

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

**TÜREV GENELLEMELERİ VE BAZI
UYGULAMALARI**

Pelin YAPRAKDAL

Danışman: Doç. Dr. Selim ÇETİN

BURDUR, 2025

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca **Doktora** Tezi olarak sunduğum “**Türev Genellemeleri ve Bazı Uygulamaları**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11/08/2025

Pelin YAPRAKDAL

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında bilgi ve deneyimini esirgmeden benimle paylaşan, akademik gelişimime yön veren, anlayışı ve sabrıyla her zaman yanımda olan çok değerli danışmanım Doç. Dr. Selim Çetin'e en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Tez sürecimde fikir ve katkılarıyla yolumu aydınlatan Doç. Dr. Utku Gürdal'a da sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca akademik yolculuğum boyunca bilgi ve desteğiyle katkıda bulunan Dr. Öğr. Üyesi Zafer Şanlı'ya, Dr. Öğr. Üyesi Bekir Çetintav'a ve özellikle yüksek lisans sürecimden bu yana her zaman yanımda olan, kıymetli rehberliğiyle bana ilham veren Prof. Dr. İlknur Koca'ya teşekkürlerimi sunarım.

Zorlu zamanlarda manevi desteğini hiç esirgemeyen, her daim yanımda olan ve sevgileriyle bana güç veren aileme gönülden teşekkür ederim.

Hayatın her döneminde bana kol kanat geren, sevgisiyle güç bulduğum, varlığıyla her zaman arkamda dimdik duran canım anneme ise ayrıca şükran borçluyum. Bu yolculukta onun duası ve emeği hep en görünmez ama en sağlam destek oldu.

Ve son olarak, bu süreçte karşılaştığım zorluklara, engellere ve bazen de sessizliğiyle konuşanlara teşekkür ederim. Onlar sayesinde dayanıklılığımı keşfettim, sabrımı sınadım ve içimdeki güce bir kez daha inandım. Her adımda beni büyüttüler, dönüştürdüler ve bu noktaya getirdiler.

Ve bu sürecin en özel, en anlamlı tarafı... Biricik kızım Bilge. Sen daha minicikken başladım bu yolculuğa, senin uykularında yazıldı bu sayfalar, senin neşenle silindi tüm yorgunluklar. Senin varlığın, her şeyin ötesinde bana umut, cesaret ve ilham verdi. Bu tez, yalnızca akademik bir emeğin değil, aynı zamanda bir annenin sevgisinin, sabrının ve kararlılığının da bir yansımasıdır.

Bu satırları yazarken yanımda olan minik eller, yarınlara tuttuğum en parlak ışık oldu.

Ağustos, 2025

Pelin YAPRAKDAL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	2
İÇİNDEKİLER	ii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Metrik Uzay	3
2.2. Normlu Uzay.....	3
2.2.1. Cauchy Dizisi	3
2.2.2. Tam Uzay	4
2.2.3. Banach Uzayı	4
2.3. Topolojik Uzay	4
2.4. Lineer Operatörler.....	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	6
3.1. Fréchet Türevi.....	6
3.1.1. Fréchet Türevinin Özellikleri	6
3.1.2. Fréchet Türevlenebilen Fonksiyonlar için Taylor Teoremi	7
3.2. Fréchet Türevlenebilir Operatörler için Riemann Anlamında İntegrallenebilme ve Ortalama Değer Teoremi.....	7
3.3. Kuantum Türevi	9
3.3.1. Kuantum Türevinin Özellikleri	10
3.3.2. Polinomlar için q-Taylor Formülü	10
3.4. q-Antitürev	11
3.5. Jackson q-İntegral	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	13
4.1. Kuantum Fréchet Türevi	13
4.1.1. Sonlu Boyutlu Operatörlerde Kuantum Fréchet Türevi.....	15
4.2. Yüksek Mertebeden Kuantum Fréchet Türevi.....	25
4.2.1. Kuantum Fréchet Türevinde Taylor Formülü	26
4.2.2. Bazı Özel Tanımlı Fonksiyonların Kuantum Fréchet Türevi	27
4.3. Türev Türlerinin Karşılaştırılması	29
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	32
KAYNAKLAR	33

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 2.1. Türev türlerinin karşılaştırılması	30
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$D_q f$	: f 'nin Kuantum Türevi
$T_q(f)$	: f 'nin Kuantum Fréchet Türevi
$\mathring{A}$	: A Kümesinin İçi
$\mathcal{C}_q^1(X, Y)$	: Birinci Mertebeden Kuantum Türevlenebilir Fonksiyonların Kümesi
$\mathcal{L}(X, Y)$	: Lineer ve Sürekli Operatörler Uzayı
$\frac{\partial f}{\partial_q u_i}$	: f 'nin i . Bileşene Göre Kuantum Fréchet Kısmi Türevi
$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$	: q Binom Katsayısı

ÖZET

Doktora Tezi

Türev Genellemeleri ve Bazı Uygulamaları

Pelin YAPRAKDAL

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Selim ÇETİN

Ağustos, 2025

Bu tez çalışmasında, türev kavramının klasik türev, Fréchet türevi ve kuantum türevi bağlamında incelenmesi ve bu türev türlerinin bir genellemesi olarak yeni bir türev tanımı yapılması hedeflenmiştir. Çalışma, özellikle limit kavramının yetersiz kaldığı lineer olmayan ve limiti olmayan operatörlerde türev alımına çözüm getirmeyi amaçlamaktadır.

Bu kapsamda, klasik türevlerin lineer operatörlerde, Fréchet türevinin doğrusal olmayan operatörlerde ve kuantum türevinin limiti olmayan operatörlerdeki kullanımları incelenmiş, mevcut yöntemlerin eksiklikleri tespit edilmiştir. Ardından, bu eksiklikleri gidermek için Fréchet türevine kuantum türevinin uygulanmasıyla “kuantum Fréchet türevi” olarak adlandırılan yeni bir türev tanımı geliştirilmiştir.

Tezde, bu yeni türevin matematiksel yapısı detaylı bir şekilde ele alınmış ve teorik geçerliliği çeşitli önerme ve teoremlerle desteklenmiştir. Yeni tanımlanan türev ile sabit fonksiyonların türevlerinin sıfır olduğu, belirli bileşke fonksiyonların türevlenebilirlik özelliklerinin korunabildiği ve polinom fonksiyonlarda uygulamaya uygun sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca, Taylor serisi gibi analiz araçlarının bu yeni türevle nasıl uygulanabileceği üzerinde durulmuş ve örneklerle desteklenmiştir.

Sonuç olarak, bu tez, türevin literatürdeki eksikliklerini gideren bir genelleme sunarak, türevin mühendislik, fizik ve diğer uygulamalı alanlardaki kullanımına yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Çalışma, yeni tanımlanan türevin integral kavramı ile ilişkilendirilmesi ve daha ileri analizlere temel oluşturması açısından gelecek araştırmalara açık bir alan sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: q-türev, Fréchet türev, lineer olmayan operatör, kuantum Fréchet türev

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

Derivative Generals and Some Applications

Pelin YAPRAKDAL

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selim ÇETİN

August, 2025

In this thesis, the concept of differentiation is examined in the context of classical derivatives, Fréchet derivatives, and quantum derivatives, with the aim of introducing a new derivative definition as a generalization of these types of derivatives. The study specifically aims to address the limitations of the classical notion of limits in non-linear and non-limit-based operators.

In this framework, the usage of classical derivatives in linear operators, Fréchet derivatives in non-linear operators, and quantum derivatives in non-limit-based operators are analyzed, and the shortcomings of existing methods are identified. To overcome these limitations, a new derivative definition termed as "quantum Fréchet derivative" is developed by applying the quantum derivative to the Fréchet derivative.

The mathematical structure of this new derivative is thoroughly explored in the dissertation, and its theoretical validity is supported by various propositions and theorems. It is demonstrated that the new derivative satisfies fundamental properties, such as assigning a zero derivative to constant functions, preserving the differentiability characteristics of certain composite functions, and producing consistent results when applied to polynomial functions. Furthermore, the application of this new derivative in analytical tools such as Taylor series is discussed and illustrated through examples.

In conclusion, this dissertation provides a generalization that addresses gaps in the existing literature on derivatives, offering a novel perspective on the use of derivatives in engineering, physics, and other applied fields. The study also opens new avenues for future research, particularly in exploring the relationship between the newly defined derivative and the concept of integration, as well as further advanced analyses.

Keywords: q-derivative, Fréchet derivative, non-linear operators, quantum Fréchet derivative

1. GİRİŞ

Lineer olmayan operatör denklemlerinin çözümü, günümüzde en çok çalışılan konulardan biridir. Lineer olmayan operatörlerin incelenmesi uygun lineer olmayan operatörlerin yerel olarak lineer operatörlerle yaklaşımları yardımıyla yapılabilir. Bu nedenle normlu uzaylarda lineer olmayan operatörlerin diferensiyel hesabının araştırılması önem taşımaktadır.

Bilindiği gibi, bir $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun herhangi bir izole olmayan $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası olsun. f dönüşümünün x_0 noktasında türeve sahip olması

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

eşitliğini sağlayan bir $f'(x_0)$ reel sayısının varlığı demektir (Flett, 1980). Bu eşitliğin $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklindeki fonksiyonlar (genel olarak X ve Y Banach uzayları olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ şeklindeki operatörler) için bir anlamı yoktur. Reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için ifade edilmiş olan bu türev kavramını tüm normlu uzaylara genelleştirme işini Maurice Fréchet adındaki Fransız matematikçi yapmıştır (Fréchet, 1906). Dolayısıyla bu tip dönüşümler için Fréchet türevinden faydalanılabilir. Esas olarak Fréchet türevlenebilme kavramının en önemli yanı sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilebilmesidir. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ dönüşümü, $x_0 \in \mathring{A}$ noktası verilsin. f dönüşümünün x_0 noktasında Fréchet türevlenebilir olması için gerek yeter koşul

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

olacak şekilde bir $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşümünün var olmasıdır (Flett, 1980). Fréchet türevlenebilirliği üzerine kapsamlı bir inceleme için bkz. (Siddiqi ve Nanda, 2018).

Görüldüğü gibi bu türev tanımlarında limit kavramından yararlanılmıştır. Bilindiği üzere limiti olmayan operatörlerde mevcuttur. Limitsiz analiz de denilen F.H. Jackson tarafından geliştirilen kuantum analizden faydalanarak, limiti alınamayan operatörlerin türevlerini elde edebilmek için kuantum türevi kullanılabilir (Jackson, 1910). Bir f fonksiyonunun kuantum türevi $D_q f$ ile gösterilir ve $x \neq 0$ ve $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ olmak üzere klasik analizdeki türev tanımına benzer olarak

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

şeklinde iki diferensiyelin oranı olarak tanımlanır. f fonksiyonunun $x = 0$ daki klasik türevi $f'(0)$ olarak tanımlanır. Buna göre bir f fonksiyonunun kuantum türevi

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, & x \neq 0 \wedge q \neq 1 \\ f'(x), & x = 0 \vee q = 1 \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir. Dikkat edilirse kuantum türev $q \rightarrow 1$ iken limiti alındığında klasik türeve eş değerdir (Ernst, 2000). Genel olarak $q \in (0,1)$ şeklinde kullanılmaktadır (Kac ve Cheung, 2002).

Bu araştırmada literatürde yer alan bu üç türev tanımından yola çıkarak, klasik türev için şu ana kadar çözülememiş olan limiti alınamayan ve lineer olmayan operatörlerin türevinin alınamaması sorununa bir çözüm üretilmeye çalışılmıştır. Bilindiği üzere Fréchet türevi, klasik türevin bir genellemesi olup Fréchet türevi alınırken, operatör reel sayılarda tanımlı ise elde edilen sonuç klasik türev yoluyla ulaşılan sonuçla aynıdır. Bu bilgidен hareketle lineer olmayan operatörlerin türevinin alınamaması sorununun çözümü için klasik türev yerine onun bir genellemesi olan Fréchet türevinden yararlanılmıştır. Fréchet türevi lineer olmayan operatörlerin türevini almakta çözüm sunsa da limiti olmayan operatörlerin türevinde eksik kalmaktadır. Buradan hareketle Fréchet türevindeki bu eksiklik, kuantum türevinin Fréchet türevine uygulanmasıyla giderilmeye çalışılmaktadır. Öngörülen sonuca ulaşılması durumunda türevin genellemesi elde edilmiş olup, yeni bir türev tanımlanmış olacaktır. Bu araştırma, türev literatüründe bahsedilen bu önemli eksikliğin giderilmesi adına oldukça önem arz etmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Metrik Uzay

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d 'ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir:

$$\forall x, y, z \in X \text{ için}$$

$$\mathbf{m_1)} d(x, y) \geq 0,$$

$$\mathbf{m_2)} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\mathbf{m_3)} d(x, y) = d(y, x),$$

$$\mathbf{m_4)} d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

2.2. Normlu Uzay

$\mathcal{F}$ bir reel veya kompleks skaler sayılar cismi olacak şekilde, X vektör uzayı üzerinde tanımlı reel değerli $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathcal{F}$ için

$$\mathbf{N_1)} \|x\| \geq 0,$$

$$\mathbf{N_2)} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\mathbf{N_3)} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$\mathbf{N_4)} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

koşullarını sağlıyorsa X üzerinde bir norm adını alır. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay adı verilir.

2.2.1. Cauchy Dizisi

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, n > N_\varepsilon$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı belirlenebiliyorsa (x_n) dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir.

2.2.2. Tam Uzay

(X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X, d) uzayına tam uzay denir.

2.2.3. Banach Uzayı

$(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı, normun indirgediği metriğe göre tam uzay ise, Banach uzayı adını alır.

2.3. Topolojik Uzay

$X \neq \emptyset$ bir küme ve τ , X 'in kuvvet kümesi olan $P(X)$ 'in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir topoloji denir:

$$t_1) \emptyset, X \in \tau,$$

$$t_2) A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \text{ için } \bigcup_{i=1}^n A_i \in \tau,$$

$$t_3) \forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau.$$

τ 'nın elemanlarına X 'in açık alt kümeleri, (X, τ) çiftine de topolojik uzay denir.

Tanım 2.3.1. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A 'nın x 'den farklı noktaları varsa, x noktasına A 'nın bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.3.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesine ait herhangi bir x noktası A 'nın yığılma noktası değilse; x noktasına A 'nın ayrık (izole) noktası denir.

Tanım 2.3.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A 'nın bütün açık alt kümelerinin birleşimine A 'nın içi denir ve $\mathring{A}$ ile gösterilir. Her bir $x \in \mathring{A}$ noktasına A 'nın iç noktası denir.

2.4. Lineer Operatörler

$\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzayları olmak üzere $F: U \rightarrow V$ dönüşümü

- i. $\forall u_1, u_2 \in U, F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$
- ii. $\forall u \in U \text{ ve } \forall \alpha \in \mathcal{F}, F(\alpha u) = \alpha F(u)$

koşullarını gerçekliorsa F dönüşümüne bir lineer operatör denir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Fréchet Türevi

Tanım 3.3.1. Bir $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ operatörü, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ noktası verilsin. f dönüşümünün x_0 noktasında Fréchet türevlenebilir olması için gerek ve yeterli koşul

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

olacak şekilde bir $T: X \rightarrow Y$ lineer dönüşümünün var olmasıdır. Bu T lineer dönüşümüne f dönüşümünün x_0 noktasında Fréchet türevi denir. $Df(x_0)$ ile gösterilir.

Burada eğer x_0 noktası A kümesinin bir iç noktası değilse T lineer dönüşümü tek olmayabilir.

Tanım 3.3.2. Eğer $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ operatörü $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ noktasında Fréchet türevlenebilir ise $x - x_0 = h$ için,

$$df(x_0; h) = Df(x_0)h$$

ifadesine f operatörünün x_0 noktasında h artımına uygun Fréchet diferensiyeli denir.

3.1.1. Fréchet Türevinin Özellikleri

Önerme 1.1. $y \in Y$ ve $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ dönüşümü için $\forall x \in X$ için $c \in Y$ olmak üzere $f(x) = c$ sabit fonksiyonu verilsin. A kümesi üzerinde f dönüşümü Fréchet türevlenebilirdir ve $\forall x_0 \in A$ için $T(x_0) = 0$ ' dır.

Önerme 1.2. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ ve $g: A \subseteq X \rightarrow Y$ $x_0 \in A$ noktasında Fréchet türevlenebilir operatörler ve α, β birer skaler olmak üzere

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

operatörü de x_0 noktasında Fréchet türevlenebilirdir ve

$$D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0)$$

dır.

Önerme 1.3. X, Y ve Z Banach uzayları $g: B \subseteq Z \rightarrow X$ operatörü $z_0 \in B$ noktasında $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ operatörü $x_0 = g(z_0) \in A$ noktasında Fréchet türevlenebilir ise $(f \circ g)(z) = f(g(z)): Z \rightarrow Y$ operatörü z_0 noktasında Fréchet türevlenebilir ve

$$D(f \circ g)(z_0) = Df(x_0)Dg(z_0)$$

dır.

3.1.2. Fréchet Türevlenebilen Fonksiyonlar için Taylor Teoremi

Yardımcı Teorem. $x_0, h \in X$ alalım. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. $t \in \mathbb{R}$, $(x_0 + th) \in A$ olmak üzere, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow Y$, $\psi(t) = f(x_0 + th)$ şeklinde ψ fonksiyonu tanımlayalım. Eğer f fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_0 = x_0 + t_0 h$ noktasında r -kez türevlenebilir ise, ψ fonksiyonunun t_0 noktasında r -inci türevi vardır ve

$$d^r \psi(t_0) = d^r f(z_0)(h)^r$$

olur. Burada $(h)^r$, $X^r = X \times X \times \dots \times X$ uzayında her bir koordinatı h olan bir noktadır.

Taylor Teoremi. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında r -kez Fréchet türevlenebilir olsun. O zaman, X içinde $h \rightarrow 0$ iken

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0)(h)^2 + \dots + \frac{1}{r!} d^r f(x_0)(h)^r + o(\|h\|^r)$$

ya da

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n d^k f(x_0) \frac{h^k}{k!} + o(\|h\|^r)$$

eşitliği geçerlidir.

3.2. Fréchet Türevlenebilir Operatörler için Riemann Anlamında İntegrallenebilme ve Ortalama Değer Teoremi

Tanım 3.2.1. (Banach Uzaylarında Riemann Anlamında İntegral)

X bir Banach uzayı ve $f: [0,1] \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $[0,1]$ aralığı aşağıdaki şekilde parçalansın:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1.$$

Bu noktalar yardımıyla aralık, n adet alt aralığa bölünür:

$$[t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, n.$$

Bu parçalanmaya karşılık gelen küme

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

olarak tanımlanır ve $[0,1]$ aralığının bir parçalanması olarak adlandırılır.

Parçalanmanın normu (yani en uzun alt aralık)

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$

şeklindedir. Eğer

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) (t_k - t_{k-1})$$

limiti X uzayında mevcut ve sonluysa, f fonksiyonu Riemann anlamında integrallenebilir olarak tanımlanır ve bu integral

$$\int_0^1 f(t) dt$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.2. (Operatör Değerli Fonksiyonlar için Riemann İntegrali)

Şimdi X ve Y Banach uzayları olmak üzere, $x_0 \in X, \Delta x \in X$ ve

$$[x_0, x_0 + \Delta x] = \{x = x_0 + t\Delta x | t \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanan bir doğrusal parça üzerinde, $G: [x_0, x_0 + \Delta x] \rightarrow L(X, Y)$ biçiminde tanımlı bir operatör verilsin. Bu durumda, G operatörü boyunca tanımlanan Riemann integrali

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} G(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n G(x_0 + t_k \Delta x) (t_k - t_{k-1}) \cdot \Delta x$$

şeklinde tanımlanır. Eğer G sürekli bir operatör ise, bu limit her zaman vardır ve bu toplam, integralin değerine yaklaşır (Kantorovich and Aklov, 1981).

Teorem 3.2.1. (İntegral Hesabının Temel Teoreminin Genelleştirilmiş Hali)

Eğer $F: B \rightarrow Y$ sürekli türevlenebilir bir operatör ve $B \subset X$ açık bir küme olmak üzere,

$$[x_0, x_0 + \Delta x] \subset B$$

şartı sağlanıyorsa ve $G(x) = F'(x)$ alınırsa, o halde aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)dx = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$$

Bu ifade, klasik Newton–Leibniz formülünün Banach uzayları için genellenmiş bir versiyonudur (Kantorovich ve Aklov, 1981).

3.3. Kuantum Türevi

Bir f fonksiyonunun kuantum türevi $D_q f$ ile gösterilir ve $x \neq 0$ ve $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ olmak üzere klasik analizdeki türev tanımına benzer olarak

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1 - q)x}$$

şeklinde iki diferensiyelin oranı olarak tanımlanır. f fonksiyonunun $x = 0$ daki kuantum türevi klasik türevdeki $f'(0)$ olarak tanımlanır. Buna göre bir f fonksiyonunun kuantum türevi

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1 - q)x}, & x \neq 0 \wedge q \neq 1 \\ f'(x), & x = 0 \vee q = 1 \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir (Kac ve Cheung, 2002)..

Tanım 3.2.1. f , bir dönüşüm olmak üzere f' 'nin kuantum diferensiyeli

$$d_q f(x) = f(x) - f(qx)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak, $d_q x = (1 - q)x$ olur.

3.3.1. Kuantum Türevinin Özellikleri

Önerme 1.4. f, g bir dönüşüm olmak üzere f ve g kuantum diferensiyellenebilir olsun. $f(x)g(x)$ ' in kuantum diferensiyeli,

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x) \end{aligned}$$

dir.

Önerme 1.5. f, g bir dönüşüm olmak üzere f ve g kuantum türevlenebilir olsun. α ve β sabitler olmak üzere,

$$D_q(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha D_q(f(x)) + \beta D_q(g(x))$$

dir.

3.3.2. Polinomlar için q-Taylor Formülü

Mertebesi n olan herhangi bir $f(x)$ polinomu ve c herhangi bir sayı olmak üzere, q-Taylor gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

Burada $(x-c)_q^j$ ve $[j]!$ ifadeleri için

$$(x-c)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ ise} \\ (x-c)(x-qc) \dots (x-q^{n-1}c), & n \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1 \text{ ve } [n]! = [n]. [n - 1] \dots [2]. [1]$$

dir.

Örnek 3.3.1. $f(x) = x^n$ fonksiyonunun $x = 1$ için q -Taylor gösterimini bulalım.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (D_q^j f)(1) \frac{(x-1)_q^j}{[j]!}$$

$$D_q f(x) = [n]x^{n-1}$$

$$D_q^2 f(x) = [n]. [n - 1]x^{n-2}$$

$\vdots$

$$D_q^j f(x) = [n]. [n - 1] \dots [n - j + 1]x^{n-j}$$

$D_q^j f(1) = [n]. [n - 1] \dots [n - j + 1]$ olacaktır. O halde buna göre $f(x)$ in $x = 1$ noktası civarındaki q -Taylor formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{[n]. [n - 1] \dots [n - j + 1]}{[j]!} (x - 1)_q^j = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x - 1)_q^j.$$

Burada $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ ifadesine q -binom katsayısı denir ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n - j]! [j]!} = \frac{[n]. [n - 1] \dots [n - j + 1]}{[j]!}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $q \rightarrow 1$ için limit alındığında bilinen binom katsayısına eşit olacaktır.

3.4. q -Antitürev

Eğer, $D_q F(x) = f(x)$ oluyor ise, $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ 'in antitürevi denir ve

$$\int f(x) d_q x$$

şeklinde gösterilir. Burada $\int D_q F(x) d_q x = f(x)$ olduğu açıktır (Kac ve Cheung, 2002).

3.5. Jackson q-İntegral

$f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere ve $0 < |q| < 1$ için, Jackson q-integrali $[a, b]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\int_0^a f(x) d_q x = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n)$$

olmak üzere genel q-integral tanımı

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

şeklindedir (Gasper ve Rahman, 2004).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Kuantum Fréchet Türevi

X ve Y Banach uzayları ve $I \cap J \neq \emptyset$ olmak üzere $\{e_i: i \in I\}$ X ' in $\{e_j: j \in J\}$ Y 'nin birer Shauder bazı olsun.

Herhangi bir $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ dönüşümü verildiğinde $\pi_j: Y \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_j = \pi_j \circ f$$

gösterimini kullanalım. Ayrıca her $x \in X$, $y \in Y$ için $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ ve $y = \sum_{j \in J} y_j e_j$ ise kısaca $x = (x_i)_{i \in I}$ ve $y = (y_j)_{j \in J}$ ile gösterelim.

$f: X \rightarrow Y$ olmak üzere her $i \in I$ için,

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_i} = \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i}, (q \neq 1, x_i \neq 0)$$

dır. Bu durumda $f_{ji}^q = \pi_j \circ \frac{\partial f}{\partial_q u_i}$ denirse $\frac{\partial f}{\partial_q u_i} = \sum_{j \in J} f_{ji}^q e_j$ ve $(f_{ji}^q)_{(i,j) \in I \times J}$ ifadesine f 'in x noktasındaki kuantum Fréchet türevi denir.

Burada, $\frac{\partial f}{\partial_q u_i}$ ifadesine de f' in x noktasındaki kısmi kuantum Fréchet türevi denir.

Dikkat edilirse her $u \in X$ için

$$T_q(f, x): X \rightarrow Y$$

$$T_q(f, x)(u) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ji} u_i e_j$$

operatörü tanımlı ise lineerdir.

Buna göre kuantum Fréchet türevi aşağıdaki gibi düşünülebilir;

$$\mathcal{F}_q: C_q^1(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$$

$$f \mapsto \mathcal{F}_q(f): X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

$$x \mapsto \mathcal{F}_q(f)(x): X \rightarrow Y$$

$$u \mapsto \mathcal{F}_q(f)(x)(u) \in Y$$

Burada $C_q^1(X, Y)$, X' den Y' ye kuantum Fréchet türevlenebilir fonksiyonların kümesini gösterir. Kısalık açısından $\mathcal{F}_q(f)(x) = T_q(f, x)$ gösterimini kullanacağız.

Şimdi birkaç örnek ile yeni tanımını ele alalım.

Örnek 4.1.1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2, x_1 + x_2^2)$ dönüşümü verilsin. f dönüşümünün (x_1, x_2) noktasındaki kuantum Fréchet türevini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_1} = \frac{f(x + (q-1)x_1 e_1) - f(x)}{(q-1)x_1} = ((q^2 + q + 1)x_1^2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_2} = \frac{f(x + (q-1)x_2 e_2) - f(x)}{(q-1)x_2} = (1, (q+1)x_2)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} T_q(f)(u) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial_q u_1} & \frac{\partial f}{\partial_q u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (q^2 + q + 1)x_1^2 & 1 \\ 1 & (q+1)x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.1.2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2^2)$ dönüşümü verilsin. f dönüşümünün (x_1, x_2) noktasındaki kuantum Fréchet türevini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_q u_1} &= \frac{f(x + (q-1)x_1 e_1) - f(x)}{(q-1)x_1} \\ &= \frac{f((x_1, x_2) + (q-1)a(1,0)) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_1} \\ &= \frac{f(qx_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_1} \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial_q u_2} &= \frac{f(x + (q-1)x_2 e_2) - f(x)}{(q-1)x_2} \\
&= \frac{f((x_1, x_2) + (q-1)x_2(0,1)) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_2} \\
&= \frac{f(x_1, qx_2) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_2} \\
&= (1, (q+1)x_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
T_q(f)(u) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial_q u_1} & \frac{\partial f}{\partial_q u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (q+1)x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

4.1.1. Sonlu Boyutlu Operatörlerde Kuantum Fréchet Türevi

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm olsun. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ noktası ve $f(x) \in Y^m$ için $T_q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü ve $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ için

$$T_q(f)(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial_q u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial_q u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial_q u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial_q u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_i} = \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i}$$

$T_q(f)$ dönüşümüne f dönüşümünün kuantum Fréchet türevi denir.

Kuantum Fréchet türevinde $q \rightarrow 1$ iken limiti alındığında klasik Fréchet türevine eş değer olur. Şimdi bunu birkaç örnekle görelim.

Örnek 4.1.3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ dönüşümü verilsin. f dönüşümünün (x_1, x_2) noktasındaki kuantum Fréchet türevini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial_q u_1} &= \frac{f(x + (q-1)x_1 e_1) - f(x)}{(q-1)x_1} = \frac{f((x_1, x_2) + (q-1)x_1(1,0)) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_1} \\&= \frac{f((x_1, x_2) + (q-1)(x_1, 0)) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_1} \\&= \frac{f(qx_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_1} \\&= \frac{q^2 x_1^2 + qx_1 x_2 + x_2^2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2}{(q-1)x_1} \\&= \frac{x_1^2(q^2 - 1) + x_1 x_2(q-1)}{(q-1)x_1} \\&= \frac{x_1^2(q-1)(q+1) + x_1 x_2(q-1)}{(q-1)x_1} \\&= \frac{x_1(q-1)(x_1(q+1) + x_2)}{(q-1)x_1} \\&= (q+1)x_1 + x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial_q u_2} &= \frac{f(x + (q-1)x_2 e_2) - f(x)}{(q-1)x_2} = \frac{f((x_1, x_2) + (q-1)x_2(0,1)) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_2} \\&= \frac{f((x_1, x_2) + (q-1)(0, x_2)) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_2} \\&= \frac{f(x_1, qx_2) - f(x_1, x_2)}{(q-1)x_2} \\&= \frac{x_1^2 + qx_1 x_2 + q^2 x_2^2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2}{(q-1)x_2} \\&= \frac{x_2^2(q^2 - 1) + x_1 x_2(q-1)}{(q-1)x_2}\end{aligned}$$

$$= \frac{x_2^2(q-1)(q+1) + x_1x_2(q-1)}{(q-1)b}$$

$$= \frac{x_2(q-1)(x_2(q+1) + x_1)}{(q-1)x_2}$$

$$= (q+1)x_1 + x_2$$

Buradan,

$$T_q(f)(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial_q u_1} & \frac{\partial f}{\partial_q u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= ((q+1)x_1 + x_2 \quad (q+1)x_1 + x_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere kuantum Fréchet türevinde $q \rightarrow 1$ iken limiti alındığında klasik Fréchet türevine eş değer olur.

Örnek 4.1.4. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$ dönüşümü verilsin. f dönüşümünün (x_1, x_2, x_3) noktasındaki kuantum Fréchet türevini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_1} = \frac{f(x + (q-1)x_1 e_1) - f(x)}{(q-1)x_1} = (1, 0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_2} = \frac{f(x + (q-1)x_2 e_2) - f(x)}{(q-1)x_2} = (1, 1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_3} = \frac{f(x + (q-1)x_3 e_3) - f(x)}{(q-1)x_3} = (0, 1, 1)$$

elde edilir. Buradan

$$T_q(f)(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial_q u_1} & \frac{\partial f}{\partial_q u_2} & \frac{\partial f}{\partial_q u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Örnek 4.1.5. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ dönüşümü verilsin. f dönüşümünün (x_1, x_2, x_3) noktasındaki kuantum Fréchet türevini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_1} = \frac{f(x + (q-1)x_1 e_1) - f(x)}{(q-1)x_1} = ((q+1)x_1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_2} = \frac{f(x + (q-1)x_2 e_2) - f(x)}{(q-1)x_2} = (0, (q+1)x_2, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_3} = \frac{f(x + (q-1)x_3 e_3) - f(x)}{(q-1)x_3} = (0, 0, (q+1)x_3)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} T_q(f)(u) &= \left(\frac{\partial f}{\partial_q u_1} \quad \frac{\partial f}{\partial_q u_2} \quad \frac{\partial f}{\partial_q u_3} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (q+1)x_1 & 0 & 0 \\ 0 & (q+1)x_2 & 0 \\ 0 & 0 & (q+1)x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.1. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ ve $g: A \subseteq X \rightarrow Y$ $x_0 \in A$ noktasında kuantum Fréchet türevlenebilir operatörler ve α, β birer skaler olmak üzere

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

operatörü de x_0 noktasında kuantum Fréchet türevlenebilirdir ve

$$T_q(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha T_q f(x_0) + \beta T_q g(x_0)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}
T_q(\alpha f + \beta g) &= T_q(\alpha f + \beta g, x_0)(u) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (\alpha f_{ji} + \beta g_{ji}) u_i e_j \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (\alpha f_{ji} u_i e_j + \beta g_{ji} u_i e_j) \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \alpha f_{ji} u_i e_j + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \beta g_{ji} u_i e_j \\
&= \alpha \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ji} u_i e_j + \beta \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g_{ji} u_i e_j \\
&= \alpha T_q f(x_0) + \beta T_q g(x_0)
\end{aligned}$$

Önerme 4.2. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ dönüşümü, her $x \in A$ için $f(x) = p$ ve $p \in Y$ herhangi bir sabit olsun. f dönüşümünü kuantum Fréchet diferensiyellenebilir ve kuantum Fréchet türevi sıfır fonksiyonu olur. Yani $T_q(f)(x) = 0$ 'dır.

İspat:

$f(x) = p$ ve $p \in Y$ herhangi sabit olsun. f dönüşümünün kuantum Fréchet türevine bakalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\
&= \frac{p - p}{(q-1)x_i} \\
&= \frac{0}{(q-1)x_i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Görüldüğü gibi $T_q(f)(x)$ X 'den Y 'ye giden sıfır fonksiyonudur. Burada dikkat edilirse klasik türevde olduğu gibi sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

Önerme 4.3. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda f dönüşümü A 'nın her iç noktasında kuantum Fréchet türevlenebilirdir ve bu türev Fréchet türevine eş değerdir.

İspat:

f dönüşümü lineer ise, α, β birer skaler olmak üzere

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi f dönüşümünün kuantum Fréchet türevine bakalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\ &= \frac{f(x) + (q-1)x_i f(e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\ &= f(e_i) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi reel bir sayı elde edildi. Fréchet türevinin çıktıları her a_{ij} için reel sayılar olmalıdır. Burada lineer bir dönüşümün kuantum Fréchet türevini reel bir sayı olarak elde ettik. Dolayısıyla, lineer bir dönüşümün kuantum Fréchet türevi, Fréchet türevine eşdeğerdir. Yani $T_q(f)(x) = T(f)(x)$ olur.

Önerme 4.4. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ bir polinom fonksiyon olsun. f dönüşümü, her $x \in \mathbb{A}$ için kuantum Fréchet diferensiyellenebilirdir. Bu durumda f dönüşümünün kuantum Fréchet türevi, kuantum türevine eş değerdir.

İspat:

$f: A \subseteq X \rightarrow Y$ bir polinom fonksiyon olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ için $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ verilsin.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_q u} &= \frac{a_n q^n x^n + a_{n-1} q^{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 q^2 x^2 + a_1 q x + a_0}{(q-1)x} \\ &\quad - \frac{(a_n q^n x^n + a_{n-1} q^{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 q^2 x^2 + a_1 q x + a_0)}{(q-1)x} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_n x^n (q^n - 1) + a_{n-1} x^{n-1} (q^{n-1} - 1) + \dots + a_2 x^2 (q^2 - 1) + a_1 x (q - 1)}{(q - 1)x}$$

$$= a_n x^{n-1} (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) + a_{n-1} x^{n-2} (q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + 1) + \dots + a_2 x (q + 1) + a_1$$

Görüldüğü gibi f dönüşümünün kuantum Fréchet türevi, kuantum türevine eş değerdir. Yani $T_q(f)(x) = D_q(f)(x)$ 'dir.

Önerme 4.5. $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ dönüşümü $x \in X$ noktasında kuantum Fréchet differensiyellenebilir ve $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$ olsun. $g \circ f$, $x \in X$ noktasında kuantum Fréchet differensiyellenebilirdir ve

$$T_q(g \circ f, x) = g \circ T_q(f, x)$$

dir.

İspat:

I, J ve K ikişerli olarak ayrık kümeler olmak üzere X, Y ve Z 'nin bazları sırasıyla $\{e_i: i \in I\}, \{e_j: j \in J\}$ ve $\{e_k: k \in K\}$ olsun. $u \in X$ olmak üzere

$$T_q(g \circ f, x)(u) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} (g \circ f)_{ki}^q u_i e_k$$

ve her $j \in J$ için $g(e_j) = \sum_{k \in K} g_{kj} e_k$ olmak üzere

$$(g \circ T_q(f, x))(u) = g \left(\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ji} u_i e_j \right)$$

$$= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ji} u_i g(e_j)$$

$$= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ji} u_i \sum_{k \in K} g_{kj} e_k$$

$$= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ji} u_i g_{kj} e_k$$

istenen eşitliği görmek için her $i \in I$ ve $k \in K$ için

$$(g \circ f)_{ki}^q = \sum_{j \in J} f_{ji} g_{kj}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{ki}^q &= \pi_k \circ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial_q u_i} \\ &= \pi_k \left(\frac{(g \circ f)(x + (q-1)x_i e_i) - (g \circ f)(x)}{(q-1)x_i} \right) \\ &= \pi_k \left(g \left(\frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \right) \right) \\ &= \pi_k \left(g \circ \frac{\partial f}{\partial_q u_i} \right) \\ &= \pi_k \left(g \left(\sum_{j \in J} f_{ji} e_j \right) \right) \\ &= \pi_k \left(\sum_{j \in J} f_{ji} g(e_j) \right) \\ &= \pi_k \left(\sum_{j \in J} f_{ji} \sum_{k \in K} g_{kj} e_k \right) \\ &= \sum_{j \in J} f_{ji} g_{kj} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi yukarıdaki önermeyi örneklerle ele alalım. Öncelikle önermenin şartlarını sağlayan iki operatör ele alalım. Daha sonra önerme şartlarını sağlamayan bir örnek üzerinde inceleme yapalım.

Örnek 4.1.6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2$ dönüşümü ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x$ dönüşümleri verilsin. $u \in \mathbb{R}$ için

$$T_q(g \circ f, x) = g \circ T_q(f, x)$$

olduğunu görmeliyiz.

Çözüm:

Öncelikle $T_q(f, x)$ değerini bulalım. Bunun için

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f(x + (q-1)x) - f(x)}{(q-1)x}$$

$$= \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x}$$

$$= \frac{(q-1)(q+1)x^2}{(q-1)x}$$

$$= (q+1)x$$

$$g \circ T_q(f, x) = 3(q+1)x$$

bulunur. Diğer taraftan $(g \circ f)(x) = 3x^2$ için $T_q(g \circ f, x)$ değerini bulalım.

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial u} = \frac{(g \circ f)(x + (q-1)x) - (g \circ f)(x)}{(q-1)x}$$

$$= \frac{3q^2 x^2 - 3x^2}{(q-1)x}$$

$$= \frac{(q-1)(q+1)3x^2}{(q-1)x}$$

$$= 3(q+1)x$$

olur. Böylelikle $T_q(g \circ f, x) = g \circ T_q(f, x)$ eşitliği sağlanmış olur.

Örnek 4.1.7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2$ dönüşümü ve $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3$ dönüşümleri verilsin. $u \in \mathbb{R}$ için

$$T_q(g \circ f, x) = g \circ T_q(f, x)$$

eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını görelim.

Çözüm:

Öncelikle $T_q(f, x)$ değerini bulalım. Bunun için

$$\frac{\partial f}{\partial_q u} = \frac{f(x + (q-1)x) - f(x)}{(q-1)x}$$

$$= \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x}$$

$$= \frac{(q-1)(q+1)x^2}{(q-1)x}$$

$$= (q+1)x$$

$$g \circ T_q(f, x) = (q+1)^3 x^3$$

bulunur. Diğer taraftan $(g \circ f)(x) = 27x^6$ için $T_q(g \circ f, x)$ değerini bulalım.

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial_q u} = \frac{(g \circ f)(x + (q-1)x) - (g \circ f)(x)}{(q-1)x}$$

$$= \frac{27q^6 x^6 - 27x^6}{(q-1)x}$$

$$= \frac{27x^6(q^6 - 1)}{(q-1)x}$$

$$= \frac{27x^5(q^3 + 1)(q^3 - 1)}{q-1}$$

$$= 27x^5(q^3 + 1)(q^2 + q + 1)$$

elde edildi. Görüldüğü üzere g dönüşümü önerme şartlarına uymadığından, yani lineer bir dönüşüm olmadığından $T_q(g \circ f, x) = g \circ T_q(f, x)$ eşitliği sağlanmamıştır.

4.2. Yüksek Mertebeden Kuantum Fréchet Türevi

Kuantum Fréchet türevinin ilk olarak birinci basamaktan ele aldık. Şimdi bu türevi yüksek basamaktan türevler için genişleteceğiz.

Tanım 4.3.1. Eğer $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ x_0 noktasında $(n - 1)$. mertebeden kuantum Fréchet türevlenebilir ve $i \in I$ için

$$\frac{\partial^n f}{\partial_q u_i^n} = \frac{f^{(n-1)}(x + (q - 1)x_i e_i) - f^{(n-1)}(x)}{(q - 1)x_i}$$

varsa, $T^n(f, x)$ 'e f 'nin x_0 noktasındaki n . mertebeden türevi denir.

Teorem 4.3.1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ olmak üzere $T_q(f, x)$, f operatörünün kuantum Fréchet türevi olsun. Her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $T_q(f, x_i)$, $T_q(f, x_j)$ türevleri için

$$T_q(T_q(f, x_i), x_j) = T_q(T_q(f, x_j), x_i)$$

dir.

İspat:

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q - 1)x_i e_i) - f(x)}{(q - 1)x_i} \\ &= \frac{f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{(q - 1)x_i} \\ \frac{\partial}{\partial_q u_j} \left(\frac{\partial f}{\partial_q u_i} \right) &= \frac{[f(x_1, \dots, qx_i, \dots, qx_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, qx_j, \dots, x_n)] - [f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)]}{(q - 1)^2 x_i x_j} \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\frac{\partial f}{\partial_q u_j} = \frac{f(x + (q - 1)x_j e_j) - f(x)}{(q - 1)x_j}$$

$$= \frac{f(x_1, \dots, qx_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{(q-1)x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial_q u_i} \left(\frac{\partial f}{\partial_q u_j} \right) = \frac{[f(x_1, \dots, qx_i, \dots, qx_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n)] - [f(x_1, \dots, qx_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)]}{(q-1)^2 x_j x_i}$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Benzer şekilde $i < j$ için de yapılabilir. Her bileşen için türevler eşit olduğundan

$$T_q(T_q(f, x_i), x_j) = T_q(T_q(f, x_j), x_i)$$

dir.

Biz bu ifadeyi kısaca $T_q(f, x_i, x_j)$ şeklinde göstereceğiz ve ilerleyen süreçte bu şekilde kullanacağız.

4.2.1. Kuantum Fréchet Türevinde Taylor Formülü

$f: A \subseteq X \rightarrow Y$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında n -kez kuantum Fréchet türevlenebilir olsun. O zaman her x için Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{k=0}^n T_q^k(f, c) \frac{(x-c)_q^k}{[k]!}$$

Örnek 4.2.1. $f(x) = x^n$ fonksiyonunun $x = 1$ için Taylor gösterimini bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n T_q^k(f, 1) \frac{(x-1)_q^k}{[k]!}$$

$$T_q(f, x) = [n]x^{n-1}$$

$$T_q^2(f, x) = [n]. [n-1]x^{n-2}$$

$\vdots$

$$T_q^k(f, x) = [n]. [n-1] \dots [n-k+1]x^{n-k}$$

$$T_q^k(f, 1) = [n]. [n-1] \dots [n-k+1] \text{ olacaktır.}$$

O halde buna göre $f(x)$ in $x = 1$ noktası civarındaki q-Taylor formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{[n]. [n-1] \dots [n-k+1]}{[k]!} (x-1)_q^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)_q^k$$

4.2.2. Bazı Özel Tanımlı Fonksiyonların Kuantum Fréchet Türevi

Bu bölümde trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonların kuantum Fréchet türevlerini inceleyeceğiz. Öncelikle bazı trigonometrik fonksiyonları ele alalım.

$f(x) = \sin(x)$ fonksiyonunun kuantum Fréchet türevine bakalım. Bu fonksiyon reel sayılar kümesinden, $[-1,1]$ kümesine tanımlı bir fonksiyondur. Tanımlandığı kümeler itibariyle kuantum türeve denk olması beklenir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\ &= \frac{\sin(qx) - \sin(x)}{(q-1)x} \end{aligned}$$

Trigonometrik fonksiyonların özelliklerini kullanarak, sinüs fark formüllerinden

$$\sin(qx) - \sin(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{qx+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{qx-x}{2}\right)$$

elde edilir. Bunu yukarıdaki kuantum Fréchet türevinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{qx+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{qx-x}{2}\right)}{(q-1)x} \\ &= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{(q+1)x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(q-1)x}{2}\right)}{(q-1)x} \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi kuantum türev elde edildi. Burada $q \rightarrow 1$ iken klasik anlamda türev ile eş değer sonuç elde edilir. Aynı şekilde şimdi cosinüs fonksiyonu için uygulayalım.

$f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun kuantum Fréchet türevine bakalım. Bu fonksiyon reel sayılar kümesinden, $[-1,1]$ kümesine tanımlı bir fonksiyondur. Tanımlandığı kümeler itibariyle kuantum türeve denk olması beklenir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\ &= \frac{\cos(qx) - \cos x}{(q-1)x}\end{aligned}$$

Trigonometrik fonksiyonların özelliklerini kullanarak, cosinüs fark formüllerinden

$$\cos(qx) - \cos x = -2 \cdot \sin\left(\frac{qx + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{qx - x}{2}\right)$$

elde edilir. Bunu yukarıdaki kuantum Fréchet türevinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{qx + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{qx - x}{2}\right)}{(q-1)x} \\ &= \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{(q+1)x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(q-1)x}{2}\right)}{(q-1)x}\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi kuantum türev elde edilir. Burada $q \rightarrow 1$ iken klasik anlamda türeve yakınsar.

Şimdi de üstel bir fonksiyon ele alalım. $f(x) = e^x$ fonksiyonu reel sayılar kümesinden pozitif reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyondur. Beklentimiz yine kuantum türeve eş değer çıkmasıdır. Kuantum Fréchet türevine bakarsak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\ &= \frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} \\ &= \frac{e^x (e^{(q-1)x} - 1)}{(q-1)x} \\ &= e^x \cdot \frac{e^{(q-1)x} - 1}{(q-1)x}\end{aligned}$$

şeklinde kuantum türeve eş değer bir sonuç elde edilir. Burada $q \rightarrow 1$ iken klasik anlamda türeve yakınsar.

Son olarak logaritmik fonksiyonlarda kuantum Fréchet türevine bakmak için $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon pozitif reel sayılar kümesinden, reel sayılar kümesine tanımlı olmasından dolayı yine kuantum türeve eş değer bir sonuç elde edilmesi beklenir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial_q u_i} &= \frac{f(x + (q-1)x_i e_i) - f(x)}{(q-1)x_i} \\
&= \frac{\log_a qx - \log_a x}{(q-1)x} \\
&= \frac{\log_a q}{(q-1)x} \\
&= \frac{\frac{\log q}{\log a}}{(q-1)x} \\
&= \frac{\log q}{\log a \cdot (q-1)x}
\end{aligned}$$

olur ve kuantum türeve eş değer bir sonuç elde edilir. Burada $q \rightarrow 1$ iken klasik anlamda türeve yakınsar.

4.3. Türev Türlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde, klasik türev, q-türev, Fréchet türev ve kuantum Fréchet türev kavramları yapısal ve tanımsal açıdan karşılaştırılmıştır. Her bir türev türünün tanım alanı, uygulama koşulları ve avantajları tablo hâlinde özetlenmiştir.

Çizelge 4.1. Türev türlerinin karşılaştırılması

Özellik / Türev Türü	Klasik Türev	q-Türev	Fréchet Türev	Kuantum Fréchet Türev
Tanım Alanı	Gerçek değişkenli fonksiyonlar	Gerçek değişkenli fonksiyonlar	Normlu (genellikle Banach) uzaylar	Normlu/Banach uzaylarında
Türev Tipi	Noktasal, limitli	Ayrık, q-parametreli	Lineer operatör	Ayrık ve Lineer Yapı (bileşenlerde)
Süreksiz Noktalarda Uygulanabilirlik	Uygulanamaz	Uygulanabilir	Uygulanamaz	Uygulanabilir
Sabit Türevin Yorumu	Sabit fonksiyonlarda türev ‘sıfır’dır.	Sabit fonksiyonlarda türev ‘sıfır’dır.	Sabit dönüşümlerde türev ‘sıfır’dır.	Sabit dönüşümlerde türev ‘sıfır’dır.
Uygulama Alanları	Klasik fizik, mühendislik, diferensiyel denklemler	Kuantum fizik, q-serileri, ayrık sistemler	Fonksiyonel analiz, optimizasyon	Kuantum analiz, operatörlü diferensiyel sistemler
Lineerlik	Sağlanır	Sağlanır	Sağlanır	Sağlanır

Kuantum Fréchet türev, klasik türev ve Fréchet türevin bir genellemesi olarak q-parametresine bağlı ayrık türev yapısını normlu uzaylara taşır. Kuantum Fréchet türev, klasik türev ve Fréchet türevin bir genellemesi olarak q-parametresine bağlı ayrık türev yapısını normlu uzaylara taşır. Bu yapı, özellikle klasik analizde limitin var olmadığı ya da tanımsız kaldığı noktalarda alternatif bir yaklaşım sunar. Fréchet türev, genellikle sonsuz boyutlu uzaylarda sürekli dönüşümler üzerinde çalışırken; kuantum Fréchet türev bu yapıyı ayrık türev hesabıyla birleştirerek hem süreksizlik içeren durumlara hem de q-analizi içeren problemlere uygulanabilir hâle getirir.

Ayrıca, q-parametresi sayesinde sistemin çözümlemesinde ekstra bir esneklik kazanılır. Bu parametre, çözüm uzayının hem topolojik hem de cebirsel özelliklerini kontrol etme imkânı sağlar. Kuantum Fréchet türev, özellikle operatör teorisi, diferensiyel denklem sistemleri ve q-serilerle modellenen ayrık fiziksel sistemler gibi alanlarda klasik analiz yöntemlerinin yetersiz kaldığı durumlarda güçlü bir araç olarak öne çıkar.

Böylelikle, kuantum Fréchet türev hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından yeni ve özgün bir perspektif sunar. Klasik analizde karşılaşılan limit

yetersizlikleri, süreksizlikler ve yüksek boyutlu sistemlerin türevlenebilirlik sorunları bu yapı aracılığıyla çözümlenebilir.

Kuantum Fréchet türev, sadece yapısal değil, aynı zamanda teorik anlamda da klasik ve modern türev kurallarının bir genellemesini içerir. Lineerlik gibi temel türev kuralları, kuantum yapı içinde q -parametresi ile yeniden tanımlanmış ve normlu uzaylara adapte edilmiştir.

Bu tür kuralların korunması, türev türünün sadece kuramsal olarak değil, aynı zamanda uygulama açısından da güvenilirliğini artırır. Böylece kuantum Fréchet türev, klasik kuralların geçerli olduğu sınır durumlarda klasik yapıya indirgenebilirken, daha genel durumlarda genişletilmiş analiz yapılmasına imkân tanır.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatür incelendiğinde klasik türevin lineer operatörlerde, Fréchet türevinin lineer olmayan operatörlerde ve kuantum türevinin ise limiti olmayan operatörlerin türevinin alınmasında kullanıldığı görülmektedir. Ancak bahsedilen tüm bu türev çeşitleri limiti olmayan lineer olmayan operatörlerin türevinin alınması konusunda işlevsiz kalmaktadır. Bu çalışma kapsamında klasik, Fréchet ve kuantum türevleri için şu ana kadar ki literatürde henüz herhangi bir çözüm üretilememiş olan limiti olmayan lineer olmayan operatörlerin türevinin alınamaması sorununa etkili bir çözüm yolu bulunmuştur. Böylece literatürdeki önemli bir eksiklik olan türevin genellemesi konusuna çözüm üretilmiş olup, yeni bir türev tanımı yapılmıştır. Tanımlanan bu yeni türev, Fréchet türevine kuantum türevi uygulanarak bulunduğu için “kuantum Fréchet türevi” olarak isimlendirilmesi uygun görülmüştür. Bu araştırma sonucunda elde edilen yeni türev, operatörlerin sahip oldukları özellikleri ayırmaksızın tek bir türev yardımıyla çözülebilir hale getirmiştir.

Başarılı bir şekilde tanımlaması yapılan bu yeni türevin, geçerliliğine ilişkin yapılan çalışmalar oldukça olumlu sonuçlar vermiştir. Örneğin basit anlamda sabit fonksiyonun türevinin bütün türevlerde olduğu gibi tanımlanan bu yeni türevde de 0 (sıfır) olduğu tespit edilmiştir. Bunun dışında tanımlanan bu yeni türev, bir bileşke fonksiyonun türevinin belirli şartlarda diferansiyellenebilir olduğunu da ortaya koymuştur. Ancak fonksiyonların yerleri değiştirildiğinde diferansiyellenebilir olmadığı görülmüştür. Diğer yandan polinom fonksiyonların bileşkelerinde ise böyle bir sorunla karşılaşılmamıştır.

Görüldüğü üzere bu araştırma kapsamında elde edilen yeni türev, türevin kullanıldığı her alanda uygulayıcı konumunda olan bireylerin (mühendislik, fen bilimleri, tıp vb.), problemlerine çözüm bulmak adına hangi türevi kullanmaları gerektiği konusunda zaman kaybetmelerine ve araştırma yapmalarına gerek duymaksızın kolaylıkla kullanabilecekleri geçerli bir yöntem sunmaktadır. Diğer yandan bu konuda çalışmak isteyen yeni araştırmacılar, klasik türevdeki özellikleri, bu araştırma kapsamında tanımlanan bu yeni türeve aktarılması üzerine çalışabilirler. Ayrıca elde edilen bu yeni türevin integral tanımının da yapılıp yapılamayacağı üzerine araştırmalar planlanabilir. İntegral tanımının elde edilmesi durumunda, klasik türevdeki birçok özelliğin kuantum Fréchet türevine aktarılması sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- Ernst, T. (2000). *The history of q -calculus and new method*. Department of Mathematics, Uppsala University.
- Flett, D. T. M. (1980). *Differential analysis; differentiation, differential equations and differential inequalities*. Cambridge University Press.
- Fréchet, M. M. (1906). On some points of functional calculus (Çeviri: Fransızca). *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22, 1–72.
- Gasper, G., ve Rahman, M. (2004). *Basic hypergeometric series*. Cambridge University Press.
- Kac, V. G., ve Cheung, P. (2002). *Quantum calculus*. New York: Springer.
- Kantorovich, L. V., ve Akilov, G. P. (1981). *Functional analysis* (Çeviri: Rusça). Mir Publishers.
- Siddiqi, A. H., ve Nanda, S. (2018). *Functional analysis and applications*. Springer.