

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Harun Emre SEYHAN

TÜREVLENEBİLİR FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN DEĞİŞKEN MERTEBELİ RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ
İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Harun Emre SEYHAN

TÜREVLENEBİLİR FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
DEĞİŞKEN MERTEBELİ RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLER İÇEREN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
JÜRİ ÜYELERİ
Prof. Dr. Çetin YILDIZ
Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

**TÜREVLENEBİLİR BAZI FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
DEĞİŞKEN MERTEBELİ RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLER İÇEREN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Harun Emre SEYHAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 25.08.2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan :	Prof. Dr. Çetin YILDIZ	İmza:
Üye :	Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	İmza:
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN	İmza:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK RAPORU

Doküman No	FR-213
İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
Revizyon Tarihi	
Revizyon No	00
Sayfa No	1 / 2

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Harun Emre SEYHAN	
Numarası	230601040	
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı		
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	
Tez Başlığı	TÜREVLENEBİLİR BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN DEĞİŞKEN MERTEBELİ RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	%20	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	%28	% 30
Materyal ve Yöntem	%26	% 30
Araştırma Bulguları	%10	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	%14	% 20
TEZ (GENEL)	%19	% 25

30.08.2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Harun Emre SEYHAN

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN
------------	--------------	-----------

İçindekiler

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	6
2.1. Genel Kavramlar.....	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	10
3.1. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler	10
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	15
4.1. Değişken Mertebeden Kesirli İntegraller için Yeni İntegral Eşitsizlikler	15
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	31
Kaynakça	32
ÖZGEÇMİŞ	35

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜREVLENEBİLİR FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN DEĞİŞKEN MERTEBELİ RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Jüri: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

Bu tezde, farklı türden türevlenebilir konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral operatörü kullanılarak değişken mertebeden Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Birinci bölüm Giriş kısmında, konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teorisinin tarihinden kısaca bahsedilmiş olup, literatürde yapılan çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm Kuramsal Temeller kısmında, konveks fonksiyonlar için temel tanımlara ve kavramlara ayrıca bazı türevlenebilir konveks fonksiyon sınıflarına yer verilmiştir. Üçüncü bölüm Materyal ve Yöntem kısmında kullanılacak integral eşitsizlikler için detaylı bir literatür bilgisi sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise matematiksel analizin temel ispat yöntemleri takip edilerek ve Riemann-Liouville kesirli integral operatörü kullanılarak değişken mertebeden Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikler için bazı yeni tanım ve teoremler fonksiyonel analizin temel konseptleri yardımıyla elde edilmiştir.

2025, 36 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü, Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyon, m -konveks fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, h -konveks fonksiyon, Log-konveks fonksiyon, Eksponansiyel konveks fonksiyon, birinci anlamda s -konveks fonksiyon, ikinci anlamda s -konveks fonksiyon.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

NEW INTEGRAL INEQUALITIES WITH VARIABLE ORDER RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS FOR DIFFERENTIABLE CONVEX FUNCTIONS OF DIFFERENT KINDS

Jury: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Assist. Prof. Dr. Ebru KARADUMAN

In this thesis, new variable-order Hermite-Hadamard type integral inequalities have been obtained for different types of differentiable convex functions by using the Riemann-Liouville fractional integral operator. In the first section, the introduction, a brief overview of the history of convex functions and inequality theory is provided, along with information on related works in the literature. In the second section, the theoretical foundations, basic definitions, and concepts related to convex functions, as well as some classes of differentiable convex functions, are discussed. The third section, Material and Methods, presents a detailed literature review on the integral inequalities that will be used. In the fourth section, following the basic proof methods of mathematical analysis and using the Riemann-Liouville fractional integral operator, some new definitions and theorems for variable-order Hermite-Hadamard type integral inequalities are derived with the help of fundamental concepts of functional analysis.

2025, 36 pages

Key Words: Inequalities, Riemann-Liouville fractional integral operator, Hermite-Hadamard inequality, convex function, m -convex function, Quasi-convex function, h -convex function, Log-convex function, Exponential convex function, first sense s -convex function, second sense s -convex function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından sonuna kadar bu alanda çalışmamı destekleyen; birikimi, kişiliği, enerjisi ile beni sürekli motive eden, yaptığım çalışmalarda çok değerli katkıları bulunan, bilimsel düşünme ve çalışma mantığını her ayrıntısıyla bana sabırla öğreten saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak Akdemir'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Eğitim-Öğretim hayatım boyunca öğrendiğim her şeyde emeği olan tüm öğretmenlerime teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca desteklerini hiç eksik etmeyen, sevgi, güven ve sabırla hep yanımda olan canım anneme, babama, kardeşime ve varlığıyla bana güç veren, motive eden, her koşulda bana yardımcı olan hayat arkadaşım değerli eşim Ayşe SEYHAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos 2025

Harun Emre SEYHAN

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I^o	: I 'nın İçi
K_s^1	: Birinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$Q(I)$	: Godunova-Levin Fonksiyonu
$P(I)$	: P -Fonksiyon
$SX(h, I)$	: h -Konveks Fonksiyonların Sınıfı
Γ	: Gama Fonksiyonu
J^α	: α . Mertebeden Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
μ'	: μ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
μ''	: μ Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\beta(\mu_1, \mu_2)$	: μ_1, μ_2 Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu
$L_1[\theta_1, \theta_2]$	: $[\theta_1, \theta_2]$ Aralığında İntegrellenebilen Fonksiyonların Kümesi
$C([a, b])$	: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Aralığında Tanımlı Gerçek Değerli Sürekli Fonksiyonların Uzayı

1. GİRİŞ

Matematik, geçmişten günümüze pek çok uygarlığın ve bireyin katkılarıyla gelişmiş; doğayı ve yaşamı, insan zihninin oluşturduğu kavramlar ve semboller aracılığıyla anlama ve ifade etme çabası olarak tanımlanabilir. Kökeni, Antik Yunan'da "bilgi", "öğrenme" ve "bilim" anlamlarına gelen "Mathema" sözcüğüne dayanan bu terim, Türkçeye Fransızca "mathématique" kelimesi üzerinden geçmiştir. Aslında bir çok alt alan ve kavramlardan oluşan genel bir kelimedir.

Bu kavramlar arasında en temel ve önemli olanlardan biri fonksiyon kavramıdır. Fonksiyonlar, ilk kez 17. yüzyılda, matematiğin temel nesnelerinin geometrik eğriler olarak ele alındığı dönemde ortaya çıkmıştır. Neredeyse matematiğin tüm alt alanlarında yer bulan bu kavram, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi disiplinler arası birçok bilim dalında da geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bilimsel çalışmalarda bu denli merkezi bir role sahip olan fonksiyonların, tarihsel süreçte çok sayıda farklı türü geliştirilmiştir. Bu türler arasında, eşitsizlikler ve kesirli analiz gibi çeşitli matematiksel alt alanlarda önemli uygulamalara sahip olan konveks fonksiyonlar, hem teorik hem de uygulamalı matematikte özel bir yere sahiptir ve kendi içinde farklı türlere ayrılmaktadır.

Konveks fonksiyonların önemli roller üstlendiği alanlardan biri de matematiğin temel taşlarından biri olan eşitsizlik teorisidir. "Eşitsizlik alanı" ya da diğer adıyla "eşitsizlik teorisi", C. F. Gauss, L. Cauchy, L. Lagrange, K. Weierstrass ve P. I. Chebyshev gibi öncü matematikçilerin katkılarıyla, yaklaşık yöntemlerin kuramsal temellerinin atılması sürecinde gelişmeye başlamıştır. Özellikle 19. yüzyılın sonları ile 20. yüzyılın başlarında, bazıları klasikleşmiş, bazıları ise sınırlı ilgi gören çok sayıda eşitsizlik ortaya konmuştur.

Bu alanın sistematik bir yapıya kavuşmasında en önemli adımlardan biri, G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya tarafından kaleme alınan ve 1934 yılında yayımlanan "Inequalities" adlı eserin ortaya çıkmasıdır (Hardy et al., 1952). Söz konusu kitap, yalnızca eşitsizliklere odaklanan ilk kapsamlı çalışma olup, alanın bir formüller derlemesinden çıkarak kurumsal bir araştırma disiplini hâline gelmesini sağlamıştır. Eser, yalnızca kendi döneminin değil, aynı zamanda çağdaş matematiksel analiz çalışmalarının da temel referans kaynaklarından biri olmuştur.

Bu gelişmenin ardından, E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961 yılında

yayımlanan ve 1965 yılında ikinci baskısı yapılan "Inequalities" adlı eser, literatüre önemli katkılar sunmuştur (Beckenbach and Bellman, 1961). Aynı şekilde, D. S. Mitrinović'in 1970 yılında yayımladığı "Analytic Inequalities" adlı kitabı da alandaki araştırmalar açısından önemli bir dönüm noktası olmuştur (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Bu çalışmaların devamı niteliğinde, Mitrinović ve arkadaşları tarafından kaleme alınan "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinovic et al., 1993) ve B. G. Pachpatte'nin "Mathematical Inequalities" adlı eseri (Pachpatte, 2005) eşitsizlikler konusuna yeni ve özgün katkılar getirmiştir. Ayrıca, "Convex Functions" (Roberts and Varberg, 1974), "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (Mitrinovic et al., 2012) ve "Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach" (Niculescu and Persson, 2006) gibi kaynaklar da konveks fonksiyonlar bağlamında eşitsizlik teorisine önemli katkılar sunan temel eserler arasında yer almaktadır. Bunların yanı sıra, birçok araştırmacı tarafından kaleme alınan kitaplar, makaleler ve monograflar da bu alanın gelişimine ciddi katkılar sağlamıştır.

Konveks fonksiyon kavramı, eşitsizlik teorisiyle yakın bir ilişki içerisinde olup, bu alanda birçok araştırma gerçekleştirilmiş ve çeşitli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Günümüzde, konveks fonksiyonlara yönelik en önemli integral eşitsizliklerden biri Hadamard ya da literatürdeki adıyla Hermite-Hadamard integral eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik ilk olarak Hermite (1822–1901) tarafından, Ekim 1881'de Journal Mathesis dergisine ispatsız bir biçimde gönderilmiştir. Yaklaşık yirmi yıl sonra, 1905–1906 yılları arasında J. L. W. V. Jensen tarafından Jensen eşitsizliği ortaya konmuş ve bu iki önemli katkı, konveks fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalara ivme kazandırmıştır. Bu gelişmelerin ardından konveks fonksiyonlara ilişkin integral eşitsizlikler, günümüze kadar pek çok araştırmacının dikkatini çekmeye devam etmiştir.

1900'lü yılların başlarından itibaren, konveks fonksiyonlar üzerine çalışan araştırmacılar tarafından farklı türlerde konvekslik sınıfları tanımlanmış ve bu sınıfların çeşitli yapısal özellikleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Bu doğrultuda, konveks fonksiyonlara özgü çok sayıda integral eşitsizlik literatüre kazandırılmıştır. Beckenbach ve Bellman (Beckenbach and Bellman, 1961) ile Mitrinović (Mitrinovic and Vasic, 1970) gibi öncü isimler, bu konuyu kitaplarında ele alarak alana önemli katkılarda bulunmuşlardır. Konveks fonksiyonlara ilişkin eşitsizlikleri sistemli biçimde ele alan ilk kapsamlı kaynaklardan biri olan "Convex Functions: Inequalities", J. Pečarić tarafından kaleme alınmıştır (Pečarić and Beesack, 1987). Bununla birlikte, Roberts ve Varberg (Roberts and Varberg, 1973), Pečarić ve çalışma arkadaşları (Pečarić and Tong, 1992), Niculescu ve Persson (Niculescu and Persson, 2006) gibi

birçok araştırmacı, konveks fonksiyonlar ile ilgili çeşitli eşitsizlik türleri üzerine kapsamlı çalışmalar gerçekleştirmiştir. Bu çalışmaların önemli bir bölümü, özellikle integral eşitsizliklerinin geliştirilmesine odaklanmaktadır.

Yirminci yüzyıl matematiği, matematiksel eşitsizliklerin taşıdığı analitik gücün fark edilmesiyle birlikte pek çok yeni sonuç ve araştırma alanının ortaya çıkmasına olanak tanımıştır. Bu bağlamda eşitsizlikler teorisi, matematiksel analiz içerisinde merkezi bir konum kazanmış ve hızla gelişen, dinamik bir araştırma alanına dönüşmüştür. Son yıllarda bu teori, yalnızca matematik içinde değil, aynı zamanda farklı disiplinlerde de artan bir ilgiyle karşılanmaktadır. Özellikle matematiksel ekonomi, optimizasyon, oyun teorisi, kontrol teorisi ve matematiksel programlama gibi çeşitli alanlarda eşitsizliklerin uygulama alanı bulunduğu görülmektedir.

Literatürde geniş bir uygulama yelpazesine sahip olan birçok temel eşitsizlik yer almaktadır. Bunlar arasında Hölder, Hermite-Hadamard, Minkowski, Cauchy, Young, Grüss, Chebyshev, Abel ve Jensen gibi eşitsizlikler, eşitsizlik teorisinin güçlü temsilcileri olarak öne çıkmaktadır. Öte yandan, konveks fonksiyonların tanımı da doğrudan bir eşitsizlik aracılığıyla yapılmakta olup, bu fonksiyonların eşitsizliklerle olan sıkı ilişkisi sayesinde literatürde birçok yeni konvekslik türü tanımlanmış ve bu doğrultuda çeşitli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Kesirli analizin ortaya çıkışı 1695 yılında L'Hospital ile Leibniz arasındaki mektuplaşmada ortaya çıkmıştır. L'Hospital Leibniz'e bir diferansiyel denklemin türevinin mertebesinin $\frac{1}{2}$ olması durumunda nasıl hesaplanacağını sorması bu alanın başlangıcıdır. Leibniz bu soruya "Bu paradokslardan bir gün faydalı sonuçlar çıkarılacaktır." şeklinde cevap vermesi alanın keşfedilmeyi beklediğinin açık bir göstergesidir (Leibniz, 1859).

Leibniz'in tamsayı olmayan mertebeden türev fikrini ortaya atmasının ardından, 1738 yılında Euler bu alanda önemli bir adım atarak kesirli türev üzerine çalışmalar gerçekleştirmiştir (Miller and Ross, 1993). 1822 yılında Fourier, türevin tanımında integral kavramını kullanarak, keyfî mertebeden türeve ilişkin ilk tanımı ortaya koymuştur. Bu yaklaşım, günümüzde kesirli analiz olarak bilinen alanın temelini oluşturmuştur.

Kesirli analiz bağlamında ilk uygulama problemi olarak kabul edilen tautochrone problemi, 1826 yılında Abel tarafından ele alınmış ve bu problem kapsamında geliştirilen integral eşitsizlik, alanın ilerlemesinde önemli bir kilometre taşı olmuştur (Machado et al., 2011), (Meftah et al., 2023), (Miller and Ross, 1993). Bu süreci takiben, 1832 yılında Liouville, üstel fonksiyonların kesirli türevine dair bir formül geliştirmiş ve aynı zamanda, bugün kendi adıyla anılan Liouville tanımı çerçevesinde tamsayı olmayan mertebeden integ-

ral formunu ortaya koymuştur. Bu katkılar, kesirli analiz alanının matematiksel temellerini güçlendirmiştir.

Daha sonra Riemann, bu alanda önemli bir makale yayımlayarak, teoreminin şekillenmesine katkı sağlamıştır (Riemann, 1876). Takip eden yıllarda Grünwald ve Letnikov, Riemann-Liouville tanımından farklı bir yaklaşım benimseyerek, kesirli türevleri yakınsak seri çerçevesinde tanımlamışlardır (Grünwald, 1867), (Letnikov, 1868). Letnikov'un önerdiği tanım, belirli mertebe değerlerinde, Liouville'in kesirli türev tanımıyla ve uygun koşullar altında Riemann tarafından verilen versiyonla örtüşmektedir. Son olarak, 1892 yılında Hadamard, analitik fonksiyonların kesirli türevlerinin Taylor serileri yardımıyla gösterilebileceğini ifade etmiştir (Machado et al., 2011). Bu gelişmeler, kesirli analiz alanının sistematik bir kuramsal yapıya kavuşmasında önemli rol oynamıştır.

Kesirli analizin, klasik analiz karşısındaki temel dezavantajlarından biri, klasik türev kavramında yer alan geometrik yorumun bu alanda doğrudan karşılık bulamamasıdır. Klasik analizde türev, bir fonksiyonun grafiğine çizilen teğet doğrularla ilişkilendirilirken, kesirli analizde bu tür geometrik bir anlamlandırma yapılamamaktadır. Bu nedenle, kesirli türev kavramı uzun yıllar boyunca soyut bir yaklaşım olarak kalmış ve 1900'lü yıllara kadar bu alandaki gelişmeler oldukça sınırlı düzeyde ilerlemiştir.

Ancak 20. yüzyılın başından itibaren, kesirli analiz alanında kayda değer bir ivme kazanılmış ve özellikle uygulamalı bilimlerde karşılaşılan karmaşık problemlerin modellenmesinde bu kavrama olan ihtiyaç artmıştır. Bu doğrultuda, farklı kesirli türev tanımları geliştirilmiştir. Bunlar arasında en dikkat çekenlerinden biri, 1967 yılında Caputo tarafından ortaya konulan tanımdır (Caputo, 1967). Caputo, Riemann-Liouville tanımındaki önemli bir eksikliği gidererek, başlangıç koşullarına sahip diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin daha sağlıklı bir şekilde analiz edilmesine imkân tanımıştır.

Caputo türevi, Riemann-Liouville tanımına benzetmekle birlikte, işlem sıralaması bakımından önemli bir fark içerir. Caputo yaklaşımında, önce tam mertebeli türev alınmakta, ardından bu sonucun kesirli mertebeli integrali hesaplanmaktadır. Oysa Riemann-Liouville tanımında sıralama tersidir: Önce kesirli mertebeli integral alınır, ardından tam mertebeli türev hesaplanır. Bu temel fark, özellikle başlangıç koşullarının fiziksel anlamda yorumlanmasında Caputo türevini daha uygun hâle getirmiştir.

1974 yılının Haziran ayında, New Haven Üniversitesi'nde B. Ross'un öncülüğünde düzenlenen "First Conference of Fractional Calculus and Its Applications" başlıklı ilk uluslararası konferans, kesirli analiz alanında dönüm noktası olmuştur. Bu etkinlikte çok sayıda matematikçi bir araya gelerek, kesirli türev ve integral kavramlarının teorik yönleri ve uygu-

lamaları üzerine önemli tartışmalar gerçekleştirmiştir. Söz konusu konferans, kesirli analiz disiplininin bağımsız ve sistematik bir araştırma alanı olarak gelişmesine önemli katkı sağlamıştır.

Bu konferansın ardından, alanın gelişimine öncülük eden birçok bilim insanı tarafından temel eserler kaleme alınmıştır. Özellikle S. G. Samko, A. A. Kilbas ve O. I. Marichev; K. B. Oldham ve J. Spanier; K. S. Miller ve B. Ross gibi araştırmacılar, kesirli analizle ilgili kapsamlı kitaplar yazarak hem kuramsal hem de uygulamalı yönleriyle alana önemli katkılar sunmuşlardır.

Son yıllarda, kesirli analiz alanı birçok matematikçinin yoğun ilgisini çeken dinamik bir araştırma alanı hâline gelmiştir. Bu ilgi, özellikle tamsayı mertebeden türev ve integral operatörlerinin genelleştirilmiş biçimleri olan çeşitli yeni kesirli türev ve integral tanımlarının ortaya konulmasına neden olmuştur. Günümüzde, kesirli analiz yalnızca matematiksel analiz ve uygulamalı matematik bağlamında değil; fizik, kontrol teorisi, sistem modelleme, sinyal işleme, kodlama teorisi ve istatistik gibi birçok farklı disiplin içinde de etkili bir araç olarak kullanılmaktadır.

Bu çerçevede, Grünwald–Letnikov, Riemann–Liouville ve Caputo tanımlarına ek olarak; daha yakın dönemlerde geliştirilen Caputo–Fabrizio ve Atangana–Baleanu gibi yeni kesirli türev ve integral operatörleri de literatüre kazandırılmıştır. Bu operatörler, yalnızca teorik derinlik katmakla kalmayıp aynı zamanda çeşitli fiziksel ve mühendislik problemlerinin daha esnek biçimde modellenmesini mümkün kılmaktadır. Zaman içerisinde bu operatörler arasındaki yapısal ilişkiler detaylı şekilde ortaya konmuş ve hâlen her geçen gün yeni operatörler de tanıtılmaya devam etmektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmalarda kullanılan kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1 (Konveks Küme): N bir lineer uzay $M \subseteq N$ ve $\forall a, b \in M$ olmak üzere

$$M = \{k \in N : k = \theta a + (1 - \theta)b, \quad 0 \leq \theta \leq 1\} \subseteq M$$

oluyorsa M kümesi konveks bir kümedir denir.

Tanım 2.2 (J-konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir aralık olmak üzere $\forall a, b \in I$ için

$$\mu\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\mu(a) + \mu(b)}{2}$$

şartını sağlayan μ fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J -konveks fonksiyon denir (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Tanım 2.3 (Konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir aralık ve $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall a, b \in I$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \theta\mu(a) + (1 - \theta)\mu(b)$$

şartını sağlayan μ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić and Tong, 1992).

Tanım 2.4 (m -konveks fonksiyon): $\mu : [0, k] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $k > 0$ olsun. $\forall a, b \in [0, k], \theta \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$\mu(\theta a + m(1 - \theta)b) \leq \theta\mu(a) + m(1 - \theta)\mu(b)$$

şartı sağlanıyorsa μ fonksiyonuna m -konvekstir denir (Toader 1988).

Tanım 2.5 ((α, m) -konveks fonksiyon): $\mu : [0, k] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $k > 0$ olsun. $\forall a, b \in [0, k], \theta \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$\mu(\theta a + m(1 - \theta)b) \leq \theta^\alpha \mu(a) + m(1 - \theta^\alpha) \mu(b)$$

şartı sağlanıyorsa μ fonksiyonuna (α, m) -konvekstir denir (Miheşan, 1993).

Burada $(\alpha, m) \in (0, 0), (\alpha, 0), (1, 0), (1, m), (1, 1), (\alpha, 1)$ seçilirse, sırasıyla artan, α -starshaped (α -yıldızıl), starshaped (yıldızıl), m -konveks, konveks ve α -konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Tanım 2.6 (Birinci anlamda s -konveks fonksiyon): $m, n \geq 0, m^s + n^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$\mu(ma + nb) \leq m^s \mu(a) + n^s \mu(b)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa μ 'ye birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda, 1994).

Tanım 2.7 (İkinci anlamda s -konveks fonksiyon): $\theta \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere tüm $a, b \in [0, \infty)$ için $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \theta^s \mu(a) + (1 - \theta)^s \mu(b).$$

eşitsizliğini sağlıyorsa μ 'ye ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner, 1978).

Eğer Tanım 2.6 ve Tanım 2.7 'de $s = 1$ seçilirse Tanım 2.3 'deki bilinen konveks fonksiyon tanımı elde edilir (Hudzik and Maligranda, 1994).

Tanım 2.8 (Godunova-Levin fonksiyonu): $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonu $\forall a, b \in I$ ve $\theta \in (0, 1)$ için

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \frac{\mu(a)}{\theta} + \frac{\mu(b)}{1 - \theta}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa μ 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir and Pearce, 1998).

Tanım 2.9 (P-fonksiyonu): $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in I$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \mu(a) + \mu(b)$$

eşitsizliğini sağlayan μ 'ye P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir et al., 1995).

Tanım 2.10 (h -konveks fonksiyon): Negatif olmayan bir $h : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve yine negatif olmayan $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $a, b \in I, \theta \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq h(\theta)\mu(a) + h(1 - \theta)\mu(b)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa μ 'ye h -konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

$h(\theta) = \theta$ alınırsa, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$ alınırsa, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\theta) = 1$ alınırsa, $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\theta) = \theta^s$, $s \in (0, 1)$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olacağı açıktır.

Tanım 2.11 (log -konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ üzerinde bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in I$ ve her $\theta \in [0, 1]$ için

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq [\mu(a)]^\theta [\mu(b)]^{(1-\theta)}$$

ise μ 'ye log -konveks fonksiyon ve bu eşitsizlik ters çevrilirse μ 'ye log -konkav fonksiyon denir (Pečarić and Tong, 1992).

Tanım 2.12 (Quasi-konveks fonksiyon): $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $B \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall a, b \in B$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \max\{\mu(a), \mu(b)\}$$

ise μ 'ye quasi- konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce, 1998).

Aynı şartlar altında;

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) < \max\{\mu(a), \mu(b)\}$$

ise μ 'ye strictly quasi- konveks fonksiyon,

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \geq \max\{\mu(a), \mu(b)\}$$

ise μ 'ye quasi -konkav fonksiyon ve

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) > \max\{\mu(a), \mu(b)\}$$

ise μ 'ye strictly quasi -konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce, 1998).

Tanım 2.13 (Ekspansiyel konveks fonksiyon): $\mu : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $a, b \in K$, $\theta \in (0, 1)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken eğer

$$\mu(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \theta \frac{\mu(a)}{e^{\alpha a}} + (1 - \theta) \frac{\mu(b)}{e^{\alpha b}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa μ fonksiyonuna ekspansiyel konveks fonksiyon denir. $\alpha = 0$ alınırsa ekspansiyel konveks fonksiyon Tanım 2.3 'deki konveks fonksiyona dönüşür (Awan et al., 2018).

Tanım 2.14 (Gamma Fonksiyonu): $k > 0$ için

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt$$

olarak tanımlanır (Kannappan, 2009).

Ayrıca Araştırma Bulguları kısmında sıkça kullandığımız bu fonksiyonun bazı özelliklerinden bahsedecek olursak n pozitif tamsayı olmak üzere

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

şeklindedir (Kannappan, 2009).

Tanım 2.15 (Beta Fonksiyonu):

$$\beta(\mu_1, \mu_2) = \int_0^1 t^{\mu_1-1} (1-t)^{\mu_2-1} dt, \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipi Beta fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Dragomir et al., 1999).

Burada Gamma ve Beta fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\beta(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1 + \mu_2)}$$

şeklindedir (Kannappan, 2009).

Tanım 2.16 (Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegrali): $\mu \in L_1[a, b]$ olsun. $a \geq 0$ iken $\alpha > 0$ için Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\alpha} \mu(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mu(t) dt, & x > a, \\ J_{b-}^{\alpha} \mu(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \mu(t) dt, & x < b, \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ Gamma fonksiyonu ve $J_{a+}^0 \mu(x) = J_{b-}^0 \mu(x) = \mu(x)$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $\alpha = 1$ seçilirse kesirli integral klasik integrale indirgenir (Miller and Ross, 1993).

Tanım 2.17 (Riemann-Liouville Değişken Mertebeden Kesirli İntegrali): $C([a, b])$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı gerçekteğerli sürekli fonksiyonların uzayını göstermek üzere $g \in C([a, b])$, $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow (0, 1)$ fonksiyonu için değişken mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$J_{\theta_1}^{\mu(z)} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu(z))} \int_{\theta_1}^x (x-s)^{\mu(z)-1} g(s) ds$$

şeklindedir. (Valarmathi and Gowrisankar, 2023)

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kullanılan konveks fonksiyonlar ile ilgili literatürde bulunan Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizliklere yer verilmiştir.

3.1. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 3.1 $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık, $\theta_1, \theta_2 \in I$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olmak üzere $\mu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić and Tong, 1992).

Teorem 3.2 $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $[\theta_1, \theta_2]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[\mu\left(\frac{3\theta_1 + \theta_2}{4}\right) + \mu\left(\frac{\theta_1 + 3\theta_2}{4}\right) \right] \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} \right] \leq \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Tseng et al., 2010).

Burada ikinci satırdaki eşitsizlik literatürde Bullen eşitsizliği olarak da bilinmektedir.

Teorem 3.3 $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. $|\mu'|$, $[\theta_1, \theta_2]$ kapalı aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \leq \frac{\theta_2 - \theta_1}{8} (|\mu'(\theta_1)| + (|\mu'(\theta_2)|))$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir and Agarwal, 1998).

Teorem 3.4 $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. $|\mu'|$, $[\theta_1, \theta_2]$ kapalı aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk - \mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right| \leq \frac{\theta_2 - \theta_1}{8} (|\mu'(\theta_1)| + (|\mu'(\theta_2)|))$$

eşitsizliği geçerlidir (Kirmaci, 2004).

Teorem 3.5 $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ ve $\mu \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. μ , $[\theta_1, \theta_2]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\theta_2 - \theta_1)^\alpha} [J_{\theta_1^+}^\alpha \mu(\theta_2) + J_{\theta_2^-}^\alpha \mu(\theta_1)] \leq \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya et al., 2013).

Bu eşitsizlik Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için elde edilmiştir. Eğer $\alpha = 1$ seçilirse eşitsizlik Teorem 3.1 'deki Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.6 $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0, 1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ ve $\mu \in L_1[\theta_1 m, \theta_2]$ ise bu taktirde;

$$\frac{1}{m+1} \left[\int_{\theta_1}^{m\theta_2} \mu(k) dk + \frac{m\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 - m\theta_1} \int_{m\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right] \leq (m\theta_2 - \theta_1) \left(\frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2002).

Teorem 3.7 $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0, 1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ ve $\mu \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ ise bu taktirde;

$$\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu(k) + m\mu\left(\frac{k}{m}\right)}{2} dk \leq \frac{m+1}{4} \left[\frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} + m \frac{\mu\left(\frac{\theta_1}{m}\right) + \mu\left(\frac{\theta_2}{m}\right)}{2} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2002).

Teorem 3.8 $\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0, 1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \infty$ ve $\mu \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ ise bu taktirde;

$$\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq \min \left\{ \frac{\mu(\theta_1) + m\mu\left(\frac{\theta_2}{m}\right)}{2}, \frac{\mu(\theta_2) + m\mu\left(\frac{\theta_1}{m}\right)}{2} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Toader, 1993).

Teorem 3.9 $s \in (0, 1)$ olmak üzere $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ birinci anlamda s -konveks bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in [0, \infty)$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. $\mu \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ ise

$$\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq \frac{\mu(\theta_1) + s\mu(\theta_2)}{s+1}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir and Fitzpatrick, 1999).

Teorem 3.10 $s \in (0, 1)$ olmak üzere $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in [0, \infty)$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. $\mu \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ ise

$$2^{s-1} \mu \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{s+1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitsizliğin sağ tarafında olabilecek en iyi sabit $c = 1/(s+1)$ 'dir (Dragomir and Fitzpatrick, 1999).

Teorem 3.11 $\theta_1 < \theta_2$ olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ve $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (θ_1, θ_2) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayalım. Eğer $|\mu'|$, $[\theta_1, \theta_2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \leq \frac{(b-a)}{4} \max\{|\mu'(\theta_1)|, |\mu'(\theta_2)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ion, 2007).

Teorem 3.12 $\theta_1 < \theta_2$ olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ve $\mu : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (θ_1, θ_2) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayalım. Ayrıca $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p > 1$ olduğunu da varsayalım. Eğer $|\mu'|^{p/(p-1)}$, $[\theta_1, \theta_2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2(p+1)^{1/p}} \left[\max\{|\mu'(\theta_1)|^{p/(p-1)}, |\mu'(\theta_2)|^{p/(p-1)}\} \right]^{(p-1)/p}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ion, 2007).

Teorem 3.13 $\mu : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilir fonksiyon olmak üzere $\mu'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]; \theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. Eğer $|\mu''|$, $[\theta_1, \theta_2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{24} \left[\max \left\{ |\mu''(\theta_1)|, \left| \mu'' \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right| \right\} + \max \left\{ |\mu''(\theta_2)|, \left| \mu'' \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right| \right\} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca burada I kümesinin içi I° sembolüyle gösterilmektedir (Barani et al., 2011).

Teorem 3.14 $\mu : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. Eğer $|\mu'|$, $[\theta_1, \theta_2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk - \mu \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{8} \left[\max \left\{ \left| \mu' \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right|, |\mu'(\theta_2)| \right\} + \max \left\{ \left| \mu' \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right|, |\mu'(\theta_1)| \right\} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca burada I kümesinin içi I° sembolüyle gösterilmektedir (Alomari et al., 2009).

Teorem 3.15 $\mu : I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu I üzerinde log-konveks dönüşüm olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in I$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. Bu takdirde

$$\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\mu(k)\mu(\theta_1 + \theta_2 - k)} dk \leq \sqrt{\mu(\theta_1)\mu(\theta_2)}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir and Mond, 1998).

Teorem 3.16 $\mu : I \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu I üzerinde log-konveks dönüşüm olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in I$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln \mu(k) dk\right] \\ &\leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\mu(k)\mu(\theta_1 + \theta_2 - k)} dk \\ &\leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq L(\mu(\theta_1), \mu(\theta_2)) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $L(p, q)$, p ve q gerçekte sayıları için logaritmik ortalama olmak üzere

$$L(p, q) = \frac{p - q}{\ln p - \ln q}, \quad p \neq q \text{ ve } L(p, p) = p$$

şeklinde (Dragomir and Mond, 1998).

Teorem 3.17 $\mu : I \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu I üzerinde log-konveks dönüşüm olmak üzere $\theta_1, \theta_2 \in I$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) &\leq \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\mu(k)} dk\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq \frac{\mu(\theta_2) - \mu(\theta_1)}{\ln \mu(\theta_2) - \ln \mu(\theta_1)} \leq \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Sulaiman, 2011).

Teorem 3.18 $\mu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir eksponansiyel konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu(k)}{e^{\alpha k}} dk \leq \frac{(e^{-\alpha\theta_1})\mu(\theta_1) + (e^{-\alpha\theta_2})\mu(\theta_2)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.19 $\mu : I = [\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'da türevelenir olsun. Burada I° , I 'nin içini göstermek üzere eğer $|\mu'|$ eksponansiyel konveks fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$\left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{8} \left[\left| \frac{\mu'(\theta_1)}{e^{\alpha\theta_1}} \right| + \left| \frac{\mu'(\theta_2)}{e^{\alpha\theta_2}} \right| \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.20 $\mu : I = [\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'da türevelenir olsun. Burada I° , I 'nin içini göstermek üzere eğer $|\mu'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise bu taktirde $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{\mu'(\theta_1)}{e^{\alpha\theta_1}} \right|^{\frac{p}{p-1}} + \left| \frac{\mu'(\theta_2)}{e^{\alpha\theta_2}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right\} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.21 $\mu : I = [\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'da türevelenir olsun. Burada I° , I 'nin içini göstermek üzere eğer $|\mu'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise bu taktirde $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)}{2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \right| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{4} \left\{ \left| \frac{\mu'(\theta_1)}{e^{\alpha\theta_1}} \right|^q + \left| \frac{\mu'(\theta_2)}{e^{\alpha\theta_2}} \right|^q \right\} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Awan et al., 2018).

Teorem 3.22 $\mu \in SX(h, I)$, $\theta_1, \theta_2 \in I$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $\mu \in L_1([\theta_1, \theta_2])$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} \mu\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu(k) dk \leq [\mu(\theta_1) + \mu(\theta_2)] \int_0^1 \mu(\alpha) d\alpha$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya et al., 2008).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, değişken mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral yardımıyla farklı türden konveks fonksiyon sınıfları için yeni integral eşitsizlikler elde edilecektir.

4.1. Değişken Mertebeden Kesirli İntegraller için Yeni İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.1 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ konveks fonksiyon olmak üzere J değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \left[\frac{g(x)}{p(z)+1} + \frac{g(y)}{(p(z))^2 + p(z)} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.3'deki gibi konveks fonksiyon olup tanım ve eşitsizliğin her iki tarafı için integral kullanılırsa;

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \\ \int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1-t)y) dt \leq \int_0^1 t^{p(z)-1} tg(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)g(y) dt$$

olur. Burada $s = tx + (1-t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1-t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x-y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\int_y^x \left(\frac{s-y}{x-y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-y} \leq \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)g(y) dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)g(y) dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarparak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t) g(y) dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t) g(y) dt \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t) g(y) dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t) dt \end{aligned}$$

integral eşitsizliği elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \left[\frac{g(x)}{p(z)+1} + \frac{g(y)}{(p(z))^2 + p(z)} \right] \quad (4.1)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.1 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s) ds}{\sqrt{y-s}} \leq \left[\frac{2g(x) + 4g(y)}{3} \right]$$

elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s) ds \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

bulunur ve bu sonuç Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \left[\frac{zg(x) + g(y)}{z^2 + z} \right]$$

elde edilir.

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \left[\frac{z^2 g(x) + g(y)}{z^4 + z^2} \right]$$

elde edilir.

Teorem 4.2 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq R$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ m -konveks fonksiyon olmak üzere J değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(my-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(my) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \left[\frac{g(x)}{p(z)+1} + \frac{mg(y)}{(p(z))^2 + p(z)} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $m \in [0, 1]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.4'deki gibi m -konveks fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} g(tx + m(1-t)y) &\leq tg(x) + m(1-t)g(y) \\ \int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + m(1-t)y) dt &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} tg(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t)g(y) dt \end{aligned}$$

olur. Burada $s = tx + m(1-t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + m(1-t)y$, $t = \frac{s-my}{x-my}$, $(x-my)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeler yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int_{my}^x \left(\frac{s-my}{x-my} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-my} &\leq \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t)g(y) dt \\ \frac{1}{(my-x)^{p(z)}} \int_x^{my} (my-s)^{p(z)-1} g(s)ds &\leq \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t)g(y) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(my-x)^{p(z)}} \int_x^{my} (my-s)^{p(z)-1} g(s)ds \\ \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t)g(y) dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(my-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^{my} (my-s)^{p(z)-1} g(s) ds \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t) g(y) dt \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(my-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(my) & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t) g(y) dt \\ \frac{1}{(my-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(my) & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} m(1-t) dt \end{aligned}$$

integral eşitsizliği elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{1}{(my-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(my) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \left[\frac{g(x)}{p(z)+1} + \frac{mg(y)}{(p(z))^2 + p(z)} \right] \quad (4.2)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

Eğer (4.2) eşitsizliğinde $m = 1$ seçilirse Teorem 4.1'deki (4.1) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.2 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{my-x}} \int_x^{my} \frac{g(s) ds}{\sqrt{my-s}} \leq \left[\frac{2g(x) + 4mg(y)}{3} \right]$$

şeklinde bulunur. Ayrıca burada $m = 1$ seçilirse sonuç 4.1'in 1. eşitsizliği elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(my-x)} \int_x^{my} g(s) ds \leq \left[\frac{g(x) + mg(y)}{2} \right]$$

şeklinde bulunur. Ayrıca burada $m = 1$ seçilirse sonuç 4.1'in 2. eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(my-x)^z} J_x^z g(my) \leq \left[\frac{zg(x) + mg(y)}{z^2 + z} \right]$$

şeklinde bulunur. Ayrıca burada $m = 1$ seçilirse sonuç 4.1'in 3. eşitsizliği elde edilir

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(my - x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(my) \leq \left[\frac{z^2 g(x) + mg(y)}{z^4 + z^2} \right]$$

şeklinde bulunur. Ayrıca burada $m = 1$ seçilirse sonuç 4.1'in 4. eşitsizliği elde edilir

Teorem 4.3 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq R$ aralığında tanımlı gerçekteğerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ 1. anlamda s -konveks fonksiyon olmak üzere J değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y - x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(x) - g(y)}{\Gamma(p(z))(p(z) + s)} + \frac{1}{\Gamma(p(z) + 1)}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $s \in (0, 1]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.6'deki gibi 1. anlamda s -konveks fonksiyon olmak üzere;

$$g(tx + (1 - t)y) \leq t^s g(x) + (1 - t^s)g(y)$$

$$\int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1 - t)y) dt \leq \int_0^1 t^{p(z)-1} t^s g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1 - t^s) g(y) dt$$

olur. Burada $s = tx + (1 - t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1 - t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x - y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeler yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\int_y^x \left(\frac{s - y}{x - y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x - y} \leq \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1 - t^s) g(y) dt$$

$$\frac{1}{(y - x)^{p(z)}} \int_x^y (y - s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1 - t^s) g(y) dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y - x)^{p(z)}} \int_x^y (y - s)^{p(z)-1} g(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1 - t^s) g(y) dt$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t^s) g(y) dt \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t^s) g(y) dt \\ & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)+s-1} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} dt - \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)+s-1} dt \end{aligned}$$

integral eşitsizliği elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))(p(z)+s)} g(x) + \frac{1}{\Gamma(p(z)+1)} - \frac{1}{\Gamma(p(z))(p(z)+s)} g(y) \\ & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(x) - g(y)}{\Gamma(p(z))(p(z)+s)} + \frac{1}{\Gamma(p(z)+1)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.3 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s) ds}{\sqrt{y-s}} \leq \left[\frac{g(x) - g(y) + 2s + 1}{s + \frac{1}{2}} \right]$$

elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s) ds \leq \left[\frac{g(x) - g(y) + s + 1}{s + 1} \right]$$

elde edilir.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \left[\frac{g(x) - g(y) + 1 + \frac{s}{z}}{z + s} \right]$$

elde edilir.

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \left[\frac{g(x) - g(y) + 1 + \frac{s}{z^2}}{z^2 + s} \right]$$

elde edilir.

Teorem 4.4 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ 2. anlamda s -konveks fonksiyon olmak üzere J değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma p(z)} \left[\frac{g(x)}{p(z) + s} + \frac{g(y)}{(\beta(p(z), s+1))} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $s \in (0, 1]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonu, β ise beta fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.7'deki gibi 2. anlamda s -konveks fonksiyon olmak üzere;

$$g(tx + (1-t)y) \leq t^s g(x) + (1-t)^s g(y)$$

$$\int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1-t)y) dt \leq \int_0^1 t^{p(z)-1} t^s g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)^s g(y) dt$$

olur. Burada $s = tx + (1-t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1-t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x-y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\int_y^x \left(\frac{s-y}{x-y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-y} \leq \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)^s g(y) dt$$

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)^s g(y) dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılarak;

$$\frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)+s-1} g(x) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)^s g(y) dt$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)+s-1} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)^s dt \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)+s-1} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t)^s dt$$

integral eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma p(z)} \left[\frac{g(x)}{p(z)+s} + \frac{g(y)}{(\beta(p(z), s+1))} \right] \quad (4.4)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.4 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s) ds}{\sqrt{y-s}} \leq \left[\frac{g(x)}{s + \frac{1}{2}} + \frac{g(y)}{\beta(\frac{1}{2}, s+1)} \right]$$

elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s) ds \leq \left[\frac{g(x)}{s+1} + \frac{g(y)}{\beta(1, s+1)} \right]$$

elde edilir.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \left[\frac{g(x)}{z+s} + \frac{g(y)}{\beta(z, s+1)} \right]$$

elde edilir.

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \left[\frac{g(x)}{z^2+s} + \frac{g(y)}{\beta(z^2, s+1)} \right]$$

elde edilir.

Teorem 4.5 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq R$ aralığında tanımlı gerçekteğerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ Quasi-konveks fonksiyon olmak üzere değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z)+1)} \sup[g(x), g(y)]$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.12'deki gibi Quasi-konveks fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &\leq \sup[g(x), g(y)] \\ \int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1-t)y) dt &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \sup[g(x), g(y)] dt \end{aligned}$$

olur. Burada $s = tx + (1-t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1-t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x-y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int_y^x \left(\frac{s-y}{x-y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-y} &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \sup[g(x), g(y)] dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \sup[g(x), g(y)] dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \sup[g(x), g(y)] dt$$

bulunur. Buradan;

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \sup[g(x), g(y)] dt$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) &\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \sup[g(x), g(y)] dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) &\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \sup[g(x), g(y)] \int_0^1 t^{p(z)-1} dt \end{aligned}$$

integral eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z)+1)} \sup[g(x), g(y)] \quad (4.5)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.5 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s)ds}{\sqrt{y-s}} \leq 2 \sup[g(x), g(y)]$$

elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s)ds \leq \sup[g(x), g(y)]$$

elde edilir.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z+1)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \sup[g(x), g(y)]$$

elde edilir.

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2+1)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \sup[g(x), g(y)]$$

elde edilir.

Teorem 4.6 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq R$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ log-konveks fonksiyon olmak üzere J değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(y)}{\Gamma(p(z)+1)} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^{p(z)}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.11'deki gibi $\log$ -konveks fonksiyon olmak üzere;

$$g(tx + (1-t)y) \leq [g(x)]^t [g(y)]^{1-t}$$

$$\int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1-t)y) dt \leq \int_0^1 t^{p(z)-1} [g(x)]^t [g(y)]^{1-t} dt$$

olur. Burada $s = tx + (1-t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1-t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x-y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\int_y^x \left(\frac{s-y}{x-y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-y} \leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^t g(y) dt$$

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^t dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılarak;

$$\frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^t dt$$

bulunur. Buradan;

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s) ds \leq \frac{g(y)}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^t dt$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(y)}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^t dt$$

integral eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(y)}{\Gamma(p(z))} \frac{\left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^{p(z)}}{p(z)}$$

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(y)}{\Gamma(p(z)+1)} \left[\frac{g(x)}{g(y)} \right]^{p(z)} \quad (4.6)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar in-

celenecektir.

Sonuç 4.6 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s)ds}{\sqrt{y-s}} \leq 2\sqrt{g(x)g(y)}$$

elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s)ds \leq g(x)$$

elde edilir.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z+1)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \left[[g(x)]^z [g(y)]^{1-z} \right]$$

elde edilir.

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2+1)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \left[[g(x)]^{z^2} [g(y)]^{1-z^2} \right]$$

elde edilir.

Teorem 4.7 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq R$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ exponansiyel konveks fonksiyon olmak üzere değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(x)}{e^{ax} \Gamma(p(z))(p(z)+1)} + \frac{g(y)}{e^{ay} \Gamma(p(z))((p(z))^2 + p(z))}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g Tanım 2.13'deki gibi eksponansiyel konveks fonksiyon olup tanım ve eşitsizliğin her iki tarafı için integral kullanılırsa;

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &\leq \frac{tg(x)}{e^{ax}} + \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} \\ \int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1-t)y) dt &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{tg(x)}{e^{ax}} dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} dt \end{aligned}$$

olur. Burada $s = tx + (1 - t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1 - t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x - y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int_y^x \left(\frac{s-y}{x-y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-y} &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{tg(x)}{e^{ax}} dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s)ds &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{tg(x)}{e^{ax}} dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s)ds \\ \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{tg(x)}{e^{ax}} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s)ds \\ \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{tg(x)}{e^{ax}} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} dt \end{aligned}$$

şeklinde dzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) &\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{tg(x)}{e^{ax}} dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} \frac{(1-t)g(y)}{e^{ay}} dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) &\leq \frac{g(x)}{\Gamma(p(z))e^{ax}} \int_0^1 t^{p(z)-1} t dt + \frac{g(y)}{\Gamma(p(z))e^{ay}} \int_0^1 t^{p(z)-1} (1-t) dt \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{g(x)}{e^{ax}\Gamma(p(z))(p(z)+1)} + \frac{g(y)}{e^{ay}\Gamma(p(z))((p(z))^2 + p(z))} \quad (4.7)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.7 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s)ds}{\sqrt{y-s}} \leq \left[\frac{2g(x)}{3e^{ax}} + \frac{4g(y)}{3e^{ay}} \right]$$

elde edilir.

2) Eğer $p(z) = 1$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s) ds \leq \frac{g(x)}{2e^{ax}} + \frac{g(y)}{2e^{ay}}$$

elde edilir.

3) Eğer $p(z) = z$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \frac{1}{(z^2+z)} \left[\frac{zg(x)}{e^{ax}} + \frac{g(y)}{e^{ay}} \right]$$

elde edilir.

4) Eğer $p(z) = z^2$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \frac{1}{(z^4+z^2)} \left[\frac{z^2 g(x)}{e^{ax}} + \frac{g(y)}{e^{ay}} \right]$$

elde edilir.

Teorem 4.8 $C([a, b])$, $[a, b] \subseteq R$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $p : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ herhangi bir fonksiyon ve $g \in C([a, b])$ h -konveks fonksiyon olmak üzere değişken mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t) dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t) dt$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $z \in [a, b]$, $t \in [0, 1]$, $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $x < y$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

İspat g , Tanım 2.10'deki gibi h -konveks fonksiyon olup tanım ve eşitsizliğin her iki tarafı için integral kullanılırsa;

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &\leq h(t)g(x) + h(1-t)g(y) \\ \int_0^1 t^{p(z)-1} g(tx + (1-t)y) dt &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)g(x) dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)g(y) dt \end{aligned}$$

olur. Burada $s = tx + (1-t)y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$s = tx + (1-t)y$, $t = \frac{s-y}{x-y}$, $(x-y)dt = ds$ elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int_y^x \left(\frac{s-y}{x-y} \right)^{p(z)-1} \frac{g(s)ds}{x-y} &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)g(x)dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)g(y)dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s)ds &\leq \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)g(x)dt + \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)g(y)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{\Gamma(p(z))}$ ile çarpılarak;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s)ds \\ \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)g(x)dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)g(y)dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_x^y (y-s)^{p(z)-1} g(s)ds \\ \leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)g(x)dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)g(y)dt \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenip sol tarafa Riemann-Liouville kesirli integralinin tanımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) &\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)g(x)dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)g(y)dt \\ \frac{1}{(y-x)^{p(z)}} J_x^{p(z)} g(y) &\leq \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(x) \int_0^1 t^{p(z)-1} h(t)dt + \frac{1}{\Gamma(p(z))} g(y) \int_0^1 t^{p(z)-1} h(1-t)dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Şimdi bazı özel durumlar için ortaya çıkan sonuçlar incelenecektir.

Sonuç 4.8 1) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$, $h(t) = t$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s)ds}{\sqrt{y-s}} \leq \left[\frac{2g(x) + 4g(y)}{3} \right]$$

olup Sonuç 4.1'in 1) ifadesindeki sonuçla birebir aynıdır.

2) Eğer $p(z) = \frac{1}{2}$, $h(t) = t^s$ seçilirse;

$$\frac{1}{\sqrt{y-x}} \int_x^y \frac{g(s)ds}{\sqrt{y-s}} \leq \left[\frac{2g(x)}{2s+1} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)g(y)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} \right]$$

elde edilir.

3) Eğer $p(z) = 1$, $h(t) = t$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s) ds \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

bulunur ve bu sonuç Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır.

4) Eğer $p(z) = 1$, $h(t) = t^s$ seçilirse;

$$\frac{1}{(y-x)} \int_x^y g(s) ds \leq \frac{g(x) + g(y)}{s+1}$$

bulunur ve bu sonuç Teorem 3.10'daki eşitsizliğin sağ tarafıdır.

5) Eğer $p(z) = z$, $h(t) = t$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \left[\frac{zg(x) + g(y)}{z^2 + z} \right]$$

olup Sonuç 4.1'in 3) ifadesindeki sonuçla birebir aynıdır.

6) Eğer $p(z) = z$, $h(t) = t^s$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z)}{(y-x)^z} J_x^z g(y) \leq \left[\frac{g(x)}{s+z} + g(y)\beta(z, s+1) \right]$$

elde edilir.

7) Eğer $p(z) = z^2$, $h(t) = t$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \left[\frac{z^2 g(x) + g(y)}{z^4 + z^2} \right]$$

olup Sonuç 4.1'in 4) ifadesindeki sonuçla birebir aynıdır.

8) Eğer $p(z) = z^2$, $h(t) = t^s$ seçilirse;

$$\frac{\Gamma(z^2)}{(y-x)^{z^2}} J_x^{z^2} g(y) \leq \left[\frac{g(x)}{s+z^2} + g(y)\beta(z^2, s+1) \right]$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teorisine ilişkin bazı temel tanımlar ve integral eşitsizlikleri içeren önemli teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca çalışmanın Araştırma Bulguları kısmında değişken mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral kullanılarak türevlenebilen farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Değişken mertebeden kesirli operatörler, klasik kesirli operatörlerden farklı olarak türev ve integral mertebesinin sabit olmayıp zamana, uzaya veya başka değişkenlere bağlı olduğu bir matematiksel analiz alanıdır. Klasik türev ve integraller tam sayı derecelerine sahiptirler. Kesirli operatörlerde bu işlemler gerçek sayılı ya da kompleks sayılı mertebelerle tanımlanır. Ancak değişken mertebeli kesirli operatörlerde türev ya da integral mertebesi sabit değil bir fonksiyon olarak ifade edilir.

Sabit mertebeli kesirli operatörler, çeşitli bilimsel ve mühendislik problemlerini ele alabilse de türev ve integral mertebesinin bağımlı ya da bağımsız değişkenlere bağlı olduğu bazı önemli fiziksel olay sınıflarını yeterince temsil edemez. Böyle durumlarda, kesirli mertebenin değişkenliği kritik bir rol oynar. Bu nedenle, sabit mertebeli kesirli operatörlere duyulan ilgi zamanla değişken mertebeye kaymıştır.

Farklı konveks fonksiyon sınıfları üzerine çalışmalar yapan araştırmacılar bu tez çalışmasında kullanılan operatörü veya literatürde yer alan diğer operatörleri değişken mertebeye genelleyerek başka konveks fonksiyonlara uygulayabilirler. Böylece değişken mertebeden yeni integral eşitsizlikler elde edebilirler.

Kaynakça

- Alomari, M., Darus, M., and Dragomir, S. S. (2009). Inequalities of hermite-hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex. *Research report collection*, 12(Supp).
- Awan, M. U., Noor, M. A., and Noor, K. I. (2018). Hermite-hadamard inequalities for exponentially convex functions. *Appl. Math. Inf. Sci*, 12(2):405–409.
- Barani, A., Barani, S., and Dragomir, S. (2011). Refinements of hermite–hadamard type inequality for functions whose second derivatives absolute values are quasi convex. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 14:1–9.
- Beckenbach, E. and Bellman, R. (1961). An introduction to inequalities. Technical report, Mathematical Association of America Washington, DC.
- Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, 23(37):13–20.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical journal international*, 13(5):529–539.
- Dragomir, S. and Agarwal, R. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied mathematics letters*, 11(5):91–95.
- Dragomir, S., Agarwal, R., and Barnett, N. (1999). Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMIA research report collection*, 2(3).
- Dragomir, S. and Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard inequalities for s -convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32(4):687–696.
- Dragomir, S. and Mond, B. (1998). Integral inequalities of hadamard type for log-convex functions. *Demonstratio Mathematica*, 31(2):355–364.

- Dragomir, S. and Pearce, C. (1998). Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 57(3):377–385.
- Dragomir, S. S. (2002). On some new inequalities of hermite-hadamard type for m -convex functions. *Tamkang journal of mathematics*, 33(1):45–56.
- Dragomir, S. S., Pecaric, J., and Persson, L.-E. (1995). Some inequalities of hadamard type. *Soochow journal of mathematics*, 21(3):335–341.
- Grünwald, A. K. (1867). Ueber begrenzte derivationen und deren anwendung. *Z. Math. Phys*, 12(6):441–480.
- Hardy, G., Littlewood, J., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.
- Hudzik, H. and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes mathematicae*, 48(1):100–111.
- Ion, D. A. (2007). Some estimates on the hermite-hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 34:82–87.
- Kannappan, P. (2009). *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Science & Business Media.
- Kirmaci, U. S. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Applied mathematics and computation*, 147(1):137–146.
- Leibniz, G. W. (1859). *Mathematische Schriften: aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover. Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherrn von Tschirnhaus*, volume 1. Asher.
- Letnikov, A. (1868). : Theory of differentiation with an arbitrary index. *math. sb.* 3, 1-66.
- Machado, J. T., Kiryakova, V., and Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 16(3):1140–1153.

- Meftah, B., Lakhdari, A., Saleh, W., and Kiliçman, A. (2023). Some new fractal milne-type integral inequalities via generalized convexity with applications. *Fractal and Fractional*, 7(2):166.
- Mihesan, V. (1993). A generalization of the convexity, seminar on functional equations, approx. *Convex, Cluj-Napoca*, 1.
- Miller, K. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley and Sons, Inc., New York*.
- Mitrinovic, D., Pecaric, J., and Fink, A. (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecht.
- Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., and Fink, A. M. (2012). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, volume 53. Springer Science & Business Media.
- Mitrinovic, D. S. and Vasic, P. M. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.
- Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer.
- Pachpatte, B. G. (2005). *Mathematical inequalities*. Elsevier.
- Pečarić, J. and Beesack, P. (1987). On Knopp's inequality for convex functions. *Canadian Mathematical Bulletin*, 30(3):267–272.
- Pečarić, J. and Tong, Y. (1992). *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*. Academic press.
- Riemann, B. (1876). Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation. *Gesammelte Werke*, 62(1876).
- Roberts, A. and Varberg, D. (1973). *Convex functions* academic press. *New York*, 62.
- Roberts, A. W. and Varberg, D. E. (1974). *Convex Functions: Convex Functions*, volume 57. Academic Press.

- Sarikaya, M. Z., Saglam, A., and Yildirim, H. (2008). On some hadamard-type inequalities for h-convex functions. *J. Math. Inequal*, 2(3):335–341.
- Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H., and Başak, N. (2013). Hermite–hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9-10):2403–2407.
- Sulaiman, W. T. (2011). Refinements to hadamard’s inequality for log-convex functions. *Applied Mathematics*, 2(7):899–903.
- Toader, G. (1993). Some inequalities for m-convex functions. *Stud. Univ. Babes–Bolyai, Math*, 38(1):21–28.
- Tseng, K.-L., Hwang, S.-R., and Dragomir, S. S. (2010). Fejér-type inequalities (i). *Journal of Inequalities and Applications*, 2010:1–7.
- Valarmathi, R. and Gowrisankar, A. (2023). On the variable order fractional calculus of fractal interpolation functions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 26(3):1273–1293.
- Varošanec, S. (2007). On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1):303–311.

ÖZGEÇMİŞ

Harun Emre SEYHAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Eğitim

- Yüksek Lisans
 - Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi (2023-2025)
- Lisans
 - Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2008-2012)
- Lise
 - Aydın Söke Yavuz Selim Lisesi (2005-2007)

Harun Emre SEYHAN