{E_{Pl}}}}{(e^{\alpha_{\frac{E}{E_{Pl}}}} - 1)} \quad (3.144)$$

gibi yazılır. Buradan Møller gösterimi için enerji yoğunluğu grafiği



Şekil 3.12. Møller gösterimi için enerji yoğunluğunun grafiksel gösterimi. Burada $\chi = \frac{E}{E_{Pl}}$ ile tanımlanmaktadır.

olarak çizilir. Şekil 3.12 de göre enerji yoğunluğunun tüm bölgede negatif olduğu ve özellikle ρ arttıkça çok daha hızlı bir biçimde azaldığı görülmektedir. χ yönündeki davranış ise daha ılımlıdır yani parçacık enerjisi arttıkça enerji yoğunluğu daha az negatif değerlere yaklaşmakta, ancak bu değişim ρ yönündeki keskin azalışa göre çok daha sınırlı kalmaktadır.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, genel göreliliğin en temel problemlerinden biri olan enerjinin yerelleştirilmesi sorunu, klasik enerji–momentum gösterimleri çerçevesinde ele almış ve bu yaklaşım GKK (Rainbow Gravity) kapsamında yeniden değerlendirmiştir. Özellikle Van Stockum dönen toz modeli gibi türdeş olmayan silindirik simetriden bir uzay-zaman geometrisi seçilerek genel görelilikte kuramında enerji yoğunluğu hesaplamaları gerçekleştirilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre, enerji–momentum gösterimlerinin tamamı (Einstein, Bergmann–Thomson, Landau–Lifshitz, Papapetrou, Tolman, Weinberg ve Møller), klasik genel görelilik sınırında yani Gökkuşağı fonksiyonları $f_1(E/E_p) \rightarrow 1$, $f_2(E/E_p) \rightarrow 1$ limitinde uyumlu ve fiziksel olarak tutarlı enerji dağılımları vermektedir. Dolayısıyla çalışma, klasik sonuçların GKK ya genelleştirilmesi bağlamında teorik tutarlılığı ortaya koymaktadır. Bununla birlikte, GKK altında yapılan değerlendirmeler, enerjiye bağlı metriklerin enerji yoğunluğu üzerinde anlamlı değişiklikler yarattığını göstermiştir. Özellikle yüksek enerjili test parçacıklarının ($E \sim E_p$) uzay-zamanı farklı biçimlerde “algıladığı” ve bu durumun enerji yoğunluğu ifadelerinde gözle görülür sapmalara yol açtığı belirlenmiştir.

Einstein ve Tolman gösterimleri, klasik sonuçlarla oldukça yüksek uyum göstermekte; gökkuşağı fonksiyonları eklendiğinde enerji yoğunluğundaki değişim büyük ölçüde ölçek faktörü düzeltmeleri biçiminde ortaya çıkmaktadır. Landau–Lifshitz ve Papapetrou gösterimleri, metrik tensörün simetrik formuna dayandıkları için Gökkuşağı fonksiyonlarından gelen düzeltmelerin çoğu terimde sönümlendiği görülmüştür. Bu nedenle enerji yoğunlukları, özellikle Üstel model gibi belirli Gökkuşağı fonksiyonları altında genel görelilikteki değerlerle neredeyse özdeştir. Buna karşın, Bergmann–Thomson ve Møller gösterimleri, özellikle enerjiye bağlı uzay-zamanlarda anlamlı farklılıklar sergilemiştir. Møller gösterimi, koordinat bağımsız yapısı sayesinde diğer gösterimlerin aksine silindirik koordinatlarda da doğrudan uygulanabilmiş; bu yönüyle çalışma boyunca elde edilen en genel ve fiziksel yoruma elverişli enerji yoğunluklarını sağlamıştır. Møller gösteriminde elde edilen sonuçlar, test parçacığının enerjisi arttıkça enerji yoğunluğunun monoton biçimde azaldığını, dolayısıyla kütleçekimsel etkinin yüksek enerjilerde zayıfladığını göstermektedir.

Tezde farklı Gökkuşağı fonksiyonları (Amelino–Camelia, Magueijo–Smolin, Ling–Liu, Garattini–Mandanici vb.) kullanılarak yapılan analizler, enerji yoğunluğu üzerindeki etkinin modele duyarlı olduğunu ortaya koymuştur. Modifiye Dağılım Modeli altında enerji yoğunluğu, enerji ve ışınsal uzaklık arttıkça azalma eğilimi göstermiştir. Bu durum, uzay-zamanın yüksek enerjilerde “seyrelme” eğilimine işaret etmektedir. Üstel Model kapsamında, bazı komplekslerde (örneğin Weinberg ve Landau–Lifshitz) Gökkuşağı etkisinin sönümlendiği, yani enerjiye bağlı düzeltmelerin ihmal edilebilir düzeyde olduğu gözlemlenmiştir. Bu bulgu, farklı Gökkuşağı fonksiyonlarının fiziksel sonuçlar üzerinde

seçici etkiler oluşturabileceğini göstermektedir. Özellikle Möller gösteriminde enerji fonksiyonlarının doğrudan enerji yoğunluğu formülüne girmesi, enerjiye bağlı metriklerin toplam enerji dağılımını doğrudan şekillendirdiğini açıkça ortaya koymuştur.

Bu sonuçlar, enerjinin yerelleştirilmesi probleminin çözümünde klasik komplekslerin hâlâ güçlü bir teorik araç olduğunu ve modifiye kütleçekim kuramlarına (örneğin Gökkuşağı Gravitesi) başarıyla genellenebileceğini göstermektedir. Çalışmanın genel bulgularına göre:

- Enerji yoğunlukları, düşük enerjili sınırdaki genel görelilik ile tamamen uyumludur.
- Yüksek enerjilerde ($E/E_p \rightarrow 1$) enerji yoğunlukları giderek azalmakta, bu da yerçekimsel kuvvetin enerjiye bağlı zayıfladığı hipotezini desteklemektedir.
- GKK'nın evrenin başlangıcında teklik problemini hafifletebileceği fikrine dolaylı destek sağlanmıştır.

Tez, literatürde görece az çalışılmış bir konu olan Van Stockum modeli ve GKK'nın enerji-momentum analizini bir araya getirerek özgün bir katkı sunmaktadır.

Bu kapsamda Van Stockum modeli, dönen toz silindiri yapısındaki bir modelin çözümü olması itibarıyla teorik açıdan önemlidir. Model üzerinde yapılan analizler, enerjiye bağlı uzay-zamanların dönme ve kütleçekim enerjisi üzerindeki etkilerini açık biçimde göstermiştir.

Bu çalışmada yalnızca Van Stockum metriği ele alınmıştır. Gelecek çalışmalarda bir çok farklı yöndeş olmayan modellerde enerji-momentum gösterimlerinin karşılaştırılması, GKK'nın evrensel tutarlılığını sınamak açısından önem taşımaktadır.

Çalışma teleparalel kütleçekim (TEGR) veya $f(T)$ teorileriyle genişletilmesi, enerji tanımının geometrik kökenini daha derinlemesine ortaya koyabilir. Ayrıca $f(R)$ ve $f(Q)$ gibi genişletilmiş geometrik çerçevelerde bu amaçla incelenebilir. Çalışmada her gösterim ayrı ayrı analiz edilmiştir. Gelecek araştırmalarda bu gösterimlerin kuasi-yerel enerji tanımlarıyla karşılaştırılması, enerji yerelleştirilmesi problemine daha evrensel bir çözüm getirebilir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması, klasik enerji-momentum gösterimlerinin GKK gibi bazı kuramlara başarıyla genellenebileceğini göstermekte; enerjinin yerelleştirilmesi konusundaki tarihsel tartışmalara yeni bir bakış kazandırmaktadır. Van Stockum uzay-

zamanında gerçekleştirilen hesaplamalar kuramsal yönlüyle enerji-momentum probleminin güncel araştırmalarda halen canlı ve üretken bir alan olduğunu bir kez daha ortaya koymaktadır.



5. KAYNAKÇA

- Ali, A. F.**, 2014. Black hole remnant from gravity's rainbow. *Phys. Rev. D*, 89(10):104040.
- Amelino-Camelia, G., Arzano, M., Gubitosi, G., Magueijo, J.**, 2013. Rainbow gravity and scale-invariant fluctuations. *Physical Review D*, 88(4):041303.
- Amelino-Camelia, G., Ellis, J., Mavromatos, N. E., Nanopoulos, D. V., Sarkar, S.**, 2004. Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts. *Nature*, 393:763–765.

- Awad, A., Ali, A. F., Majumder, B.,** 2013. Nonsingular rainbow universes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(10), 052.
- Aydoğdu, O., Salti, M.,** 2022. Evolution of axial gravitational waves in rainbow universe. *Physics Letters B*, 827:136999.
- Aygün, S., Aktaş, C.,** 2023. Investigation of the teleparallel energy-momentum problem for texture metric. *New Astronomy*, 101:102014.
- Aygün, S., Baysal, H., Tarhan, İ.,** 2008. Scalar field theory and energy-momentum problem of Yilmaz-Rosen metric in general relativity and teleparallel gravity. *Astrophysics and Space Science*, 314(4):323–330.
- Bergmann, P. G., Thomson, R.,** 1953. Spin and angular momentum in general relativity. *Physical Review*, 89(2):400–407.
- Bilim, A. B., Aydoğdu, O., Salti, M., Sogut, K.,** 2022. Particle production in a rainbow background. *Annals of Physics*, 449:169168.
- Bonnor, W. B.,** 1980. The rigidly rotating relativistic dust cylinder. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(6):2121.
- Bragança, E. A. F., Vitória, R. L. L., Belich, H., Bezerra de Mello, E. R.,** 2019. Relativistic quantum oscillators in the global monopole spacetime. *The European Physical Journal C*, 80(3): 206.
- Capozziello, S., & Capriolo, M. (2023).** *The gravitational energy–momentum pseudo-tensor in higher-order theories of gravity.* **Filomat**, **37**(25), 8617–8634. <https://doi.org/10.2298/FIL2325617C>
- Capozziello, S., Capriolo, M., & Lambiase, G. (2022).** *Energy–Momentum Complex in Higher Order Curvature–Based Local Gravity.* **Particles**, **5**(3), 298–330. <https://doi.org/10.3390/particles5030026>
- Dárlla, R., Brito, F. A., Furtado, J.,** 2023. Black string solutions in rainbow gravity. *Universe*, 9(6):297.
- Dehghani, M.,** 2020. AdS $\square$ black holes with nonlinear source in rainbow gravity. *Physics Letters B*, 801:135191.
- Einstein, A.,** 1916. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen der Physik*, 49:769–822.
- Garattini, R.,** 2012. Modified dispersion relations and black hole entropy. *Physics Letters B*, 685(4–5):329–337.
- Garattini, R., Mandanici, G.,** 2012. Modified dispersion relations and black hole entropy. *Physics Review D*, 85(2):023507.(bakkkkkk)

- Hendi, S. H., Momennia, M., Panah, B. E., Panahiyan, S.,** 2017. Nonsingular universe in massive gravity's rainbow. *Physics of the dark universe*, 16: 26-33.
- Junior, E. L., Rodrigues, M. E., Silva, M. V. D. S.,** 2020. Regular black holes in rainbow gravity. *Nuclear Physics B*, 961:115244.
- Kangal, E. E., Salti, M., Aydoğdu, O., Sogut, K.,** 2021. Relativistic quantum dynamics of scalar particles in the rainbow formalism of gravity. *Physica Scripta*, 96(9):095307.
- Kangal, E. E., Sogut, K., Salti, M., Aydogdu, O.,** 2022. Effective dynamics of spin-1/2 particles in a rainbow universe. *Annals of Physics*, 444:169018.
- Korunur, M., Havare, A., Salti, M.,** 2007. On the relative energy associated with space-times of diagonal metrics. *Pramana – Journal of Physics*, 68(1):135–142.
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M.,** 1975. The Classical Theory of Fields. 4th ed. Pergamon Press.
- Ling, Y., Liu, Q.,** 2007. Modified dispersion relations and black hole physics. *Classical and Quantum Gravity*, 24(14):3455–3464.
- Ling, Y., Li, X., Zhang, H.,** 2006. Thermodynamics of modified black holes from gravity's rainbow. *Modern Physics Letters A*, 22(35):2749–2756.
- Magueijo, J., Smolin, L.,** 2002. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D*, 67(4):044017.
- Magueijo, J., Smolin, L.,** 2004. Gravity's rainbow. *Classical and Quantum Gravity*, 21(7):1725–1736.
- Møller, C.** 1958. On the localization of the energy of a physical system in the general theory of relativity. *Annals of Physics*, 4(4): 347–371.
- Møller, C. (1958).** *On the localization of the energy of a physical system in the general theory of relativity. Annals of Physics*, 4(4), 347–371. doi:10.1016/0003-4916(58)90061-0
- Mustafa, O.,** 2023. PDM KG-Coulomb particles in cosmic string rainbow gravity spacetime and a uniform magnetic field. *Physics Letters B*, 839:137793.
- Papapetrou, A.,** 1948. Einstein's theory of gravitation and flat space. *Proceedings of the Royal Irish Academy A*, 52:11–23.
- Qadir, A., Sharif, M.,** 1987. General formula for the momentum imparted to test particles in arbitrary spacetimes. *Physics Letters A*, 167(4):331–334.
- Papapetrou, A. (1948).** *Einstein's theory of gravitation and unified field theories. Proceedings of the Royal Irish Academy A*, 52, 11–23.

- Radinschi, I., Sahoo, P. K., Grammenos, T., Chattopadhyay, S., & Cazacu, M.-M. (2020).** *Localization of energy and momentum in an asymptotically Reissner–Nordström non-singular black hole space-time geometry.* **Universe**, 6(5), 69. <https://doi.org/10.3390/universe6050069>
- Salti, M.,** 2022. Effect of rainbow functions on Möller energy distribution in de Sitter universe. *Ahi Evran 2nd Int. Scientific Research Conf.*, Kırşehir, Turkey.
- Santos, G., Gubitosi, G., Amelino-Camelia, G.,** 2015. On the initial singularity problem in rainbow cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(08), 005.
- Sefiedgar, A. S.,** 2017. From the entropic force to the Friedmann equation in rainbow gravity. *Europhysics Letters*, 117(6):69001.
- Sogut, K., Salti, M., Aydogdu, O.,** 2021. Quantum dynamics of photon in rainbow gravity. *Annals of Physics*, 431:168561.
- Şahin, O., Salti, M., Aydoğdu, O., Sogut, K.,** 2023. Pair production in the rainbow dS_4 space. *Classical and Quantum Gravity*, 40(8):085003.
- Tolman, R. C.,** 1934. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology.* Clarendon Press.
- Tolman, R. C. (1934).** *Relativity, thermodynamics and cosmology.* Clarendon Press.
- Wainwright, J., Marshman, B. J.,** 1979. Some exact cosmological models with gravitational waves. *Physics Letters A*, 72:275-276.
- Weinberg, S.,** 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley & Sons.
- Weinberg, S. (1972).** *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity.* Wiley.
- Xulu, S. S. (2003).** *The energy–momentum problem in general relativity* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Zululand. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/hep-th/0308070>
- Xulu, S. S. (2007).** *Bergmann–Thomson energy–momentum complex for solutions more general than the Kerr–Schild class.* **International Journal of Theoretical Physics**, 46(10), 2915–2922. <https://doi.org/10.1007/s10773-007-9403-5>
- Yekta, D. M., Hadikhani, A., Ökcü, Ö.,** 2019. Joule–Thomson expansion of charged AdS black holes in rainbow gravity. *Physics Letters B*, 795:521-527.



