

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ AVCI TEK AV MODELİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE
GERİ BESLEME KONTROL DEĞİŞKENİ İLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sare SAĞLAM

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

EYLÜL 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ AVCI TEK AV MODELİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE
GERİ BESLEME KONTROL DEĞİŞKENİ İLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sare SAĞLAM

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

EYLÜL 2024

Sare SAĞLAM tarafından hazırlanan “Üç Avcı Tek Av Modelinin Caputo Kesirli Türevi Ve Geri Besleme Kontrol Değişkeni İle Analizi” adlı tez çalışması 23.09.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :

Unvan Adı SOYADI
Kocaeli Üniversitesi

Pr.Dr.Ali DEMİR

Jüri Üyesi :

Unvan Adı SOYADI
Sakarya Üniversitesi

Pr.Dr.Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

Jüri Üyesi :

Unvan Adı SOYADI
Sakarya Üniversitesi

Pr.Dr.Şevket GÜR



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “ÜÇ AVCI TEK AV MODELİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE GERİ BESLEME KONTROL DEĞİŞKENİ İLE ANALİZİ ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(...../...../20.....).

(imza)

Sare SAĞLAM





Eşime ve Kızıma....



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, herkonuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, çalışmamın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof.Dr Ömer Faruk Gözükızıl'a, bu süreç boyunca sevgi, fedakarlık, anlayışı ve yardımlarından dolayı değerli eşim Barış SAĞLAM'a ve varlığından dolayı kızım Feyza'ya teşekkürlerimi sunarım





İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ÖZET.....	xv
1. GİRİŞ	1
2. CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE AV-AVCI MODELLERİNİN TARİHSEL GELİŞİMİ.....	3
3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	7
3.1. Gamma Fonksiyonu	7
3.2. Beta Fonksiyonu.....	7
3.3. Kesirli Türev	8
3.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi	8
3.5. Caputo Kesirli Türevi.....	9
3.6. Caputo kesirli türevi ile Riemann-Liouville kesirli türevinin İlişkisi	10
3.7. Kesirli Analizin Temel Teoremi	11
3.8. Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri	13
3.9. n. Dereceden Polinomların Diskriminantı.....	15
4. CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE AV-AVCI MODELİNİN İNCELENMESİ	17
4.1. Üç Avcı-Tek Av İçeren Modelin Geri Besleme Kontrol Değişkeni Kullanılarak Caputo Kesirli Türeviyle İncelenmesi.....	17
4.2. Üç Avcı-Tek Av Modelinin Denge Noktaları.....	18
4.3. Üç Avcı-Tek Av Modelinin Asimptotik Davranışı.....	21
4.4. Modelin Sayısal Analizi	34
5. SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR	39
EKLER.....	41
ÖZGEÇMİŞ.....	45



SİMGELER

$\Gamma(x)$	: Gamma Fonksiyonu
$\beta(x, y)$	: Beta Fonksiyonu
$\text{Arg}\lambda$	: λ nın esas Argümenti
a	: Av popülasyon tür içi rekabet katsayısı
β	: Birinci avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
k	: Uzayın taşıma kapasitesi
r	: Av popülasyonunun içsel büyüme oranı
$x(t)$	: t zamanında av popülasyonun yoğunluğu
$u(t)$	: t zamanında av popülasyonu için geri besleme kontrol değişkeni
${}^c D_t^q$	: q . mertebeden Caputo kesirli türevi
e_1	: Av biyokütlesinin birinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranı
e_2	: Av biyokütlesinin ikinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranı
e_3	: Av biyokütlesinin üçüncü avcı popülasyonuna dönüşüm oranı
$f(x)$	: Birinci avcı popülasyonunun av popülasyonu ile etkileşim oranı
$g(x)$	: İkinci avcı popülasyonunun av popülasyonu ile etkileşim oranı
$T(x)$	: Üçüncü avcı popülasyonunun av popülasyonu ile etkileşim oranı
μ_1	: Birinci avcı popülasyonun ölüm oranı
μ_2	: İkinci avcı popülasyonun ölüm oranı
μ_3	: Üçüncü avcı popülasyonun ölüm oranı
a_1	: Birinci avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı
b	: İkinci avcı popülasyonunun birinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı
c_1	: Birinci avcı popülasyonunun Üçüncü avcı popülasyonu ile rekabet oranı
d	: Üçüncü avcı popülasyonunun Birinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı
e	: İkinci avcı popülasyonunun Üçüncü avcı popülasyonu ile rekabet oranı

f	: Üçüncü avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı
$y(t)$	: t zamanında ilk avcı popülasyonunun yoğunluğu
$z(t)$	: t zamanında ikinci avcı popülasyonunun yoğunluğu
$w(t)$	: t zamanında üçüncü avcı popülasyonunun yoğunluğu



ÜÇ AVCI TEK AV MODELİNİN CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE GERİ BESLEME KONTROL DEĞİŞKENİ İLE ANALİZİ

ÖZET

Doğal yaşamın korunması ve sürdürülebilirliği açısından büyük öneme sahip av-avcı ilişkileri, ekosistemlerdeki popülasyon dengesini korur. Bu ilişkilerin ayrıntılı durumlarının varlığını belirlemek için av-avcı modeli ortaya konmuştur. Av-Avcı modeli, ekolojide ve biyolojide popülasyon dinamiklerini anlamak için kullanılan bir matematiksel modeldir. Bu modelde, bir av türünün (örneğin, geyikler) bir veya daha fazla avcı türü (örneğin, kurtlar) tarafından avlanması ve bu etkileşimin sonucunda her iki türün popülasyonlarının nasıl değiştiği incelenir. Bu tezde üç avcının bir av üzerindeki etkisini araştıran bir ekolojik model, genelleştirilmiş bir işlevsel tepki fonksiyonu ile incelenmiştir. Av popülasyonu için geri besleme kontrolünü içeren kesirli mertebeden üç avcı-tek av modeli üzerinde durulmuştur. Çevre ile avcı-av etkileşimindeki çeşitliliği modellemek amacıyla kapsamlı bir genelleştirilmiş fonksiyonel etkileşim sınıfı kullanılmıştır. Bu etkileşimler, çevre ve dört türün adaptasyonu gibi birçok faktörden etkilenebilir. Farklı denge noktalarının varlığı analiz edilmiş ve bu denge noktalarının asimptotik kararlılığını sağlamak için bazı yöntemler belirlenmiştir. Bu çalışmanın temel amacı, üç avcının bir av üzerindeki etkisini anlamak ve bu etkileşimlerin ekosistemdeki dengeyi nasıl etkilediğini belirlemektir. Beş farklı denge noktasının varlığı analiz edilmiştir. Bunlar, dört türün neslinin tükenme noktası, birinci avcının olmadığı denge, ikinci avcının olmadığı denge, üçüncü avcının olmadığı denge ve dört türün bir arada yaşayabildiği denge noktaları olduğu görülmüştür. Elde edilen bu noktaların çeşitli senaryolar oluşturabileceği belirlenmiştir. Bu senaryolar arasında, dört popülasyonun neslinin tükenmesi, üç tür avcının neslinin tükenmesi, sırayla her bir yırtıcı popülasyonunun neslinin tükenmesi ve dört popülasyonun bir arada yaşaması bulunmaktadır. Teorik bulgular, , av ve yırtıcı türlerin birlikte yaşamasını yönetmedeki kritik önemini ve üç avcı ile tek bir avın bir arada yaşayabileceği olumlu denge için gerekli koşulların sağlandığını geri besleme kontrolü ile göstermektedir.



ANALYSIS OF THREE PREDATOR-ONE PREY MODEL WITH CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE AND FEEDBACK CONTROL

SUMMARY

Prey-predator relationships, which are of great importance for the protection and sustainability of natural life, maintain the population balance in ecosystems. The predator-prey model was introduced to determine the existence of detailed situations of these relationships. The Prey-Prey model is a mathematical model used in ecology and biology to understand population dynamics. This model examines the predation of a prey species (e.g., deer) by one or more predator species (e.g., wolves) and how the populations of both species change as a result of this interaction. The prey-predator model is a system in ecology that mathematically models the interaction between prey and predator species in an ecosystem. The predator-prey models a dynamic relationship that can be applied to many different areas, from natural life to human behavior, economics, and social systems. This relationship forms the basis of processes such as competition, seizing opportunities, avoiding dangers and establishing balance. The balance between prey and predator in nature provides a powerful metaphor for understanding many processes in human life. May vary depending on the field purpose of use of the model. In general, artificial intelligence and machine learning models provide great advantages, especially in classification and prediction tasks and offer significant contributions in various sectors. This model is based on predators hunting prey species and these predators controlling the prey population. Prey-prey models are often described by equations that include the predation rate of predators on prey species and the reproduction rate of prey species. Such models are used to understand the dynamics of prey and predator populations in ecosystems and to predict future changes. Fractional derivative is a generalization of the concept of derivative beyond traditional integer order derivatives to fractional degrees. Mathematically, in classical differentiation, when taking the n -th derivative of a function, n is an integer; in fractional differentiation, n can be any real or complex number. Fractional derivatives have the ability to account for the effects of past information and events on the present. The Caputo derivative allows for modeling this effect in a more natural way because it takes into account the memory properties of the system over time. This can be important in physical processes, biological systems, and financial modeling. Also, this model can be created using the Caputo fractional derivative. The Caputo fractional derivative is a derivative operator extended to non-integer orders of classical derivatives. The Caputo derivative acts as a bridge between classical and fractional derivatives and has applications particularly in fields such as engineering, physics, biology and economics. Such derivatives can be used to account for time lag and memory effects, allowing more accurate modeling of dynamic systems such as ecological systems. When the prey-prey model is created with Caputo fractional derivatives, the differential equations describing the changes in prey and predator populations over time are expressed with Caputo fractional derivatives. These differential equations may include the rate at which predators control the prey population, the rate at which predators hunt, and the rate at which the

prey population reproduces. Caputo fractional derivatives are used to more precisely model the effects of derivatives with non-integer orders, unlike traditional differential equations. Integration of Caputo fractional derivatives into ecological modeling can help to more accurately account for complex interactions and environmental factors. Understanding Ecological Balance helps us understand how ecological balance is achieved and maintained by mathematically modeling the predator-prey relationships seen in natural life. In this way, appropriate conservation and management strategies can be developed to ensure that ecosystems function healthily and remain in balance. Study of Population Dynamics is used to understand how prey and predator populations change over time and how they affect each other. In this way, it is possible to understand the dynamics of populations in a particular ecosystem, such as growth, decline, competition and adaptation. Conservation of Natural Resources is important to understand and maintain the balance between prey and predator populations. Such models need to be used to sustainably manage natural resources and control hunting. Monitoring Changes in Ecosystems can be used to monitor and evaluate the effects of environmental changes and human intervention on prey and predator populations. In this way, the causes and consequences of changes in ecosystems can be better understood. In this paper, an ecological model with three predators competing over a prey with a generalized functional response function is examined. The effect of three predators on one prey was investigated by focusing on a fractional order three-predator-one-prey model that includes feedback control for the prey population. The reason for considering a comprehensive class of generalized functional interactions is to model diversity in predator-prey interactions with the environment. These interactions can be affected by many factors, such as the environment and the adaptation of the four species. By analyzing the existence of different equilibrium points, some situations have been derived to ensure the asymptotic stability of these equilibrium points. In our study, the three-predator-one-prey model was investigated with the Caputo fractional derivative using the feedback control variable. First, the variables of the equation system created with the three-predator-one-prey model were named. In the next steps, the existence of balance points were determined, respectively. The first balance point; equilibrium at which four species disappear, the second equilibrium point; balance free from predators, third balance point; The balance where the first and second hunters do not exist but the third hunter and prey exist, the fourth balance point; The balance where the first and third hunters do not exist but the second hunter and prey exist, the fifth balance point; It has been shown that the equilibrium point where the first predator and prey exist but not the second and third predators, and the sixth equilibrium point is the positive balance point where four species exist. Using these obtained balance points, the type and state of stability was examined. Finally, the opinion put forward is that when the necessary conditions are created, the four species become one. It has been stated that the positive balance resulting from living together will be stable. In this research, three predator and one prey were studied based on the study of the two predator and one prey model with the Caputo fractional derivative. The research can be expanded and focused on different numbers of prey and predator models, and the results are open to examination. The three predator one prey model allow exploring different ways to approach a problem, both competitively and collaboratively. Each actor's perspective plays a significant role in the process of achieving the goal and ultimately success depends on the harmony of strategies and approaches. When we look at it, the general conclusion we reach is that the prey-predator model can provide significant benefits focus on improving the quality of life, using resources more efficiently, improving safety and health,

producing environmentally friendly solutions and making various industries more effective. The correct and ethical use of the model effects for humanity in the future.





1. GİRİŞ

Av-avcı modeli, ekolojide bir ekosistemdeki av ve avcı türler arasındaki etkileşimi matematiksel olarak modelleyen bir sistemdir. Bu model, avcılarının av türlerini avlaması ve bu avcılarının av popülasyonunu kontrol etmesi üzerine kuruludur. Av-avcı modelleri genellikle avcılarının av türleri üzerindeki avlanma hızını ve av türlerinin üreme hızını içeren denklemlerle tanımlanır. Bu tür modeller, ekosistemlerdeki av ve avcı popülasyonlarının dinamiklerini anlamak ve gelecekteki değişiklikleri tahmin etmek için kullanılır.

Aynı zamanda bu model, Caputo kesirli türevi kullanılarak oluşturulabilir. Caputo kesirli türevi, klasik türevlerin tam sayı olmayan derecelerine genişletilmiş bir türev operatörüdür. Bu tür türevler, zamanla gecikme ve bellek etkilerini dikkate almak için kullanılabilir, bu da ekolojik sistemler gibi dinamik sistemlerin daha doğru bir şekilde modellenmesini sağlar.

Av-avcı modeli Caputo kesirli türevlerle oluşturulduğunda, av ve avcı popülasyonlarının zaman içindeki değişimlerini tanımlayan diferansiyel denklemler Caputo kesirli türevlerle ifade edilir. Bu diferansiyel denklemler, avcılarının av popülasyonunu kontrol etme hızını, avcılarının avlanma hızını ve av popülasyonunun üreme hızını içerebilir. Caputo kesirli türevleri, geleneksel diferansiyel denklemlerden farklı olarak, tam sayı olmayan derecelere sahip türevlerin etkilerini daha hassas bir şekilde modellemek için kullanılır. Caputo kesirli türevlerin ekolojik modellemeye entegrasyonu, karmaşık etkileşimleri ve çevresel faktörleri daha doğru bir şekilde hesaba katmaya yardımcı olabilir.

Ekolojik Dengenin Anlaşılması, doğal yaşamda görülen av-avcı ilişkilerini matematiksel olarak modelleyerek, ekolojik dengenin nasıl sağlandığını ve korunduğunu anlamamıza yardımcı olur. Bu sayede, ekosistemlerin sağlıklı bir şekilde işlemlerini ve dengede kalmasını sağlamak için uygun koruma ve yönetim stratejileri geliştirilebilir. Popülasyon Dinamiklerinin İncelenmesi , av ve avcı popülasyonlarının zaman içinde nasıl değiştiğini ve birbirlerine nasıl etki ettiğini anlamak için kullanılır. Bu sayede, belirli bir ekosistemdeki popülasyonların büyüme, azalma, rekabet ve

adaptasyon gibi dinamiklerini anlamak mümkün olur. Doğal Kaynakların Korunması, av ve avcı popülasyonları arasındaki dengeyi anlamak ve korumak için önemlidir. Doğal kaynakların sürdürülebilir bir şekilde yönetilmesi ve avlanmanın kontrol altında tutulması için bu tür modellerin kullanılması gerekmektedir. Ekosistemlerdeki Değişikliklerin İzlenmesi, çevresel değişikliklerin ve insan müdahalesinin av ve avcı popülasyonları üzerindeki etkilerini izlemek ve değerlendirmek için kullanılabilir. Bu sayede, ekosistemlerde meydana gelen değişikliklerin nedenleri ve sonuçları daha iyi anlaşılabilir.

Çalışılan bu tezde, sizlere sunmak istediğimiz üç avcı tek av ilişkisini gözlemleyerek denge durumlarını elde etmeye çalışılmıştır. Bu sebeple, üzerinde çalıştığımız üç avcı tek av modelinde Caputo kesirli türevi ile geri besleme kontrol değişkeni getirerek incelenmiştir.

Araştırmamızın aşamaları aşağıdaki şekilde oluşmaktadır.

1. aşamada, av avcı modelinin nasıl oluştuğu, modeli oluştururken kullanılan caputo türevinin tanımı ve önemi, av avcı modelinin önemi üzerinde durulmuştur.
2. aşamada, caputo kesirli türevi ve av avcı modelinin tarihteki süreci anlatılmıştır.
3. bölümde temel tanımlar, teoremler, kullanılan tanımlar arasındaki ilişki, araştırmayı sonuca bağlayacak kriterlerden bahsedilmiştir.
4. aşamada üç avcı tek avcı modelinde geri besleme kontrol değişkeni kullanılarak caputo kesirli türevi ile modellendi ve denge noktaları elde edildi daha sonra bu denge durumlarının karalılık durumları çeşitli tanım ve teoremlerden yola çıkılarak belirlenmiştir.
5. aşamada araştıma sonucunda ortaya konulan önermeler gösterilmiştir.
6. bölümde yapılan çalışmalarda varılan sonuçlar ifade edilmiştir.

2. CAPUTO KESİRLİ TÜREVİ VE AV-AVCI MODELLERİNİN TARİHSEL GELİŞİMİ

Kesirli türevin tarihsel süreci oldukça zengindir. Kesirli türevin kökenleri, tamsayı mertebeden türevlerin gelişimine kadar uzanır. 17. yüzyılda, matematikçilerin diferansiyel ve integral hesaplamalarını genişletme çabalarıyla birlikte, kesirli türev kavramı da ortaya çıkmıştır. Kesirli türevin tarihsel evrimi, Gottfried Wilhelm Leibniz'in çalışmalarıyla başlar. Leibniz, 1695 yılında L'Hôpital'a yazdığı bir mektupta kesirli türevin temellerini atmıştır. Ancak, kesirli türevin tam anlamıyla gelişmesi ve tanımlanması daha sonraki yıllarda gerçekleşmişti. 18. ve 19. yüzyıllarda, matematikçiler kesirli türevin teorik ve pratik yönlerini daha fazla araştırmıştır. Özellikle, Joseph Fourier, Augustin-Louis Cauchy, ve diğerleri kesirli türevlerin özelliklerini incelemiş ve matematiksel analiz alanına katkıda bulunmuşlardır. 19. yüzyılın ortalarından itibaren, kesirli türevlerin uygulamalı matematik, fizik, mühendislik ve diğer alanlardaki önemi giderek artmıştır. Günümüzde, kesirli türevlerin ve kesirli diferansiyel denklemlerin çeşitli alanlarda geniş bir uygulama alanı bulunmaktadır. Kesirli türevin sağladığı kolaylıklar örneğin; kesirli türevler, sıradan türevlere kıyasla daha esnek bir modelleme aracıdır, sistemlerdeki bellek etkilerini, gecikmeleri ve diğer karmaşık dinamikleri daha iyi yakalayabilir. Bazı durumlarda olayların tanımlanması için daha hassas bir araç sağlar. Özellikle, kesirli türevler, sistemlerin davranışlarını açıklamak için daha iyi uygun olabilir ve bazı durumlarda daha doğru sonuçlar üretebilir, matematikten mühendisliğe, fizikten ekonomiye kadar birçok alanda geniş bir uygulama çeşitliliğine sahiptir. Bu, sistemlerin dinamiklerini anlamak ve analiz etmek için çok çeşitli bağlamlarda kullanılabilmesi anlamına gelir. Kesirli türevlerin kullanımı, birçok araştırmacının yenilikçi çalışmalar yapmasını sağlar. Bu, yeni matematiksel yöntemlerin geliştirilmesine, sistemlerin daha derinlemesine anlaşılmasına ve pratik problemlerin daha etkili bir şekilde çözülmesine olanak tanır. Kesirli türevler, bazı durumlarda karmaşık sistemlerin analizini ve modellemesini daha kolaylaştırabilir. Özellikle, sistemlerin doğrusal olmayan ve zamanla değişen dinamiklerini açıklamak için kesirli türevlerin kullanımı faydalı olabilir.

Av-avcı modelleri, ekolojik sistemlerdeki yırtıcı-av ilişkilerini matematiksel olarak modellemek için kullanılır ve bu alanın tarihsel gelişimi oldukça zengindir. Av-avcı modellerinin tarihsel gelişiminde bazı önemli kilometre taşları; Lotka Volterra Modeli (1925) Alfred J. Lotka ve Vito Volterra, av-avcı ilişkilerini matematiksel olarak modellemek için ünlü Lotka-Volterra modelini geliştirdi. Bu model, iki tür arasındaki etkileşimleri basit bir diferansiyel denklem sistemiyle açıklar. Nicholson-Bailey Modeli (1935), Nicholson ve Bailey, av-avcı ilişkilerini açıklamak için daha karmaşık bir model geliştirdiler. Bu modelde, av türünün üreme hızı ve avcı türünün avlanma oranı gibi faktörler dikkate alındı. Holling'in Fonksiyonel Tepki Modelleri (1959), C.S. Holling, avcılarının av sayısına nasıl tepki verdiklerini açıklayan fonksiyonel tepki modellerini tanıttı. Holling'in bu modelleri, av-avcı ilişkilerinin daha gerçekçi bir şekilde modellenmesine olanak sağladı. Rosenzweig-MacArthur Modeli (1963), Michael L. Rosenzweig ve Robert H. MacArthur, av-avcı ilişkilerini daha karmaşık bir çevresel bağlamda ele alan bir model geliştirdiler. Bu model, habitat kalitesi gibi faktörleri de içeriyordu. Kesirli Türevlerin Kullanımı (20. yüzyılın sonları), 20. yüzyılın sonlarından itibaren, kesirli türevlerin ekolojik modellerde kullanımı artmıştır. Bu, daha karmaşık ve gerçekçi modellerin geliştirilmesine ve ekosistemlerin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Bu tarihsel gelişim süreci, av-avcı modellerinin karmaşıklığının arttığını ve ekolojik sistemlerin daha iyi anlaşılmasına yönelik çabaların devam ettiğini göstermektedir. Av-avcı modellerinde kullanılan temel formüller arasında Lotka-Volterra modelinin denklemleri bulunur. Bu denklemler, av ve avcı popülasyonlarının zaman içindeki değişimini tanımlar. Genel olarak, avcı popülasyonunun büyüme hızı avcılık oranına ve av popülasyonunun büyüme hızına bağlıdır. Lotka-Volterra modelinin denklemleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy = y(-c + dx)\end{aligned}$$

Burada:

X av popülasyonunu, Y avcı popülasyonunu, a av popülasyonunun doğal büyüme hızını, c avcı popülasyonunun doğal ölüm hızını; d , avcının avladığı avların dönüşüm oranını (avcının avını kaç yüzde oranında enerjiye dönüştürebildiği); b , avcılık oranı (bir avcının birim zamanda avladığı av sayısı)

Bu denklemler, av ve avcı popülasyonlarının birbirlerine olan etkileşimini açıklar. Bununla birlikte, gerçek dünya durumlarında kullanılan modeller genellikle bu basit denklemlerin ötesine geçer ve daha karmaşık etkileşimleri ve faktörleri dikkate alır. Bu nedenle, av-avcı modellerinde kullanılan formüller genellikle modelin karmaşıklığına ve incelenen ekosistemin özelliklerine bağlı olarak değişir.

Kesirli türevlerin av-avcı modeline matematiksel olarak nasıl uygulanacağını anlatmak için, Lotka-Volterra modelini Caputo kesirli türevle genişletelim. Lotka-Volterra modeli, av ve avcı popülasyonlarının zamanla değişimini tanımlar. Başlangıçta, bu model tamsayı mertebeden türevlerle ifade edilir, ancak Caputo kesirli türev kullanarak genişletilebilir. Caputo kesirli türev, tamsayı olmayan bir türevdir ve özellikle diferansiyel denklemlerin çözümünde zamanın kesirli mertebeden türevlerini tanımlar. Lotka-Volterra modelini Caputo kesirli türevle genişletmek için, türevlerin yerine Caputo kesirli türevleri kullanılır:

$$\begin{aligned} {}^c_0D_t^q x(t) &= x(r - ax - by), & x(0) &= x_0 \\ {}^c_0D_t^q y(t) &= y(-d + cx), & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Bu şekilde, Lotka-Volterra modeli Caputo kesirli türevlerle genişletilmiş olur ve av-avcı etkileşimini zamanın kesirli mertebeden türevlerle daha doğru bir şekilde modellememize olanak tanır.



3. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda tez çalışmasının bazı bölümlerinde ele alınan özel fonksiyonlar gösterilecektir.

3.1. Gamma Fonksiyonu

Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biridir.

Gamma fonksiyonu $\text{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{ile tanımlanır.}$$

Gamma fonksiyonun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$\forall z \neq 0, \mathbb{Z}^-$ kompleks sayıları için tanımlıdır. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Buradan görülmektedir ki; $\Gamma(1) = 1$ ve $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

...

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

dir.

3.2. Beta Fonksiyonu

Kesirli türev içerisinde kullanılan gamma fonksiyonunun bazı durumlarında beta fonksiyonu ile ele alınması daha kullanışlıdır.

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \beta(w, z)$$

dır.

$$0 < \operatorname{Re}(z) < 1, \quad \text{ve} \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ olmak üzere}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

dir. Buradan

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \beta(z, 1-z) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}$$

elde edilir. Bu integral $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ de yakınsaktır.

3.3. Kesirli Türev

$f(x) = x^m$ şeklindeki bir fonksiyonunun n . mertebeden türevinin

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad \text{ve} \quad m > n \quad (3.1)$$

olduğu bilinmekteydi. Eulerin 1730 yılında Gamma fonksiyonunu tanımlaması ile birlikte

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabileceği görülmüştür. Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonundan farklı olarak tüm reel sayılarda tanımlı olduğundan (3.2) eşitliği

$$\frac{d^q}{dx^q} x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-q+1)} x^{\mu-q}, \quad \mu, q \in \mathbb{R}, \quad q \geq 0 \quad (3.3)$$

şeklinde yazılarak x^u biçimindeki bir fonksiyonun keyfi mertebeden türevi elde edilmiştir.

$q > 0$ için ${}_a D_t^q f(t)$ kesirli türev gösterimi kullanılacaktır. Burada a ve t kesirli diferansiyelleme işleminin limit değeridir.

3.4. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

f , fonksiyonu her sonlu (a, t) için sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon $n \in \mathbb{N}$,

$n - 1 \leq q < n$ olmak üzere

$${}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Ve

$$n = 1 \text{ için } {}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \cdot \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau \quad (3.5)$$

olduğunu görebiliriz.

3.5. Caputo Kesirli Türevi

Başlangıç koşulları belli olan ve fiziksel olarak yorumlanabilen uygulama problemleri kesirli türev tanımları gerektirir.

Kesirli diferansiyel tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren M. Caputo olmuştur. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevinin tamsayı basamaktan diferansiyel denklemlerinkiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır.[23]

Caputonun tanımı, n pozitif tamsayı olmak üzere

$$n - 1 < q < n$$

$${}_a^C D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t (t-\tau)^{n-q-1} f^n(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

ile verilir.

Kabul edelim ki

$0 \leq n - 1 < q < n$ ve $f(t)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a, T]$ aralığında $(n + 1)$ kez sürekli ve sınırlı türeve sahip olsun. O halde

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow n} {}_a D_t^q f(t) &= \lim_{q \rightarrow n} \left(\frac{f^n(a)(\tau-a)^{n-q}}{\Gamma(n-q+1)} + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q} f^{n+1}(\tau)}{\Gamma(n-q+1)} d\tau \right) \\ &= f^n(a) + \int_a^t (f^{n+1}(\tau) d\tau) \\ &= f^n, (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Caputo kesirli türevinde sabitin türevi sıfırdır fakat sonlu bir alt sınır değeri için Rieamann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Bir problemin fiziksel olarak yorumunun yapılabilmesi için sabitin kesirli türevinin sıfıra eşit olması gerekir.

Eğer (3.6) eşitliğinde $q = \mu$ ve $f(t) = t^\lambda$ alınırsa

$$D_t^\mu \{t^\lambda\} = \frac{1}{(t-\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\mu-1} \frac{d^n}{d\tau^n} \{\tau^\lambda\} d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} t^{\lambda-\mu}$$

olduğu görülür. n pozitif tamsayı, $n-1 < \mu < n$ ve $Re(\lambda) > -1$ dir.

3.6. Caputo kesirli türevi ile Riemann-Liouville kesirli türevinin İlişkisi

$0 < \alpha < 1$ mertebede R-L kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi sırasıyla

$$RLD^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

$$CD^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

$u \in C^1[0, T]$ olsun. Bu durumda temel integral teoreminden

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\tau) d\tau$$

$$RLD^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(0) + \int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt$$

integral ve türevin lineerliğini kullanalım.

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(0)}{(x-t)^\alpha} dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt$$

$$= \underbrace{\frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{x dm}{x^\alpha (1-m)^\alpha}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1-\alpha} \int_0^1 (1-m)^{-\alpha} \cdot m^0 \cdot dm \left\{ \begin{array}{l} a-1 = -\alpha \Rightarrow a = 1-\alpha \\ b-1 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1-\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$= \frac{u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} 1 - \alpha \cdot x^{-\alpha} = \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot x^{-\alpha}$$

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \left(\int_\tau^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} dt \right) d\tau \rightarrow \int_\tau^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= \int_{x-\tau}^0 \frac{1}{s^\alpha} - ds = \int_0^{x-\tau} \frac{1}{s^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \frac{(x-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} d\tau = \frac{(x-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad u < 1-\alpha < 1 \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) (x-\tau)^{1-\alpha} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1.0 - 0.f(x, a(x)) + \int_0^x u'(\tau) (1-\alpha) (x-\tau)^{-\alpha} d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u'(\tau)}{(x-\tau)} d\tau = I_2 \\
&= I_1 + I_2 \\
&= \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot x^{-\alpha} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u'(\tau)}{(x-\tau)} d\tau}_{\text{Caputo t\u00fcrevi}} \\
&= \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot x^{-\alpha} + {}_c D^\alpha u(x) \quad (u(0) = 0 \Rightarrow {}_{RL} D^\alpha u(x) = {}_c D^\alpha u(x))
\end{aligned}$$

3.7. Kesirli Analizin Temel Teoremi

Caputo t\u00fcrevinin en \u00f6nemli uygulamalarından biri kesirli diferansiyel denklemlerdir. Tam sayı mertebeli olmayan t\u00fcrevlerle başlatılan Riemann-Liouville t\u00fcrevli kesirli diferansiyel denklemlerin aksine, Caputo'nun t\u00fcrevine sahip bir kesirli diferansiyel denklem (veya kesirli diferansiyel denklemler sistemi) i\u00e7in bir başlangı\u00e7 değer problemi aşağıdaki şekilde form\u00fcle edilebilir.

$$\begin{cases} {}_0^c D_{t_0}^q y(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)} \end{cases}$$

Burada, $f(t, y)$ 'nın s\u00fcrekli olduğu varsayılır ve $y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(m-1)}(t_0)$ t\u00fcrevleri $y(t_0)$ 'ın t_0 noktasındaki t\u00fcrevinin değerleridir. A\u00e7ık\u00e7a kesirli t\u00fcrevlere g\u00f6re daha net bir fiziksel anlama sahip olduğundan, tam sayı mertebeden t\u00fcrevlerin atanmış değerleri ile kesirli diferansiyel denklemini başlatmak daha faydalıdır. Riemann Liouville ${}_0 I_{t_0}^q$

integralinin denklem sisteminin her iki kısmına da uygulanması; $y(t)$ fonksiyonunun t_0 merkezli $(m - 1)$ dereceli Taylor polinomu olmak üzere,

$$T_{m-1}[y; t_0](t) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{(t-t_0)^k}{k!} \right)$$

ve

$${}_0 I_{t_0}^{qc} D_{t_0}^q y(t) = y(t) - T_{m-1}[y; t_0](t)$$

ile birlikte kesirli diferansiyel denklemin

$$y(t) = [y; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds$$

olarak yeniden formüle edilmesine yol açar.[34]

3.0.1. Lemma: $v(t)$, $[0, \infty)$ üzerinde sürekli fonksiyon olma şartlarını sağlarsa

$${}_0^c D_t^q v(t) \leq \theta v(t)$$

elde edilir. Burada $0 < q < 1$ ve θ sabittir ve

$$v(t) \leq v(0) E_q(\theta t^q), \text{ her } t \geq 0$$

elde edilir.[17]

3.0.1. Tanım. $z \neq 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir $z = x + iy$ kompleks sayısını orijine birleştiren doğrunun reel eksenle pozitif yönde yaptığı açı θ olsun. Bu z kompleks sayısı için,

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda θ sayısına z nin argümenti denir. Eğer $0 \leq \theta < 2\pi$ ise bu durumda θ ya esas argüment denir ve $\text{Arg}(z) = \theta$ şeklinde gösterilir.

3.0.2. Lemma:

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^q z(t) = f(z), \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

q . mertebeden kesirli denklem sistemini göz önüne alalım.

Burada $0 < q < 1$ ve $z \in \mathbb{R}^n$ dir. Bu kesirli mertebeden denklem sisteminin denge noktası $f(z) = 0$ denklemi çözülerek hesaplanabilir. Eğer denge noktalarında $\frac{\partial f}{\partial t}$ Jacobian matrisinin bütün λ_i özdeğerleri Matignon şartını,

$$|\text{Arg } \lambda_i| > \frac{q\pi}{2},$$

sağlarsa denklem sistemi bu noktalarda yerel asimptotik kararlıdır.[18]

3.0.1. Teorem Sistemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + (k - r)\lambda + cm - rk = 0$ olmak üzere aşağıdaki kriterlerden herhangi birinin sağlanması durumunda sistem denge noktasında yerel asimptotik olarak kararlıdır denir.[15]

$$1. \quad k \geq r \text{ ve } rk < cm,$$

$$2. \quad k < r, rk < cm, (k + r)^2 < 4cm \text{ ve}$$

$$0 < q < \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{4(cm - rk) - (k - r)^2}}{r - k} \right)$$

3.0.2. Teorem Sistemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + (k - r)\lambda + cm - rk = 0$ ise aşağıdaki kriterlerden herhangi birinin sağlanması durumunda sistem denge noktasında yerel asimptotik olarak kararlıdır.[15]

$$1. \quad k^2 + rk - 2cm \geq 0 \text{ ve } rk < cm,$$

$$2. \quad k^2 + rk - 2cm < 0, rk < cm, (k^2 + rk - 2cm)^2 < 4k^2(rk - 2cm)$$

$$\text{ve } 0 < q < \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{4k^2(rk - 2cm) - (k^2 + rk - 2cm)^2}}{2cm - k^2 - rk} \right)$$

3.8. Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri

Routh-Hurwitz kararlılık kriteri bir denklem sisteminin karakteristik denklemini çözmeye gerek kalmadan denklem sisteminin kararlılığını veya kararsızlığını gösterir. Bu kriter sadece sonlu sayıda terime sahip olan karakteristik denklemlere uygulanabilir.

$$L(D) = y^n + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (3.7)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayıları reel sabitlerdir. (3.7)
denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

karakteristik polinomunun köklerinin yapısına bağlıdır.

Reel katsayılı

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

karakteristik denkleminin köklerinin tümünün reel kısımlarının negatif olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şekilde tanımlanan $n \times n$ boyutundaki Hurwitz matrisinin bütün asli köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır.

$$(H_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Hurwitz matrisinin bütün asli köşegen minörleri aşağıda gibidir:

$$D_1 = |a_1|, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, D_n = \det H_n$$

Burada $D_n = a_n D_{n-1}$ olduğundan $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ şartlarından sonuncusu $a_n > 0$ şartı ile değiştirilebilir[21].

3.0.2. Tanım Denklemi (3.7) olan $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise bu durumda $L(D)$ polinomuna kararlıdır denir.

3.0.3. Teorem Denklemi (3.7) olan $L(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise bu durumda diferensiyel denklemin $y \equiv 0$ aşıkâr çözümü asimptotik kararlıdır.

3.9. n. Dereceden Polinomların Diskriminantı

n. dereceden;

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_i x^{n-i} + \dots + a_n$$

polinomu için diskriminant ifadesi;

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \vdots & (n-1)a_1 & n & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & 1 & (n-2)a_2 & (n-1)a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_1 & \vdots & (n-2)a_2 & \ddots & n \\ \vdots & \ddots & a_2 & \vdots & \vdots & \ddots & (n-1)a_1 \\ a_{n-1} & \ddots & \vdots & a_{n-1} & \vdots & \ddots & (n-2)a_2 \\ a_n & \ddots & \vdots & 0 & a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [20].



4. CAPUTO KESİRLİ TÜREV İLE AV-AVCI MODELİNİN İNCELENMESİ

4.1. Üç Avcı-Tek Av İçeren Modelin Geri Besleme Kontrol Değişkeni Kullanılarak Caputo Kesirli Türeviyle İncelenmesi

$0 < q < 1$ olmak üzere q . mertebeden ${}_0^c D_t^q$ Caputo kesirli türevi ile aşağıdaki sistemi göz önüne alalım.

$${}_0^c D_t^q X(t) = x \left(r - ax - \frac{rx}{k} \right) - f(x)y - g(x)z - t(x)w - cu,$$

$${}_0^c D_t^q Y(t) = e_1 f(x)y - \mu_1 y - a_1 yz - c_1 yw, \quad y(0) = y_0,$$

$${}_0^c D_t^q Z(t) = e_2 g(x)z - \mu_2 z - byz - ezw, \quad z(0) = z_0,$$

$${}_0^c D_t^q W(t) = e_3 t(x)w - \mu_3 w - dwy - fwz \quad w(0) = w_0,$$

$${}_0^c D_t^q U(t) = -hu + mx \quad u(0) = u_0 \quad (4.1)$$

(4.1) denklem sisteminde f, g ve w aşağıdaki şartları sağlar.

$$1) f(0) = 0, g(0) = 0, w(0) = 0,$$

$$2) x > 0 \text{ için } f'(x) > 0, g'(x) > 0, w'(x) > 0, \quad (4.2)$$

Yukarıdaki denklem sisteminde; $x(t)$, t zamanında av popülasyon yoğunluğu; $y(t)$, $z(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla t zamanında birinci avcı, ikinci avcı ve üçüncü avcılarının popülasyon yoğunluğu; $U(t)$, t zamanında av popülasyonu için geri besleme kontrol değişkeni; r , av popülasyonunun içsel büyüme oranı; a , av popülasyonunun tür içi rekabet sayısı; k , av popülasyonu için uzayın taşıma kapasitesini; e_1 av biyokütlesinin birinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranı; e_2 , av biyokütlesinin ikinci avcı popülasyonuna dönüşüm oranı; e_3 , av biyokütlesinin üçüncü avcı popülasyonuna dönüşüm oranı; μ_1 , birinci avcı popülasyonunun ölüm oranı;

μ_2 , ikinci avcı popülasyonunun ölüm oranı; μ_3 , üçüncü avcı popülasyonunun ölüm oranı; a_1 birinci avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı; b ikinci avcı popülasyonunun birinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı; c_1 birinci avcı popülasyonunun üçüncü avcı popülasyonu ile rekabet oranı; d üçüncü avcı popülasyonunun birinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı; e^* , ikinci avcı popülasyonunun üçüncü avcı popülasyonu ile rekabet oranı; f , üçüncü avcı popülasyonunun ikinci avcı popülasyonu ile rekabet oranı; $f(x)$, birinci avcı popülasyonunun av popülasyonu ile etkileşim oranı; $g(x)$, ikinci avcı popülasyonunun av popülasyonu ile etkileşim oranı; $w(x)$, üçüncü avcı popülasyonunun av popülasyonu ile etkileşim oranı ifade etmektedir. Yukarıdaki değerlerin hepsi pozitifdir.

4.2. Üç Avcı-Tek Av Modelinin Denge Noktaları

Bu kısımda (4.1) denklem sisteminin yerel davranışı incelenecektir. İlk olarak (4.1) denklem sisteminin çözümleri olan aşağıdaki sistemin çözümleri bulunarak, (4.1) denklem sisteminin denge noktaları bulunacaktır.

$$\begin{aligned} 0 &= x \left(r - ax - \frac{rx}{k} \right) - f(x)y - g(x)z - t(x)w - cu, \\ 0 &= e_1 f(x)y - \mu_1 y - a_1 yz - c_1 yw, \\ 0 &= e_2 g(x)z - \mu_2 z - byz - ewz, \\ 0 &= e_3 t(x)w - \mu_3 w - dwy - fwz, \\ 0 &= -hu + mx. \end{aligned} \tag{4.3}$$

1. (4.1) denklem sistemi için daima var olan $E_0(0,0,0,0,0)$ denge noktası, dört popülasyonun yok oluşunu temsil eder.
2. Üç avcının yok olduğu denge noktası $E_1(x_1, 0,0,0, u_1)$ dır. Bu denge noktası üç avcının neslinin tükendiği anlamına gelir. E_1 'e yırtıcı olmayan denge noktası denir.

$$x_1 = \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)}, \quad u_1 = \frac{k(rh - cm)}{h^2(ak + r)} \text{ dır.}$$

3. Birinci ve ikinci avcının olmadığı üçüncü avcının var olduğu denge noktası $E_2(x_2, 0,0, w_2, u_2)$ ' dir. $y = 0, z = 0$ değerleri (4.3) denklem sisteminde dördüncü denklemde yerine yazarak $x_2 = t^{-1} \left(\frac{u_3}{e_3} \right), u_2 = \frac{m}{h} t^{-1} \left(\frac{u_3}{e_3} \right)$

bulunur. Bu durumda g ve w birebir ve örten olduğundan her birinin ters fonksiyonu mevcuttur. Bu son sonucu (4.3) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazarak,

$$w_2 = \frac{e_3 x_2 \left(r - a x_2 - \frac{r x_2}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{u_3}$$

elde edilir. w_2 pozitif olması için $x_2 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ olması gerekir. Bu durum sağlandığında birinci ve ikinci avcının olmadığı fakat üçüncü avcı türünün birarada yaşadığı pozitif bir denge vardır.

4. Birinci ve üçüncü avcının olmadığı ikinci avcının var olduğu denge noktası $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ noktasıdır. $y = 0$, $w = 0$ (4.3) denklem sisteminde üçüncü denklemde yerine koyarak $x_3 = g^{-1}\left(\frac{u_2}{e_2}\right)$, $u_3 = \frac{m}{h} g^{-1}\left(\frac{u_2}{e_2}\right)$ ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler de birinci denklemde yerine yazılarak $z_3 = \frac{e_2 x_3 \left(r - a x_3 - \frac{r x_3}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{u_2}$ bulunur.

z_3 değerinin pozitif olması için $x_3 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ şartının sağlanması gerekir. Bu şart sağlanırsa $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ denge noktasının pozitif bir dengeye sahip olduğu görülür.

5. İkinci ve üçüncü avcının olmadığı birinci avcının var olduğu denge noktası $E_4 = (x_4, y_4, 0, 0, u_4)$ ile gösterilir. $z = 0$, $w = 0$ (4.1) denklem sisteminin ikinci denkleminde yerine koyularak $x_4 = f^{-1}\left(\frac{u_1}{e_1}\right)$, $u_4 = \frac{m}{h} g^{-1}\left(\frac{u_1}{e_1}\right)$ ifadeleri bulunur. Bu ifadeler de birinci denklemde yerine yazılarak

$$y_4 = \frac{e_1 x_4 \left(r - a x_4 - \frac{r x_4}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{u_1}$$

bulunur. y_4 değerinin pozitif olması için $x_4 < \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}$ şartının sağlanması gerekir. Bu şart sağlandığında $E_4 = (x_4, y_4, 0, 0, u_4)$ denge noktasının pozitif dengeye sahip olduğu görülür.

f, g ve t fonksiyonları x e göre artan fonskiyonlardır. x_4, x_3 ve x_2 , için $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_*$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b_*$, $\lim_{x \rightarrow \infty} t(x) = c_*$, ise

$\frac{u_1}{e_1} < a_*$ ($\frac{u_2}{e_2} < b_*$, $\frac{u_3}{e_3} < c_*$) şartı ortaya çıkar. Bu $f(x) = \frac{u_1}{e_1}$ ($g(x) = \frac{u_2}{e_2}$, $t(x) = \frac{u_3}{e_3}$)

denklemlerinin bir çözüme sahip olması için gerekli koşuldur.

6. Son olarak dört türün bir arada olduğu denge $E_5(x^*, y^*, z^*, w^*, u^*)$ dir. Aşağıdaki denklem sisteminin pozitif çözümleri E_5 in pozitif denge noktasını gösterir.

$$0 \begin{cases} 0 = x \left(r - ax - \frac{rx}{k} \right) - f(x)y - g(x)z - t(x)w - cu, \\ 0 = e_1 f(x)y - \mu_1 y - a_1 yz - c_1 yw, \\ 0 = e_2 g(x)z - \mu_2 z - byz - ewz, \\ 0 = e_3 t(x)w - \mu_3 w - dwy - fwz, \\ 0 = -hu + mx. \end{cases} \quad (4.4)$$

$$y^* = \frac{e_2 d g(x) - d \mu_2 - dew + be_3 t(x) - \mu_3 b - bfz}{2bd} \quad (4.5)$$

$$z^* = \frac{f e_1 f(x) - f \mu_1 - f c_1 w + a_1 e_3 t(x) - a_1 \mu_3 - a_1 dy}{2af} \quad (4.6)$$

$$w^* = \frac{e e_1 f(x) - \mu_1 e - a_1 z e + c_1 e_2 g(x) - c_1 \mu_2 - byc_1}{2c_1 e} \quad (4.7)$$

Bulduğumuz (4.5) , (4.6) ve (4.7) değerlerini (4.4) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine yazarak, $F_1(x) = F_2(x)$ eşitliği elde edilir.

$$F_1(x) = x \left(r - ax - \frac{rx}{k} \right) - \frac{cmx}{h},$$

$$\begin{aligned} F_2(x) = & -f(x)g(x) \left(\frac{e_2 d}{2bd} - \frac{f e_1}{2a_1 f} \right) + f(x)t(x) \left(\frac{be_3}{2bd} - \frac{e e_1}{2c_1 e} \right) - \\ & g(x)t(x) \left(\frac{a_1 e_3}{2a_1 f} + \frac{c_1 e_2}{2c_1 e} \right) - f(x) \left(\frac{dyz - dew - \mu_3 b - bfz}{2bd} \right) - \\ & g(x) \left(\frac{-f \mu_1 - f c_1 w - a_1 \mu_3 - a_1 dy}{2a_1 f} \right) - t(x) \left(\frac{-a_1 e_1 - a_1 z e - c_1 \mu_2 - byc_1}{2c_1 e} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

olarak elde edilir.

Bu durum sonucunda aşağıdakiler elde edilir.

$$F_1(0) = F_1 \left(\frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} \right) = 0 \quad F_1(x) = \begin{cases} > 0 & x < \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} \text{ ise} \\ < 0 & x > \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} \text{ ise} \end{cases}$$

İki eğri arasında, değişken değerlerinin sıfıra eşit olmadığı en az bir kesişimi garanti etmek için, $x_2 = t^{-1} \left(\frac{u_3}{e_3} \right)$, $x_3 = g^{-1} \left(\frac{u_2}{e_2} \right)$ ve $x_4 = f^{-1} \left(\frac{u_1}{e_1} \right)$ olmak üzere

$F_1(x)$ ve $F_2(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki şartları ele alabiliriz.

$$\tilde{x} = \max\{x_2, x_3, x_4\} \text{ için } F_1(\tilde{x}) > F_2(\tilde{x}), \quad F_2\left(\frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)}\right) > 0$$

Bu şartı;

$$x < \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)},$$

$$r > r_c = \frac{k \left(\frac{f(x)g(x)\left(\frac{e_2d}{2bd} - \frac{fe_1}{2a_1f}\right) + f(x)t(x)\left(\frac{be_3}{2bd} - \frac{ee_1}{2c_1e}\right) - g(x)t(x)\left(\frac{a_1e_3}{2a_1f} + \frac{c_1e_2}{2c_1e}\right) - f(x)\left(\frac{dyz - dew - \mu_3b - bfz}{2bd}\right) - g(x)\left(\frac{-f\mu_1 - fc_1w - a_1\mu_3 - a_1dy}{2a_1f}\right) - t(x)\left(\frac{-a_1e_1 - a_1ze - c_1\mu_2 - byc_1}{2c_1e}\right) + \frac{cm}{h} + ax}{x} \right)}{(k - x)}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Böylece bu şart bize sistemin negatif olmayan en az bir çözümünün varlığını gösterir. Bu durum (4.1) denklem sisteminin dört türün birlikte var olduğu pozitif dengeyi gösterir.

4.3. Üç Avcı-Tek Av Modelinin Asimptotik Davranışı

Bu bölümde ele aldığımız (4.1) denklem sisteminin denge noktalarının asimptotik kararlılığını inceleyeceğiz. Kesirli mertebeden türev için yerel asimptotik kararlılık kavramı, birinci mertebeden türevden farklıdır. Birinci mertebeden türev ile karşılaştırıldığında kararlılık bölgesinin genişlediği gözlemlenir.

$E(x, y, z, w, u)$ noktası (4.1) denklem sisteminin denge noktasıdır. Ve bu denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E) = \begin{pmatrix} r - 2ax - \frac{2rx}{k} - f'(x)y - g'(x)z - t'(x)w & -f(x) & -g(x) & -t(x) & -c \\ e_1f'(x)y & e_1f(x) - \mu_1 - a^*z - c_1w & -a^*y & -c_1y & 0 \\ e_2g'(x)z & -bz & e_2g(x) - \mu_2 - by - ew & -ez & 0 \\ e_3t'(x)w & -dw & -bz & e_3t(x) - \mu_3 - dy - fz & 0 \\ m & 0 & -dw & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

şeklinde gösterilir.

Dört türün yok olduğu $E_0(0,0,0,0,0)$, denge noktasının kararlılığını inceleyelim. $E_0(0,0,0,0,0)$, denge noktasında Jacobian matrisi;

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r & -f(0) & -g(0) & -t(0) & -c \\ 0 & e_1 f(0) - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 g(0) - \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 t(0) - \mu_3 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$J(E_0)$ ın karakteristik denklemi

$$(\lambda - (e_1 f(0) - \mu_1))(\lambda - (e_2 g(0) - \mu_2))(\lambda - (e_3 t(0) - \mu_3)).(\lambda^2 + (h - r)\lambda - cm - rh) = 0 \quad (4.10)$$

olur.(4.10) karakteristik denklemin özdeğerleri,

$$\lambda_2 = e_1 f(0) - \mu_1, \lambda_3 = e_2 g(0) - \mu_2, \lambda_4 = e_3 t(0) - \mu_3 \quad ve \quad \lambda_{1,5} = \frac{-(h-r) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (4.11)$$

bulunur. Burada $\Delta_1 = (h - r)^2 - 4(cm - rh)$ dır.

$$\lambda_2 = e_1 f(0) - \mu_1 < 0, \lambda_3 = e_2 g(0) - \mu_2 < 0 \quad ve \quad \lambda_4 = e_3 t(0) - \mu_3 < 0$$

E_0 denge noktasının kararlılığını görmek için λ_1 ve λ_5 özdeğerlerinin

$h < r$, $h = r$ and $h > r$ durumlarının incelenmesi gerekir.

1. $h > r$

(1.a) $rh < cm$ için $\Delta_1 \geq 0$ ise E_0 denge noktasında $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, ve λ_5 köklerinin negatif olduğu görülür. Bu şartlar altında her $0 < q < 1$ değeri için E_0 denge noktası yerel asimptotik kararlıdır. Aslında $|Arg(\lambda_{1,2,3,4,5})| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ sağladığından her $0 < q < 1$ değeri için (Lemma 3.0.2) teoremi gereği kararlıdır.

Eğer $\Delta_1 < 0$ ise λ_1 ve λ_5 özdeğerleri kompleks eşlenik köklerdir ve reel kısımları negatiftir. İncelenen koşullar altında her $0 < q < 1$ için

$$|Arg(\lambda_{1,5})| = \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{r-h}\right) + \pi > \frac{q\pi}{2}$$

olur.

Lemma 3.0.2 e göre E_0 denge noktasında asimptotik kararlıdır.

(1.b) $rh = cm$ eşitliğine göre $J(E_0)$ ın özdeğerlerden birinin sıfır, diğerlerinin negatif olacağını söyleyebiliriz. Bu noktada (4.1) denklem sistemi marjinal kararlıdır.

(1.c) $rh > cm$ ise $\Delta_1 = (h + r)^2 - 4(cm) > 0$ dır. Bu durumda λ_1 ve λ_5 den birinin negatif diğerinin pozitif olduğu görülür.

Öyleyse $\lambda_5 < 0$ ve $\lambda_1 > 0$ olsun. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $|Arg(\lambda_5)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ ve $|Arg(\lambda_1)| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ dır. Dolayısıyla E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

2. $h = r$

(2.a) $rh < cm$ için $\Delta_1 < 0$ olursa karakteristik denklemin reel olmayan eşlenik özdeğerleri vardır. Bu özdeğerler $\lambda_1 = 2\sqrt{cm - rh}i$ ve $\lambda_5 = -2\sqrt{cm - rh}i$ dir. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $|Arg(\lambda_{1,5})| = \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}$ sağlanır. Bunun yanı sıra $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$ olduğundan Lemma 3.0.2 e göre E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

(2.b) $rh = cm$ durumunda $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$, λ_2, λ_3 ve $\lambda_4 < 0$ dir. E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi marjinal kararlıdır.

(2.c) $rh < cm$ için $\lambda_1 = 2\sqrt{cm - rh}$ ve $\lambda_5 = -2\sqrt{cm - rh}$, bulunur. $0 < q < 1$ için $|Arg(\lambda_5)| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ ve $|arg(\lambda_1)| = 0 > \frac{q\pi}{2}$ dir. E_0 da (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

3. $h < r$.

(3.a) $rh < cm$ ve $\Delta_1 \geq 0$, ise $\Delta_1, \Delta_5 > 0$ olur. Her $0 < q < 1$ için

$$|Arg(\lambda_{1,5})| = 0 < \frac{q\pi}{2}$$

olur.

Dolayısıyla E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

Eğer $\Delta_1 < 0$, ise λ_1 ve λ_5 reel kısımları pozitif olan kompleks eşleniklerdir.

Lemma 3.0.2 e göre $|arg(\lambda_{1,5})| = \arctan\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{r-h}\right) > \frac{q\pi}{2}$ olursa E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik kararlı olur.

(3.b) $rh = cm$ için (4.10) denkleminin $\lambda_1 = r - h$ özdeğerinin pozitif olduğu görülür. Her $0 < q < 1$ için $|arg(\lambda_1)| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ dir. Bu durumda Lemma 3.0.2 e göre E_0 denge noktasında (4.1) sistemi kararsızdır.

(3.c) $rh > cm$ ise $\Delta_1 = (h + r)^2 - 4(cm) > 0$ dir. $\lambda_1, \lambda_5 > 0$ ve $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ olduğundan E_0 denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

Şimdi aşağıdaki 4.1 teoremini kullanarak denge için kararlılık koşullarını tekrardan ele alacağız.

Teorem 4.1. $E_0(0,0,0,0,0)$ denge noktası aşağıdaki kriterlerden herhangi birini sağlaması durumunda yerel olarak asimtotik olarak kararlıdır.

(i) $h \geq r$ ve $rh < cm$,

(ii) $h < r$, $rh < cm$, $(h+r)^2 < 4cm$ ve $0 < q < \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{4(cm-rh)-(h-r)^2}}{r-h}\right)$

Burada avcılardan arınmış (4.1) denklem sistemi için $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim. Burada denge noktasının Jacobian matrisi;

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} r - \frac{2cm}{h} & -f\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) & -g\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) & -t\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) & -c \\ 0 & e_1 f\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 g\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 t\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_3 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

dır. $J(E_1)$ nin karakteristik denklemi

$$(\lambda - (e_1 f(0) - \mu_1))(\lambda - (e_2 g(0) - \mu_2))(\lambda - (e_3 t(0) - \mu_3)) \cdot \left(\lambda^2 + \left(r - \frac{2cm}{h} + h\right)\lambda + rh - cm\right) = 0 \quad (4.13)$$

dır. $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktasındaki Jacobian matrisin özdeğerleri;

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= e_1 f\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_1, & \lambda_3 &= e_2 g\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_2 \\ \lambda_4 &= e_3 t\left(\frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)}\right) - \mu_3, & \lambda_{1,5} &= \frac{\frac{h^2+rh-2cm}{h} \pm \sqrt{\Delta_2}}{2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Burada

$$\Delta_2 = \frac{(h^2 + rh - 2cm)^2 - 4h^2(rh - cm)}{h^2}$$

dır. Böylece $x_4 = f^{-1}\left(\frac{\mu_1}{e_1}\right)$, $x_3 = g^{-1}\left(\frac{\mu_2}{e_2}\right)$ ve $x_2 = t^{-1}\left(\frac{\mu_3}{e_3}\right)$ olmak üzere

$$\lambda_2 = \begin{cases} < 0 & \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)} < x_4 \text{ ise} \\ > 0 & \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)} < x_4 \text{ ise} \end{cases} \quad \lambda_3 = \begin{cases} < 0 & \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)} < x_3 \text{ ise} \\ > 0 & \frac{k(rh-cm)}{h(ak+r)} < x_3 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\lambda_4 = \begin{cases} < 0 & \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} < x_2 \text{ ise} \\ > 0 & \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)} < x_2 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur.

$x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$ olduğunda $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ olur. λ_1 ve λ_5 özdeğerlerini incelediğimizde

$h^2 + rh - 2cm > 0$, $h^2 + rh - 2cm = 0$ ve $h^2 + rh - 2cm < 0$ durumları vardır ve bu durumları tek tek ele alalım.

$$1. \quad h^2 + rh - 2cm > 0$$

$rh > cm$ için $\Delta_2 \geq 0$ ise $\lambda_1, \lambda_5 < 0$ dır. Eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$ ise $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ dır. Bu şartlar altında her $0 < q < 1$ için $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olur.

Aslında $|Arg(\lambda_{1,2,3,4,5})| = \pi > \frac{q\pi}{2}$ ise her $0 < q < 1$ için (4.1) denklem sistemi Lemma 3.0.2 den dolayı kararlıdır.

Eğer $\Delta_2 < 0$ ise λ_1 ve λ_5 özdeğerleri reel kısımları negatif olan kompleks eşlenik köklerdir. Bu durumda her $0 < q < 1$ için $|Arg(\lambda_{1,5})| = \arctan\left(\frac{h\sqrt{-\Delta_2}}{2cm - h^2 - rh}\right) + \pi > \frac{q\pi}{2}$ sağlanır. Eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$ ise E_1 denge noktasında (4.1) denklem sistemi Lemma 3.0.2 den dolayı asimptotik olarak kararlıdır.

$$2. \quad h^2 + rh - 2cm = 0$$

$rh > cm$ için $\Delta_2 < 0$ ise $J(E_1)$ in karakteristik denkleminde $\lambda_1 = 2\sqrt{rh - cm}i$ ve $\lambda_4 = -2\sqrt{rh - cm}i$ sanal köke sahip özdeğerlerdir. Bu şu demektir ki her $0 < q < 1$ için $|Arg(\lambda_{1,5})| = \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}$ dır. Eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$ ise $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktası Lemma 3.0.2 gereği (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik olarak kararlıdır.

$$3. \quad h^2 + rh - 2cm < 0$$

$rh > cm$, için $\Delta_2 \geq 0$ ise $\lambda_1, \lambda_5 > 0$ olur. Bu şu demektir ki $\forall 0 < q < 1$ için $|Arg(\lambda_{1,5})| = 0 < \frac{q\pi}{2}$ dir. $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararsızdır.

$\Delta_2 < 0$ ise λ_1 ve λ_5 reel kısımları olan kompleks eşleniklerdir. Eğer $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$ ise $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ ve $\lambda_4 < 0$ olur. Lemma 3.0.2 gereği $|Arg(\lambda_{1,5})| = \arctan\left(\frac{h\sqrt{-\Delta_2}}{2cm - h^2 - rh}\right) > \frac{q\pi}{2}$ olursa $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktasında (4.1) denklem sistemi yerel asimptotik kararlı olur.

$h^2 + rh - 2cm < 0$, $rh > cm$, $(h^2 + rh - 2cm)^2 < 4h^2(rh - cm)$ için,

$$|Arg(\lambda_{1,5})| = \arctan\left(\frac{\sqrt{4h^2(rh - cm) - (h^2 + rh - 2cm)^2}}{2cm - h^2 - rh}\right) > \frac{\pi}{2}, \text{ olursa}$$

$$q < \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{4h^2(rh - cm) - (h^2 + rh - 2cm)^2}}{2cm - h^2 - rh}\right) < \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

Dolayısıyla $E_1(x_1, 0, 0, 0, u_1)$ denge noktası için kararlılık koşullarını aşağıdaki teoremle sürdürürüz.

Teorem 4.2. Aşağıdaki kriterlerden herhangi biri sağlanırsa sistemde avcının olmadığı denge noktası yerel olarak asimptotik kararlıdır.

- (i) $h^2 + rh - 2cm \geq 0$, $rh > cm$ ve $x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$
- (ii) $h^2 + rh - 2cm < 0$, $rh > cm$, $(h^2 + rh - 2cm)^2 < 4h^2(rh - cm)$,

$$0 < q < \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{4h^2(rh - cm) - (h^2 + rh - 2cm)^2}}{2cm - h^2 - rh}\right) \text{ ve } x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$$

Burada birinci ve ikinci avcının olmadığı üçüncü avcı ve avın olduğu (4.1) denklem sisteminin $E_2(x_2, 0, 0, w_2, u_2)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim: İlk olarak Jacobian matrisi yazalım.

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} r - 2ax_2 - \frac{2rx_2}{k} - t'(x_2)w & -f(x_2) & -g(x_2) & -t(x_2) & c \\ 0 & e_1f(x_2) - \mu_1 - c_1w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2g(x_2) - \mu_2 - ew_2 & 0 & 0 \\ e_3t'(x_2)w_2 & -dw_2 & -fw_2 & e_3t(x_2) - \mu_3 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

dir. $J(E_2)$ nin özdeğerlerinden birinin $\lambda_2 = e_1f(x_2) - \mu_1 - cw_2$ olduğu görülür.

λ_2 özdeğerinde $w_2 = \frac{e_3x_2(r - ax_2 - \frac{rx_2}{k} - \frac{cm}{h})}{\mu_3}$ ifadesini yerine yazarak

$$\lambda_2 = e_1f(x_2) - \mu_1 - \frac{ce_3x_2(r - ax_2 - \frac{rx_2}{k} - \frac{cm}{h})}{\mu_3}$$

elde ederiz. Eğer $e_1f(x_2) - \mu_1 < 0$ ($x_2 < x_3$ ve $x_2 < x_4$ ise) olursa $|Arg(\lambda_2)| > \frac{q\pi}{2}$

dır. Şimdi $e_1f(x_2) - \mu_1 < 0$ ($x_2 > x_3$ ve $x_2 > x_4$ ise) olduğunu varsayalım.

$$\lambda_2 = \begin{cases} > 0, r < r_1 & \text{için} \\ < 0, r > r_1 & \text{için} \end{cases} = \frac{k \left(\frac{(e_1f(x_2) - \mu_1)\mu_3}{c_1e_3x_2} + ax_2 + \frac{cm}{h} \right)}{k - x_2}$$

bulunur. $\lambda_2 > 0$ için $|Arg(\lambda_2)| < \frac{q\pi}{2}$ olur. Bundan dolayı (4.1) denklem sistemindeki

$E_2(x_2, 0, 0, w_2, u_2)$ denge noktasının kararsız olduğu görülür.

Şimdi diğer özdeğer $\lambda_3 = e_2g(x) - \mu_2 - ew_2$ ele alalım w_2 'yi yerine yazarsak

$$\lambda_3 = e_2g(x_2) - \mu_2 - \frac{ee_3x_2 \left(r - ax_2 - \frac{rx_2}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{\mu_3}$$

elde edilir. Eğer $e_2g(x_2) - \mu_2 < 0$ ($x_2 < x_3$ ve $x_2 < x_4$ ise) olursa $|Arg(\lambda_2)| > \frac{q\pi}{2}$

dır. $e_2g(x_2) - \mu_2 < 0$ ($x_2 > x_3$ ve $x_2 > x_4$ ise) olduğunu varsayalım.

$$\lambda_3 = \begin{cases} > 0, r < r_1 & \text{için} \\ < 0, r > r_1 & \text{için} \end{cases} = \frac{k \left(\frac{(e_2g(x_2) - \mu_2)\mu_3}{ee_3x_2} + ax_2 + \frac{cm}{h} \right)}{k - x_2}$$

bulunur. $\lambda_3 > 0$ için $|Arg(\lambda_3)| < \frac{q\pi}{2}$ olur. Bundan dolayı (4.1) denklem sistemindeki

$E_2(x_2, 0, 0, w_2, u_2)$ denge noktası kararsız olduğu görülür.

Bu durumda (4.1) denklem sisteminin kararlı ya da kararsızlığını belirleyecek diğer üç özdeğer aşağıdaki indirgenmiş matrisden elde edilir.

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} r - 2ax_2 - \frac{2rx_2}{k} - t'(x_2)w_2 & -t(x_2) & -c \\ e_3 t'(x)w_2 & 0 & 0 \\ m & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Matrisinin karakteristik denklemi,

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \vartheta_1 \lambda^2 + \vartheta_2 \lambda + \vartheta_3$$

şeklinde yazılır. Ve

$$\vartheta_1 = h - r + 2ax_2 + \frac{2rx_2}{k} + t'(x_2)w_2,$$

$$\vartheta_2 = -cm - hr + 2hax_2 + \frac{2hrx_2}{k} + ht'(x_2)w_2 - e_2 t'(x_2)w_2 t(x_2)$$

$$\vartheta_3 = he_2 t'(x_2)w_2 t(x_2)$$

eşitlikleri ile gösterilir. $P(\lambda)$ polinomunun diskriminantı $\Delta_3(P)$ dir.

$$\Delta_3(P) = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & 0 \\ 0 & 1 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ 3 & 2\vartheta_1 & \vartheta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2\vartheta_1 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2\vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix} = 18\vartheta_1\vartheta_2(\vartheta_1\vartheta_2)^2 - 4\vartheta_3(\vartheta_1)^2 - 4(\vartheta_2)^2 - 27(\vartheta_3)^2$$

Teorem 4.3. İndirgenmiş $\tilde{J}$ matrisinin karakteristik denklemine göre aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlandığında denge noktasında (4.1) denklem sistemi kararlıdır .

(i) $D(P) > 0$, $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, $\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3 > 0$ için $\forall q \in (0,1)$

(ii) $D(P) > 0$, $\vartheta_1 \geq 0$, $\vartheta_2 \geq 0$, $\vartheta_3 > 0$, $0 < q < \frac{2}{3}$,

(iii) $D(P) < 0$, $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, $\vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_3$ için $\forall q \in (0,1)$

Sonuç olarak $E_2(x_2, 0, 0, w_2, u_2)$ denge noktası için $x_2 < x_3$, $x_2 < x_4$ veya ($x_2 > x_3$, $x_2 > x_4$ ve $r > r_1$) olur. Bunun yanında teorem (4.3) e göre (i),(ii) ve (iii) koşullarından herhangi biri sağlanırsa $E_2(x_2, 0, 0, w_2, u_2)$ denge noktasının yerel asimptotik olarak kararlı olduğu görülür.

Burada birinci ve üçüncü avcının olmadığı ikinci avcı ve avın olduğu (4.1) denklem sisteminin $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim: İlk olarak Jacobian matrisi yazalım.

$$J(E_3) = \begin{pmatrix} r - 2ax_3 - \frac{2rx_3}{k} - g'(x_3)z_3 & -f(x_3) & -g(x_3) & -t(x_3) & c \\ 0 & e_1f(x_3) - \mu_1 - az_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_2g'(x_3)z_3 & -bz_3 & 0 & -ez_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3t(x_3) - \mu_3 - fz_3 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

dir. $J(E_3)$ nin özdeğerlerinden birinin $\lambda_2^* = e_1f(x_3) - \mu_1 - az_3$ olduğu görülür.

λ_2^* özdeğerinde, $z_3 = \frac{e_2x_3(r - ax_3 - \frac{rx_3}{k} - \frac{cm}{h})}{\mu_2}$ ifadesini yerine yazarak

$$\lambda_2^* = e_1f(x) - \mu_1 - \frac{ae_2x_3(r - ax_3 - \frac{rx_3}{k} - \frac{cm}{h})}{\mu_2}$$

bulunur. Eğer $e_1f(x_3) - \mu_1 < 0$ ($x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ise) sağlarsa $|Arg(\lambda_2^*)| > \frac{q\pi}{2}$ olur. $e_1f(x_3) - \mu_1 > 0$ ve ($x_2 < x_3, x_2 < x_4$ ise) olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lambda_2^* = \begin{cases} > 0, r < r_2 & \text{için} \\ < 0, r > r_2 & \text{için} \end{cases} = \frac{k \left(\frac{(e_1f(x_3) - \mu_1)\mu_2}{c_1e_2x_3} + ax_3 + \frac{cm}{h} \right)}{k - x_3}$$

elde edilir. $\lambda_2^* > 0$ ise $|Arg(\lambda_2^*)| < \frac{q\pi}{2}$ dır. Dolayısıyla $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ denge noktasında kararsızdır.

Şimdi diğer özdeğer $\lambda_4 = e_3t(x) - \mu_3 - fz_3$ ele alalım z_3 ifadesini yerine yazarsak

$$\lambda_4 = e_3t(x) - \mu_3 - \frac{fe_2x_3(r - ax_3 - \frac{rx_3}{k} - \frac{cm}{h})}{\mu_2}$$

elde edilir. Eğer $e_3t(x_3) - \mu_3 < 0$ ($x_2 < x_3$ ve $x_2 < x_4$ ise) olursa $|Arg(\lambda_2)| > \frac{q\pi}{2}$ dır. $e_3t(x_3) - \mu_3 > 0$ ($x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ise) olduğunu kabul edelim. Ve

$$\lambda_4 = \begin{cases} > 0, r < r_2 & \text{için} \\ < 0, r > r_2 & \text{için} \end{cases} = \frac{k \left(\frac{(e_3t(x_3) - \mu_3)\mu_2}{c_1e_2x_3} + ax_3 + \frac{cm}{h} \right)}{k - x_3}$$

bulunur. $\lambda_4 > 0$ ise $|Arg(\lambda_4)| < \frac{q\pi}{2}$ dır. Bundan dolayı (4.1) denklem sistemindeki

$E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ denge noktasının kararsız olduğu görülür. Sistemin kararlı ya da kararsızlığını belirleyecek diğer üç özdeğer aşağıdaki indirgenmiş matrisden elde edilir.

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} r - 2ax_3 - \frac{2rx_3}{k} - g'(x_3)z_3 & -g(x_3) & -c \\ e_2 t'(x_3)z_3 & 0 & 0 \\ m & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Matrisinin denklemi

$$P^*(\lambda) = \lambda^3 + \beta_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \beta_3$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} \beta_1 &= h - r + 2ax_3 + \frac{2rx_3}{k} + g'(x_3)z_3 \\ \beta_2 &= -cm - hr - 2hax_3 + \frac{2hrx_3}{k} + hg'(x_3)z_3 - e_3 g'(x_3)z_3 g(x_3) \\ \beta_3 &= he_3 g'(x_3)z_3 g(x_3) \end{aligned}$$

gösterilir. $P^*(\lambda)$ polinomunun diskriminantını $\Delta_4(P^*)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \Delta_4(P^*) &= 18\beta_1\beta_2\beta_3 + (\beta_1\beta_2)^2 - 4\beta_3(\beta_1)^2 - 4(\beta_3)^2 - 27(\beta_3)^2 \\ &= 18\beta_1\beta_2\beta_3 + (\beta_1\beta_2)^2 - 4\beta_3(\beta_1)^2 - 4(\beta_3)^2 - 27(\beta_3)^2 \end{aligned}$$

Sonuç olarak $x_2 < x_3$, $x_2 < x_4$ veya ($x_2 > x_3$, $x_2 > x_4$ ve $r > r_1$) olur.

Bunun yanında teorem (4.3)'e göre (i),(ii) ve (iii) koşullarından herhangi biri sağlanırsa $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ denge noktasının yerel asimptotik olarak kararlı olduğu görülür.

Burada (4.1) denklem sisteminin ikinci ve üçüncü avcının olmadığı birinci avcı ve avın olduğu $E_4(x_4, y_4, 0, 0, u_4)$ denge noktasının kararlılığını inceleyelim: İlk olarak Jacobian matrisi yazalım.

$$J(E_4) = \begin{pmatrix} r - 2ax_4 - \frac{2rx_4}{k} - f'(x_4)y_3 & -f(x_4) & -g(x_4) & -t(x_4) & c \\ e_1 f'(x_4)y_4 & 0 & -ay_4 & -c_1 y_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 g(x_4) - \mu_2 - by_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 t(x_4) - \mu_3 - dy_4 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

dır.

$J(E_4)$ matrisinin özdeğerlerinden biri $\lambda_3 = e_2 g(x_4) - \mu_2 - by_4$ olduğu görülür. Bu denklemde

$$y_4 = \frac{e_1 x_4 \left(r - ax_4 - \frac{rx_4}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{\mu_1}$$

değerini yerine yazarak,

$$\lambda_3 = e_2 g(x_4) - \mu_2 - \frac{be_1 x_4 \left(r - ax_4 - \frac{rx_4}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{\mu_1}$$

ifadesini buluruz. Eğer $e_2 g(x_4) - \mu_2 < 0$ ($x_2 > x_3, x_2 > x_4$) sağlarsa $|Arg(\lambda_3)| > \frac{q\pi}{2}$ olur. $e_2 g(x_4) - \mu_2 > 0$ ($x_2 < x_3, x_2 < x_4$ ise) olduğunu kabul edelim. Ve

$$\lambda_3 = \begin{cases} > 0, r < r_3 & \text{için} \\ < 0, r > r_3 & \text{için} \end{cases} = \frac{k \left(\frac{(e_2 g(x_4) - \mu_2) \mu_1}{be_1 x_4} + ax_4 + \frac{cm}{h} \right)}{k - x_4}$$

dır. $\lambda_3 > 0$ olursa $|Arg(\lambda_3)| < \frac{q\pi}{2}$ dir. Dolayısıyla $E_4(x_4, y_4, 0, 0, u_4)$ denge noktası kararsızdır.

Şimdi diğer özdeğer $\lambda_4^* = e_3 t(x_4) - \mu_3 - dy_4$ ele alalım y_4 değerini yerine yazarsak

$$\lambda_4^* = e_3 t(x_4) - \mu_3 - \frac{de_1 x_4 \left(r - ax_4 - \frac{rx_4}{k} - \frac{cm}{h} \right)}{\mu_1}$$

elde edilir. Eğer $e_3 t(x_4) - \mu_3 < 0$ ($x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ise) olursa $|Arg(\lambda_4^*)| > \frac{q\pi}{2}$ dır. $e_3 t(x_4) - \mu_3 > 0$ ($x_2 < x_3$ ve $x_2 < x_4$ ise) olduğunu kabul edelim. Ve

$$\lambda_4^* = \begin{cases} > 0, r < r_3 & \text{için} \\ < 0, r > r_3 & \text{için} \end{cases} = \frac{k \left(\frac{(e_3 t(x_4) - \mu_3) \mu_2}{c_1 e_2 x_4} + ax_4 + \frac{cm}{h} \right)}{k - x_4}$$

bulunur. $\lambda_4^* > 0$ için $|Arg(\lambda_4^*)| < \frac{q\pi}{2}$ dir. Bundan dolayı (4.1) denklem sistemindeki $E_4(x_4, y_4, 0, 0, u_4)$ denge noktasının kararsız olduğu görülür. Sistemin kararlı ya da kararsızlığını belirleyecek diğer üç özdeğer aşağıdaki indirgenmiş matrsten elde edilir.

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} r - 2ax_4 - \frac{2rx_4}{k} - f'(x_4)y_4 & -g(x_4) & -c \\ e_1 f'(x_4)y_4 & 0 & 0 \\ m & 0 & -h \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Matrisinin karakteristik denklemi

$$P^{**}(\lambda) = \lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3$$

yazılır. Ve

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= h - r + 2ax_4 + \frac{2rx_4}{k} + f'(x_4)y_4 \\ \gamma_2 &= -cm - hr - 2hax_4 + \frac{2hrx_4}{k} + hf'(x_4)y_4 - e_3f'(x_4)y_4f(x_4) \\ \lambda_3 &= he_1f'(x_4)y_4f(x_4)\end{aligned}$$

gösterilir. $P^{**}(\lambda)$ polinomunun diskriminantı $\Delta_5(P^{**})$ ile gösterilir.

$$\Delta_5(P^{**}) = 18\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + (\gamma_1\gamma_2)^2 - 4\gamma_3(\gamma_1)^2 - 4(\gamma_3)^2 - 27(\gamma_3)^2$$

Sonuç olarak $x_2 < x_3$, $x_2 < x_4$ veya ($x_2 > x_3$, $x_2 > x_4$ ve $r > r_1$) olur.

Bunun yanında teorem 4.3 göre (i),(ii) ve (iii) koşullarından herhangi biri sağlanırsa $E_4(x_4, y_4, 0, 0, u_4)$ denge noktasının yerel asimptotik olarak kararlı olduğu görülür.

Dört türün birarada yaşam sürdüğü son denge noktası $E_5(x^*, y^*, z^*, w^*, u^*)$ pozitif denge noktasının yerel davranışını gözlemleyelim.

Dört türün birarada yaşadığı denge noktasıda (4.1) denklem sisteminin negatif olmayan en az bir çözümün olması için ihtiyaç olan şartların sağlandığını varsayalım.

(4.1) denklem sisteminin $E_5(x^*, y^*, z^*, w^*, u^*)$ denge noktasının Jacobian matrisi,

$$J(E_5) = \begin{pmatrix} r - 2ax^* - \frac{2rx^*}{k} - f'(x^*)y^* - g'(x^*)z^* - t'(x^*)w^* & -f(x^*) & -g(x^*) & -t(x^*) & -c \\ e_1f'(x^*)y^* & e_1f(x^*) - \mu_1 - az^* - cw^* & -ay^* & -c_1y^* & 0 \\ e_2g'(x^*)z^* & -bz^* & e_2g(x^*) - \mu_2 - by^* - ew^* & -ez^* & 0 \\ e_3t'(x^*)w^* & -dw^* & -fw^* & e_3t(x^*) - \mu_3 - dy^* - fz^* & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

dır. Karakteristik denklemi yazarsak

$$P^{***}(\lambda) = \lambda^5 + u_1\lambda^4 + u_2\lambda^3 + u_3\lambda^2 + u_4\lambda + u_5 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}u_1 &= h - r - 2ax^* + \frac{2rx^*}{k} + t'(x^*)w^* + g'(x^*)z^* + f'(x^*)y^* \\ u_2 &= cm - rh + 2hax^* + \frac{2hrx^*}{k} + ht'(x^*)w^* + hg'(x^*)z^* + hf'(x^*)y^* + a_1y^*bz^* \\ &\quad + c_1y^*dw^* \\ &\quad + ez^*dw^* + e_1f'(x^*)f(x^*)y + e_2g'(x^*)g(x^*)z + e_3t'(x^*)t(x^*)w^* \\ u_3 &= ha_1y^*bz^* + he_1f'(x^*)f(x^*) + he_2g'(x^*)g(x^*)z^* + ht'(x^*)t(x^*)w^* - ra_1y^*bz^* \\ &\quad - rcy^*dw^* - rez^*dw^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2ax^*a_1y^*bz^* + 2ax^*cy^*dw^* + 2ax^*cy^*dw^* + 2ax^*ez^*fw^* \\
& + \frac{2rx^*}{k} (a_1y^*bz^* + cy^*dw^* + ez^*fw^*) \\
& + a_1b(g'(x)(z^*)^2y^* + f'(x^*)(y^*)^2z^*) + cd(f'(x^*)(y^*)^2w^* + t'(x)(w^*)^2y^*) \\
& + ef(g'(x^*)(z^*)^2w^* + t'(x^*)(w^*)^2z) - f(x^*)a_1y^*e_2g'(x^*)z^* \\
& - f(x^*)cy^*e_3t'(x)w^* \\
& - g(x^*)bz^*e_1f'(x^*)y^* - g(x^*)ez^*e_3t'(x^*)w^* - t(x)dw^*e_1f'(x)y \\
& - t(x^*)fw^*e_2g'(x^*)z^* \\
u_4 = & cm(aybz + cydw - ezfw) - rh(aybz + cydw - ezfw) \\
& - h2ax(aybz + cydw + ezfw) + \frac{2hrx}{k} (aybz + cydw + ezfw) \\
& - h[ab(g'(x)z^2y^* + f'(x)(y^*)^2z) + cd(f'(x^*)(y^*)^2w + t'(x^*)(w^*)^2y^*) \\
& + ef(g'(x^*)(z^*)^2w^*) + t'(x^*)(w^*)^2z^*] \\
& - h[f(x^*)a_1y^*e_2g'(x^*)z^* - f(x^*)cy^*e_3t'(x^*)w^* - g(x^*)bz^*e_1f'(x^*)y^* \\
& - g(x^*)ez^*e_3t'(x^*) - t(x^*)dw^*e_1f'(x^*)y^* - t(x)fw^*e_2g'(x^*)z^*]
\end{aligned}$$

ifadelerine denk gelmektedir. Beşinci dereceden olan $P^{***}(\lambda)$ nın diskriminantı $\Delta_6(P^{***})$

$$\Delta_6(P^{***}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & 0 & 0 & 4u_1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_1 & 1 & 0 & 3u_2 & 4u_1 & 5 & 0 & 0 \\ u_3 & u_2 & u_1 & 1 & 2u_3 & 3u_2 & 4u_1 & 5 & 0 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 & u_4 & 2u_3 & 3u_2 & 4u_1 & 5 \\ u_5 & u_4 & u_3 & u_2 & 0 & u_4 & 2u_3 & 3u_2 & 4u_1 \\ 0 & u_5 & u_4 & u_3 & 0 & 0 & u_4 & 2u_3 & 3u_2 \\ 0 & 0 & u_5 & u_4 & 0 & 0 & 0 & u_4 & 2u_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix}$$

Aşağıdaki kriterlerden herhangi biri sağlanırsa $E_5(x^*, y^*, z^*, w^*, u^*)$ pozitif denge noktası asimptotik olarak kararlıdır.

(i) $D(\Delta) > 0$

$$\begin{aligned}
u_1 > 0, u_3 > 0, u_5 > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ 1 & u_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 \\ 0 & u_1 & u_3 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 & 0 \\ 0 & u_1 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_2 & u_4 \end{vmatrix} \\
> 0
\end{aligned}$$

(ii) $D(\Delta) < 0$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0 \quad ve \quad 0 < q < \frac{2}{3}$$

$$(iii) D(\Delta) < 0$$

$$u_1 > 0, u_3 > 0, u_5 > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ 1 & u_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 \\ 0 & u_1 & u_3 \end{vmatrix} \\ = 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 & 0 \\ 0 & u_1 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_2 & u_4 \end{vmatrix} = 0$$

4.4. Modelin Sayısal Analizi

Burada

$${}_0^c D_t^q V(t) = P(t, V(t))$$

kesirli türevin sayısal çözümü için çalışma yapacağız.

Kesirli analizin temel teoreminden (4.1) denklem sistemine uygulanarak,

$$V(t) - V(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t P(s, V(t)) (t-s)^{q-1} ds$$

bulunur. Burada $t = t_n = nh$ kullanılırsa

$$V(t_n) = V(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} P(s, V(t)) (t_n - s)^{q-1} ds \quad (4.22)$$

eşitliğine varılır. Aşağıdaki lineer yaklaşımla $P(t, V(t))$ fonksiyonunu elde ederiz.

$$P(t, K(t)) \approx P(t_{i+1}, V_{i+1}) + \frac{t_i - t_{i+1}}{h} (P(t_{i+1}, V_{i+1}) - P(t_i, V_i)), \quad t \\ \in [t_i, t_{i+1}] \quad (4.23)$$

Bu eşitlikte $V_i = V(t_i)$ alalım.

(4.2) ve (4.3) denklemlerinde gerekli işlemler yapılarak

$$V_n = V_0 + h^q (\Phi_n P(t_0, V_0) + \sum_{i=1}^n \psi_{n-i} P(t_i, V_i)) \quad (4.24)$$

sonucu bulunur[22]. Bu eşitlikte

$$\Phi_n = \frac{(n-1)^{q+1} - n^q(n-q-1)}{\Gamma(q+2)}, \\ \psi_n = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(q+2)}, & n = 0, \\ \frac{(n-1)^q - 2n^q + (n+1)^q}{\Gamma(q+2)}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

eşitlikleri kullanılır.

(4.1) Denklem sistemini çözmek için (4.24) kuralını kullanarak

$$\begin{aligned}x_n &= x_0 + h^q \left(Q_n P_1(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0) + \sum_{i=0}^n \Psi_{n-i} P_1(x_i, y_i, z_i, w_i, u_i) \right) \\y_n &= y_0 + h^q \left(Q_n P_2(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0) + \sum_{i=0}^n \Psi_{n-i} P_2(x_i, y_i, z_i, w_i, u_i) \right) \\z_n &= z_0 + h^q \left(Q_n P_3(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0) + \sum_{i=0}^n \Psi_{n-i} P_3(x_i, y_i, z_i, w_i, u_i) \right) \\w_n &= x_0 + h^q \left(Q_n P_4(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0) + \sum_{i=0}^n \Psi_{n-i} P_4(x_i, y_i, z_i, w_i, u_i) \right) \\u_n &= x_0 + h^q \left(Q_n P_5(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0) + \sum_{i=0}^n \Psi_{n-i} P_5(x_i, y_i, z_i, w_i, u_i) \right)\end{aligned}$$

iterasyon dizilerine ulaşırız.

Böylece;

$$\begin{aligned}P_1(x, y, z, w, u) &= x \left(r - ax - \frac{rx}{k} \right) - f(x)y - g(x)z - t(x)w - cu, \\P_2(x, y, z, w, u) &= e_1 f(x)y - \mu_1 y - ayz - c_1 yw, \\P_3(x, y, z, w, u) &= e_2 g(x)z - \mu_2 z - byz - ezw, \\P_4(x, y, z, w, u) &= e_3 t(x)w - \mu_3 w - dwy - fwz \\P_5(x, y, z, w, u) &= -hu + mx\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.



5. SONUÇ

Çalışmamızda geri besleme kontrol değişkeni kullanılarak üç avcının tek av üzerindeki modeli incelendi. İlk olarak üç avcı tek av ile oluşturulan denklem sisteminin değişkenlerinin adlandırılması yapıldı. Daha sonraki adımlarda denge noktalarının varlığı belirlendi ve sırasıyla, birinci denge noktası; dört türün yok olduğu denge noktası, ikinci denge noktası; avcılardan arınmış denge noktası, üçüncü denge noktası; birinci ve ikinci avcının olmayıp üçüncü avcı ve avın var olduğu denge noktası, dördüncü denge noktası; birinci ve üçüncü avcının olmayıp ikinci avcı ve avın var olduğu denge noktası, beşinci denge noktası; ikinci ve üçüncü avcının olmayıp birinci avcı ve avın var olduğu denge noktası, altıncı denge noktası; dört türün var olduğu pozitif denge noktası olduğu gösterildi. Elde edilen bu denge noktalarından faydalanılarak kararlılık çeşidi ve durumları incelendi. Son olarak ortaya konulan teorik sonuç, gerekli koşullar oluşturulduğunda dört türün bir arada yaşaması sonucunda oluşan pozitif dengenin kararlı olacağı belirlendi.



KAYNAKLAR

- [1] Dalir M.(2010); Bashour M. Applications of Fractional Calculus, Applied Mathematical Sciences, 21, 1021-1032
- [2] Salih Djilali, Behzad Ghanbari (2021).” Dynamical behavior of two predators–one prey model with generalized functional response and time-fractional derivative”, Advances in Difference Equations
- [3] Volterra, V.(original printing 1927), 1978 Variazioni et fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi, Scudo & Ziegler (Trans.), R. Comitato Talas so grafico Memoria , 1-81
- [4] Mei.M.”Convergence to Traveling Waves with Decay Rates for Solutions of the Initial Boundary Problem to a Relaxation model”, Journal of Differential Equation, 19991120
- [5] Kenneth W.Johnson (2019). ” Group Matrices, Group Determinants and Representation Theory”, Springer Science and Business Media LLC
- [6] Hong-Li Li, Ahmadjan Muhammadhaji, Long Zhang, Zhidong Teng(2018).”Stability analysis of a frakntional-order predator-prey model incorporating a constant prey refuge and feedback kontrol”, Advances in Difference Equation
- [7] Souvik Bhattacharya, Maia Marcheva (2010) oscillations in a size-srructured prey-predator model”,mathematical Biosciens
- [8] Guan, D..”Statistial mechanics in rotationally inelastic scattering of molecules from surface within the dynamical Lie algebraic method” Chemical Physics, 20020701
- [9] Yagle, Andrew E (2003). ”Advanced Signal Processing Algorithms architecstures and Implementations” XIII
- [10] Roman Cada, Shuya Chiba, Kenta Ozeki, Kiyoshi Yoshimoto (2017).”On Dominating Even Subgraphs in Cubic Graphs”,SIAM Journal on Discrete Mathematics
- [11] G. Casnati (2010). ”On the rationality of certain Weierstrass spaces of type (5,g)” Collectanea mathematica.
- [12] Prabir Panja, Dipak Kumar Jana (2020). ”A Novel Prey-Predator Quadratic Harvesting Model via Optimal Control Theory and Hopf Bifurcation”, Nepal Journal of Mathematical Sciences
- [13] Yao, “Nonuniquess of solutions for a singular diffusion problem”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 20070101
- [14] Başarır M., Mutlu S.(2022), Stability analysis of two predators-one prey model with feedback control and time fractional derivate, Proc. Int. Math. Sci., 4(1), 15-30

- [15] Ghaziani, R. K., Alidousti, J. and Eshkaftaki (2016). A. B., Stability and dynamics of a fractional order Leslie-Gower prey-predator model, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 2075-2086
- [16] https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/8866/mod_resource/content
- [17] Chen, J., Zeng, Z., Jiang P., (2014). Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks, *Neural Netw.*, 51, 1–8.
- [18] Petras, I. (2011), “Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation, Higher Education Press, Beijing”
- [19] Ghanabri, B., Djilali, S.(2021), Dynamical behavior of two predators–one prey model with generalized functional response and time-fractional derivative, *Advances in difference Equations*, 235, 1-19
- [20] Cox, D.A., *Galois Theory*,(2012). 2.baskı, A John Wiley & Sons,1-570
- [21] https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/8866/mod_resource/content/0/11.Hafta
- [22] Garrappa, R. (2018). Numerical solution of fractional differential equations: a survey and a software tutorial, *Mathematics*, 6 (2), 1–16
- [23] Podlubny I. (1999) *Fractional Order Systems and PID Controllers* IEEE Transactions on Automatic Control , 44, 208-214

EKLER

Bu bölümde üzerinde çalışılan üç avcı tek av modelinin ortaya konulan denge noktaları ve bu noktaların kararlılık durumlarıyla ilgili sonuçlar gösterilmiştir.

Denge Noktaları

- 1) Dört türün yok olduğu $E_0(0,0,0,0,0)$, denge noktasıdır.
- 2) Avcılardan arınmış, sadece avın var olduğu $E_1(x_1, 0,0,0, u_1)$ denge noktasıdır.
- 3) Birinci ve ikinci avcının olmadığı üçüncü avcı ve avın olduğu $E_2(x_2, 0,0, w_2, u_2)$ denge noktasıdır.
- 4) Birinci ve üçüncü avcının olmadığı ikinci avcı ve avın olduğu $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$ denge noktasıdır.
- 5) İkinci ve üçüncü avcının olmadığı birinci avcı ve avın olduğu $E_4(x_4, y_4, 0,0, u_4)$ denge noktasının
- 6) Dört türün bir arada yaşam sürdüğü denge noktası $E_5(x^*, y^*, z^*, w^*, u^*)$ pozitif denge noktasıdır.

Önerme 5.1 $E_0(0,0,0,0,0,)$ denge noktası aşağıdaki kriterlerden herhangi birini sağlaması durumunda yerel olarak asimptotik olarak kararlıdır.

$$(i) \quad h \geq r \text{ ve } rh < cm,$$

$$(ii) \quad h < r, \quad rh < cm, \quad (h + r)^2 < 4cm \text{ ve}$$

$$0 < q < \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{4(cm - rh) - (h - r)^2}}{r - h} \right)$$

Önerme 5.2 $E_1(x_1, 0,0,0, u_1)$ aşağıdaki kriterlerden herhangi biri sağlanırsa sistemde avcının olmadığı denge noktası yerel olarak asimptotik olarak kararlıdır. $x_2 = t^{-1} \left(\frac{u_3}{e_3} \right), x_3 = g^{-1} \left(\frac{u_2}{e_2} \right) x_4 = f^{-1} \left(\frac{u_1}{e_1} \right)$

$$(i) \quad h^2 + rh - 2cm \geq 0, \quad rh > cm \text{ and } x < \tilde{x} = \min\{x_2, x_3, x_4\}$$

$$(ii) \quad h^2 + rh - 2cm < 0, \quad rh > cm, \quad (h^2 + rh - 2cm)^2 < 4h^2(rh - cm),$$

$$0 < q < \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\sqrt{4h^2(rh - cm) - (h^2 + rh - 2cm)^2}}{2cm - h^2 - rh} \right) \text{ and } x < \tilde{x}$$

$$= \min\{x_2, x_3, x_4\}$$

Önerme 5.3. İndirgenmiş $\tilde{J}$ matrisinin karakteristik denklemine göre aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlandığında denge noktasında denklem sistemi kararlıdır.

$$(i) D(P) > 0, \vartheta_1 > 0, \vartheta_3 > 0, \vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3 > 0 \text{ için } \forall q \in (0,1)$$

$$(ii) D(P) > 0, \vartheta_1 \geq 0, \vartheta_2 \geq 0, \vartheta_3 > 0, 0 < q < \frac{2}{3},$$

$$(iii) D(P) < 0, \vartheta_1 > 0, \vartheta_3 > 0, \vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_3 \text{ için } \forall q \in (0,1)$$

Önerme 5.4 $E_2(x_2, 0, 0, w_2, u_2)$, birinci ve ikinci avcının olmadığı üçüncü avcının olduğu denge noktası için $x_2 < \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)}$ durumunda kararlılık koşullarını görelim.

a) Eğer $x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ve $r < r_1$ olursa E_2 denge noktası denklem sisteminde kararsızdır.

b) Eğer $x_2 < x_3, x_2 < x_4$ veya ($x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ve $r > r_1$) ise ve teorem1. koşullarından herhangi birini sağlarsa E_2 denge noktası denklem sisteminde yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Önerme 5.5 $E_3(x_3, 0, z_3, 0, u_3)$, birinci ve üçüncü avcının olmadığı ikinci avcının olduğu denge noktası için $x_3 < \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)}$ durumunda kararlılık koşullarını görelim.

a) Eğer $x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ve $r < r_1$ olursa E_3 denge noktası denklem sisteminde kararsızdır.

b) Eğer $x_2 < x_3, x_2 < x_4$ veya ($x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ve $r > r_1$) ise ve teorem1. koşullarından herhangi birini sağlarsa E_3 denge noktası denklem sisteminde yerel asimptotik olarak kararlıdır.

5) $E_4(x_4, y_4, 0, 0, u_4)$, ikinci ve üçüncü avcının olmadığı birinci avcının olduğu denge noktası için $x_4 < \frac{k(rh - cm)}{h(ak + r)}$ durumunda kararlılık koşullarını görelim.

a) Eğer $x_2 > x_3, x_2 > x_4$ ve $r < r_1$ olursa E_4 denge noktası denklem sisteminde kararsızdır.

b) Eğer $x_2 < x_3$, $x_2 < x_4$ veya ($x_2 > x_3$, $x_2 > x_4$ ve $r > r_1$) ise ve teorem1. koşullarından herhangi birini sağlarsa E_4 denge noktası denklem sisteminde yerel asimptotik olarak kararlıdır.

Önerme 5.6 $E_5(x^*, y^*, z^*, w^*, u^*)$, dört türün hep birlikte yaşadığı pozitif denge noktası için aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlandığında asimptotik kararlıdır.

(i) $D(\Delta) > 0$

$$u_1 > 0, u_3 > 0, u_5 > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ 1 & u_2 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 \\ 0 & u_1 & u_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 & 0 \\ 0 & u_1 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_2 & u_4 \end{vmatrix} > 0$$

(ii) $D(\Delta) < 0$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0 \text{ ve } 0 < q < \frac{2}{3}$$

(iii) $D(\Delta) < 0$

$$u_1 > 0, u_3 > 0, u_5 > 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ 1 & u_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 \\ 0 & u_1 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & 0 & 0 \\ 1 & u_2 & u_4 & 0 \\ 0 & u_1 & u_3 & u_4 \\ 0 & 1 & u_2 & u_4 \end{vmatrix} = 0$$



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Sare SAĞLAM

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2015, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yükseklisans** : Devam Ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER

Yıl	Yer	Görev
2016/2017	Devlet lisesi	Ücretli öğretmen
2018/2021	Özel lise, kurs, vipkurs	Öğretmen