



**TÜREVLERİ FARKLI TÜRDEN KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-
HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI**

Abdullah YARADILMIŞ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

2016

Her hakkı saklıdır

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**TÜREVLERİ FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER
VE UYGULAMALARI**

Abdullah YARADILMIŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI
2016

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAY FORMU

Türevleri Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler
ve Uygulamaları

Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Abdullah YARADILMIŞ tarafından hazırlanan
bu çalışma, 22/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve
Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

İmza : 

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TÜREVLERİ FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Abdullah YARADILMIŞ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

Bu tezde, ikinci mertebeden ve genel olarak n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar incelenerek yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde konveks fonksiyonlar ve Eşitsizlik Teorisi'nin tarihsel gelişimini içermekte olup literatürde mevcut çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan konveks fonksiyon kavramları, bunlar arasındaki hiyerarşi ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde literatürde mevcut ikinci mertebeden ve genel olarak n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ile ilgili bazı integral eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise ikinci mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlar için yeni bir lemma elde edilmiş olup bu lemma kullanarak bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiş ve bu eşitsizliklerden elde edilen sonuçlarla da uygulamalar verilmiştir. Ayrıca n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için literatürde mevcut bir lemmaya bazı konvekslik sınıfları uygulanarak yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2016, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği ve konveks fonksiyonlar.

ABSTRACT

Master Thesis

HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS FOR FUNCTIONS WHOSE DERIVATIVES ARE IN DIFFERENT TYPES OF CONVEXITY

Abdullah YARADILMIŞ

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

In this thesis, new integral inequalities were gathered by investigating second degree and n^{th} degree, in general, differentiable functions. The first part was introductory part which included the historical developments of convex functions and Inequality Theory, as well as, information related to studies in literature. In the second part, concepts of convex functions used in the thesis, the hierarchy between them, and some theorems were given. In the third part, some integral inequalities related to second degree and n^{th} degree, in general, differentiable functions in literature were given. In the fourth part, on the other hand, a new lemma for second degree differentiable convex functions was found and some new inequalities were gathered by using this lemma and some applications were given with the results gathered from these inequalities. In addition, new inequalities were gathered by applying some convex function classes to a lemma in the literature for n^{th} degree differentiable functions. It was observed that the obtained results were supported by the literature.

2016, 69 pages

Keywords: Hermite-Hadamard type inequalities, Hölder inequality, Power-mean inequality and convex functions.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimi boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, çalışmalarımnda bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden, çalışmalarımın tamamlanması için her türlü şartı sağlayan saygıdeğer danışman hocam;

Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve sevgili eşim Pınar YARADILMIŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde ve önceki öğrenimlerimde emeği geçen çok değerli hocalarıma teşekkürü bir borç bilir, ayrıca yüksek lisans eğitimim sürecinde bana desteklerinden dolayı arkadaşım sayın Faruk SAYKAL'a teşekkür ederim.

Abdullah YARADILMIŞ

Ocak 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	6
2.1. Genel Kavramlar	6
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi.....	20
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	24
3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler	24
3.2. İkinci Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler.....	26
3.3. n . Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler.....	28
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	30
4.1. İkinci Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Bazı İntegral Eşitsizlikler	30
4.2. n . Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Bazı İntegral Eşitsizlikler.....	46
4.3. Elde Edilen Teoremlere Dair Bazı Uygulamalar	62
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	66
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	70

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{C}(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$D(f)$	f Fonksiyonunun Tanım Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$J(I)$	Jensen-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$JQC(I)$	Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m(b)$	m –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_n(b)$	n –konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log –Konveks Fonksiyonlar sınıfı
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\mathcal{L}_r(x, y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalaması
$M_r(x, y; \lambda)$	Kuvvet Ortalaması
Max	Maksimum
Min	Minimum
$P(I)$	P –Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h, I)$	h –Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h –Konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme	6
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	7
Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x $)	8
Şekil 2.4. Konveks fonksiyon	9
Şekil 2.5. Doğrusal m –Konveks fonksiyonlar	12
Şekil 2.6. İkinci dereceden m –Konveks polinom fonksiyonlar.....	12
Şekil 2.7. Godunova-Levin, P –fonksiyon, Quasi-Konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve Log –Konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi.....	21
Şekil 2.8. Konveks fonksiyon, m –Konveks fonksiyon, n –Konveks fonksiyon ve Starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi	22

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. “Konvekslik” kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard’ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve matematik bir bakıma karşılaştırma olduğundan Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi’ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar ve çok sayıda makaleler yayınlamışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır (Beckenbach and Bellman 1961). Bunu Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği “Analytic Inequalities” isimli kitabı takip eder (Mitrinović 1970). Bu temel kaynakların yanı sıra “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” (Mitrinović *et al.* 1991), “Classical and New Inequalities in Analysis” (Mitrinović *et al.* 1993), “Mathematical Inequalities” (Pachpatte 2005) ve “Convex Functions and Their Applications” (Niculescu and Persson 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen

Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000).

Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine yoğun çalışan diğer matematikçiler M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, R. Agarwal, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg, N.S. Barnett, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, P. Cerone, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M. Darus, M.K. Bakula, J. Pečarić, E. Set, A.O. Akdemir, H. Kavurmacı Önalın, M. Avcı Ardıç, M. Gürbüz, A. Ekinci, Ç. Yıldız, M. Tunç şeklinde sıralanabilir. Bu konu üzerine yazılan birçok kitabın dışında literatürde doktora ve yüksek lisans çalışmalarına da rastlanmaktadır.

“Inequalities and Applications” başlıklı doktora tezinde integral eşitsizlikleri üzerine uygulamalar yazılmış ve ortalamalar üzerine farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanında Cauchy-Schwartz, Bessel ve Jensen eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır (Rooın 2003).

“Solving Methods of Linear Functional Equation and Stability of t –Convex Functions” başlıklı doktora tezinde eşitsizlikler yardımıyla lineer fonksiyonel denklemlerin çözüm yöntemleri incelenmiş, ve t –konveks fonksiyonların kararlılığı incelenirken yine bazı eşitsizlikler kullanılmış ve yenileri elde edilmiştir (Hazy 2005).

“Inequalities and Applications” başlıklı yüksek lisans tezinde ortalamalar üzerine yeni eşitsizlikler elde edilmiş, yeni fonksiyon sınıfları ortaya atılmıştır (Bagdasar 2006).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard

tipli ve diğ er bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan m – konveks, (α, m) – konveks, $\log$ – konveks, $quasi$ – konveks, s – konveks, r – konveks ve h –konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

“Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Tunç 2011).

“Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s –Convex, $Quasi$ –Convex and r –Convex Mappings and Applications” başlıklı doktora tezinde s –konveks, $quasi$ –konveks ve r –konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

“Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” başlıklı yüksek lisans tezinde $quasi$ –konveks fonksiyonlar için yapılan geniş bir literatür taramasının yanı sıra, $quasi$ – konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için sonuçlar ve bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar verilmiştir (Yıldız 2011).

“Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; konveks ve konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir(Kavurmacı 2012).

“Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks

fonksiyonlar kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve literatürde bulunan bazı konveks fonksiyonların çarpımı üzerine integral eşitsizlikleri elde edilmiştir (Gülbüz 2013).

“ n . mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde Fejér eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler ispatlanmış, g ' nin özel değerleri için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için Lemmalar yazılmış ve bu Lemmalar kullanılarak yeni genelleştirmeler yapılmıştır(Yıldız 2014).

Neden Matematiksel Eşitsizlikler?

1978 yılında Richard Bellman, Almanya’da 2. Uluslararası Matematik Eşitsizlikler Konferansı’nda bu soruya şu şekilde cevap vermiştir. Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1. Pratik Nedenler
 2. Teorik Nedenler
 3. Estetik Nedenler
- dir.

Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Bu çalışmada, farklı türden konveks fonksiyonlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi verilmiştir. Üçüncü

bölümünde literatürde mevcut ikinci mertebeden ve n . mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için bazı integral eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümünde ilk olarak ikinci mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni lemma kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmiş, daha sonra n . mertebeden türevlenebilen konveks fonksiyonlarla ilgili verilen lemmada integraller için mutlak değer özelliği, Hölder, Power-mean eşitsizlikleri kullanılarak teoremler ispatlanmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan bir çoğunun literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.



2. KURAMSAL TEMELLER

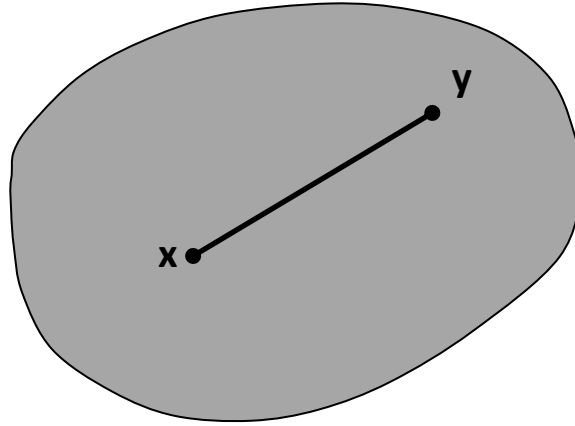
2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

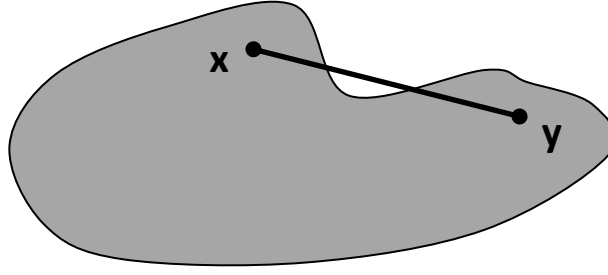
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Örneğin aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir.

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J –Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvektir denir (Pečarić *et al.* 1992).

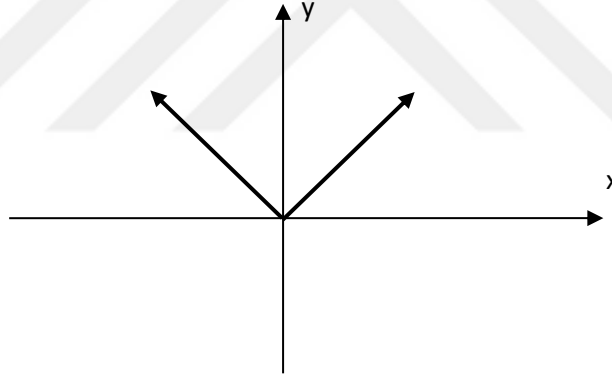
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J –konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

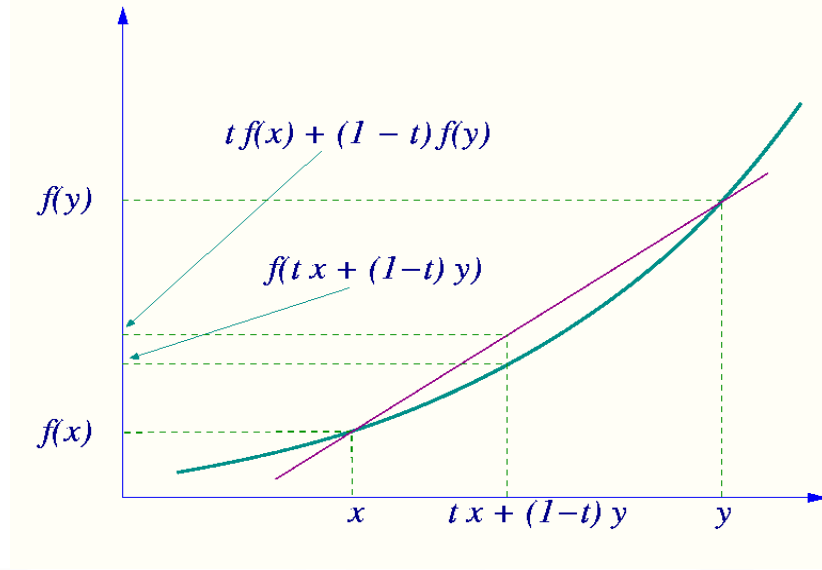
olmasıdır (Mitrinović 1970).

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $tx + (1-t)y$ noktasının f fonksiyonunu altındaki görüntüsü, aynı t değeri için $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarının lineer bileşiminden küçük veya eşit kalıyorsa fonksiyon konvektir denir. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. Konkav fonksiyon için kiriş f fonksiyonunun grafiğinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.2)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts and Varberg 1973)

Tanım 2.1.5. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. f , (a, b) aralığında sürekli ve
- b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.6. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
 - (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
 - (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
 - (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır
- denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.2. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
 - (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
 - (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
 - (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.
- (Adams and Essex 2010).

Aşağıdaki konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3. f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.3. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I° 'de artandır (kesin artandır) (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.4. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.7. (m – Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

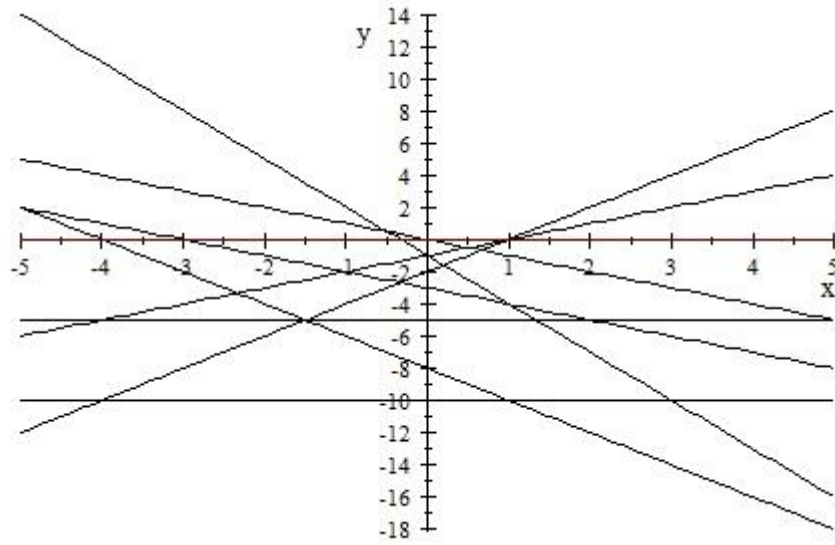
$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir (Toader 1984).

– f fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1. $r > 0$, $f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in [0, r]$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindeki ($a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) doğrusal fonksiyonlar $b \leq 0$ için m – konveks fonksiyondur (Gürbüz 2013).

Doğrusal m –konveks fonksiyonlar,

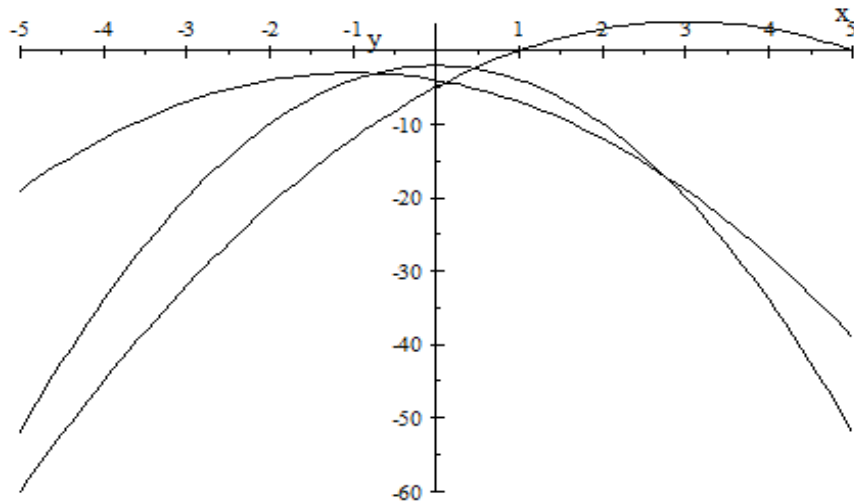


Şekil 2.5. Doğrusal m –konveks fonksiyonlar (Gürbüz 2013).

gibi görsel olarak örneklendirilebilir. Yani, grafiği y ekseninin pozitif kısmını kesmeyen her doğrusal fonksiyon m –konvektir.

Örnek 2.1.2. $r > 0, f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}, (a, b, c \in \mathbb{R})$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, c \leq 0$ şeklindeki 2. dereceden polinom fonksiyon m –konvektir (Gürbüz 2013).

Görsel olarak; grafiği y –ekseninin pozitif kısmını kesmeyen ve konkav olan her 2. dereceden polinom fonksiyon m –konveks fonksiyondur.



Şekil 2.6. m –konveks olan ikinci dereceden polinom fonksiyonlar

Tanım 2.1.8. $((\alpha, m) - \text{Konveks Fonksiyon})$: $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], t \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna $(\alpha, m) - \text{konveks}$ fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm $(\alpha, m) - \text{konveks}$ fonksiyonların sınıfı $K_m^\alpha(b)$ ile gösterilir. Burada $(\alpha, m) \in \{(0, 0), (\alpha, 0), (1, 0), (1, m), (1, 1), (\alpha, 1)\}$ alındığında sırasıyla artan, $\alpha - \text{starshaped}$, starshaped , $m - \text{konveks}$, konveks ve $\alpha - \text{konveks}$ fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$, sınıfında sadece $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar yer alır. Yani $K_1^1(b) \subset [0, b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.1.9. $(h - \text{Konveks Fonksiyon})$: $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $h - \text{konveks}$ fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f 'ye $h - \text{konkav}$ fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir. $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa, $SX(h, I)$ sınıfı $Q(I)$ sınıfını; $h(\alpha) = 1$ alınırsa, $P(I)$ sınıfını ve $h(\alpha) = \alpha^s, s \in (0, 1)$ alınırsa, K_s^2 sınıfını içereceği açıktır.

Örnek 2.1.3. h fonksiyonu her $\alpha \in (0, 1)$ için $h(\alpha) \geq \alpha$ şartını sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olsun (örneğin $k \leq 1$ ve $x > 0$ için $h_k = x^k$ fonksiyonu bu

özelliğe sahiptir). f fonksiyonu I üzerinde negatif olmayan konveks fonksiyon ise; $x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

yazılabilir. Bu, $f \in SX(h, I)$ anlamına gelir. Benzer şekilde h fonksiyonu, $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \leq \alpha$ şartını sağlıyorsa f negatif olmayan konkav fonksiyonu $SV(h, I)$ sınıfına ait olur (Varošanec 2007).

Örnek 2.1.4. $x > 0, k < 0$ olmak üzere $h_k(x) = x^k$ verilsin. Bu durumda;

$$f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{a+b}{2} \\ 2^{1-k}, & x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

fonksiyonu konveks değildir ama h_k –konvektir (Varošanec 2007).

Tanım 2.1.10. ((h, m) –Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0, b], m \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ olacak şekilde $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + mh(1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(h - m)$ –konveks fonksiyon denir (Özdemir *et al.* 2011).

Tanım 2.1.11. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye birinci anlamda s – konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s –konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.12. (İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye ikinci anlamda s – konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda s –konkav fonksiyon olarak adlandırılır (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s – konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.1.5. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.13. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.14. f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik fonksiyon denir (Greenberg and Pierskalla 1970).

Sonuç 2.1.4. Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur (Ion 2007).

Tanım 2.1.15. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.16. (P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye P – fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanımlardan açıkça görüleceği üzere, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan konveks ve Quasi-konveks fonksiyonları içermektedir.

Tanım 2.1.17. (Logaritmik Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık $f: I \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{(1-\alpha)}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna $\log$ – konvektir denir. $f = \exp(\log f)$ olduğundan $\log$ – konveks fonksiyon konvektir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.18. (Starshaped Fonksiyon): $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir (Toader 1984).

Tanım 2.1.19. (Bazı Özel Ortalamalar):

Bu kısımda a, b gibi pozitif iki reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen *et al.* 1988; Bullen 2003);

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a, b) := \frac{a + b}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a + b}$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{b - a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \end{cases}$$

(5) Identric ortalama:

$$I = I(a, b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases}$$

$$H \leq G \leq \mathcal{L} \leq I \leq A.$$

Tanım 2.1.20. (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama): $x_i \in [a, b]$, $p_i > 0$ ve $P_n := \sum_{i=1}^n p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere

$$A_n(x, p) := \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sayılarının p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ağırlıklı aritmetik ortalaması denir (Mitrinović *et al.* 1993).

Tanım 2.1.21. (Gama ve Beta Fonksiyonu):

Euler, gamma fonksiyonunun integral temsilini

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

olarak ifade eder (Kannappan 2009). Beta fonksiyonu;

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0$$

şeklinde (Dragomir *et al.* 2000). Bu eşitlik Euler tipli Beta fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların,

- i) $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y), \quad x, y > 0$
- ii) $\beta(1, y) = \frac{1}{y}, \quad y > 0$
- iii) $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \quad x, y > 0$
- iv) $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0$
- v) $\beta(x, y) = \beta(y, x), \quad x, y > 0$

$$vi) \quad \beta(x, x) = 2^{1-2x} \beta\left(x, \frac{1}{2}\right), \quad x > 0$$

gibi özellikleri vardır (Jeffrey and Dai 2008).

Literatürden bilinir ki gama ve beta fonksiyonları sırasıyla $(0, \infty)$ ve $(0, \infty)^2$ 'de logaritmik konveks fonksiyonlardır.

Teorem 2.1.6. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.7. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

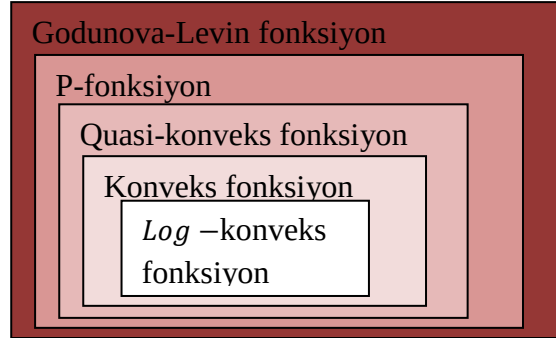
Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek için kimi zaman fonksiyonun şartlarında bazı kısıtlamalar yapmak gerekirken

kimi zamanda fonksiyona ek özellikler katmak gerekir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri itibariyle benzerlik gösterebilir. Çalışmalarımızda farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlarken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlar için başka konvekslik sınıfları içinde sağlandığını açıkça görebiliriz. Dolayısıyla buradan konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını beraber değerlendirmek oldukça güç olduğu için aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla şu şekilde oluşturulabilir;

Teorem 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, *Log* – Konveks fonksiyonlar sınıfı, (negatif olmayan) Konveks fonksiyonlar sınıfı, (negatif olmayan) Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, *P* –fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $L(I)$, $C(I)$, $QC(I)$, $P(I)$, $Q(I)$ ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olduğu görülür (Kavurmacı 2012).



Şekil 2.7. Godunova-Levin, *P* –fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve *log* –konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Lemma 2.2.1. Eğer f fonksiyonu m – konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise f fonksiyonu starshaped fonksiyondur (Toader 1988).

Lemma 2.2.2. Eğer f fonksiyonu m –konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu n – konveks fonksiyondur (Toader 1988). Yukarıdaki lemmalar yardımıyla; $0 \leq n \leq m \leq 1$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, m –konveks fonksiyonlar sınıfı, n –konveks fonksiyonlar sınıfı ve starshaped fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $K(b)$, $K_m(b)$, $K_n(b)$, $S^*(b)$ ile gösterilirse;

$$K(b) \subset K_m(b) \subset S^*(b)$$

olduğu görülür (Toader 1988).



Şekil 2.8. Konveks fonksiyon, m –konveks fonksiyon, n –konveks fonksiyon ve starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi

h – konveks fonksiyon tanımından açıkça görülebilir ki; eğer $h(t) = t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesinde negatif olmayan konkav fonksiyonlar, $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse fonksiyon $Q(I)$ sınıfından, eğer $h(t) = 1$ sabit fonksiyonu olarak seçilirse $P(I)$ sınıfından fonksiyon, eğer $h(t) = t^s$ seçilirse burada $s \in (0,1)$ olmak üzere K_s^2 sınıfından konveks bir fonksiyon elde edileceği aşikârdır. Bu bilgiler ışığında $h(t)$ fonksiyonun bazı özel değerleri için;

$$C(I) \subset SX(h, I), \quad P(I) \subset SX(h, I), \quad K_s^2 \subset SX(h, I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfının alt kümesidir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Birçok klasik eşitsizlik, yukarıdaki eşitsizliğin bir sonucudur.

Teorem 3.1.2. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 3.1.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.1.1. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.1.4. (Ostrowski Eşitsizliği): $f: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir (Ostrowski 1938).

Teorem 3.1.5. (Simpson Eşitsizliği): $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a, b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson Eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir *et al.* 2000).

3.2. İkinci Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler

Lemma 3.2.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve f'' , $0 \leq \lambda \leq 1$ için integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} & (\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= (b-a)^2 \int_0^1 k(t) f''(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$k(t) = \begin{cases} t(t-\lambda)/2, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-t)(1-\lambda-t)/2, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur (Sarıkaya ve Aktan, 2011).

Teorem 3.2.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir fonksiyon, f'' , $0 \leq \lambda \leq 1$ için integrallenebilir ve $|f''|$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left| (\lambda - 1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{12} \left[\left(\lambda^4 + (1+\lambda)(1-\lambda)^3 + \frac{5\lambda-3}{4} \right) |f''(a)| \right. \\ \quad \left. + \left(\lambda^4 + (2-\lambda)\lambda^3 + \frac{1-3\lambda}{4} \right) |f''(b)| \right], & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \frac{(b-a)^2(3\lambda-1)}{48} [|f''(a)| + |f''(b)|], & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya ve Aktan, 2011).

Teorem 3.2.2. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir fonksiyon, f'' , $0 \leq \lambda \leq 1$ için integrallenebilir ve $|f''|$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ için

$$\left| (\lambda-1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{1-3\lambda}{24} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \quad \times \left\{ \left(\left[\frac{\lambda^4}{6} + \frac{3-8\lambda}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(a)|^q + \left[\frac{(2-\lambda)\lambda^3}{6} + \frac{5-16\lambda}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \quad \left. + \left(\left[\frac{(1+\lambda)(1-\lambda)^3}{6} + \frac{48\lambda-27}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(a)|^q + \left[\frac{\lambda^4}{6} + \frac{3-8\lambda}{3 \cdot 2^6} \right] |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \\ \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ için} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{3\lambda-1}{24} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\frac{8\lambda-3}{3 \cdot 2^6} |f''(a)|^q + \frac{16\lambda-5}{3 \cdot 2^6} |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{16\lambda-5}{3 \cdot 2^6} |f''(a)|^q + \frac{8\lambda-3}{3 \cdot 2^6} |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \\ \quad \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \text{ için} \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya ve Aktan, 2011).

3.3. n . Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikler

Lemma 3.3.1. $n \geq 1$ için, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a, b \in I$ ve $f^{(n)} \in L[a, b]$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \\ &+ (b-a)^{n+1} \int_0^1 M_n(t) f^{(n)}(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $M_n(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$M_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!}, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{(t-1)^n}{n!}, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

fonksiyonudur.

Teorem 3.3.1. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$) ve $|f^{(n)}|$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)!} \left(\frac{|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|}{2} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.2. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$) ve $|f^{(n)}|^q, [a, b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{|f^n(a)|^q + 3|f^n(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f^n(a)|^q + |f^n(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Teorem 3.3.3. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $|f^{(n)}|^q, [a, b]$ aralığında konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \left\{ \left(\frac{n+1}{2n+4} |f^n(a)|^q + \frac{n+3}{2n+4} |f^n(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{n+3}{2n+4} |f^n(a)|^q + \frac{n+1}{2n+4} |f^n(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. İkinci Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Elde Edilen İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde ikinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için yeni bir lemma elde edildi ve bu lemma yardımıyla bazı integral eşitsizlikler ispatlandı.

Lemma 4.1.1 $a, b \in I$, $a < b$ ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° üzerinde iki kez türevlenebilen bir fonksiyon ve $\alpha, \lambda \in [0, 1]$ olsun. $f, f', f'' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ & + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \\ & = \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 k(t) f''(tb + (1-t)a) dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$k(t) = \begin{cases} 2\alpha\lambda t - t^2, & 0 \leq t \leq 1-\alpha \\ (1-t)(t-1+2\lambda(1-\alpha)), & 1-\alpha \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur.

İspat: Verilen şartlar altında;

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 k(t) f''(tb + (1-t)a) dt \\ &= \int_0^{1-\alpha} (2\alpha\lambda t - t^2) f''(tb + (1-t)a) dt \\ &\quad + \int_{1-\alpha}^1 (1-t)(t-1+2\lambda(1-\alpha)) f''(tb + (1-t)a) dt \end{aligned}$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I &= (2\alpha\lambda t - t^2) \frac{f'(tb + (1-t)a)}{b-a} \Big|_0^{1-\alpha} - \int_0^{1-\alpha} (2\alpha\lambda - 2t) \frac{f'(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \\
&\quad + \left(\frac{(1-t)(t-1+2\lambda(1-\alpha))f'(tb + (1-t)a)}{(b-a)} \right) \Big|_{1-\alpha}^1 \\
&\quad - \int_{1-\alpha}^1 2(1-t-\lambda(1-\alpha)) \frac{f'(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \\
&= (2\alpha\lambda t(1-\alpha) - (1-\alpha)^2) \frac{f'((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a} \\
&\quad - \left(\alpha(-\alpha + 2\lambda(1-\alpha)) \right) \frac{f'((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a} \\
&\quad - \frac{2}{b-a} \left\{ \int_0^{1-\alpha} (\alpha\lambda - t) f'(tb + (1-t)a) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t-\lambda(1-\alpha)) f'(tb + (1-t)a) dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
I &= (2\alpha - 1) \frac{f'((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a} \\
&\quad - \frac{2}{b-a} \left\{ (\alpha\lambda - t) \frac{f(tb + (1-t)a)}{b-a} \Big|_0^{1-\alpha} - \int_0^{1-\alpha} \frac{-f(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \right. \\
&\quad \left. + (1-t-\lambda(1-\alpha)) \frac{f(tb + (1-t)a)}{b-a} \Big|_{1-\alpha}^1 - \int_{1-\alpha}^1 \frac{-f(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \right\} \\
&= (2\alpha - 1) \frac{f'((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{b-a} \left\{ (\alpha\lambda - 1 + \alpha) \frac{f((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a} - \frac{\alpha\lambda f(a)}{b-a} + \left(\frac{-\lambda(1-\alpha)f(b)}{b-a} \right) \right. \\
& \left. - (\alpha - \lambda(1-\alpha)) \frac{f((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a} + \int_0^1 \frac{f(tb + (1-t)a)}{b-a} dt \right\} \\
& = (2\alpha - 1) \frac{f'((1-\alpha)b + \alpha a)}{b-a} \\
& + \frac{2}{(b-a)^2} \left\{ (1-\lambda)f((1-\alpha)b + \alpha a) \right. \\
& \left. + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) - \int_0^1 f(tb + (1-t)a) dt \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $x = tb + (1-t)a$ değişken değiştirmesi yapıp, eşitliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^2}{2}$ çarpılırsa lemma elde edilir.

Teorem 4.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilen fonksiyon, $f, f', f'' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ile $a < b$ olsun. $|f''|$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $\alpha, \lambda \in [0, 1]$ için,

$$\gamma_1 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^4 + (1-\alpha)^3 \left(\frac{1-\alpha}{4} - \frac{2\alpha\lambda}{3} \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^3(1-\alpha\lambda) + (1-\alpha)^2 \left[\frac{1-\alpha}{3} - \alpha\lambda - \frac{(1-\alpha)^2}{4} + \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)}{3} \right]$$

$$\gamma_3 = \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^3}{3} - \frac{(1-\alpha)^4}{4}$$

$$\gamma_4 = (1-\alpha)^2 \left[\alpha\lambda - \frac{1-\alpha}{3} - \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)}{3} + \frac{(1-\alpha)^2}{4} \right]$$

ve

$$\mu_1 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3(1-\lambda(1-\alpha)) - \frac{1}{12}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha(3\alpha-4) - 4\lambda(1-\alpha)^2(1-\lambda)]$$

$$\mu_2 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^4\lambda^4 + \frac{1}{12}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha^2(4\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 4\alpha\lambda(1-2\lambda) + 4\lambda^2]$$

$$\mu_3 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3(1-\lambda(1-\alpha)) + \frac{1}{12}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha(3\alpha-4) - 4\lambda(1-\alpha)^2(1-\lambda)]$$

$$\mu_4 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^4\lambda^4 - \frac{1}{12}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2[\alpha^2(4\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 4\alpha\lambda(1-2\lambda) + 4\lambda^2]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| (b-a)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right. \\ & \quad \left. + (1-\lambda)f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \right| \\ & \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_1 + \mu_1)|f'''(b)| + (\gamma_2 + \mu_2)|f'''(a)|\}, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \\ \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_1 + \mu_3)|f'''(b)| + (\gamma_2 + \mu_4)|f'''(a)|\}, & 1-\alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_3 + \mu_1)|f'''(b)| + (\gamma_4 + \mu_2)|f'''(a)|\}, & 1-\alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \{(\gamma_3 + \mu_3)|f'''(b)| + (\gamma_4 + \mu_4)|f'''(a)|\}, & 1-2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \leq 2\alpha\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.1'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned} & \left| (b-a)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right. \\ & \quad \left. + (1-\lambda)f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |k(t)| |f''(tb + (1-t)a)| dt \end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right. \\ \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t) |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right\}$$

elde edilir. $|f''|$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \Big| \\ \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| (|f''(b)| + (1-t)|f''(a)|) dt \right. \\ \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t) |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| (|f''(b)| + (1-t)|f''(a)|) dt \right\} \\ \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t| (t^2 |f''(b)| + t(1-t)|f''(a)|) dt \right. \\ \left. + \int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| (t(1-t)|f''(b)| + (1-t)^2 |f''(a)|) dt \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli integral işlemleri yapılırsa,

$$\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t| (t^2 |f''(b)| + t(1-t)|f''(a)|) dt \\ = \begin{cases} \gamma_1 |f''(b)| + \gamma_2 |f''(a)|, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \\ \gamma_3 |f''(b)| + \gamma_4 |f''(a)|, & 2\alpha\lambda \geq 1-\alpha \end{cases}$$

olur. Burada

$$\gamma_1 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^4 + \frac{(1-\alpha)^4}{4} - \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^3}{3}$$

$$\gamma_2 = 8(\alpha\lambda)^4 - \frac{16}{3}(\alpha\lambda)^3(1+2\alpha\lambda) + 8(\alpha\lambda)^3$$

$$- \frac{(1-\alpha)^4}{4} + \frac{(1-\alpha)^3}{3}(1+2\lambda\alpha) - \alpha\lambda(1-\alpha)^2$$

$$\gamma_3 = \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^3}{3} - \frac{(1-\alpha)^4}{4}$$

$$\gamma_4 = \alpha\lambda(1-\alpha)^2 - \frac{(1-\alpha)^3}{3} - \frac{2\alpha\lambda(1-\alpha)^3}{3} + \frac{(1-\alpha)^4}{4}$$

dır. Diğer taraftan

$$\int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|(t(1-t)|f''(b)| + (1-t)^2|f''(a)|)dt$$

$$= \begin{cases} \mu_1|f''(b)| + \mu_2|f''(a)|, & 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \\ \mu_3|f''(b)| + \mu_4|f''(a)|, & 1-\alpha \geq 1-2\lambda(1-\alpha) \end{cases}$$

olup, burada

$$\mu_1 = -\frac{(1-2\lambda(1-\alpha))^4}{6} + \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))^3}{3} - \frac{(1-\alpha)^4}{4} + \frac{(1-\alpha)^3(2-2\lambda(1-\alpha))}{3}$$

$$- \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha)^2}{2} - \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))}{6} + \frac{1}{12}$$

$$\mu_2 = \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))^4}{6} - \frac{2(1-2\lambda(1-\alpha))^3}{3} + (1-2\lambda(1-\alpha))^2$$

$$- \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))^3}{3} + \frac{1}{12} + \frac{(1-\alpha)^4}{4} - \frac{(1-\alpha)^3(3-2\lambda(1-\alpha))}{3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-\alpha)^2(3-4\lambda(1-\alpha))}{2} - (1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha) \\
\mu_3 = & -\frac{1-2\lambda(1-\alpha)}{6} + \frac{1}{12} + \frac{(1-\alpha)^4}{4} - \frac{(1-\alpha)^3(2-2\lambda(1-\alpha))}{3} \\
& + \frac{(1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha)^2}{2} \\
\mu_4 = & -\frac{1-2\lambda(1-\alpha)}{3} + \frac{1}{12} - \frac{(1-\alpha)^4}{4} + \frac{(1-\alpha)^3(3-2\lambda(1-\alpha))}{3} \\
& - \frac{(1-\alpha)^2(3-4\lambda(1-\alpha))}{2} + (1-2\lambda(1-\alpha))(1-\alpha)
\end{aligned}$$

yazılabilir. İfadeler düzenlenirse Teorem 4.1.1’de verilen γ_i ve μ_i ($i = 1,2,3,4$) katsayıları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilen fonksiyon, $f, f', f'' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ile $a < b$ olsun. $|f''|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon olmak üzere; $q \geq 1$, $\alpha, \lambda \in [0, 1]$ için,

$$\tau_1 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^3 + (1-\alpha)^2 \left(\frac{1-\alpha}{3} - \alpha\lambda \right)$$

$$\tau_2 = (1-\alpha)^2 \left(\alpha\lambda - \frac{1-\alpha}{3} \right)$$

$$z_1 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3 + \frac{1}{3}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2(\alpha(1-\lambda) + \lambda)$$

$$z_2 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3 - \frac{1}{3}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2(\alpha(1-\lambda) + \lambda)$$

ve

Teorem 4.1.1’de tanımlanan γ_i ve μ_i ($i = 1,2,3,4$) katsayıları için,

$$\left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$+ (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b))$$

$$\leq \begin{cases} \frac{(b-a)^2}{2} \left[\tau_1^{1-\frac{1}{q}} (\gamma_1 |f''(b)|^q + \gamma_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. z_1^{1-\frac{1}{q}} (\mu_1 |f''(b)|^q + \mu_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \leq 1-2\lambda(1-\alpha) \\ \frac{(b-a)^2}{2} \left[\tau_1^{1-\frac{1}{q}} (\gamma_1 |f''(b)|^q + \gamma_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. z_2^{1-\frac{1}{q}} (\mu_3 |f''(b)|^q + \mu_4 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], & 1-\alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \left[\tau_2^{1-\frac{1}{q}} (\gamma_3 |f''(b)|^q + \gamma_4 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. z_1^{1-\frac{1}{q}} (\mu_1 |f''(b)|^q + \mu_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], & 1-\alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1-2\lambda(1-\alpha)\} \\ \frac{(b-a)^2}{2} \left[\tau_2^{1-\frac{1}{q}} (\gamma_3 |f''(b)|^q + \gamma_4 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. z_2^{1-\frac{1}{q}} (\mu_3 |f''(b)|^q + \mu_4 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], & 1-2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \leq 2\alpha\lambda \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.1’de integraller için mutlak değer özelliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$+ (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b))$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |k(t)| |f''(tb + (1-t)a)| dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{1-\alpha}^1 (1-t)|1-2\lambda(1-\alpha)-t||f''(tb+(1-t)a)|dt \Big\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left\{ \left(\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda t - t^2| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t^2| |f''(tb+(1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right. \\
& \quad + \left\{ \left(\int_{1-\alpha}^1 |(1-t)(1-2\lambda(1-\alpha)-t)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left(\int_{1-\alpha}^1 |(1-t)(1-2\lambda(1-\alpha)-t)| |f''(tb+(1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında konveks ve $t \in [0, 1]$ olduğundan

$$|f''(tb+(1-t)a)|^q \leq t|f''(b)|^q + (1-t)|f''(a)|^q$$

eşitsizliği yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \quad + (1-\lambda)f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda(\alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)) \Big| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left\{ \left(\int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left(\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t| (t^2|f''(b)|^q + t(1-t)|f''(a)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left(\int_{1-\alpha}^1 (1-t) |(1-2\lambda(1-\alpha)-t)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ \left. \times \left(\int_{1-\alpha}^1 \frac{|(1-2\lambda(1-\alpha)-t)|}{t(1-t)|f'''(b)|^q + (1-t)^2|f''(a)|^q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \Bigg]$$

olur. Burada

$$\int_0^{1-\alpha} t|2\alpha\lambda - t| dt = \begin{cases} \tau_1, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \\ \tau_2, & 2\alpha\lambda \geq 1-\alpha \end{cases}$$

olmak üzere

$$\tau_1 = \frac{8}{3}(\alpha\lambda)^3 + (1-\alpha)^2 \left(\frac{1-\alpha}{3} - \alpha\lambda \right)$$

$$\tau_2 = (1-\alpha)^2 \left(\alpha\lambda - \frac{1-\alpha}{3} \right)$$

ve

$$\int_{1-\alpha}^1 (1-t) |(1-2\lambda(1-\alpha)-t)| dt = \begin{cases} z_1, & 1-2\lambda(1-\alpha) \geq 1-\alpha \\ z_2, & 1-2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \end{cases}$$

olmak üzere

$$z_1 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3 + \frac{1}{3}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2(\alpha(1-\lambda) + \lambda)$$

$$z_2 = \frac{4}{3}(1-\alpha)^3\lambda^3 - \frac{1}{3}(\alpha - 2\lambda(1-\alpha))^2(\alpha(1-\lambda) + \lambda)$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|(t^2|f''(b)|^q + t(1-t)|f''(a)|^q)dt \\
&= \begin{cases} \gamma_1|f''(b)|^q + \gamma_2|f''(a)|^q, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \\ \gamma_3|f''(b)|^q + \gamma_4|f''(a)|^q, & 2\alpha\lambda \geq 1-\alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{1-\alpha}^1 |(1-2\lambda(1-\alpha)-t)|(t(1-t)|f''(b)|^q + (1-t)^2|f''(a)|^q)dt \\
&= \begin{cases} \mu_1|f''(b)|^q + \mu_2|f''(a)|^q, & 1-2\lambda(1-\alpha) \geq 1-\alpha \\ \mu_3|f''(b)|^q + \mu_4|f''(a)|^q, & 1-2\lambda(1-\alpha) \leq 1-\alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

ifadelerindeki katsayılar Teorem 4.1.1' de belirtildiği şekildedir. τ_i ve z_i ($i = 1,2$) ve γ_i ve μ_i ($i = 1,2,3,4$) katsayıları düzenlenirse ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilen fonksiyon, $f, f', f'' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ile $a < b$ olsun. $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $|f''|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $\alpha, \lambda \in [0,1]$ için,

$$\varphi_1 = \frac{(2\alpha\lambda)^{p+1} + (1-\alpha(1+2\lambda))^{p+1}}{p+1}$$

$$\varphi_2 = \frac{(2\alpha\lambda)^{p+1} - (-1)^{p+1}(1-\alpha(1+2\lambda))^{p+1}}{p+1}$$

$$\psi_1 = \frac{(2\lambda(1-\alpha))^{p+1} + (\alpha-2\lambda(1-\alpha))^{p+1}}{p+1}$$

$$\psi_2 = \frac{(2\lambda(1-\alpha))^{p+1} - (-1)^{p+1}(\alpha-2\lambda(1-\alpha))^{p+1}}{p+1}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(1 - \alpha)^{q+2}}{q + 2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha^{q+2}}{q + 2}$$

ve β , eksik beta fonksiyonu olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} & \left| (b - a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1 - \alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & + (1 - \lambda) f((1 - \alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b)) \Big| \\ & \leq \begin{cases} \frac{(b - a)^2}{2} \left[\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\varepsilon_1 |f''(b)|^q + \beta(1 - \alpha; q + 1, 2) |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \quad \left. \psi_1^{\frac{1}{p}}(\beta(\alpha; q + 1, 2) |f''(b)|^q + \varepsilon_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], \\ \quad 2\alpha\lambda \leq 1 - \alpha \leq 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \text{ için,} \\ \\ \frac{(b - a)^2}{2} \left[\varphi_1^{\frac{1}{p}}(\varepsilon_1 |f''(b)|^q + \beta(1 - \alpha; q + 1, 2) |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \quad \left. \psi_2^{\frac{1}{p}}(\beta(\alpha; q + 1, 2) |f''(b)|^q + \varepsilon_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], \\ \quad 1 - \alpha \geq \max\{2\alpha\lambda, 1 - 2\lambda(1 - \alpha)\} \text{ için,} \\ \\ \frac{(b - a)^2}{2} \left[\varphi_2^{\frac{1}{p}}(\varepsilon_1 |f''(b)|^q + \beta(1 - \alpha; q + 1, 2) |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \quad \left. \psi_1^{\frac{1}{p}}(\beta(\alpha; q + 1, 2) |f''(b)|^q + \varepsilon_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], \\ \quad 1 - \alpha \leq \min\{2\alpha\lambda, 1 - 2\lambda(1 - \alpha)\} \text{ için,} \\ \\ \frac{(b - a)^2}{2} \left[\varphi_2^{\frac{1}{p}}(\varepsilon_1 |f''(b)|^q + \beta(1 - \alpha; q + 1, 2) |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \quad \left. \psi_2^{\frac{1}{p}}(\beta(\alpha; q + 1, 2) |f''(b)|^q + \varepsilon_2 |f''(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \right], \\ \quad 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \leq 1 - \alpha \leq 2\alpha\lambda \text{ için} \end{cases} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.1’de integraller için mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \quad + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)) \Big| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |k(t)| |f''(tb + (1-t)a)| dt \\
& = \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1-\alpha} t |2\alpha\lambda - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1-\alpha}^1 (1-t) |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t| |f''(tb + (1-t)a)| dt \right\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{1-\alpha} t^q |f''(tb + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{1-\alpha}^1 |1 - 2\lambda(1-\alpha) - t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{1-\alpha}^1 (1-t)^q |f''(tb + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında konveks ve $t \in [0, 1]$ olduğundan

$$|f''(tb + (1-t)a)|^q \leq t |f''(b)|^q + (1-t) |f''(a)|^q$$

eşitsizliği yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \left| (b-a) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) f'((1-\alpha)b + \alpha a) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& + (1-\lambda) f((1-\alpha)b + \alpha a) + \lambda (\alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)) \Big| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left[\left\{ \left(\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{1-\alpha} t^q (|f''(b)|^q + (1-t)|f''(a)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad + \left\{ \left(\int_{1-\alpha}^1 |(1-2\lambda(1-\alpha) - t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left(\int_{1-\alpha}^1 (1-t)^q (|f''(b)|^q + (1-t)|f''(a)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \right] \\
& = \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(|f''(b)|^q \int_0^{1-\alpha} t^{q+1} dt + |f''(a)|^q \int_0^{1-\alpha} t^q (1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \\
& \quad + \left\{ \left(\int_{1-\alpha}^1 |(1-2\lambda(1-\alpha) - t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(|f''(b)|^q \int_{1-\alpha}^1 t(1-t)^q dt + |f''(a)|^q \int_{1-\alpha}^1 (1-t)^{q+1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \Big\} \Big]
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\int_0^{1-\alpha} |2\alpha\lambda - t|^p dt = \begin{cases} \varphi_1, & 2\alpha\lambda \leq 1-\alpha \\ \varphi_2, & 2\alpha\lambda \geq 1-\alpha \end{cases}$$

olmak üzere

$$\varphi_1 = \frac{(2\alpha\lambda)^{p+1} + (1 - \alpha(1 + 2\lambda))^{p+1}}{p + 1}$$

$$\varphi_2 = \frac{(2\alpha\lambda)^{p+1} - (-1)^{p+1}(1 - \alpha(1 + 2\lambda))^{p+1}}{p + 1}$$

ve

$$\int_{1-\alpha}^1 |(1 - 2\lambda(1 - \alpha) - t)|^p dt = \begin{cases} \psi_1, & 1 - \alpha \leq 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \\ \psi_2, & 1 - \alpha \geq 1 - 2\lambda(1 - \alpha) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\psi_1 = \frac{(2\lambda(1 - \alpha))^{p+1} + (\alpha - 2\lambda(1 - \alpha))^{p+1}}{p + 1}$$

$$\psi_2 = \frac{(2\lambda(1 - \alpha))^{p+1} - (-1)^{p+1}(\alpha - 2\lambda(1 - \alpha))^{p+1}}{p + 1}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\int_0^{1-\alpha} t^{q+1} dt = \frac{(1 - \alpha)^{q+2}}{q + 2}$$

$$\int_{1-\alpha}^1 (1 - t)^{q+1} dt = \frac{\alpha^{q+2}}{q + 2}$$

ve

$$\int_0^{1-\alpha} t^q (1 - t) dt = \beta(1 - \alpha; q + 1, 2)$$

$$\int_{1-\alpha}^1 t(1-t)^q dt = \beta(\alpha; q+1, 2)$$

φ_i ve ψ_i ($i = 1, 2$) katsayıları düzenlenirse ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1. Elde ettiğimiz Lemma 4.1.1, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2’de $\alpha = \frac{1}{2}$ seçilirse bu ifadeler sırasıyla Lemma 3.2.1, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2’ye indirgenir.

Sonuç 4.1.2. Lemma 4.1.1’de verilen şartlar altında her iki tarafın α değişkenine göre $[0, 1]$ aralığı üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & (\lambda - 1) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 k(\alpha, t) f''(tb + (1-t)a) dt d\alpha \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$k(t) = \begin{cases} 2\alpha\lambda t - t^2, & 0 \leq t \leq 1 - \alpha \\ (1-t)(t - 1 + 2\lambda(1-\alpha)), & 1 - \alpha \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.3’ te $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a)^2 \left(\frac{1}{2^{2p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \times \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} |f''(b)|^q + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} |f''(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.3' te $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ seçilirse

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a)^2 \left(\frac{2^{p+1} - 1}{2^{2p+1}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} |f'''(b)|^q + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} |f'''(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.5. Teorem 4.1.3' te $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{3}$ seçilirse

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq (b-a)^2 \left(\frac{2^{p+1} - 1}{2^{2p+1} 3^{p+1} (p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} |f'''(b)|^q + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} |f'''(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

4.2. n . Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Elde Edilen İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $a, b \in [0, c]$, $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ ve $|f^{(n)}|$, $[0, c]$ aralığında (α, m) –konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(|f^{(n)}(a)| - m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right) \right. \\
& \quad \times \left(\frac{1}{2^{n+\alpha+1}(n+\alpha+1)} + \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^\alpha dt \right) + \frac{m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|}{2^n(n+1)} \left. \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.3.1' den ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq (b-a)^{n+1} \int_0^1 |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|$ fonksiyonu, $[0, c]$ aralığında (α, m) –konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \left[t^\alpha |f^{(n)}(a)| + m(1-t^\alpha) \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right. \\
& \quad \left. \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n \left[t^\alpha |f^{(n)}(a)| + m(1-t^\alpha) \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right\} \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ |f^{(n)}(a)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+\alpha} dt + m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right| \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t^\alpha) dt \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |f^{(n)}(a)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n t^\alpha dt + m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt \Big\} \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \frac{|f^{(n)}(a)|}{2^{n+\alpha+1}(n+\alpha+1)} + m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right| \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{2^{n+\alpha+1}(n+\alpha+1)} \right) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n t^\alpha dt + \frac{m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right|}{2^{n+1}(n+1)} - m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt \right\} \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(|f^{(n)}(a)| - m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left(\frac{1}{2^{n+\alpha+1}(n+\alpha+1)} + \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^\alpha dt \right) + \frac{m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right|}{2^n(n+1)} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1’de $\alpha = m = 1$ seçilirse Teorem 3.3.1 elde edilir.

Teorem 4.2.2. $a, b \in [0, c]$, $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b] (n \geq 1)$, $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ ve $|f^{(n)}|^q$, $[0, c]$ aralığında (α, m) – konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n! 2^{n+1}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{\left(|f^{(n)}(a)|^q + m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (2^\alpha(\alpha+1) - 1) \right)^{\frac{1}{q}}}{2^\alpha(\alpha+1)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(2^{\alpha+1} - 1) |f^{(n)}(a)|^q + (2^\alpha(\alpha+1) - 2^{\alpha+1} + 1) m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q}{2^\alpha(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 3.3.1' den ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq (b-a)^{n+1} \int_0^1 |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\ & = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun $[0, c]$ aralığında (α, m) – konveksliği ve Hölder eşitsizliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| f^{(n)} \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n \left| f^{(n)} \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[t^\alpha |f^{(n)}(a)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[t^\alpha |f^{(n)}(a)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n! 2^{n+1}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{\left(|f^{(n)}(a)|^q + m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q (2^\alpha(\alpha+1) - 1) \right)^{\frac{1}{q}}}{2^\alpha(\alpha+1)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{(2^{\alpha+1} - 1) |f^{(n)}(a)|^q + (2^\alpha(\alpha+1) - 2^{\alpha+1} + 1) m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q}{2^\alpha(\alpha+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. $a, b \in [0, c]$, $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $q > 1$, $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ ve $|f^{(n)}|^q$, $[0, c]$ aralığında (α, m) -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left\{ \left(\frac{|f^{(n)}(a)|^q}{2^{\alpha+n+1}(\alpha+n+1)} + \frac{m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q}{2^{\alpha+n+1}(\alpha+n+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left(|f^{(n)}(a)|^q - m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right) \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^\alpha dt + \frac{m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : Lemma 3.3.1' den ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq (b-a)^{n+1} \int_0^1 |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun, $[0, c]$ aralığında (α, m) – konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+\alpha} dt + m \left| f^{(n)} \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t^\alpha) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n t^n dt + m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n (1-t^\alpha) dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

bulunur. Gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\left(\frac{|f^{(n)}(a)|^q}{2^{\alpha+n+1}(\alpha+n+1)} + \frac{m |f^{(n)}(\frac{b}{m})|^q}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{m |f^{(n)}(\frac{b}{m})|^q}{2^{\alpha+n+1}(\alpha+n+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\left(|f^{(n)}(a)|^q - m \left| f^{(n)}\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right) \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^\alpha dt + \frac{m |f^{(n)}(\frac{b}{m})|^q}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \Bigg\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4. $h: J \rightarrow [0, \infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow [0, \infty)$ n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $t \in (0, 1)$ ve $f^{(n)} \in SX(h, I)$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} (|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(t) dt \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.3.1' den ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq (b-a)^{n+1} \int_0^1 |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında h –konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n [h(t)|f^{(n)}(a)| + h(1-t)|f^{(n)}(b)|] dt \right. \\
& \quad \left. \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n [h(t)|f^{(n)}(a)| + h(1-t)|f^{(n)}(b)|] dt \right\} \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ |f^{(n)}(a)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(t) dt + |f^{(n)}(b)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(1-t) dt \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(t) dt + |f^{(n)}(b)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(1-t) dt \right\} \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ (|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|) \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(t) dt \right. \\
& \quad \left. + (|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|) \int_{\frac{1}{2}}^1 t^n h(1-t) dt \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} (|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^n h(1-t) dt \right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.5. $h: J \rightarrow [0, \infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow [0, \infty)$ n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b] (n \geq 1)$, $t \in (0, 1)$ ve $|f^{(n)}|^q \in SX(h, I)$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n! 2^{n+\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 3.3.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq (b-a)^{n+1} \int_0^1 |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\ & = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında h –konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [h(t)|f^{(n)}(a)|^q + h(1-t)|f^{(n)}(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [h(t)|f^{(n)}(a)|^q + h(1-t)|f^{(n)}(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n! 2^{\frac{n+1}{p}}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.5'te $h(t) = t$ seçilirse Teorem 3.3.2 elde edilir.

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.2.5' te $|f^{(n)}(a)| = |f^{(n)}(b)|$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{2(b-a)^{n+1}}{n! 2^{\frac{n+1}{p}}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.2.5' te h fonksiyonu $\frac{1}{2}$ ' ye göre simetrik olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{2(b-a)^{n+1}}{n! 2^{1+\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(|f^{(n)}(a)|^q + |f^{(n)}(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.6. $h: J \rightarrow [0, \infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \rightarrow [0, \infty)$ n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $t \in (0, 1)$, $q > 1$ ve $|f^{(n)}|^q \in SX(h, I)$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.3.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq (b-a)^{n+1} \int_a^b |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında h – konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n [h(t)|f^{(n)}(a)|^q + h(1-t)|f^{(n)}(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n [h(t)|f^{(n)}(a)|^q + h(1-t)|f^{(n)}(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n [h(t)|f^{(n)}(a)|^q + h(1-t)|f^{(n)}(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n [h(t)|f^{(n)}(a)|^q + h(1-t)|f^{(n)}(b)|^q] dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\ & = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(t) dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n h(1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.7. $a, b \in I$, $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $s \in (0, 1]$ ve $|f^{(n)}|$, $[a, b]$ aralığında s –konveks fonksiyon ise

$$\left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|}{(n+s+1)2^{n+s+1}} + (|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|) \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.3.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1} \int_a^b |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında s –konveks olduğundan

$$\left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ |f^{(n)}(a)| \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+s} dt + |f^{(n)}(b)| \int_{\frac{1}{2}}^1 t^n (1-t)^s dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
& |f^{(n)}(a)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n t^s dt + |f^{(n)}(b)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{n+s} dt \Big\} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|}{(n+s+1)2^{n+s+1}} + (|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|) \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.8. $a, b \in I$, $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $s \in (0, 1]$ ve $|f^{(n)}|^q$, $[a, b]$ aralığında s –konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n! 2^{n+1}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|f^{(n)}(a)|^q - |f^{(n)}(b)|^q + 2^{s+1} |f^{(n)}(b)|^q}{2^s(s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{2^{s+1} |f^{(n)}(a)|^q - |f^{(n)}(a)|^q + |f^{(n)}(b)|^q}{2^s(s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 3.3.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
& \leq (b-a)^{n+1} \int_a^b |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\
& = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında s –konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+\frac{1}{p}}(np+1)^{\frac{1}{p}}} \right) \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^s dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 t^s dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n! 2^{n+1}} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|f^{(n)}(a)|^q - |f^{(n)}(b)|^q + 2^{s+1} |f^{(n)}(b)|^q}{2^s(s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{2^{s+1} |f^{(n)}(a)|^q - |f^{(n)}(a)|^q + |f^{(n)}(b)|^q}{2^s(s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.9. $a, b \in I$, $a < b$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n . mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ($n \geq 1$), $s \in (0, 1]$ ve $|f^{(n)}|^q$, $[a, b]$ aralığında s –konveks fonksiyon ise

$$\left| \int_a^b f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{|f^{(n)}(a)|^q}{2^{s+n+1}(s+n+1)} + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt + \frac{|f^{(n)}(b)|^q}{2^{s+n+1}(s+n+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.3.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
&\leq (b-a)^{n+1} \int_a^b |M_n(t)| |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n |f^{(n)}(ta + (1-t)b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında s – konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+s} dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 t^s (1-t)^n dt + |f^{(n)}(b)|^q \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{n+s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1 + (-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{|f^{(n)}(a)|^q}{2^{s+n+1}(s+n+1)} + |f^{(n)}(b)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(|f^{(n)}(a)|^q \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^s dt + \frac{|f^{(n)}(b)|^q}{2^{s+n+1}(s+n+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.2.9’da $s = 1$ seçilirse Teorem 3.3.3 elde edilir.

4.3. Elde Edilen Teoremler ile İlgili Bazı Uygulamalar

Uygulama 4.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ olsun. $q \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$|A^{-1}(a, b) - L^{-1}(a, b)|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{2-i} \frac{1}{a^{3q}} + \left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{i-1} \frac{1}{b^{3q}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$|H^{-1}(a, b) - L^{-1}(a, b)|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{2^{p+1}-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{2-i} \frac{1}{a^{3q}} + \left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{i-1} \frac{1}{b^{3q}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

ve

$$\left| \frac{1}{3}H^{-1}(a, b) + \frac{2}{3}A^{-1}(a, b) - L^{-1}(a, b) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{24} \left(\frac{2^{p+1}-1}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{2-i} \frac{1}{a^{3q}} + \left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{i-1} \frac{1}{b^{3q}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

İspat: Sırasıyla Sonuç 4.1.3, Sonuç 4.1.4 ve Sonuç 4.1.5’de $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [a, b]$ konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuçlar elde edilir.

Uygulama 4.3.2. $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ olsun. $q \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$|\ln(A(a, b)) - \ln(I(a, b))|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{2-i} \frac{1}{a^{2q}} + \left(\frac{q+3}{q+1}\right)^{i-1} \frac{1}{b^{2q}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$|\ln(G(a, b)) - \ln(I(a, b))|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{2^{p+1}-1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} \frac{1}{a^{2q}} + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} \frac{1}{b^{2q}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

ve

$$\left| \frac{1}{3} \ln(G(a, b)) + \frac{2}{3} \ln(A(a, b)) - \ln(I(a, b)) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{48} \left(\frac{2^{p+1}-1}{3(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} \frac{1}{a^{2q}} + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} \frac{1}{b^{2q}} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

İspat: Sırasıyla Sonuç 4.1.3, Sonuç 4.1.4 ve Sonuç 4.1.5’de $f(x) = -\ln(x)$, $x \in [a, b]$ konveks fonksiyon olarak seçilirse istenilen sonuçlar elde edilir.

Uygulama 4.3.9. $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ olsun. $q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $n \in \mathbb{N}(n > 2)$ olmak üzere

$$|A^n(a, b) - L_n^n(a, b)|$$

$$\leq \frac{n(n-1)(b-a)^2}{16} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} a^{(n-2)q} + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} b^{(n-2)q} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a, b)|$$

$$\leq \frac{n(n-1)(b-a)^2}{16} \left(\frac{2^{p+1}-1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} a^{(n-2)q} + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} b^{(n-2)q} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

ve

$$\left| \frac{1}{3} A(a^n, b^n) + \frac{2}{3} A^n(a, b) - L_n^n(a, b) \right|$$

$$\leq \frac{n(n-1)(b-a)^2}{48} \left(\frac{2^{p+1}-1}{3(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{2-i} a^{(n-2)q} + \left(\frac{q+3}{q+1} \right)^{i-1} b^{(n-2)q} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

İspat: Sırasıyla Sonuç 4.1.3, Sonuç 4.1.4 ve Sonuç 4.1.5’de $f(x) = x^n, x \in [a, b]$ konveks fonksiyon olarak seçilirse istenilen sonuçlar elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, Sarıkaya ve Aktan'ın 2011 yılında elde ettiği lemmadan faydalanılarak yeni bir lemma yazılmış olup, bu lemma kullanılarak yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca Yıldız'ın 2014 yılında n . mertebeden fonksiyonlar için ispatladığı lemma, bazı konvekslik sınıflarına uygulanarak yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, dördüncü bölümde verilen Lemma 4.1.1'e benzer yeni lemmalar oluşturabilir, bu lemmalara farklı konveks fonksiyon sınıfları uygulayabilir ve yeni integral eşitsizlikler elde edebilirler. Elde edilen eşitsizliklere uygun farklı konveks fonksiyon örnekleri uygulayarak yeni uygulamalar elde edebilirler.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. *Calculus A Complete Course*. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Alomari, M., 2011. Several Inequalities of Hermite–Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s –convex, quasi-convex and r –convex Mappings and Applications, Ph.D. Thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia Bangi, Malezya.
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. *Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Bagdasar, O., 2006. *Inequalities and Applications*, Master Thesis, Babeş Bolyai University, Romania.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. *Inequalities*. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Bayraktar, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*, ISBN 978-605-395-412-5.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse aller gemeinerter konvexer funktionen in topologisch linearen Räumen, *Publ. Inst. Math.*, 23, 13–20.
- Bullen, P.S., 2003. *Handbook of Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Bullen, P.S., Mitrović, D.S. and Vasić, M., 1988. *Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 459 pp, Dordrecht-Boston.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., 2000. Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *J. of Inequal. and Appl.*, 5, 103-165.
- Dragomir, S.S., Cerone, P. and Roumeliotis, J., 2000. A new generalization of Ostrowski's integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means. *Applied Mathematics Letters*, 13, 19-25.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. *Quasi* –convex functions and Hadamard's inequality, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, *Soochow Journal of Mathematics*, 21 (3), 335-341.
- Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkci širokogo klassa, soderžashčego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkci, *Vychislitel. Mat. i Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov*, MGPI, Moskva, 138-142.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. *Inequalities*. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
- Hazy, A., 2005. *Solving Methods of Linear Functional Equation and Stability of t –Convex Functions*, Debrecen Üniversitesi, Macaristan.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s –convex functions, *Aequationes Math.*, 48, 100-111.

- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- Jeffrey, A., Dai, H-H., 2008. *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.
- Kannappan, Pl., 2009. *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer, P 817.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity. *Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex.*, Cluj-Napoca, Romania.
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. *Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.*, 9, 157-162.
- Ostrowski, A., 1938. Über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. *Comment. Math. Hel.*, 10, 226-227.
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Set, E., 2011. On $(h - m)$ – convexity and Hadamard-type inequalities. *arXiv:1103.6163v1 [math.CA]* 31 Mar 20.
- Pachpatte, B.G., 2005. *Mathematical Inequalities*. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York.
- Roojin, J., 2003. *Inequalities and Applications*, University for Teacher Education, İran.
- Sarikaya, M.Z. and Aktan, N., 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications. *Mathematical and Computer Modelling*. 54(9-10). 2175-2182.
- Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Türkiye.
- Toader, G.H., 1984. Some Generalisations of the Convexity, *Proc. Colloq. Approx. Optim*, Cluj-Napoca, 329-338, Romania.
- Toader, G.H., 1988. On a generalization of the convexity, *Mathematica*, 30(53), 83-87.
- Tunç, M., 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Atatürk Üniversitesi, Türkiye.
- Varošanec, S., 2007. On h – convexity, *J. Math. Anal. and Appl.*, 326, 303-311.
- Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions, *Amer. Math. Monthly* 61, 620-622.

- Yıldız, Ç., 2011. Quasi-Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Türkiye.
- Yıldız, Ç., 2014. n. Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.



ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Bitlis'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bitlis'te tamamladı. 2008 yılında kayıt yaptırdığı Kafkas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne yatay geçiş yaparak 2012 yılında mezun oldu. Aynı yıl Bitlis Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfında çalışmaya başladı. 2013 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2014 yılında Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne kayıt yaptırdı. Eğitim süreci devam etmekte olup, halen Bitlis Sosyal Yardımlaşma ve Dayanışma Vakfında çalışmaktadır.