



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ÜÇ BOYUTLU HOLOGRAM DESTEKLİ ÖĞRENMEDE
LİNEER CEBİR KAVRAMLARININ OLUŞTURULMA
SÜRECİNİN İNCELENMESİ

DİLEK HAZAR

İzmir
2021

**DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ**

**ÜÇ BOYUTLU HOLOGRAM DESTEKLİ ÖĞRENMEDE
LİNEER CEBİR KAVRAMLARININ OLUŞTURULMA
SÜRECİNİN İNCELENMESİ**

DİLEK HAZAR

**DANIŞMAN
PROF.DR. CENK KEŞAN**

**İzmir
2021**

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi” adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmamın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

29/07/2021

Dilek HAZAR



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 09/08/2021

Tez Başlığı:

Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 220 sayfalık kısmına ilişkin, 09/08/2021 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı % 3** tür.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz

Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒ X

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) X

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☐

☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça hariç, ☒ Alıntılar dâhil, ☒ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça dâhil, ☐ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒ X EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde.	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : DİLEK HAZAR
Öğrenci No : 2014950184
Anabilim Dalı : İLKÖĞRETİM
Programı : İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
Statüsü : Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒ X

ÖĞRENCİ

DANIŞMAN

DİLEK HAZAR

PROF.DR. CENK KEŞAN

09/08/2021

09/08/2021

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu* formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yüklemeye yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Lisans, yüksek lisans ve doktora öğrenim sürecim boyunca araştırmalarım, projelerim ve akademik çalışmalarımda her zaman destek olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Cenk KEŞAN'a, tez çalışmamın her aşamasında bana akademik desteğini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Süha YILMAZ ve Prof. Dr. Ercan AKPINAR'a, hologram cihazını ve okuma salonunu fakültemize kazandırarak bu projenin teknik altyapısını destekleyen Buca Eğitim Fakültesi Yönetimi'ne, hologram sisteminin tasarlanması-geliştirilmesi-uygulanması aşamalarında desteğini esirgemeyen Osman URHAN ve Veysel Ziya TEKALP başta olmak üzere EYTALAB'a,

Doktora öğrenimim süresince araştırmalarımda ve bilimsel etkinliklere katılımımda bana maddi olarak destek olan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı'na,

Doktora tezimin 2019.KB.EGT.004 nolu projesini destekleyerek HoloDEU yazılımının geliştirilmesini mümkün kılan Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne,

Tez çalışmamın veri toplama sürecinde araştırmama katkı sağlayan tüm öğrencilerime teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan en büyük destekçilerim canım babam Hüseyin Metin İZGİOL, annem Aliye İZGİOL, kardeşlerim Aslı İZGİOL ve Murat İZGİOL ve yoğun tez çalışmalarına sabır gösteren ve manevi olarak en büyük destekçim eşim Canberk HAZAR iyi iki varsınız...

Dilek HAZAR

29/07/21

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vii
ABSTRACT	x
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Amaç ve Önem.....	5
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri	7
1.4. Sınırlılıklar	7
1.5. Varsayımlar	8
1.6. Tanımlar	8
1.7. Kısaltmalar	9
BÖLÜM II	10
KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	10
2.1. Lineer Cebir'i Öğrenme	10
2.2. APOS Teorisi ve Lineer Cebir	18
2.3. Lineer Cebir ve Geometri.....	26
2.4. Bazı Lineer Cebir Kavramları	28
2.4.1. Vektör Uzayı Kavramı	28
2.4.2. Lineer Dönüşüm Kavramı.....	32
2.4.3. Öz Değer-Öz Vektör Kavramı	33
2.5. Hologram ve Lineer Cebir.....	36
2.5.1. Hologram Teknolojisi ve Fiziksel Özellikleri.....	36
BÖLÜM III	38
YÖNTEM	38
3.1. Araştırmanın Deseni.....	38
3.2. Çalışma Grubu.....	38

3.2.1. Hologram Destekli Öğretim ve HoloDEU Yazılımının Pilot Araştırmasının Çalışma Grubu	38
3.2.2. Hologram Destekli Lineer Cebir Öğretimi Araştırmasının Çalışma Grubu ...	39
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları.....	39
3.3.1. Vektör Uzayı Problemlerinin Oluşturulması	40
3.3.2. İç Çarpım Uzayı Problemlerinin Oluşturulması	43
3.3.3. Lineer Dönüşüm Problemlerinin Oluşturulması	45
3.3.4. Öz Değer-Öz Vektör Problemlerinin Oluşturulması	46
3.3.5. Görüşme.....	48
3.3.6. Araştırmacı Gözlemleri.....	48
3.4. Tasarım, Geliştirme, Uygulama Süreci	49
3.4.1. Hologram Destekli Öğretim İçin HoloDEU Yazılımının Tasarımı ve Geliştirilmesi.....	49
3.4.2. HoloDEU Yazılımının Pilot Çalışması	50
3.4.3. Hologram Destekli Etkinlikler	51
3.5. Verilerin Analizi.....	52
3.6. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği.....	52
3.7. Araştırmacının Rolü	55
BÖLÜM IV	56
BULGULAR.....	56
4.1. Vektör Uzayı Öğretimi (Pilot Çalışma Bulguları)	56
4.1.1.HoloDEU Yazılımı ve 3B Hologram Cihazı Sınıfta Kullanımı.....	56
4.1.2.3B Hologram Destekli Vektör Uzayı Öğretimine İlişkin Öğrenci Görüşleri (Pilot Çalışma)	59
4.2. Lineer Uzay Kavramlarını Öğrenme Sürecine İlişkin Bulgular ve Yorumlar ...	65
4.2.1.Vektör Uzayı Kavramını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar ..	65
4.2.2.İç Çarpım Uzayı Kavramını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar	87

4.2.3. Lineer Dönüşüm Kavramını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar	101
4.2.4. Öz Değer-Öz Vektör Kavramlarını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar	125
4.3. Lineer Uzay Kavramlarını Öğretirken Kullanılan Geometrik Düşüncelere İlişkin Bulgular ve Yorumlar.....	136
BÖLÜM V	142
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	142
5.1. Tartışma.....	142
5.2. Sonuç ve Öneriler.....	146
KAYNAKÇA.....	151
EKLER.....	163
EK 1. Öğrencinin Akademik Özgeçmişi	163
EK 2. Geçerlik Güvenirlik İzin Belgesi.....	165
EK 3. Geçerlik Güvenirlik Çalışması Bilgilendirilmiş Onam Formu.....	166
EK 4. Pilot Çalışma İzin Belgesi	167
EK 5. Pilot Çalışma Bilgilendirilmiş Onam Formu.....	168
EK 6. Asıl Uygulama İzin Belgesi	169
EK 7. Asıl Uygulama Bilgilendirilmiş Onam Formu	170
EK 8. Vektör Uzayı Problemleri	171
EK 9. Vektör Uzayı Problemlerini Değerlendirme Rubriği	172
EK 10. İç Çarpım Uzayı Problemleri	173
EK 11. İç Çarpım Uzayı Problemlerini Değerlendirme Rubriği	174
EK 12. Lineer Dönüşüm Problemleri	176
EK 13. Lineer Dönüşüm Problemlerini Değerlendirme Rubriği.....	177
EK 14. Öz Değer-Öz Vektör Problemleri.....	179
EK 15. Öz Değer-Öz Vektör Problemlerini Değerlendirme Rubriği	180
EK 16. Görüşme Formu.....	181
EK 17. HoloDEU Yazılımının Pilot Çalışmasının Ders Planı.....	182
EK 18. Pilot Çalışmada Vektör Uzayı Problemlerindeki Öğrenci Cevaplarının APOS Teorisine Göre Çözümlemesi	189
EK 19. İç Çarpım Uzayı Ders Planı.....	191
EK 20. Lineer Dönüşüm Ders Planı	198
EK 21. Öz Değer-Öz Vektörler Ders Planı	201

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.Vektör uzayı sorularının kodlamaları	43
Tablo 2.İç çarpım uzayı sorularının kodlamaları	44
Tablo 3.Lineer dönüşüm sorularının kodlamaları	46
Tablo 4.Öz değer-öz vektör sorularının kodlamaları	47
Tablo 5. Kavramlara göre öğretim saatleri	51
Tablo 6.Olumlu görüşlerin temalara göre frekansları	59
Tablo 7.Olumsuz görüşlerin temalara göre frekansları	62
Tablo 8.Vektör uzayı ölçme aracının değerlendirmesi	65
Tablo 9.Vektör uzayı problemlerinin değerlendirilmesi	66
Tablo 10.Vektör uzayı problemlerindeki hataların değerlendirilmesi	66
Tablo 11. İç çarpım uzayı problemlerinin değerlendirilmesi	87
Tablo 12. İç çarpım uzayı problemlerindeki hataların değerlendirilmesi	88
Tablo 13. Lineer dönüşüm problemlerinin değerlendirilmesi.....	101
Tablo 14. Lineer dönüşüm problemlerindeki hataların değerlendirilmesi	102
Tablo 15. Öz değer-öz vektör problemlerinin değerlendirilmesi	125
Tablo 16. Öz değer-öz vektör problemlerindeki hataların değerlendirilmesi	126
Tablo 17.Öğrencilerin geometrik düşünme becerileri	136

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Lineer cebirde iki farklı ileri matematiksel düşünme seviyesi.....	10
Şekil 2. Lineer cebirde görselleştirmenin karakterizasyonu şeması.....	13
Şekil 3. ACE Öğretim Döngüsü ile Genetik çözümleme arasındaki ilişki.....	19
Şekil 4. Bilgisayar tabanlı pedagojik yaklaşım, zihinsel mekanizma ve zihinsel yapılar	20
Şekil 5. APOS Teorisi	21
Şekil 6. Çoklu temsillerin işlevleri	26
Şekil 7. Matematik eğitiminde teknolojinin didaktik işlevleri	28
Şekil 8. Vektör uzayı aksiyom sisteminin mantıksal yapısı	29
Şekil 9. Vektör uzayının genetik çözümlemesinin şematik gösterimi.....	29
Şekil 10. Vektör uzayı genetik çözümleme.....	30
Şekil 11. Lineer dönüşüm genetik çözümlemesi	32
Şekil 12. Bir nesne olarak dönüşümle başlayan süreçler olarak doğrusallık özelliklerinin yapılandırılması.....	32
Şekil 13. Öz değer ve öz vektör kavramlarının genetik çözümlemesi	34
Şekil 14. 3B Hologram cihazı ve okuma salonu	56
Şekil 15. Araştırmacılar tarafından geliştirilen HoloDEU yazılımının arayüzü.....	58
Şekil 16. 3B Hologram cihazında örnek bir tasarım	58
Şekil 17. İç çarpım uzayı öğrenimi sürecinde üretilen bir 3B Hologram modeli.....	137
Şekil 18. Öz değer-öz vektör öğrenimi sürecinde üretilen bir 3B Hologram modeli.....	141

ÖZET

ÜÇ BOYUTLU HOLOGRAM DESTEKLİ ÖĞRENMEDE LİNEER CEBİR KAVRAMLARININ OLUŞTURULMA SÜRECİNİN İNCELENMESİ

Üniversite matematiğinin temel derslerinden olan lineer cebir, öğrencilerin öğrenmede güçlük yaşadığı soyut kavramlardan oluşmaktadır. Matematik kavramını öğrenirken somuttan soyuta gerçekleşmesi gereken öğrenme sürecinde soyut kavramların somut temellere dayandırılmadığında öğrenciler kavramsal anlamadan ziyade işlemsel sürece odaklanarak hareket edebilirler. Biçimsel dünyada tanımlar ve teoremler ile işlenen lineer cebir dersinde öğrenciler problem çözme sürecinde işlemsel sürece odaklanırlar ve kavramların doğasını algılayamazlar. Önceden öğrendikleri kavramlar (vektör gibi) ile yeni öğrendikleri kavramların çelişmesi ya da kavramın doğası gereği (uzayın sonsuz olması hissi) ortaya çıkan algılar lineer cebir kavramlarını öğrenmeye engel olabilir. Kavramların gerçek dünya uygulamalarına derslerde yer verilmemesi biçimsel kavramaya ve nesne anlayışına ulaşmada güçlük oluşturabilir. Yaşanan güçlüklerin sebeplerinden biri, üç boyutlu uzay uygulamalarında geometrik temsillerin kullanımının yetersiz kalmasıdır. Üç boyutlu geometrik temsiller iki boyutlu düzlemsel olan bilgisayar ekranı ya da tahta üzerinde çizildiğinde, öğrenciler şekilsel temsilleri üç boyutlu olarak algılayamamaktadır.

Bilgisayarda hazırlanan modelleri ışığın kırınımı kurallarını kullanarak havada üç boyutlu olarak oluşturmaya imkân tanıyan üç boyutlu hologram cihazları, lineer cebir dersinde yaşanan bu durumun oluşturduğu güçlükleri ortadan kaldırabilir. 3B Hologram teknolojileri kullanılarak oluşturulabilen lineer cebir modelleri lineer cebir kavramlarının gerçek yaşam örneklerini üç boyutlu olarak görmeye imkân vererek öğrencilere kavramsal anlamalarında ve nesne anlayışına sahip olmalarına yardımcı olabilir.

Araştırmanın temel amacı üç boyutlu hologram destekli öğretimde lineer cebir kavramlarının oluşturulma sürecinin incelenmesidir. Çalışma üç ayrı durum çalışması ile desenlenmiştir. Birinci durum çalışmasının amacı lineer cebir kavramlarını öğrenmede yaşanan güçlükler alan yazın taraması, öğrencilerin bir kavramı nasıl öğrendiğinin yol haritasını sunan lineer cebir kavramlarının genetik çözümlemelerinin APOS teorisi çerçevesinde gerçekleştirilen geçerlik-güvenirlik çalışması ve araştırmacı deneyimleriyle belirlenmesidir. Genetik çözümlemelerin ve araştırmacı tarafından hazırlanan lineer cebir problemlerinin geçerlik güvenirlik çalışması için Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim gören ve lineer cebir 2 dersini başarıyla

tamamlayan beş öğrenci ile çalışılmıştır. Verilerin analizinde betimsel analiz kullanılmıştır ve problemleri değerlendirme rubrikleri ile analizler gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin vektör uzayı problemlerindeki hataların ikili işlem, küme ve cisim şemalarındaki, iç çarpım uzayı problemlerinde fonksiyon şemasındaki eksikliklerden kaynaklandığı görülmektedir. Lineer dönüşüm problemlerinde lineer dönüşümün tersinin bulunmasında dönüşüm matrisinin tersinin olması ve determinantının sıfırdan farklı olması gerektiğini ifade ettikleri görülmüştür. Ancak aynı uzaylar arasında lineer dönüşümün tanımlanması gerektiğini ifade etmedikleri için matris temsile odaklandıkları ve kavramın geometrik anlayışına dikkat etmedikleri anlaşılmaktadır. Öz değer ve öz vektörler problemlerinde ise lineer dönüşümdeki görüntüsü kendisinin katı olan vektörler olduğunu ifade edemediği ve geometrik anlamını cebirsel temsillerle ilişkilendirerek açıklayamadığı görülmüştür. Genel olarak bu kavramlara ilişkin problemlerin çözümlerinde kavramların geometrik anlamları ile ilişkilendirmede güçlük yaşandığı gözlemlenmiştir.

Bu güçlükleri gidermesi planlanan üç boyutlu hologram uygulamalarıyla ilgili ihtiyaç analizi yapılmıştır. Bu ihtiyaçları karşılayacak yazılım ve platformları içerecek HoloDEU yazılımı ve hologram sistemi geliştirilmiştir. Geliştirilen HoloDEU ve hologram sisteminin pilot çalışması Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim gören ve lineer cebir 2 dersini alan öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Durum çalışması ile desenlenen bu çalışmadan elde edilen görüşme ve gözlem verileri içerik analizi ile, vektör uzayı problemlerinden elde edilen veriler ise betimsel analiz ile incelenmiştir. Araştırma sonunda HoloDEU ve hologram sisteminin zayıf yönlerini güçlendirecek işlevler belirlenerek yazılım ve hologram sistemi güncellenmiştir. Ayrıca HoloDEU ve hologram sisteminin matematik eğitiminde ve diğer alanlardaki eğitim süreçlerinde kullanımına ilişkin pedagojik önerilerde bulunulmuştur.

Vektör uzayı sorularına verilen yanıtlar incelendiğinde APOS teorisine göre nesne aşamasında beceri gösteren yedi öğrenci seçilmiştir. Araştırmanın asıl uygulama çalışma grubunu Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim görmekte olan öğrenciler oluşturmaktadır. Lineer cebir öğretiminde uygulanacak etkinlikler APOS teorisinin bir parçası olan etkinlik-sınıf tartışması ve ev ödevleri (ESA (ACE)) öğretim döngüsü çerçevesine uygun olarak hazırlanmıştır. Öğretim sonunda, araştırmacı tarafından uzman görüşleri alınarak hazırlanan açık uçlu problemler öğrencilere uygulanmıştır. Elde edilen veriler betimsel analiz ile APOS teorisi çerçevesinde değerlendirilmiştir.

Elde edilen bulgulara göre öğrenciler nesne aşamasında beceriler sergilemiştir. Yapılan bazı hataların kavramlara ait genetik çözümlemelerdeki ön bilgi gerektiren

kavramlardaki yetersizliklerden kaynaklandığı görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin hologram destekli öğretimde kullandığı modelleri kullanarak soru çözümlerini açıkladıkları görülmüştür. Ek olarak HoloDEU yazılımı ve hologram sistemi ile gerçekleştirilecek öğretimde öğrencilerin derse katılımlarının, ilgisinin ve lineer cebir gibi soyut kavramlardan oluşan bir derste ve cebirsel çözümü seçebilecekleri problem çözümlerinde geometrik söylemlerinin olduğu görülmüştür.

3B Hologram cihazları ile HoloDEU ve 3B Hologram yazılımı sisteminin kullanımının yaygınlaştırılması, gerçekçi öğretimi destekleyen lineer denklem sistemleri, lineer bağımsızlık gibi diğer lineer cebir kavramlarının, matematik kavramlarının, fen, coğrafya derslerindeki kavramların öğretiminde kullanılması ve öğretim sürecinin, başarıların, tutumların, motivasyonların... vb. incelenmesi ile yeni araştırılmakta olan 3B hologram destekli öğretim süreci ile ilgili daha ayrıntılı bilgi elde edilebilir.

Anahtar Kelimeler: 3B Hologram, HoloDEU, APOS Teorisi, lineer cebir, geometrik yaklaşımlar.

ABSTRACT

CONSTRUCTION OF LINEAR ALGEBRA CONCEPTS THROUGH 3D HOLOGRAM-BASED LEARNING

Linear algebra, which is one of the basic courses of university mathematics, consists of abstract concepts that students have difficulty in learning. While learning the concepts of mathematics, when abstract concepts are not based on concrete foundations in the learning process, which should take place from concrete to abstract, students may focus on operational process rather than conceptual understanding. In a linear algebra course, which is taught with definitions and theorems in the formal world, students focus on the operational process during problem-solving and cannot perceive the nature of the concepts. The conflict between the concepts they have learned before (such as vectors) and the concepts they have just learned, or the perceptions that arise due to the nature of the concept (the feeling that space is infinite) may prevent learning linear algebra concepts. Not including real-world applications of concepts in lessons can create difficulties in reaching formal comprehension and object understanding. One of the reasons for the difficulties experienced is the insufficient use of geometric representations in three-dimensional space applications. When three-dimensional geometric representations are drawn on a two-dimensional planar computer screen or blackboard, students may not be able to perceive figural representations as three-dimensional.

Three-dimensional hologram devices, which allow the models prepared on a computer to be created in three dimensions using the diffraction of light, can eliminate these difficulties in a linear algebra course. Linear algebra models that can be created using 3D hologram technologies can help students to have conceptual understanding and object understanding by enabling real-life examples of linear algebra concepts to be seen in three dimensions.

The main purpose of the research is to examine the process of creating linear algebra concepts in three-dimensional hologram-supported teaching. The study was designed with three separate case studies. The aim of the first case study was to review the literature on the difficulties experienced in learning linear algebra concepts and to determine the genetic analyses of linear algebra concepts, which provide a roadmap of how students learn a concept, with the validity-reliability study carried out within the framework of the APOS theory and researcher experiences. For the validity and reliability study of genetic analyses and linear algebra problems prepared by the researcher, five students studying at Dokuz Eylul University Elementary Mathematics Teaching Department and taking a linear algebra 2 course were

studied. Descriptive analysis was used in the analysis of the data and analyses were carried out with rubrics to evaluate problems. It is seen that the errors in the vector space problems of the students were caused by the deficiencies in the binary operations and set and field diagrams, as well as in the function diagrams in the inner product space problems. It has been observed that in finding the inverse of the linear transformation in linear transformation problems, the inverse of the transformation matrix must be inverse, and its determinant must be different from zero. However, since it was not taught that linear transformation should be defined between the same spaces, it is understood that students focused on matrix representation and did not pay attention to the geometric understanding of the concept. In the problems of eigenvalues and eigenvectors, it was seen that they could not express that the vectors in linear transformation are solids and could not explain their geometric meaning by associating them with algebraic representations. In general, it has been observed that there was difficulty in associating the geometric meanings of the concepts with the solutions of the problems related to these concepts.

A needs analysis has been made regarding the three-dimensional hologram applications that were to overcome these difficulties. HoloDEU software and the hologram system were developed to include software and platforms to meet these needs. The pilot study of this HoloDEU software and the hologram system was carried out with students studying at Dokuz Eylul University Elementary Mathematics Teaching Department and taking a linear algebra 2 course. The interview and observation data obtained from this study, which was designed with a case study, were analyzed by content analysis and the data obtained from the vector space problems were analyzed by descriptive analysis. At the end of the research, the weaknesses of HoloDEU software and the hologram system were strengthened, the functions were determined, and the software and hologram system were updated. In addition, pedagogical suggestions were made regarding the use of HoloDEU software and the hologram system in mathematics education and other educational processes.

When the answers given to the vector space questions were examined, seven students who showed skills at the object stage according to the APOS theory were selected. The main application working group of the research consists of students studying at Dokuz Eylul University, Department of Elementary Mathematics Education. The activities to be applied in linear algebra teaching have been prepared in accordance with the activity-class discussion and exercises (ACE) teaching cycle framework, which is a part of the APOS theory. At the end of the teaching, open-ended problems prepared by the researcher with input from expert

opinions were given to the students. The data obtained were evaluated within the framework of the APOS theory with descriptive analysis.

According to the findings, the students exhibited skills at the object stage. It has been seen that some mistakes made were caused by inadequacies in concepts that require prior knowledge in the genetic analysis of concepts. In addition, it was seen that the students explained their problem solutions by using the models they used in hologram supported teaching. In addition, it has been observed that in teaching carried out with HoloDEU software and the hologram system, students actively participated, they were interested, they were able to use geometric expressions consisting of abstract concepts such as linear algebra, and they could solve problems where they had to choose the algebraic solution.

More detailed information about the newly researched 3D hologram based learning can be obtained by popularizing the use of 3D Hologram devices, HoloDEU and 3D Hologram software system, using 3D holographic technologies and HoloDEU in teaching other linear algebra concepts such as systems of linear equations, linear independence, mathematical concepts, concepts in science and geography lessons supporting realistic teaching and examining teaching process, achievements, attitudes, motivations...etc.

Keywords: 3D Hologram, HoloDEU, APOS Theory, linear algebra, geometric modes.

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Öğrencilerin belirli matematik kavramını öğrendiği ve bu kavramlara olumlu matematiksel eğilimler geliştirdiği sınıflar oluşturmak ve sürdürmek zorlu bir çabadır. Öğitmenler için bu zorluklar; öğrencilerin matematik yaparak matematik öğrenmeleri için fırsatlar sunan görevler oluşturmak veya seçmek, öğrenci fikirlerinin paylaşıldığı ve değer verildiği küçük grup ve tüm sınıf tartışmalarına öncülük etmek ve öğrencilerin sezgisel, formel olmayan veya gelişen fikirlerini geleneksel ve formel matematikle ilişkilendirmeyi içerir (Zandieh, Wawro ve Rasmussen, 2017).

Piaget'e göre (1970) genetik epistemolojinin temel araştırma sorunu, soyutlama ve öz-düzenleme dediğimiz açıklayıcı etkenlere duyulan ihtiyacı yaratan bu yeniliklerin inşasının mekanizmasıyla ilgilidir. Çünkü genetik epistemolog için bilgi, sürekli inşa etmenin sonucudur ve her anlama eyleminde bir dereceye kadar keşif söz konusudur; gelişme sürecinde bir aşamadan diğerine geçiş her zaman ne dış dünyada ne de insanın zihninde daha önce var olmayan yeni yapıların oluşumuyla karakterize edilir.

Piaget'nin çalışmaları;

- (1) Bir çocuğun görüşü, bir yetişkininkinden niteliksel olarak farklıdır,
- (2) Fikir oluşturmak için olası entelektüel kaynaklar olarak görülen genel gelişim aşamaları sırayla gerçekleşir ve çocukları incelemek için önemli arka plan bilgileri sağlar,
- (3) Bir fikrin gelişimi, onun anlamını, genetik epistemoloji olarak bilinen, biçimsel bir tanım ve ilişkiler dizisinin basit bir ifadesiyle belirler,
- (4) İlk üç öncül nedeniyle, asimilasyon ve uyum olmak üzere iki ana tür karşılaşmaya ve yeni fikir ve bilgilere verilen tepkilere tanık olabilir,
- (5) Eylemden işleme, matematiksel nesneye geçiş süreci, onun yansıtıcı soyutlama olarak adlandırdığı bir bilinç düzeyi gerektirir,
- (6) Yeniden kullanım ve modifikasyon için mevcut olan düşünce kalıpları şemalar olarak oluşturulur,
- (7) Temel fikirlerin tanımlanması genellikle koruma ve değişmezlik arayışını içerir, fikirlerine dayanır ve yapılandırmacı etkinlikleri destekler (Confrey ve Kazak, 2006).

Öğrencilerin problem çözerken yaşadıkları mantıksal ve matematiksel akıl yürütmenin türü ile bizim akıl yürütmemiz bazen örtüşmeyebilir ve sadece öğrencilerin

cevabına bakarak onların düşüncelerinin zenginliğini ve bu cevabı üretme sürecinde ne kadar ilerlemiş olabileceklerini görmezden gelmemize neden olabilir (Oktaç, 2004).

Üniversite düzeyi matematiğin temel derslerinden olan lineer cebir soyut kavramlardan oluşmaktadır. Bu soyut kavramları öğrenme sürecinde öğrenciler işlemsel öğrenmeyi pratik olarak gerçekleştirirken, kavramsal öğrenmenin ilerleyen aşamalarında güçlük çekmektedirler. Vektör uzayı kavramını oluşturma sürecinde öğrenciler vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini iki ayrı süreç olarak düşünmekte, bu iki işlemi bir yapı olarak düşünememektedir. Bununla birlikte rutin olmayan farklı ikili işlemlerin kullanıldığı problemlerde güçlük çekmektedir. Ek olarak vektör uzayı kavramını iyi anlayabilmek için öncesinde bilinmesi gereken ikili işlem, küme ve aksiyom kavramları hakkında yeterli bilgiye sahip olunmalıdır (Parraguez ve Oktaç, 2010).

Lineer dönüşüm kavramını öğrenmeden önce öğrenciler vektör uzayı, dönüşüm (fonksiyon) kavramları ile ilgili yeterli bilgi sahibi olmalıdır. Bununla birlikte vektörel toplama ve skalerle çarpma işlem süreçleri birlikte koordine edilerek lineer dönüşüm kavramı anlaşılabilir (Roa Fuentes ve Oktaç, 2010). Ancak öğrenciler verilen lineer dönüşümün tanım kümesini bulma, R^3 uzayı-küme- fonksiyon kavramlarını koordine etmede güçlük yaşamaktadır (Martinez-Planell ve Trigueros Gaisman, 2012). Araştırmacı deneyimlerinden öğrencilerin verilen lineer dönüşümün görüntü kümesini bulma, matrislerle dönüşümleri koordine etme ve geometrik anlamlarını ifade etmede güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir.

Öz değer ve öz vektörler kavramları lineer dönüşümün özel bir uygulamasıdır. $A.x = \lambda.x$ eşitliğinde geometrik temsiller ile ilişkilendirilmediğinde cebirsel manipülasyonlar işlemsel olarak gerçekleştirilmektedir (Stewart ve Thomas, 2011). Ayrıca öğrenciler cebirsel manipülasyonlarda gelen birim matrisin kavramsal anlamını ifade edememektedir. Bu güçlükleri yaşamamak ve üst düzeyde kavramsal anlama kazanmak için lineer cebir dersi bu güçlükleri giderecek şekilde düzenlenmelidir. Kavramların nasıl öğrenildiğinin haritasını ifade eden ve kavramların işbirlikli olarak öğretilmesini savunan APOS teorisi ve kavramların geometrik temsiller lineer cebir öğretiminde kullanıldığında öğrencilerin kavramsal anlama düzeyleri üst seviyelerde olmakta ve yaşanan güçlükler azalmaktadır (Stewart ve Thomas, 2011; Salgado ve Trigueros, 2015).

Günümüz eğitim koşullarında matematiksel kavramlar, birtakım formüller ile tanımlar çerçevesinde öğrenen bireylere sunulmaktadır. Gerekli görülen aşamalarda ise bazı çoklu temsiller yardımıyla eğitim faaliyetleri desteklenmektedir. Ancak verilen bu öğretimler ile öğrencilerin kavrayışları aynı noktaları işaret etmeyebilir. Nasıl bir şarkı farklı bireyler

üzerinde farklı etkiler oluşturabiliyorsa, bir kavrama yönelik öğretici tarafından gerçekleştirilen öğretim faaliyeti, öğrenenler üzerinde farklı etkiler oluşturabilmektedir.

Öğrenenler üzerindeki bu farklı etkiler, ilgili matematiksel kavramların anlamlandırılması sürecinde oluşturulan zihinsel yapılar ile tespit edilebilir. Bu zihinsel yapılar, 1985-1995 yılları arasında Dubinsky ve arkadaşlarının çalışmaları ile hayata geçirilmiş olan APOS teorisi ile ifade edilmeye çalışılmıştır. APOS teorisi; Eylem (Action), Süreç (Process), Nesne (Object) ve Şema (Schema) zihinsel aşamalarından (ya da zihinsel yapılarından) oluşmaktadır (Arnon ve diğ., 2014).

APOS teorisinin yapılarının oluşum süreci, Piaget tarafından ileri sürülen yansıtıcı soyutlamaya dayanmaktadır. Piaget (1973)'e göre yansıtıcı soyutlama;

i) içerik ve içerik ile ilgili işlemler hakkında farkındalık ve derin düşünme açısından ve daha düşük bilişsel seviyeden ya da durumdan daha yüksek olana doğru içeriği ve işlemleri yansıtma açısından yansıma

ii) işlemlerin kendilerinin, yeni işlemlerin üzerinde uygulanabilir hale gelen içeriğe dönüştüğü daha yüksek seviyedeki içerik ve işlemleri yeniden yapılandırma ve organize etme şeklinde tanımlanmaktadır. İkinci tanımdan yola çıkan Dubinsky ve arkadaşları, APOS teorisinin zihinsel yapılarının gelişimine vesile olan içselleştirme (interiorization), kapsülleme (encapsulation), koordine etme (coordination), tersini alma (reversal), kapsülden çıkarma (de-encapsulation), temalaştırma (thematization) ve genelleme (generalization) gibi zihinsel mekanizmaları yani yansıtıcı soyutlamaları teori kapsamında kullanmışlardır.

APOS teorisine göre eylemler nesne üzerinde uygulanır ve içselleştirme gerçekleştiğinde süreç halini alırlar. İki farklı sürecin koordine edilmesiyle yeni süreçler oluşturulabilir. Bir sürece tersini alma uygulanırsa yeni süreç elde edilebilir. Süreçler nesne üzerinde uygulanır ve kapsülleme gerçekleşirse nesne haline gelirler. Nesnenin kapsülden çıkarılması ile yeni süreçler oluşturulabilir. Tüm bu süreçteki etkileşimler ise şemayı oluşturur. Şemaların temalaştırılması ile nesneler oluşturulur ve bu nesneler kendiyle ilişkili olan diğer nesne ve şemaları özümser.

Matematiksel kavramların epistemolojik yapısına göre bu aşamalarda kendini gösterecek olan öğrenen davranışları farklı olabilir. Bu sebeple bir kavramın öğrenilmesinde öngörülen aşamalar ve zihinsel mekanizmalar detaylı olarak belirlenmelidir. Bu işleme ise genetik çözümleme adı verilir. Genetik çözümleme rehberliğinde APOS teorisine dayalı öğretim faaliyetleri hazırlanabileceği gibi, öğrenenlerin geçtiği aşamaların değerlendirilmesinde genetik çözümleme altın anahtar rolü taşımaktadır.

Alan yazın incelendiğinde fonksiyon kavramının gelişimine yönelik (Ayers ve diğ., 1998; Breidenbach, 1992; Carlson, 1998) türev kavramının gelişimine yönelik (Carmona, 1996) ve limit kavramının gelişimine yönelik (Cottrill vd., 1996) APOS teorisine göre öğrencilerin problem çözme süreçlerinin incelendiği görülmektedir. Lineer cebir dersinin kavramları dikkate alındığında ise Stewart ve Thomas (2009) lineer cebir kavramlarının zihinde yapılandırılmasını incelemek için iki farklı öğrenme teorisini (APOS Teorisi ve Tall'un üç dünyası teorisi) kullanarak gerçekleştirdikleri öğretim uygulaması sonucunda, öğrencilerin zayıf kaldıkları anlar görülerek öğreticinin öğrencinin anlama ve düşünme becerilerini geliştirmede bu öğretim yöntemini etkili şekilde kullanabileceklerini belirtmişlerdir.

Lineer cebir alanında kayda değer sayıda yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin soyut yapıda kavramlar içeren lineer cebir dersinde işlemsel sürece odaklandıkları ve kavramların geometrik anlamlarını yorumlamada güçlük çektikleri görülmektedir. Şekilsel düşünme becerilerini cebirsel öğrenme sürecine katabilecek aktiviteler uygulandığında öğrencilerin kavramsal öğrenme deneyimlerine olumlu etki ettiği görülmektedir.

Tarihsel olarak özellikle son iki yüzyılda matematikte aksiyomların kullanılma oranı artmıştır. Örneğin, sayılar başlangıçta ampirik nicelik fikrine dayanan matematiksel nesneler iken, daha sonra Dedekind ve Peano gibi matematikçiler, nicelik fikrinden bağımsız olan aksiyom sistemlerinde sayıları yeniden kavramsallaştırmışlardır (Mitchelmore ve White, 2004). Euclid, Hilbert ve diğerleri geometri için benzer bir görevi yerine getirdi ancak, “Öklid'in aksiyomları somut bir fiziksel gerçekliğin idealleştirmeleri iken... modern görüşte aksiyomlar ... aksiyomatik sistemin tanımsız terimleri arasındaki ilişkiler hakkında basitçe varsayımlardır” (Kleiner, 1991, s. 303). Başka bir deyişle, matematik giderek fiziksel dünya deneyiminden daha soyut hale geldi. Ancak, pek çok temel matematiksel nesne (özellikle sayılar ve işlemleri gibi daha temel olanlar) gerçekliği açıkça modellese de kombinatorik ve diferansiyel denklemler gibi daha sonraki gelişmeler bu temel fikirler üzerine inşa edilmiştir ve dolayısıyla dolaylı da olsa gerçeği yansıtır. Yani tüm matematiğin gerçeklikle bir bağlantısı vardır (Mitchelmore ve White, 2004). Bu durumda soyut kavramlardan oluşan lineer cebirin öğretiminde gerçeklik bağlantılarına yer verilerek öğrencilerin soyutlaştırma sürecinde gerekli olan somutlaştırma adımı kolaylaştırılabilir.

Bir araç olarak kullanılan vektör geometrisini görselleştirmeyi kullanarak somutlaştırma ile daha iyi öğreneceğini düşünen öğrencilere yardımcı olunabilir. Lineer cebirde kavramların ve özelliklerinin doğrulanması yapılırken; bunların geometrik

gösterimlerinden yararlanılarak daha anlamlı açıklamalar yapmak mümkündür (Konyalıoğlu, Işık, Kaplan, Hızarcı ve Durkaya, 2011).

Üç boyutlu (3B) geometri, iki boyutlu (2B) olandan daha karmaşıktır. Aslında, 3B şekillerin 2B'sinde çizimin gerçekleştirilmesi ve yorumlanmasının yanı sıra kavramsal tipte zorluklar da sunar: 3B bir şeklin 2B'sinde bir çizim, parçaların tüm uzunluklarını ve açılarının genişliğini kaydetmek mümkün olmadığı için gerçekçi olamaz. Ancak bu sebeple 3B geometriyi es geçmek doğru değildir. Ancak 2B geometri ile 3B geometriyi aynı anda ele almak uygun olabilir (Mammana, Micale ve Pennisi, 2012). Ayrıca bu zorlukları aşmak için öğrencilere 3B deneyimi ve algıyı daha iyi öğrenmeye sevk edecek öğrenme teknolojileri kullanılabilir. Bir öğrencimizin de dediği gibi “3B vektörü 2B tahta yüzeyine çizdiğimizde üç boyutlu algısını alamıyoruz”. Bu ifade aslında 3B geometrik şekilleri 2B bilgisayar ekranında çizen etkileşimli matematik yazılımları için de geçerli olduğu düşünülebilir. Her ne kadar yazı tahtasına göre daha iyi bir deneyim sunsa da 3B algı deneyimlerini yaşatabilecek yeni teknolojiler ile mümkün olabilir.

Oluşturulması zor olan 3B ortamlar sanal ortamda gözlük ya da ışığın kırınımı yasasını kullanan üç boyutlu hologram teknolojisi ile meydana getirilebilmektedir. Gelişmekte olan bu teknolojiler ile daha güvenli ortamda nesneleri tecrübe etme, getirilmesi mümkün olmayan nesneleri ya da ortamları deneyimleme imkanları yaratılabilmektedir. Eğlence sektörlerinde sıklıkla kullanılan bu teknolojilerin eğitim öğretim ortamlarındaki yansımaları oluşmaya başlamıştır.

Öğretimde üç boyutlu hologram teknolojilerinin kullanımıyla birlikte öğretim yöntemlerimiz ve öğrencilerin öğrenme yolları farklı boyutlar kazanabilir (Lee, 2013). Lineer cebir kavramları vektör uzayı kavramı temelindedir ve üç boyutlu geometrik temsillerin kullanımı iki boyutlu çizimlerle ifade edilmeye çalışılmaktadır. 3B hologram teknolojileri ile lineer cebirin gerçek hayat uygulamaları deneyimlenebilir. Böylece soyut kavramların somut perspektifleri 3B Hologram ortamında incelenerek ve gerekli ilişkilendirmeler kurularak öğrenme sürecinde biçimsel dünyaya ulaşmaya yardımcı olabilir. Teknolojinin matematik öğretimine entegre edilme sürecinin başarılı bir şekilde çalışması için bu süreç yapılandırmacı yaklaşımlarla desteklenmeli ve öğrenenlerin öğrenme süreci dikkatlice gözlemlenmelidir.

1.2. Amaç ve Önem

Tez çalışmasının amacı üç boyutlu hologram destekli öğretimde lineer cebir kavramlarının oluşturulma sürecinin incelenmesidir. Vektör uzayı, iç çarpım uzayı gibi soyut ve öğrencilerin anlamakta güçlük çektiği lineer cebir kavramlarının öğretiminde şekilsel temsillerin kullanımı ile öğrencilerin bu kavramları daha iyi öğrenmeleri mümkündür

(Stewart, 2008). R^2 vektör uzayında lineer cebir kavramlarının uygulamalarını kolaylıkla kavrayan öğrenciler, R^3 vektör uzayındaki uygulamalarda güçlük çekmektedirler. R^3 vektör uzayındaki uygulamaların şekilsel temsilleri iki boyutlu düzlem konumundaki tahta ya da bilgisayar ortamında sunulduğunda üç boyutlu algıyı hissettirememektedir. Bu sebeple lineer cebir öğretimi hologram modelleriyle desteklenerek üç boyutlu şekillerle birlikte öğrencilerin öğrenme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

3B Hologram teknolojileri gelişmekte olan teknolojilerdir. Eğitim öğretim sürecindeki uygulamalarının yeni denenmeye başlamasının yanı sıra öğrencilerin bu teknolojiyi yapılandırmacı yaklaşımın gereği olan öğrencinin öğrenme sürecine aktif katılımını sağlamak pek mümkün değildir. Çünkü mevcut teknolojinin sağladığı imkanlar doğrultusunda 3B Hologram cihazında görüntülenecek olan bir modelin hazırlanması için öncelikle 3B tasarım yazılımlarında istenilen model oluşturulmalı, sonra kamera animasyonu ile bu obje (istenilen görüntüyü yakalayabilmek için istekler doğrultusunda) 360° açıyla çevresinden görüntülenmeli, cismin arka planının siyah olması için kamera yörüngesi ve cismin dışından siyah bir kip çizilmeli, sonra da animasyon render alma işlemi ile yazılımdan video çıktısı alınmalıdır. Bu işlem çizilen objelerin kalınlık ve boyutlarına (ayrıca çalışılan bilgisayarın hızına) göre değişmekle birlikte en az üç saat sürmektedir. Bu işlemin böyle zaman alması ve 3B tasarım programlarını kullanmayı öğrenme sürecinin uzun olmasının getirdiği bazı olumsuz durumlar vardır. Örneğin, bir modeli hazırlamak zaman alıcıdır. 3B model video olarak çıktı alındığı için modeli yakından incelemek, sağa sola döndürmek, yakınlaştırmak gibi durumların önceden prova edilip animasyonun ve dolayısıyla videonun akışı önceden belirlenmeyi gerektirir. Bu durum da öğrenme materyalinin sınıftaki öğrenmenin doğasına uygun olarak kullanılmasına izin vermez. Bununla birlikte 3B tasarım yazılımları ilkökul, ortaokul ve lise düzeyinde öğrenilmesinin zor olmasının yanı sıra üniversitedeki öğrenciler için de öğrenilmesi zor programlardır. Programların kullanılması öğrenilmesi sağlansa bile bir objenin 3B Hologram cihazında görüntülenmeye hazır hale gelmesi saatler sürmektedir. Bu durum 3B Hologram modellerinin öğretim sürecinde öğrenciler tarafından oluşturulması, yorumlanması ve farklı modellerle ilişkilendirme yapılmasını engellemektedir.

Bu sebeple 3B Hologram destekli öğretimde kullanılmak üzere bir yazılım geliştirilmesi de amaçlanmıştır. Bu yazılım ile öğrencilerin lineer cebiri öğrenme sürecine aktif katılımını sağlamak amaçlanmıştır. Öğrencilerin 3B Hologram objelerini tasarlayacakları yazılım olarak GeoGebra kullanılmıştır. GeoGebra'nın seçilmesinin sebebi matematik öğretiminde her kademedede çevrimiçi kullanılabilen, ücretsiz ve kolay kullanılabilir bir ara yüzünün olmasıdır. Geliştirilen yazılımın ve hologram sisteminin matematik öğretiminde

uygulanabilirliğini belirlemek için pilot çalışma yapılmıştır. Hologram sisteminin pilot uygulamasında yaşanan sorunlar hem araştırmacı gözlemleriyle hem de öğrenci görüşme verileriyle tespit edilerek yaşanan sorunları giderecek düzenlemeler yapılmıştır. Geliştirilen ve vektör uzayı öğretiminde pilot çalışması yapılarak gerekli düzenlemelerle revize edilen HoloDEU yazılımının 3B Hologram destekli matematik öğretiminde kullanılabilir olması bakımından alan yazına ve araştırmacılara katkı sağlaması beklenmektedir.

Ayrıca araştırma sonunda araştırmanın asıl amacını gerçekleştirmek üzere, vektör uzayı problemlerine verilen yanıtlarda nesne aşamasına ulaşan yedi öğrenci ile iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörler kavramlarının öğretimi HoloDEU yazılımı ve hologram sisteminde APOS teorisine ve ACE öğretim döngüsüne uygun olarak gerçekleştirmiş ve bu süreç sonunda öğrencilerin bu kavramları oluşturma süreci incelemiştir. Buradan elde edilen bulguların 3B Hologram destekli lineer cebir öğretimi, öğrencilerin lineer cebir öğrenme sürecindeki kavramları oluşturma süreçleri-hataları ve 3B Hologram destekli öğretimde öğrencilerin geometrik düşünme süreçleri ile ilgili çalışmalara katkıda bulunması beklenmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Araştırmanın Problemi:

Üç boyutlu hologram teknolojisi destekli öğretimde lineer cebir kavramlarının oluşturulma süreçleri nasıldır?

Araştırmanın Alt Problemleri

Üç boyutlu hologram destekli öğretimde öğrencilerin lineer cebir kavramlarını oluşturma seviyeleri nedir?

Üç boyutlu hologram destekli öğrenimde öğrencilerin lineer cebir kavramlarını oluşturma sürecinde kullandıkları şekilsel düşünme becerileri nedir?

HoloDEU yazılımı ve 3B Hologram cihazı sınıfta nasıl kullanılmaktadır?

Öğrenciler 3B Hologram destekli vektör uzayı öğrenme deneyimlerini nasıl açıklıyorlar?

1.4. Sınırlılıklar

Lineer cebir dersi konuları cebirsel yapılar, matris, determinant, lineer denklem sistemleri, vektör uzayları, iç çarpım uzayları, lineer dönüşümler, öz değer ve öz vektörler kavramlarının öğretimini amaçlamaktadır. Bütüncül bir yapıda ilerleme gösteren bu kavramların öğretiminde her bir kavramın öğrenilmesi diğer kavramların öğrenilmesinde önem taşımaktadır. Örneğin vektör uzayı kavramının zihinde oluşturulması genetik

çözümlemesinde küme, fonksiyon ve ikili işlem şemalarında beceri gösterebilmek öğrenme sürecinin ilk basamaklarıdır (Parraguez ve Oktaç, 2010). Araştırmanın amacı lineer cebir öğretiminde hologram cihazının kullanımıyla kavramların nasıl oluşturulduğunu incelemektir. Hologram cihazında görüntülenen modeller üç boyutlu geometrik temsillerdir. Bu sebeple çalışma boyunca geometrik perspektifleri bulunan vektör uzayı, iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörler kavramlarının öğrenimi süreçlerine odaklanılmıştır. Diğer kavramların öğrenimi sürecini incelemek araştırmanın amaçları arasında yer almamıştır. Cebirsel yapılar, matris, determinant ve lineer denklem sistemleri kavramlarının öğrenim süreçlerinin incelenmemesi araştırmanın sınırlıkları arasındadır.

Araştırmada odaklanılan vektör uzayı, iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörler kavramları pek çok alt kavrama sahiptir. Örneğin vektör uzayı; iç çarpım uzayı, lineer birleşim, germe, lineer bağımsızlık, taban ve boyut kavramlarını içermektedir. Araştırmada tez uygulama sürecinin kısıtlı olması ve veri yığılmasının önüne geçmek için alt kavramların zihinde oluşturulma sürecine ayrıca odaklanılmamıştır. Bu durum da araştırmanın sınırlıkları arasında gösterilebilir. Ancak araştırma kavramları ve alt kavramlarının öğretilmesi sürecinde tüm alt kavramlar da dahil olmak üzere üç boyutlu hologram destekli ve APOS Teorisi temelli etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Ayrıca araştırma uygulama problemlerinde alt kavramlara ilişkin sorular bulunmaktadır. Böylelikle öğrencinin öğrenme sürecinin daha iyi inceleneceği düşünülmüştür.

Öğrencilerin teknolojik bilgilerinin çok iyi durumda olmaması sebebiyle zamanı verimli kullanabilmek için hologram sistemi destekli lineer cebir öğretimi yedi öğrenciyle gerçekleştirilmiştir.

Araştırma nitel bir çalışma olduğundan uygulamaya katılan öğrencilerin yansıtmaları, görüşleri, araştırmacıların gözlemleri ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

Ölçme araçlarının uygulanmasına öğrenciler içtenlikle katılmıştır.

Uygulama sürecinde öğrenciler kontrol altına alınamayan dışsal etkenlerden eşit düzeyde etkilenmişlerdir.

1.6. Tanımlar

3B Hologram Cihazı: 3B Tasarımları gerçeğe yakın ve 3B olarak görmemizi sağlayan bir cihaz.

HoloDEU ve Hologram Sistemi: Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 2019.KB.EGT.004 nolu proje ile desteklenen bu doktora tezi

ile geliştirilen, 3B tasarımları telefonda-tabletten ya da bilgisayardan hologram cihazına aktarmaya, hologram cihazında görüntülemeye ve sistemdeki havuzda depolama işlevlerine sahip olan holografik bir yazılımdır.

3B Hologram Destekli Öğrenme: Kavramların 3B modellerinin HoloDEU ve Hologram Sistemi kullanılarak hologram cihazında görüntülenmesiyle oluşan geometrik temsillerin kullanıldığı ve APOS Teorisi gibi yapılandırmacı yaklaşıma dayalı olarak gerçekleştirilen öğrenme.

1.7. Kısaltmalar

HoloDEU: Dokuz Eylül Üniversitesi 3B Hologram Yazılımı

APOS: Eylem-Süreç-Nesne-Şema (Action-Process-Object-Schema)

ESA: Etkinlik-Sınıf Tartışması-Alıştırmalar

ACE: Activities-Classroom Discussion-Exercises

RME: Realistic Mathematics Education (Gerçekçi Matematik Eğitimi)

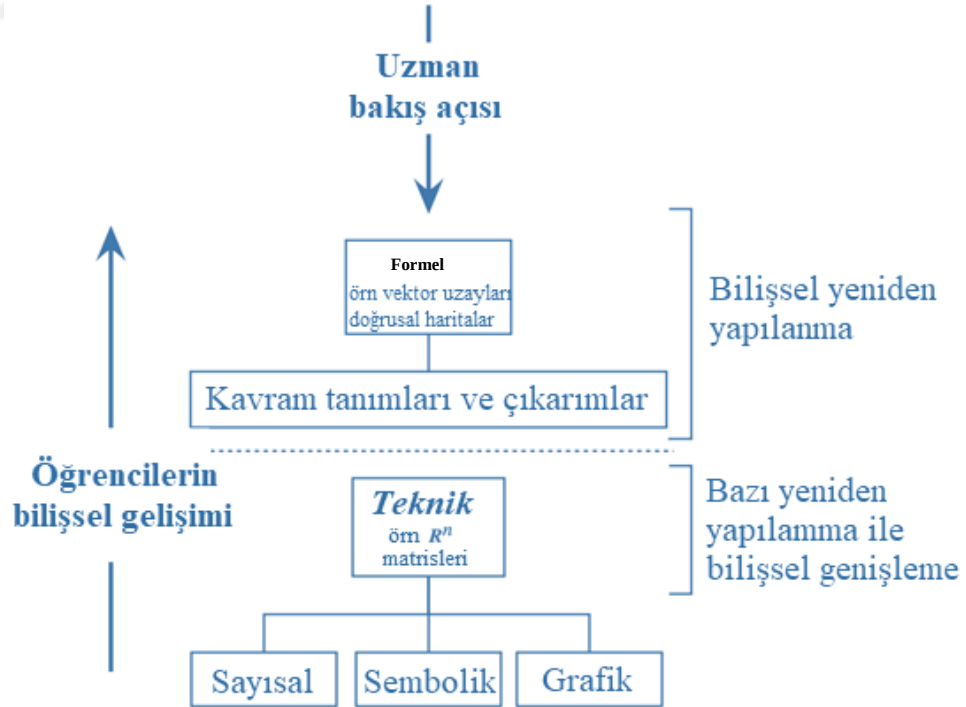
BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Lineer Cebir'i Öğrenme

Stewart ve Thomas' göre (2009) öğrencilerin çoğu, önce somutlaştırmayı sembolize etmeye ve sembolizmi somutlaştırmaya ihtiyaç duyar ve ancak onları tam olarak bütünleştirdikten sonra biçimsel dünyaya ulaşırlar. Ancak gerçek dünyada, sınıftaki eğitmenin adımlarını takip ederek ve kendisi için somutlaştırmalar yapmaya çalışarak yalnızca sembolik düşünme dünyasında olmak mümkündür. Buna karşılık, bir matematikçi, biçimsel dünyaya doğru ilerlemenin yanı sıra tersine çevirebildiği ve somutlaştırılmış görüşleri inşa edebildiği için sembolik ve somutlaştırılmış dünyalarda rahatça matematiksel aktivitelerini gerçekleştirebilir.

Bu nedenle iddia, kavrama derin anlam kazandıran şeyin biçimsel dünyaya doğru hareket etmemizi sağlayan somutlaşmış görüş olduğudur. Öğrencileri genellikle kavramların somutlaşmış yönlerinden yoksun oldukları ve sembolik dünyaya hapsedikleri için matematiksel düşünmenin biçimsel (formel) dünyasına geçemezler.



Şekil 1. Lineer cebirde iki farklı ileri matematiksel düşünme seviyesi

(Tall, 1996)

Bir matematik kavramının farklı temsilleri vardır ve farklı sorgulama süreçlerinde farklı temsillerin kullanılması söz konusudur. Örneğin indirgeme yönteminde kullandığımız matrisler bir hesaplama aracı iken, GeoGebra da oluşturduğumuz modeller geometrik anlamaya aracılık eder. Ancak öğrenciler cebirsel temsiller ile geometrik sezgilerini birleştirmede güçlük çekmektedir (Harel, 1990; Pavlopoulou, 1993; Hillel, 2000).

Matematik öğrenimi temsil etme, akıl yürütme, yapılandırma ve görselleştirme gibi farklı temel bilişsel etkinlikler gerektirir ve matematiksel etkinliklerle matematiksel fikirlerin iletilmesi için farklı semiyotik temsiller aynı anda ve açık bir şekilde kullanılmalıdır (Sandoval ve Possani, 2016).

Öğrenciler lineer cebir dersinin kavramlarını anlamada büyük zorluk çekmektedir ve diğer ilgili kavramlarda ilişkilendirmede zorluk yaşamaktadır. Mesela taban konusunu lineer bağımsızlık ve germe ile ilişkilendirmede güçlük çekmektedirler (Stewart ve Thomas, 2009).

Öğretmen adaylarının sahip oldukları en önemli kavram yanılgıları genel olarak ikili işlemlerde ilgili bilgi eksiklerinden ve vektör uzayı kavramlarının geometrik anlamlarının farkına varamamaktan kaynaklanmaktadır. Örneğin öğrenciler vektör uzayı ve diğer aksiyomları karıştırıyor ve dağınık olarak kullanıyor, eşit iki vektör uzayının eşit iki kümenin perspektifini göremiyorlar, vektör uzayı ve alt uzaylarını soyut anlamda birbirinden net olarak ayıramıyorlar, vektörlerle yapılan vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile skalerlerin toplamı ve çarpım arasındaki farklılıkları tespit edemiyor, bir vektörün bağımlı ve bağımsız değişkenlerini birbirinden ayırt edemiyorlar (Kazıcı, 2008).

Vektör uzayları ile alt vektör uzayları kavramlarını lineer bileşim kavramına göre öğretmen adaylarının hem en düşük performans sergiledikleri hem de en çok cevapsız bıraktıkları kavramdır. Lineer cebir alanının aksiyomatik yapısı özellikle vektör uzayları, alt vektör uzayları kavramlarındadır, görsel nesnelliğin varlığı lineer bileşim ve bağımsızlık kavramlarında kendini göstermektedir. Ancak öğretmen adayları Kardeş Birinci'nin (2016) çalışmasında öğretmen adayları vektör uzayları ile alt vektör uzayları kavramlarını lineer bileşim kavramına göre daha yüksek performans sergilemişlerdir. Bu çalışmada öğretmen adayları vektör uzayları kavramında en yüksek yüzde ile hem beceri-algoritma hem de temsil-metafor anlama boyutu; alt vektör uzayları kavramında en yüksek yüzde ile yalnızca özellik-ispat anlama boyutunu; lineer bileşim kavramında hem beceri-algoritma hem temsil-metafor hem de kullanım-modelleme anlama boyutunu; lineer bağımsızlık kavramında hem temsil-metafor hem beceri-algoritma hem de kullanım-modelleme anlama boyutunu; taban ve boyut kavramlarında yalnızca beceri-algoritma anlama boyutlarına yönelik cevaplar verirken öğretmen adaylarının sergiledikleri imgelerin bir çeşidi de kavramların geometrik olarak

yorumlanması ile ilgilidir. Bazı öğretmen adayları, vektör uzayı kavramının "doğru parçası" şeklinde geometrik olarak imgelerken; lineer bağımsızlık kavramını "aynı düzlemde yer almama", boyut kavramını "boy, alan" şeklinde geometrik olarak imgelemektedir (Kardeş Birinci, 2016). Bu durum öğrencilerin öğrendiği lineer cebir kavramlarındaki geometrik anlayışın oluşmadığını ve kavramsal anlama düzeyinde üst seviyelerde olmadıklarını göstermektedir. Doğrusal denklem sistemini çözme kavramını anlamak denk doğrusal denklem sistemlerinin nesne kavramının bir parçasıdır (Ramirez, 2009).

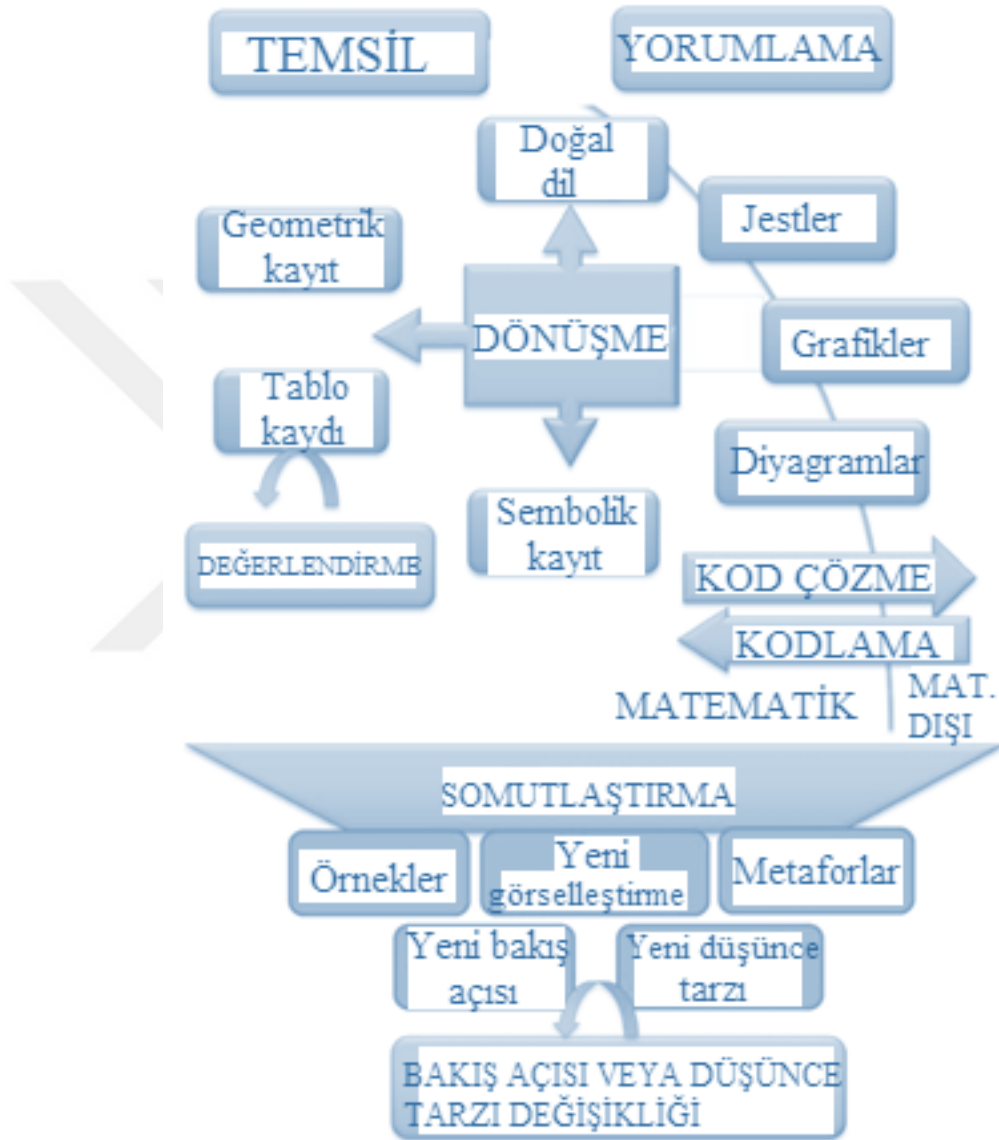
Vektör uzayı öğretiminde öğrenciler küme, fonksiyon ve ikili işlem kavramlarında eksik bilgilere sahipse vektör uzayı kavramını öğrenmesi zorlaşır. Bununla birlikte önceden sahip olduğu matematik kavramlarıyla ilgili imajları yeni soyut kavramların anlaşılmasını güçleştirir. Lineer cebirdeki aksiyomatik yapının inanılmaz sadeliği ve kafa karıştırıcı soyutluğunun gerçekliği, kaçınılmaz bir çatışma yaratabilir, örneğin öğrenciler “vektörler” hakkında bilgi sahibidirler ve onlar için bir “vektör uzayı” başlangıçta xy -düzlemidir - fizik ana dalları için belki de gözlemlenebilir xyz -uzayı yönlendirilmiş doğru parçalarına, uzunluk ve koordinatlara sahiptir (Pesonen, 1999). Örneğin lisede öğrendiği vektör kavramı anlayışı, lineer cebir dersinde bir polinom, fonksiyon veya matrisin de vektör olması anlayışını kazanmasını engelleyebilir. Farklı olarak uzay kavramı ile ilgili sahip olduğu sonsuzluk imgesi sonlu sayıda vektör içeren vektör uzaylarının anlayışını engelleyebilir.

Lineer cebir dersine ilişkin tutumlar olumsuz, lineer cebir derslerindeki başarıları düşük, lineer cebir dersi başarıları yüksek olan öğrencilerin derse yönelik tutumları daha olumludur (Akyıldız, 2013). Öğrencilerin biçimsel (formel) tanımları anlamaları, çalışılan materyali anlamalarına ve lineer cebir çalışmaya yönelik tutumlarının daha ciddi hale gelmesine katkıda bulunur (Berman ve Shvartsman, 2016).

Kavramları öğrenmenin somuttan soyuta gerçekleştiği düşünüldüğünde, düşüncesi öncelikle formel dünyadan olan ve kavrama ilişkin bilgisini esas olarak sembolik ve formel düşünme yoluyla ileten bir öğrenci somutlaşmış temsilleri tanıma ve kullanma becerisine sahiptir. Ancak öğrenci sembolik dünya düşüncelerini dile getiriyorsa soyutlamanın gerçekleştiği iddia edilemez çünkü sadece sembolik dünyada tanımlar pek dikkate alınmaz. Somut dünyada düşünmeye yönlendirecek etkinliklerin kullanılması formel dünyaya ulaşmaya yardımcı olur (Stewart ve Thomas, 2007).

Rensaa, Hogstad ve Monaghan'ın (2020) çalışmasında uzmanlara sordukları mühendislik ve/veya matematik öğrencileri için birinci sınıf lineer cebir lisans dersinde neler olmalıdır sorusuna verilen yanıtlarda; soyutlama ve genelleme odaklı öğretim yöntemlerine ilişkin ifadeler daha çok dile getirilirken, teknoloji destekli, modelleme gibi güncel öğretim

yöntemlerini lineer cebir öğretiminde kullanımına ilişkin ifadelerin daha az kullanıldığını belirtmiştir. Ancak öğrencilerin pür matematik problemleriyle uğraştığı, teorik düşünmenin ağırlıklı olduğu, farklı temsilleri kullanıp ilişkilendirme yapmadan işlem odaklı işlenen lineer cebir derslerinde kavramsal anlamaya ulaşacak öğrenci sayısı oldukça düşük olabilir.



Şekil 2. Lineer cebirde görselleştirmenin karakterizasyonu şeması

(Souto- Rubio, 2012)

Souto- Rubio'ya (2012) göre lineer cebirde görselleştirme bir sorun hakkında düşünmede, çözüme ulaşamadığımızda yararlı bir araç olmada, yeni fikirlerin ortaya çıkmasını sağlayan matematiksel duruma farklı bir bakış açısı kazandırma, önceki bilgi ve deneyimlerle bağlantılar yoluyla sezgiyi kolaylaştırmada, kavramları daha somut ve inandırıcı hale getirerek onların özelliklerini ve teorik sonuçlarını sergilemede, matematiksel ve meta-

matematiksel düşünceleri ilişkilendirmede, formel bir kanıt veya tanımı göstermede veya tamamlamada, dikkati temel unsurlara odaklayan süreçleri veya tanımları, genellikle hatırlanması daha kolay olacak şekilde özetlemede oldukça faydalı bir yetenektir. Ancak görselleştirme yanlış yorumlara yol açabilir, bir sınırlama olabilir, gerçek matematik yapmak değildir, görselleştirmeyi öğretmek müfredatın bir parçası değildir, bilişsel olarak zordur, görselleştirme daha fazla bilgi gerektirir ve görselleştirme ile iletişim kurmak zordur.

Lineer cebirin şekilsel dünyasında kalemler, kâğıt parçaları, duvarlar gibi gerçek dünya nesnelerinin ve noktalar, doğrular, düzlemler gibi içsel kavramların zihinsel algılarına ilişkin düşünceler vardır. Sembolik lineer cebir Gauss indirgeme yöntemi gibi denklem çözme süreçlerini, Gram-Schmidt yöntemi gibi vektör dönüşümlerinin sürecindeki skalerlerin, vektörlerin, matrislerin dünyasıdır.

Lineer cebir kavramları somuttan soyuta doğru öğretildiğinde öğrencilerin başarıları artmaktadır (Harel, 1999; Turğut, 2010). Turğut (2010)'a ve Soylu (2005)'ya göre lineer cebir kavramlarını geometri kullanılarak öğretmek öğrencilerin öğrenme süreçlerini olumlu etkilemektedir. Lineer cebir dersi anlatılırken geometrik şekiller açık-net (Soylu, 2005) ve yerinde olmalıdır. Lineer cebir öğretiminde öğrencilerin lineer cebir algıları geometrik vektörlerle sınırlı kalmaması için geometri kullanımı dengeli bir şekilde öğretim planına eklenmelidir (Turğut, 2019). GeoGebra destekli lineer cebir öğretimi uygulamaları öğrencilerin kavramları birbiriyle ilişkilendirmelerini, şekilsel ve sembolik dünyadaki ilişkileri fark etmelerini sağlamaktadır (Kan, 2014).

Doğan (2018) çalışmasında üç ayrı grupta çalışmıştır. Birincisinde etkileşimli geometrik temsiller öğretim sürecinde kullanılırken, ikincisinde ev ödevleri bu temsillerle çalışması istenmiş, diğerinde ise bu temsiller kullanılmamıştır. Bununla birlikte Analitik-Yapısal modların her üç bölüm yanıtlarında en yüksek yüzdede, Analitik-Aritmetik modlar ise çoğunlukla izole durumda, üçüncü grupta ve ardından ikinci grupta Analitik-Aritmetik modunda en yüksek kullanım yüzdesine sahiptir. Bu durum birçok geleneksel sınıfta olduğu gibi, cebirsel veya aritmetik öğretim araçlarının kullanılması, öğrencinin bilgisini öncelikle hesaplamalı zihinsel yapılarla sınırlandırıyor olabilir. Sentetik-Geometrik modda birinci gruptan ve ardından ikinci gruptan daha fazla yanıt gelmesi ise öğrenme sürecinin her aşamasında etkileşimli geometrik öğretim yöntemlerinin tam entegrasyonunun sonucudur. Buna karşılık, bu davranış, ağırlıklı olarak geometrik olan ilk zihinsel şemalarla sonuçlanan bilişsel süreçlerini şekillendirmiş olabilir. Derslerinde çevrim içi modülleri olmayan ama ev ödevlerinde bunları kullanan öğrencilerin bulunduğu ikinci grupta geometrik yanlış

anlamalarının olması ise geometrik temsillerin eğitimdeki rollerinin kavramları anlamayı engelleyebildiğini göstermektedir.

Analitik geometri, Öklit geometrisi, hesaplama ve bilgisayar destekli öğretim imkanları sunan CAM/CAD yazılımının amacı, matematik öğretmenine üç boyutlu nesnelerin analitik hesaplamaları yoluyla matematiksel işleme ile ilgili konuları öğretmeyi amaçlayan etkinliklerin tasarımı için çevik, etkili ve çekici araçlar sağlamaktır. Bu yazılım R^3 'e gömülü vektörlerin manipülasyonunun kendi matematiksel bilgisini edinme ve kullanma ihtiyacı ile öğrenciye ilgi ve becerilerini yeni nesillerin karakteristiğiyle uyumlu hale getirebilecek bir bilgisayar ortamı vermektedir (Araya Chacon ve Navarro Guevara, 2008).

Takımlar halinde bilgisayarlar (hatta grafik hesap makineleri) etrafında çalışan öğrenciler, yalnızca zaman zaman öğretmen tarafından yönlendirilirler, deney yaptıkları disiplinde onlar uzmandır. CAS Maple ve geometrik yazılımın ilgili rolleri ile ilgili olarak, Cabrilog'un "Cabri, kinestetik öğrenme yaklaşımı sayesinde zorlu matematik kavramlarını öğrenmeyi kolaylaştırıyor!" sloganına katılacağız. Maple ise iyi bir ağabey gibi davranır, öğrenciler için tüm sıkıcı hesaplamaları yapar ve aynı zamanda ne yazık ki çoğunlukla öğretmen tarafından programlanan öğretici animasyonlar üretir (Klasa, 2010).

Etkileşimli yöntemlerin lineer cebir öğretiminde kullanımının nihai değerlendirmelerde daha yüksek bir ortalama puana yol açabilir ancak sadece deney gruplarındaki daha aktif öğrencileri etkilemesinin sonucu olabilir. Daha az dürtü ve motivasyona sahip öğrenciler, mevcut etkileşimli yöntemler, yazılım ürünleri ve tartışma forumu araçlarından bağımsız olarak önceki performansları tekrarlama eğilimindedir (Petrov, Gyudzhenov ve Tuparova, 2015).

Doğan-Dunlap (2010), geometrik temsillerin kişinin aritmetik veya cebirsel deneyimlerinin yerine geçmediğini, ancak öğrencileri temsiller arasında farklı işlemler ve dönüşümler kullanmaya teşvik ettiğini belirtmektedir.

Özellikle geometrik temsiller, doğrusal nesnelerin cebirsel ve aritmetik manipülasyonu için bir temel sağlar ve zenginleştirir. Sierpinska (2000), lineer cebirde, bir arada var olan ve eşit derecede faydalı olan üç dil arasındaki etkileşime karşılık gelen farklı akıl yürütme modlarını (sentetik geometrik, analitik-aritmetik ve analitik-yapısal) tanımlamaktadır. Her mod, ilgili kavramların farklı anlamlarına yol açabilir, bu anlamlar yeni başlayan öğrenciler için eşit derecede erişilebilir değildir ve bu da bir moddan diğerine geçiş yaparken sorun yaşamalarına neden olabilir (Sandova ve Possani, 2016).

Hollebrands'a göre (2003) teknolojik uygulamalar öğrencilerin dönüşümü uygulamak için düzlemden bir nesne seçmesini gerektirdiğinden, öğrenciler bir lineer dönüşümün

yalnızca o nesneye uygulandığına inanarak lineer dönüşümün tüm vektörlere üzerindeki etkisinin deneyiminden uzaklaşabilirler. Bununla birlikte öğrenci alanın yalnızca tek bir nesneden oluştuğuna inanıyorsa girdileri değişmez olarak görmüş olabilir ve eylem aşamasındadır. Alanı düzlemdeki tüm noktalar olarak gören öğrenciler, aslında eyleme katılmadan, bir süreç anlayışı önererek her noktada dönüşüm gerçekleştirmenin sonuçlarını tahmin edebilir. Süreçten nesne kavramlarına geçiş, öğrencilerin çizime karşı şekil hakkındaki muhakemeleriyle de ilgili olabilir. Öğrenciler, dönüşümlerin (şekil) özellikleri ve davranışları hakkında akıl yürütmeye başladıklarında ve yalnızca çizimin görünümlerine dayanmadıklarından, dönüşümlerin nesne anlayışlarından hareket ettiklerine dair işaretler gösterir. Böylece öğrencilerin etkileşimli teknolojik uygulamalardaki davranışları doğru gözlemlenebilirse, onların öğrenme süreci hakkında kavramı anlama düzeyleri tespit edilebilir.

Sorgulamaya dayalı görsel etkinliklerde teknoloji ve bilgisayarlar öğrenme ortamlarını geliştirmede ve soyut matematik kavramlarının anlaşılmasını en üst düzeye çıkarmada güçlü rollere sahiptir (Doğan-Dunlap, 2010).

Drijvers' e göre (2003) bilgisayar cebir sistemleri destekli öğretim, farklı temsillerin birleştirilmesine ve özellikle grafiksel ve cebirsel temsillerin birbirine bağlanmasına izin verir. Bilgisayar cebiri ortamında, işlemler ve prosedürler, biraz farklı veya daha genel koşullar altında kolayca tekrarlanabilir, bu da cebirsel ilişkilerin ve nesnelerin matematiksel bir çerçevesinin oluşturulmasını teşvik eder. Sembol duygusu, cebirsel ifadelerin ve formüllerin yapısına ilişkin içgörü ve formüllerin ve ifadelerin somutlaştırılması da bilgisayar cebir çalışmasından yararlanabilir: eşdeğer ifadelerle yüzleşme cebirsel yapılara daha yakından bakmayı ve ifadelerin sonraki süreçlere sunulmasını teşvik eder. Bilgisayar cebiri kullanımı, parametre rollerinin her birinin anlaşılmasını ve çeşitli şekillerde daha yüksek parametre rollerine geçişleri destekler, bilgisayar cebiri ortamında çalışmak, değişen parametre değerlerine, problem çözme prosedürlerinin tekrarlanmasına, jenerik cebirsel çözümlerin hesaplanmasına ve parametrenin rollerinin değiştirilmesine izin verir, bilgisayar cebirinde sürgünün kullanımı, parametreyi değişen miktar olarak ve grafiksel özellikler ile cebirsel özellikler arasındaki bağlantıyı gösterir.

Hannah, Stewart ve Thomas (2013) lineer cebirde matematik dili ve görselleştirmenin desteklendiği etkinliklerde görsel ve aktif bölümler, temsil ettikleri fikirler için metafor görevi görürken öğrenciler derse karşı pozitif tutumda olduğunu ve öğrencilerin çoğunun test ve sınavdaki rutin algoritmik görevlerde, lineer cebirin geometrik, sembolik ve biçimsel

görünümleri arasındaki bağlantıları araştıran görevlerden çok daha iyi performans gösterdiğini ifade etmektedir.

Cebirsel ve aritmetik modların mevcudiyetindeki geometrik temsiller, öğrenenlerin bir kavramın farklı temsili yönlerini düşünmeye başlamalarına yardımcı oluyor gibi görünüyor ve sonunda onları esnek bir şekilde birleştiriyor ve zengin bağlantılı bir kavramsal anlayış oluşturuyor (Doğan-Dunlap, 2010).

Lineer cebir öğretiminde kullanılabilecek etkileşimli matematik yazılımları arasında MATLAB yazılım paketi, özellikle matris işlemleri için geliştirildiği için lineer cebirde kullanım için en doğal olanlardan biridir. Öğretim teknolojisine başka bir yaklaşım, öğrencilerin bir bilgisayar sözdizimine neredeyse hiç çeviri yapmadan sorular sorabilmeleri ve cevaplar arayabilmeleri için doğal hale getirmek amacıyla, pencerelerin ve web tarayıcılarının tanıdık etkileşimli ortamında öğrencileri matematiğe buluşturur. MAA'nın yeni Çevrimiçi Matematik Dergisi, "Mathlets" sayfasında (www.joma.org/mathlet.html) bu tür etkinliklerin bir koleksiyonunu sunmaktadır. Benzer bir şekilde, Mathwright adlı yazılımla çalışan web sayfası benzeri etkileşimli ortamlar vardır (Day ve Kalman, 2001).

Ertekin, Solak ve Yazici (2010) öğretmen adaylarının lineer bağımlılık/bağımsızlık tanımlarını gerektiren sorulara verdikleri cevapları incelediklerinde başarı düzeyi ile cebirsel yorumlar arasındaki ilişkinin geometrik yorumlama gerektiren soru türleriyle olan ilişkiden daha yüksek olduğunu, cebirsel ve geometrik gibi her iki boyut için düşük korelasyon katsayılarının öğretmen adaylarının yanıtlarında kavramın resmi tanımını pek kullanmadıkları anlamına gelebileceğini ve geometrik yorumunu, doğrusal bağımlılık/bağımsızlığın formel tanımına dayalı olarak kavrayamadıklarını ifade etmişlerdir.

Schoenfeld (1992) öğrencilerin matematiksel düşünebilmesi için soyutlama süreçlerine değer verilmesi gerektiğini ifade etmekte ve matematiğin araçları olarak gördüğü soyutlamanın, sembolik temsillerin ve sembolik işlemlerin, oluşturulacak matematiksel yapıları anlamlandırmak için yeterli düzeyde olması gerektiğini ifade etmektedir. Bu durum öğrencilerin düşünme süreçlerinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesini zorunlu ve önemli kılmaktadır.

Soyutlama, deneyimlerimiz arasındaki benzerliklerin farkına vardığımız bir aktivitedir. Sınıflandırma ise deneyimlerimizi bu benzerlikler temelinde bir araya toplamaktır. Bir soyutlama, yeni deneyimleri zaten oluşturulmuş bir sınıfın benzerliklerine sahip olarak tanımamızı sağlayan, soyutlamanın sonucu olan bir tür kalıcı değişiktir. Matematiğin öğrenilmesinin, benzerlik tanıma ve ardından formalizasyon sürecine dayanması durumunda en etkili olabilir (Mitchelmore ve White, 2004).

Yansıtıcı soyutlama, Piaget'nin (1980, s. 89-97) eylemlerin genel koordinasyonlarının sonucudur, kaynağı öznedir ve tamamen içseldir. Yansıtıcı soyutlama çocuğun çiftler, üçlüler vb. oluşturma gibi birkaç bireysel eylemi gerçekleştirdiği ve ardından eylemleri içselleştirdiği ve toplam bir sıralama oluşturmak için koordine ettiği dizilemedir (Piaget, 1972, s. 37–38).

Tall, Thomas, Davis, Gray ve Simpson'a göre (2000) algılanan nesneler ampirik soyutlama yoluyla ortaya çıkar ve daha karmaşık platonik nesneler daha sonra yansıtıcı soyutlama yoluyla inşa edilebilir. Prosesler, ilk olarak gerçek dünyadaki nesneler üzerindeki eylemlerden sözde-deneysel soyutlama yoluyla ve daha sonra süreç ve kavram arasında dönmemizi sağlayan sembollerle temsil edilen sonuçtaki tasarlanmış nesneler üzerinde daha yüksek düzeyde yansıtıcı soyutlama yoluyla ortaya çıkar. Tanımlanmış nesneler, algılanan veya tasarlanan nesnelerin (hem platonik hem de kavramsal dahil) özelliklerinden yansıtıcı soyutlama yoluyla meydana gelir. Seçilen özellikler aksiyomlar ve tanımlar olarak formüle edilir ve diğer özellikler mantıksal tümdengelim süreçleri aracılığıyla teoremler olarak oluşturulur. Platonik nesneler, projeler ve tanımlanmış nesnelerin tümü, tasarlanan nesnelerin kategorileridir. Bir sürecin kapsüllenmesinin “nesnesi”, kısmen, matematik yapmak için zihinsel süreçleri ve ilişkileri kullanarak ve kısmen, zihinsel olarak manipüle etmek ve matematik hakkında düşünmek için bir isim veya sembol kullanarak manipüle edilebilir bir varlık olmasına izin vermek için zengin bir kavram imajını kullanan bir düşünme tarzıdır.

Öğrencilerin yansıtıcı soyutlama becerileri ile ön koşul bilgileri arasında ilişki vardır ve ön koşul bilgisi öğrencilerin yansıtıcı soyutlama yeteneklerini etkiler (Kariadinata, 2021).

2.2. APOS Teorisi ve Lineer Cebir

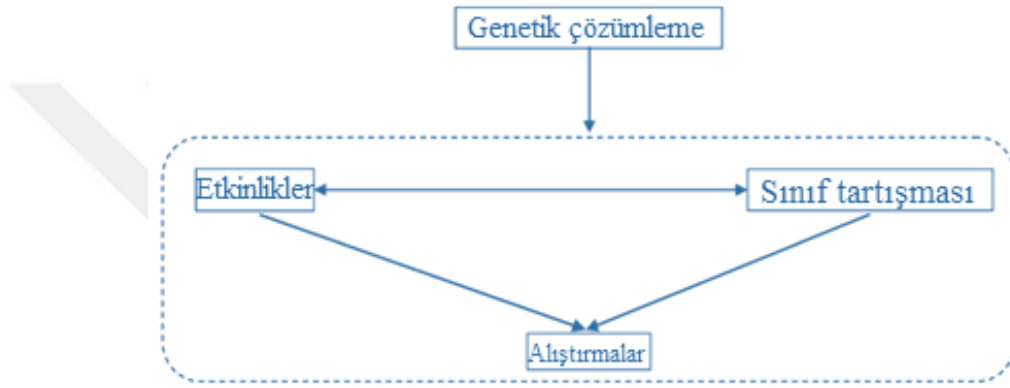
Matematik eğitiminde modeller ve teoriler

- tahmini destekleyebilir,
- açıklayıcı güce sahip olabilir,
- geniş bir fenomen yelpazesine uygulanabilir,
- kişinin karmaşık, birbiriyle ilişkili fenomenler hakkındaki düşüncesini düzenlemesine yardımcı olabilir,
- verileri analiz etmek için bir araç olarak hizmet edebilir ve
- yüzeysel tanımlamaların ötesine geçen öğrenmeyle ilgili fikirlerin iletilmesi için bir dil sağlayabilir (Dubinsky ve McDonald, 2001).

Genetik çözümleme teorik olarak hipotezlenip ampirik olarak test edilebildiğinden ilgili kavrama yönelik bireyin matematiksel düşünme sürecini tanımlayan kuvvetli bir tanımlama ve tahmin aracı olarak kullanılabilir. İlgili kavrama yönelik öğrenme sürecinde

muhtemel güçlüklerin önceden oluşmasını engellemeye yardımcı olabilir (Arnon vd., 2014, s: 17-18).

Bir kavramın genetik çözümlemesi, kavramın bir bireyin zihninde nasıl gelişebileceğini tanımlayabilen yapılandırılmış bir zihinsel haritadır. Bir bireyin matematiksel bilgisi, sosyal bağlamda problemler ve çözümleri üzerinde düşünerek ve matematiksel eylemleri, süreçleri ve nesneleri yapılandırarak veya yeniden yapılandırarak ve bunları problemlerle başa çıkmak için kullanmak üzere şemalarda düzenleyerek algılanan matematiksel problem durumlarına yanıt verme eğilimidir (Arnon vd., 2014).



Şekil 3. ACE Öğretim Döngüsü ile Genetik çözümleme arasındaki ilişki

Etkinlikler

Sınıf, öğrencilerin araştırma tarafından önerilen belirli zihinsel yapıları geliştirmek için tasarlanmış bilgisayar görevleri üzerinde takımlar halinde çalıştıkları bir bilgisayar laboratuvarında toplanır. Laboratuvar ödevleri genellikle planlanan laboratuvarda bitirilmesi gereken bir araçtır ve öğrencilerin laboratuvar açıkken gelmeleri veya kişisel bilgisayarlarında çalışmalarını veya ödevleri tamamlamak için diğer laboratuvarları kullanmaları beklenir.

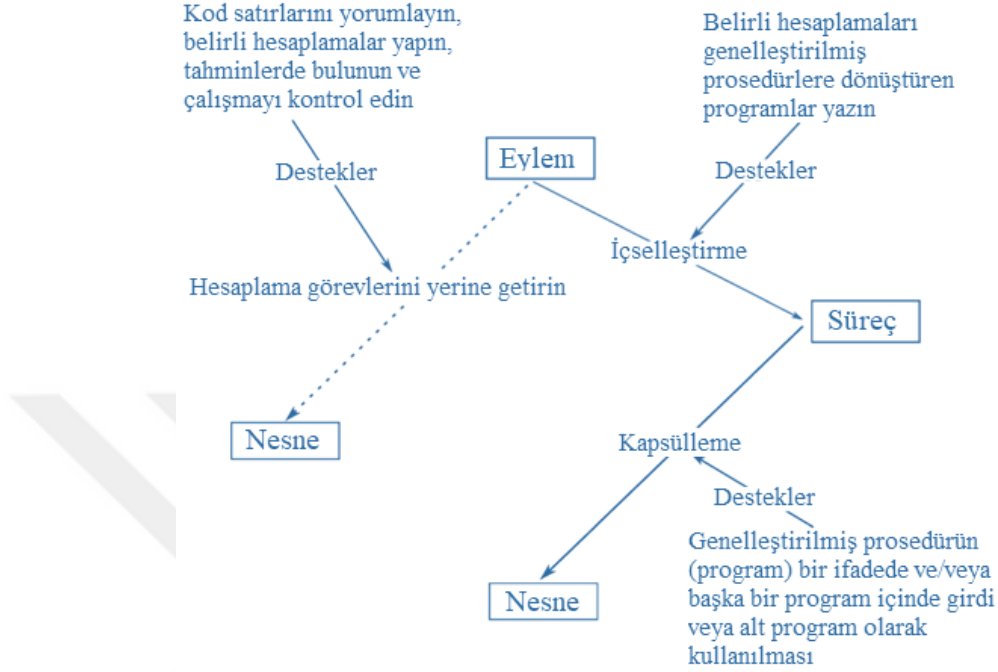
Sınıf tartışması

Sınıf, öğrencilerin yine laboratuvardaki bilgisayar etkinliklerine dayalı kâğıt ve kalem görevlerini gerçekleştirmek için takımlar halinde çalıştıkları bir sınıfta toplanır. Eğitimci, öğrencilere üzerinde çalıştıkları hesaplamalar üzerinde düşünme fırsatı vermek için tasarlanmış gruplar arası tartışmayı yönetir. Zaman zaman eğitimci, öğrencilerin düşündüklerini birbirine bağlamak için tanımlar, açıklamalar ve genel bakışlar sağlayacaktır.

Alıştırmalar

Öğrencilerin takım halinde çalışması için nispeten geleneksel alıştırmalar verilir. Bunların ders ve laboratuvar dışında tamamlanması beklenir ve laboratuvar ödevlerine ek olarak ev ödevleri sunarlar. Alıştırmaların amacı, öğrencilerin öğrendikleri matematiği

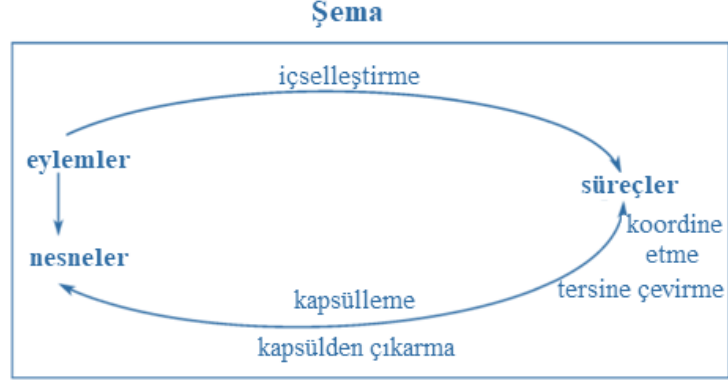
kullanmak için oluşturdıkları fikirleri pekiştirmeleri ve zaman zaman daha sonra çalışılacak durumlar hakkında düşünmeye başlamalarıdır (Dubinsky, 2001).



Şekil 4. Bilgisayar tabanlı pedagojik yaklaşım, zihinsel mekanizma ve zihinsel yapılar

APOS Teorisi, Eylem, Süreç, Nesne ve Şemayı oluşturan zihinsel yapıların özellikleri ve bu zihinsel yapıların inşa edildiği içselleştirme, kapsülleme, koordinasyon, tersine çevirme, kapsülsüzleştirme, temalaştırma ve genelleme gibi mekanizmalardan oluşmaktadır (Arnon vd., 2014). Bir kavram önce bir Eylem olarak, yani önceden tasarlanmış bir Nesnenin veya Nesnelerin harici olarak yönlendirilmiş bir dönüşümü olarak kavranır. Bir Eylem, dönüşümün her adımının açık bir şekilde gerçekleştirilmesi ve harici talimatlar tarafından yönlendirilmesi gerektiği anlamında haricidir; ayrıca, her adım bir sonrakini ister, yani Eylemin adımları henüz hayal edilemez ve hiçbirini atlanamaz. Süreçler, iki zihinsel mekanizmadan biri kullanılarak inşa edilir: içselleştirme veya koordinasyon. Eylemler tekrarlanıp yansıtıldıkça, birey dışsal ipuçlarına güvenmekten onlar üzerinde içsel kontrole sahip olmaya geçer. Bu, her birini açıkça gerçekleştirmek zorunda kalmadan adımları gerçekleştirmeyi hayal etme yeteneği ve adımları atlayabilme ve aynı zamanda onları tersine çevirebilme ile karakterize edilir. İçselleştirme, bu zihinsel değişimi mümkün kılan mekanizmadır. Kapsülleme, bir kişi bir İşleme bir Eylem uyguladığında, yani dinamik bir yapıyı (Süreç), Eylemlerin uygulanabileceği statik bir yapı olarak gördüğünde gerçekleşir. Bir Süreç zihinsel bir Nesneye yerleştirildikten sonra, ihtiyaç ortaya çıktığında, temeldeki Sürecine geri döndürülebilir. Başka bir deyişle, kapsülden çıkarma mekanizmasını uygulayarak, kişi Nesneyi ortaya çıkaran Sürece geri dönebilir. Bazı Nesnelerin yapımında koordinasyon mekanizması vazgeçilmezdir. İki Nesnenin kapsülü

çözülebilir, Süreçleri koordine edilebilir ve koordineli Süreç yeni bir Nesne oluşturmak için kapsüllenebilir. Bu süreç tersine çevrilebilir.



Şekil 5. APOS Teorisi

(Asiala et al. 1996)

Bir Şema, tutarlı bir yapılar topluluğu (Eylemler, Süreçler, Nesneler ve diğer Şemalar) ve bu yapılar arasında kurulan bağlantılar olarak oluşturulduğunda statik bir yapıya (Nesne) dönüştürülebilir ve/veya diğer ilgili Nesneleri veya Şemaları özümseyen dinamik bir yapı olarak kullanılabilir. Genetik ayrıştırma, bir öğrencinin belirli bir matematiksel kavramı öğrenmek için inşa etmesi gerekebilecek zihinsel yapıları ve mekanizmaları tanımlayan varsayımsal bir modeldir. Genellikle Genetik Ayrışma araştırmacılarının kavramın öğrenilmesi ve öğretilmesindeki deneyimlerine, APOS Teorisi hakkındaki bilgilerine, matematiksel bilgilerine, kavram hakkında daha önce yayınlanmış araştırmalarına ve kavramın tarihsel gelişimine dayanan bir hipotez olarak başlar. Deneysel olarak test edilene kadar, genetik bir ayrışma bir hipotezdir ve ön hazırlık olarak adlandırılır.

APOS tabanlı araştırmalarda, çoğu yarı yapılandırılmış görüşmede olduğu gibi, görüşmeci hazırlanmış bir soru taslağını takip eder. Bir öğrencinin yanıtlarına bağlı olarak, görüşmeci takip eden sorular sorabilir. Görüşmeyi yapan kişi, bu tür soruları netlik aramak veya bir öğrencinin düşüncesini daha derinlemesine araştırmak için sorar. Bu sorular yeterli yanıtlar elde edemezse, görüşmeci daha didaktik bir yol izleyebilir ve biraz yönlendirmeye öğrencinin belirli bir zihinsel yapıyı oluşturmada kaydettiği ilerleme açısından nerede olduğunu görmek için bir ipucu verebilir.

İlk aşama, İç, bir Şemanın bireysel bileşenlerine odaklanılarak belirlenir. Bu, esas olarak sistem bileşenleri arasındaki yazışmalardan oluşur. Birey, tüm bağlantıların yerel ve özel olduğu, Şemaya dahil edilen Nesneler arasında ortak olan bir dizi özellik keşfeder. Aşama İç'nde, öğrenci tekrarlanabilir bir eylem veya işlem üzerinde yoğunlaşır ve Şemanın farklı bileşenleri üzerindeki Eylemler arasındaki bazı ilişkileri veya dönüşümleri tanıyabilir.

Ara aşama, Şemayı oluşturan Süreçler ve Nesneler arasındaki ilişkilerin ve dönüşümlerin inşası ile karakterize edilir. Bu aşamada, bir kişi öğeleri birlikte gruplandırmaya başlayabilir ve hatta onları aynı adla çağırabilir.

Bir öğrenci, Ara aşamada geliştirilen koordinasyonlar ve ilişkiler üzerine düşündükçe, yeni yapılar ortaya çıkar. Bu ilişkilerin sentezleri yoluyla öğrenci, Şemadaki dönüşümlerin farkına varır ve altta yatan bir yapı inşa eder. Bu, İleri aşamasında Şemanın gelişmesine yol açar (Arnon vd., 2014).

Oktaç'a göre (2019) lineer cebir öğretiminde;

1) Söz konusu kavramın kelimelerde açıkça görünmediği etkinlikler düzenleyin, böylelikle öğrenciler Şemalarını kullanacaktır.

(2) Algoritmalara dayanmak yerine kavramsal bir yaklaşımı motive etmek için öğrenciler için yeni olan görevleri kullanın.

(3) Öğrenciler bir problemi çözerken hata yaptıklarında, farklı yorumlar arasında bir zıtlık yaratmak için aynı problemi farklı bir açıdan sunun.

(4) İçselleştirme ve kapsülleme gibi belirli mekanizmaların kullanılmasını hedefleyen matematiksel durumlar tasarlayın.

(5) Farklı temsilleri (sözlü, matris, grafik, cebirsel, sayısal) dahil edin ve öğrencilerin geçişler yoluyla aralarında bağlantı kurmasına yardımcı olun. şeklinde pedagojik önerilerde bulunmuştur.

Matematikte kavramsal düşünmeyi geliştirmeye yönelik öğretim yaklaşımında Dubinsky (2002).;

- Öğrencilerin belirli bir kavramı öğrenme sürecinde gelişen kavramsal yapılarını gözlemleyin.

- Verileri analiz edin ve bu gözlemleri kullanarak bu kavramın genetik çözümlemesini geliştirin.

- Öğrenciyi genetik çözümlemedeki mekanizmaları oluşturacağı ve yansıtıcı soyutlama yapacağı etkinlikler tasarlayın.

- Genetik çözümlemeyi ve öğretim etkinliklerinizi gözden geçirerek işlemi tekrarlayın ve mümkün olduğu kadar veya stabilizasyon gerçekleşene kadar devam edin.

Asiala ve diğ. (1998) soyut cebir öğrencilerinin sonlu bir kümenin permütasyonlarını ve düzgün çokgenin simetrisini kavrayışlarının nasıl oluşturulduklarını araştırdıkları çalışmalarında APOS teorisini kullanarak öğrencilerin bireysel görüşme raporlarına ve yazılı sınav performanslarını değerlendirmişlerdir. Sonuçlara göre öğrenenlerin ilgili konulara

ilişkin güçlü kavrayış kazanabilmelerinde pedagojik yaklaşımın oldukça etkili olduğunu belirtmişlerdir.

Asiala ve diğ. (1997) öğrencilerin bir fonksiyonun grafik ve türev kavramları arasındaki ilişkinin anlamalarını incelemek üzere gerçekleştirdikleri çalışmalarında, öğrencilerin ilgili konudaki kavramsal anlamalarını geliştirici yönde hazırladıkları öğretim sonucunda uyguladıkları problemleri APOS teorisine göre değerlendirmişlerdir. Görüşme ve analizler sonucunda uygulanan öğretimi alan deney grubu öğrencilerinin fonksiyonların geometrik anlamını ve türev yorumunu geliştirmede daha başarılı olduklarını belirtmişlerdir.

Asiala ve diğ. (1997) öğrencilerin koset, normallik ve bölüm kosetlerini anlamalarını inceledikleri çalışmalarında ise öğrencilerin ilgili konuyu daha etkili anlamalarını sağlamak için uyguladıkları öğretimin öğrencilerin ilgili konuya ilişkin zihinsel kavramları yapılandırmada daha etkili olduğunu belirtmişlerdir.

Hollebrands (2003) geometri yazılımı destekli yedi haftalık bir öğretim uygulaması sonucunda öğrencilerin matematiksel problem çözüm süreçlerini APOS teorisine göre değerlendirmiştir ve sonuçta öğrencilerin kavramsal anlamaları için anahtar kavramların değişken, parametre, ilişkiler ve geometrik dönüşümler olduğunu belirtmişlerdir.

Trigueros ve Oktaç (2005) APOS teorisini kullanarak lineer cebir dersinin temel kavramları ile ilgili zihinsel yapılarını araştırmışlardır. Trigueros, Oktaç ve Manzanero (2007) araştırmasında APOS teorisine dayalı lineer cebir öğretimini alan altı öğrenci üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmada hazırladıkları lineer denklem sistemleri kavramına yönelik önerilen genetik çözümlemenin doğruluğunu araştırmak için bu öğrencilere dersin başında ve ders tamamlandıktan sonra görüşmeleri uygulamışlardır. Çalışmada ayrıca öğrencilerin kavrama ilişkin güçlükleri, muhakeme modelleri ve şema gelişimlerinin evrimi üzerinde durulmuştur. Sonuçta APOS teorisi destekli öğretimin öğrencilerin denklem sistemleri şemasının gelişimine yardımcı olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin gelişiminin büyük ölçüde değişken şemalarının gelişim düzeyine bağlı olduğunu da ifade etmişlerdir.

Ku ve diğ. (2008) araştırmalarında taban kavramına yönelik genetik çözümleme geliştirmek amacıyla APOS teorisini kullanmışlardır. Lineer cebir dersini tamamlayan altı üniversite öğrencisiyle birlikte görüşme gerçekleştirmişlerdir. Sonuçlara göre öğrenciler, verilen bir vektör uzayı için verilen bir kümenin bu uzayın tabanı olup olmadığını belirlemede, bir vektör uzayı için taban bulmaya göre daha kolay bir süreçten geçtiklerini belirtmişlerdir.

Çetin (2009) birinci sınıf analiz dersini alan öğrencilerin formel limit kavramını nasıl anladıklarını ve APOS teorisine dayalı hazırladığı öğretim ile bu anlayışlarında ne gibi değişiklikler olduğunu araştırmıştır. 25 öğrenciyle gerçekleştirdiği çalışması beş hafta

sürmüştür. Öğrenciler her hafta 2 saat boyunca bilgisayar laboratuvarında grup çalışmalarıyla limit kavramına ilişkin yansıtma ve programlama aktiviteleri üzerinde çalışmışlardır. Sonrasında ise dört saatlik formel dersleri sınıfta almışlardır. Limit kavramına yönelik açık uçlu sorular içeren ölçme aracı öğrencilere ön test-son test olarak uygulanmıştır. Süreç sonunda ise araştırmacı tarafından yarı yapılandırılmış görüşme öğrencilerin kavrayışlarını derinlemesine analiz etmek üzere uygulanmıştır. Analiz APOS kriterlerine göre yapılmıştır. Analiz sonuçlarında öğrencilerin araştırmacı tarafından hazırlanan genetik çözümlemeye uygun yansıtmalarda bulunduğu ortaya çıkmıştır. Sonuç olarak araştırmacı tarafından geliştirdiği öğretimin öğrencilerin limit kavramını anlamada olumlu etkisi olduğu vurgulanmıştır.

Stewart (2008) çalışmasında üniversite düzeyinde lineer cebir dersini almakta olan birinci ve ikinci sınıf öğrencileriyle, lineer cebir dersinde APOS teorisini ve Tall'un üç dünyası teorilerini bir araya getirerek yeni bir teorik çerçeve ileri sürmüştür. Bu çerçeveye göre lineer cebir kavramlarının oluşma süreci eylem-süreç- nesne-şema aşamalarından geçerken, aynı zamanda şekilsel, cebirsel, matris temsili ve formal düşünme dünyalarındaki davranışları da içermektedir. Bu teorik çerçeveye göre farklı temsilleri kullanma ve bunlar arasında geçişler yapmayı esas alan bu çalışma kapsamında öğrencilerin, lineer bağımsızlık, germe gibi farklı kavramlar arasında ilişki kurmada güçlük çektikleri ifade edilmiştir. Farklı temsillerin kullanımının kavramın genel olarak anlaşılmasını sağladığını belirtirken, kavrama şekilsel dünya davranışlarıyla giriş yapılmasının öğrencilerin düşünme düzeylerinde dikkate değer öneme sahip olduğunu eklemişlerdir.

Ramirez (2009) öğrencilerin lineer denklemleri anlama süreçlerini araştırdığı çalışmada, öğretim sürecine yönelik gözlem raporları ve sınıftan seçilen dört öğrencinin görüşme sırasında gerçekleştirdikleri problem çözümlerinden elde edilen raporlara göre veri elde etmişlerdir. Verilerin analizi sürecinde, lineer denklemler sisteminin denk sistemler kavramında nesne aşamasının bir parçası olduğunu APOS teorisini kullanarak göstermiştir. Bu sonuç ise Ramirez'in çalışmasının başında kullandığı genetik çözümlemesinde düzenleme yapmasını gerektirmiştir.

Parraquez ve diğ. (2010) APOS teorisini kullanarak vektör uzayı kavramına yönelik genetik çözümleme önerisinde bulunmak amacıyla gerçekleştirdikleri çalışmalarında on üniversite öğrencisiyle çalışmışlardır. Öğrencilerle gerçekleştirilen görüşme ve açık uçlu sorulardan oluşan ölçek uygulama çalışmasından elde edilen verilerin analizinde vektör uzayının yapısı ve vektör uzayı şemasının lineer bağımsızlık ve ikili işlem gibi kavramlar ile ilişkisi üzerinde durmuşlardır. Öğrencilerin vektörle toplama ve skalerle çarpma işlemlerini

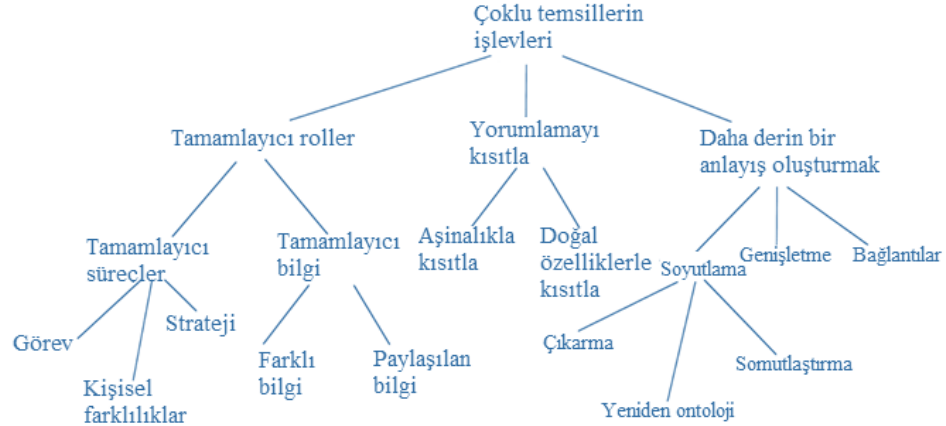
ayrı iki süreç olarak gördüklerini, bu iki süreci koordine etmede güçlük yaşadıklarını belirtmişlerdir.

Ku ve diğ. (2011) araştırmalarında lineer cebir dersi kapsamında ele alınan germe ve geren küme kavramlarının oluşturulmasına yönelik genetik çözümleme geliştirmişlerdir. Lineer cebire giriş dersini tamamlayan on bir öğrenciyle görüşme çalışmaları uygulayarak, elde edilen verileri genetik çözümlemeye göre analiz etmişlerdir. Elde edilen veriler neticesinde geliştirdikleri genetik çözümlemede bazı değişiklikler yapmışlardır. Ayrıca öğrencilerin verilen bir kümenin verilen bir uzayı gerip germediğini belirlemelerinin, verilen bir vektör uzayı için geren küme bulmaya göre daha kolay bir süreç yaşadıklarını belirtmişlerdir.

Roa-Fuentes ve Oktaç (2012) lineer dönüşüm kavramına yönelik, üniversite öğrencilerine uyguladığı tanılayıcı test (diagnostic test) ve görüşmelerle öğrencilerin ilgili kavramları nasıl öğrendiğini araştırmışlardır. Roa-Fuentes ve Oktaç (2010) çalışmalarında geliştirdikleri lineer dönüşüm kavramına yönelik genetik çözümlemeyi bu çalışmalarında kullanarak APOS temelli analiz gerçekleştirmişlerdir. Sonuç olarak öğrencilerin lineer dönüşüm kavramını süreç aşamasında yapılandırabilmeleri için vektörlerde toplama vektörün skalerle çarpma işlemlerinin özelliklerinin koordine edilmesi gerektiği belirtilmiştir. Ayrıca kullanılan genetik çözümleme yeniden düzenlenmiştir.

Salgadoa ve Trigueros (2015) öz değer ve öz vektörlerin öğretiminde modelleme ve APOS Teorisini çerçevesinde gerçekleştirdikleri çalışmasında Genetik çözümlemenin dikkate alınarak, yapılan işi ve literatürde belirtilen belirli zorlukları yansıtmak için tasarlanmış etkinliklerin kullanılması ve çözüm sürecinin farklı anlarında öğretmenle sınıfta yapılan tartışmalar, ilgili kavramlarının inşasını ve öğrencilerin öğrenmesini sağladığını ifade etmişlerdir.

APOS Teorisi, temsilleri ve aralarındaki geçişleri biraz benzersiz bir şekilde ele alır, öğrencinin kavramı genetik çözümleme yoluyla oluşturması sürecinde kavramın belirli bir temsilini gerektirebilecek bir problem durumuyla uğraşırken, öğrenci kavramı o temsil açısından düşünür. Öğrencinin temsilleri değiştirmesi gerekiyorsa farklı temsillere geçebilir. Ancak bu geçiş kavramsal anlamaya odaklanarak gerçekleştirilmelidir, işlemlere odaklanarak yapılırsa öğrenciler kavramı öğrenmede zorluklar yaşayabilir (Arnon vd., 2014).



Şekil 6. Çoklu temsillerin işlevleri

(Ainsworth, 1999)

Çoklu temsiller öğretim sürecinde kullanıldığında görevleri, kişisel farklılıkları ve stratejileri, farklı bilgi ve paylaşılan bilgileri tamamlayıcı role sahiptir. Matematiksel durumlar için yapılan yorumları aşinalıkla ve doğal özellikleriyle kısıtlayarak yapılması gereken çıkarımlara yönlendirebilir. Ayrıca soyutlama, genişletme ve bağlantıları kurmaya yardımcı olarak daha derin bir anlayış oluşturma işlevine de sahiptir (Ainsworth, 1999).

Sadece sembolik temsillere odaklanmak yerine, farklı temsillerin ve bunlar arasında ilişkilendirmenin öğrencilere matematiksel fıkirlere ilişkin farklı anlayışlar sağladığını keşfettiler (akt. Confrey ve Kazak, 2006).

Karmaşık problemlere erişim, destekleyici bir sınıf kültürü, iş birliği içinde çalışmak için yeterli zaman ve temsil (ve diğer matematiksel uygulamalar) için bilinçli olarak geliştirilmiş öğrenme fırsatları ile bu öğretimde öğrenciler temsil kullanımı konusunda aktiftir ve matematik öğrenimini olumlu etkileyebilecek bir öğrenme yöntemidir. Öğrencilerin temsil etmeyi öğrenmeleri öğrenmelerini temsil etmektedir (Selling, 2016).

2.3. Lineer Cebir ve Geometri

Matematik derslerinde iletişim ve bilgisayar teknolojilerinin dahil edilmesiyle verilerin araştırılması, yorumlanması ve açıklanması yoluyla matematiksel modelleme becerilerini geliştirilebilir, şekil ve uzaydaki ilişkileri ve davranışları ve bunların cebirle olan bağlantılarını deneyimleyebilir, bunlardan hipotez oluşturabilir ve bunları açıklayabilir, mantıksal düşünme geliştirebilir ve stratejileri ve varsayımları değiştirebilir, anında geri bildirim alabilir, matematik kavramları ile ilgili bağlantılar kurabilir ve matematik alanları arasında ilişki kurulabilir, grafik görüntülerini manipüle ederek öğrenebilir ve kalıcılığı arttırabilirsiniz. Ayrıca öğretmenler için öğretim materyallerini hazırlamalarına yardımcıdır

ve kullanılabilir esnek ve zaman kazandıran bir kaynak sağlamaktadır. (Cowan, 2006, p:104).

Çevrimiçi matematiksel düşünmelerini geliştirmek için öğrenciler bilişsel yüklerini azaltmak için çevrimiçi bilişsel araçları etkin bir şekilde kullanabilir, iş birliği ve geri bildirim için ayarlanabilir bir çerçeve analizi yöntemi kullanılabilir hem geleneksel hem de açık uçlu matematik problemleri çevrimiçi çalışmalarda etkin bir şekilde kullanılabilir ve öğrencilerin çözüm süreçlerini değerlendirmeyi amaçlayan çevrimiçi matematik yarışmaları yapılabilir (Karadağ, 2008).

Cabri gibi etkileşimli matematik yazılımlarında, şekiller üretmek ve ölçmelerini ölçmek gibi materyal eylemlerinin kolaylaştırdığı ancak görevin değişmediği ortamdaki görevler, sürükleyerek bir figür içindeki ilişkileri belirleme gibi öğrencilerin araştırmasını ve analizini kolaylaştırdığı görevler, bir inşaat görevi dinamik geometri ortamında geometrik bir dönüşüm kullanılarak çözülebildiği gibi kağıt ve kalem karşılığı olan ancak ortamda farklı şekilde çözülebilen görevler, özelliklerini belirlemek için deneyimlerle dinamik bir diyagramı yeniden oluşturmak gibi ortamın aracılığı olmaksızın ortaya konulamayan görevler kavramların öğretiminde kullanılabilir (Laborde, 2008).

Dinamik geometri yazılımı ortamlarında matematik yapmak deney yapma, varsayımda bulunma ve varsayımı kanıtlama süreçlerinden oluşur. Bu deney özel duruma ilişkin önermede bulunma, genel duruma ilişkin önermenin genel formunun oluşturulması ve deneysel bulguların açıklanması adımlarından oluşur (Baki, 2015).

Öz yeterlik, kullanıcı memnuniyeti, öznel normlar, algılanan kullanılabilirlik, algılanan kullanım kolaylığı ve öğrencilerin tutum yapılarının hepsi öğrencilerin bir matematik sınıfında teknolojik araçları benimseme ve kullanma davranışsal niyetleri üzerinde olumlu etkiye sahiptir (Zogheib, Rabaa'i, Zogheib ve El-Saheli, 2015).

Cabri 3D'nin iki farklı sürükleme modu, nesne sürükleme ve perspektif sürüklemenin, öğrencilerin dönme simetrisi kavramına ilişkin kavrayışlarını geliştirmektedir. Nesne sürükleme, öğrencinin kavramı anlamalarını destekleyen şekli manipüle etmesi için fırsatlar sağlarken, perspektif sürükleme, öğrencilerin dinamik bir görüntü oluşturmaları ve kavramı dönme simetrisini diğer tanıdık olmayan katı cisimlere genelleştirmelerine yardım eder (Or, 2008).



Şekil 7. Matematik eğitiminde teknolojinin didaktik işlevleri

(Drijvers, 2015)

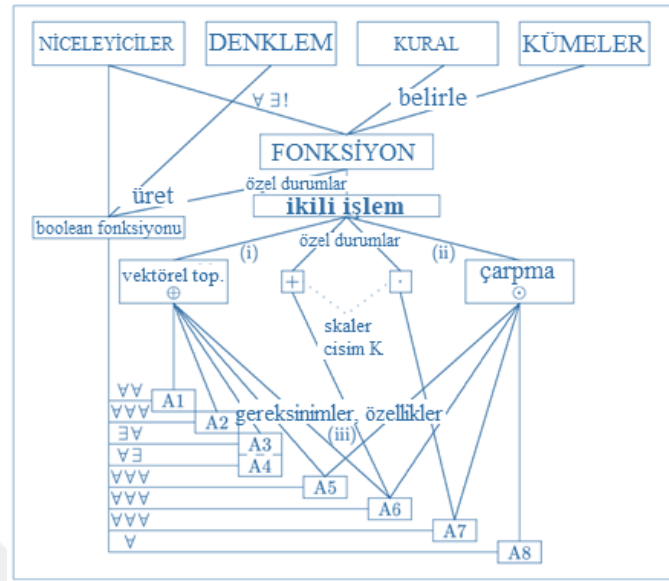
Teknolojinin matematik eğitime entegrasyonunda tasarım, öğretmenin rolü ve eğitim bağlamı öğrencilerin başarıya ulaşmasında önemli etkenlerdir. Dijital aracın dahil edildiği tasarımda pedagojik veya didaktik işlevsellik, aracın özellikleri ve sağladığı olanaklarla eşleşmelidir. Son olarak, dijital teknolojinin sağladığı kolaylıklar ve kısıtlamalar önemli tasarım faktörleri olsa bile, yönergeler ve tasarım buluşsal yöntemleri, teknolojinin sınırlamaları veya özellikleri tarafından yönlendirilmekten ziyade pedagojik ve didaktik düşüncelerden gelmelidir. Öğretmen, teknoloji açısından zengin etkinliklerin sonuçlarını sentezleyerek, verimli araç kullanma tekniklerini vurgulayarak ve teknolojik ortamdaki deneyimleri kâğıt-kalem becerileri veya diğer matematiksel etkinliklerle ilişkilendirerek öğrenmeyi düzenlemelidir. Dijital teknoloji kullanımının tutarlı ve teknoloji ile çalışmanın doğal bir şekilde entegre edildiği bir eğitim bağlamında yerleşik olmasının ne kadar önemli olduğunu ortaya koymaktadır (Drijvers, 2015).

2.4. Bazı Lineer Cebir Kavramları

2.4.1. Vektör Uzayı Kavramı

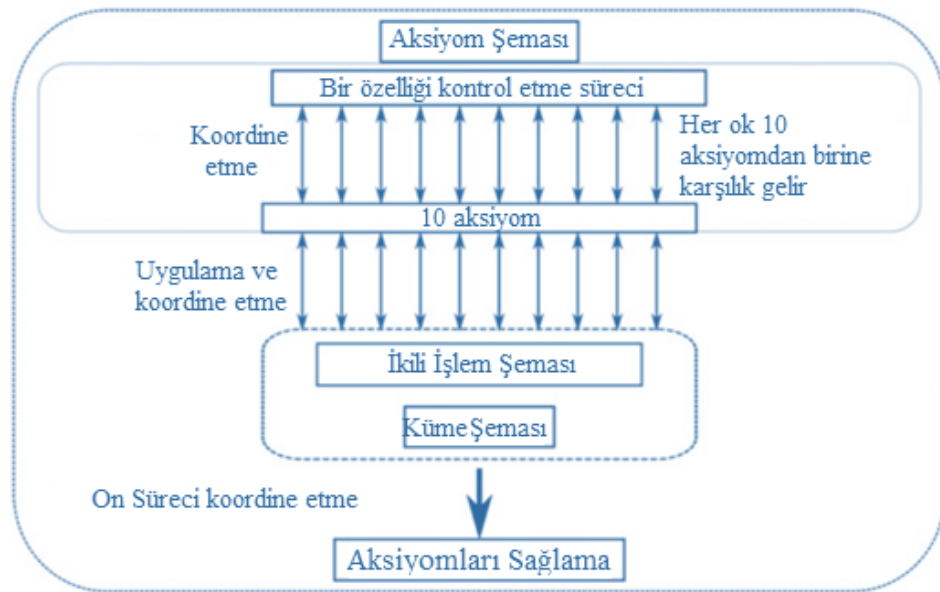
Bir kavrama ait genetik çözümleme farklı şekillerde olabilir. Örneğin; Pesonen (1999), Arnon vd. (2014) ve Parraguez ve Okaç (2010) vektör uzayı kavramı için genetik çözümlemeleri aşağıdaki gibidir.

Şekil 8'e göre vektör uzayı kavramı için gerekli ön bilgiler niceleyiciler, denklem, kural, kümeler, fonksiyon ve ikili işlemdir ve bu kavramların arasında belirle, üret gibi bağlantılar kurularak vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin gereksinimleri ve özellikler bağlantılarını içeren bir genetik çözümleme yer almaktadır.



Şekil 8. Vektör uzayı aksiyom sisteminin mantıksal yapısı

(Pesonen, 1999).

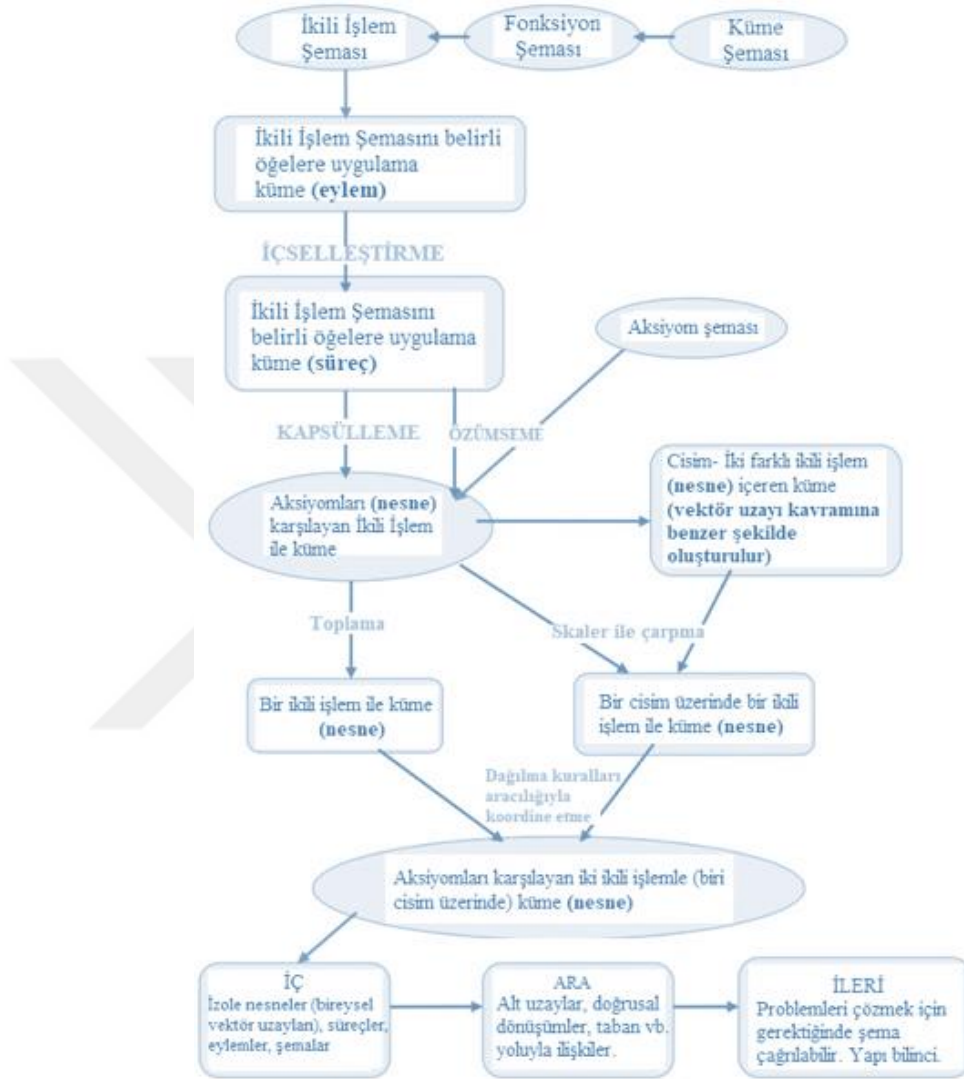


Şekil 9. Vektör uzayının genetik çözümlemesinin şematik gösterimi

(Arnon vd, 2014).

Şekil 9’da vektör uzayının genetik çözümlemesi ilk olarak aksiyomları sağlama ile başlamaktadır. Aksiyom şemasında her bir aksiyom için koordine etme ve uygulama süreçleri sonrasında Küme şeması üzerinde vektör uzayı olma aksiyomları olan on aksiyom uygulanarak koordine etme gerçekleşmektedir. Tüm aksiyomları sağlayan küme ve ikili işlem şemaları koordine edildiğinde vektör uzayı nesnesi oluşur. Burada her bir dörtgen bir nesneyi temsil etmektedir. Burada nesne olarak gerekli olarak ön kavramlar dikkate alındığında bu

kavramlarla ilgili eksik bilgiler vektör uzayı kavramının süreç ve nesne anlayışına geçmesine engel olacaktır.



Şekil 10. Vektör uzayı genetik çözümleme

(Parraguez ve Okaç, 2010)

Şekil 10'daki vektör uzayı genetik çözümlemesinde ise küme, fonksiyon ve ikili işlem şeması gerekli ön kavramlardır ve içselleştirme, kapsülleme, özümseme mekanizmaları ile vektörel toplama iç işlemi ve skalarla çarpma dış işlemi nesnelerinin koordinasyonu ile vektör uzayı nesnesine ulaşma süreci anlatılmıştır. Burada aksiyom şeması ve cisim nesnesi de vektör uzayı kavramının oluşturulabilmesi için gerekli olan ön kavramlardır. Nesneden sonraki iç-ara ve ileri seviyelerinde vektör uzayı kavramının kendi içinde ve diğer kavramlarla ilişkilendirme seviyeleri görülmektedir.

- Vektörler kümesi.

Bir vektör uzayının alt vektör uzayından bahsederken yapacağı işlemlerde hangi uzaydan bahsettiğini karıştırır ve vektörün bileşenleri, hangi uzaya ait oldukları karıştırılır.

- İkili işlem.

Vektörel işlemlerin sonucunun hangi uzaydan olacağı zihinlerinde karmaşa yaratmaktadır.

- Aksiyomların kontrolünde tümevarımsal olarak hareket etmeye çalışır, mesela ikili işleme dikkat etmeden etkisiz elemanı sıfır vektörü alma eğilimindedirler (Pesonen, 1999; Britton ve Henderson, 2009).

Öğrenciler iki vektörün toplamının yine bir vektör olduğunu belirlemede, kapalılık sağlanması durumunu kontrol etmede güçlük yaşamaktadır ve bu durum öğrencilerin fonksiyon ve ikili işlem şeması ile ilgili eksik anlayıştan kaynaklandığı söylenebilir (Britton ve Henderson, 2009).

Konyalıoğlu, İpek, Işık'a göre (2003) vektör uzayı kavramının öğretimi ile ilgili en önemli sorunlardan biri, öğrencilerin vektör uzayı teorisinin aksiyomatik dilinin soyut doğası ve somut yapılar hakkındaki bilgileri ve sezgileri arasındaki ilişkiyi kurmaktaki anlama güçlüklerinden kaynaklanmaktadır. Geometrik açıdan verilen lineer cebir dersini alan öğrencilerin bu bağlantıyı iyi kurabildiklerini göstermektedir. Ayrıca, sonuçlar öğrencilerin kavramları geometrik açıdan daha iyi tanımladıklarını, kavramları cebirsel açıdan da anladıklarını göstermektedir. Ayrıca lineer cebirin geometrik açıdan öğretilmesi, öğrencilerin soyut yapıların ve kavramların bir birikimi olarak görülen lineer cebir dersine farklı bir bakış açısıyla bakmalarını sağlar. Görselleştirmenin öğretim sürecine dahil edilmesi öğrencilerin derse karşı motivasyonunu artırır.

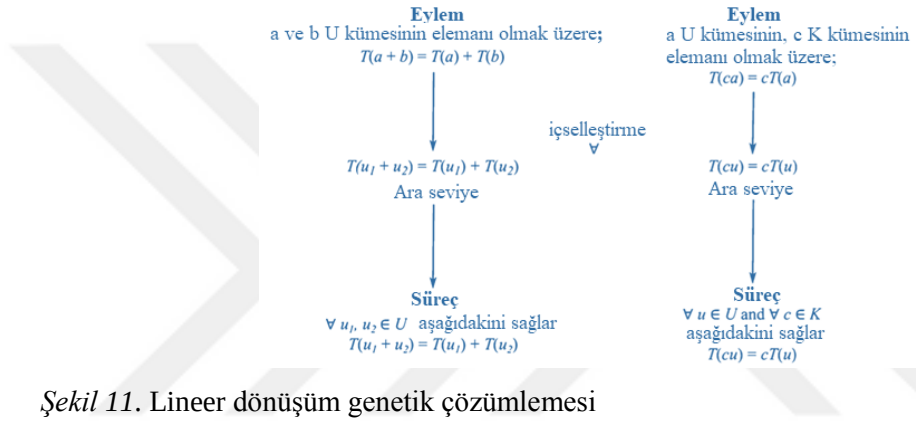
Öğrencilerin sembolik dünya matrisi temsilleriyle işlemsel olarak çalışmayı tercih etme eğilimindedir. Formel dünyada lineer cebir ile uğraşmaktan daha kolay olduğu için bu çok şaşırtıcı değil ancak öğrenciler germe ve alt uzayı geometrik nesneler olarak "görmelerini" sağlamada, somutlaştırılmış bir perspektifin önemlidir. Öğretim görevlilerinin öğrencilere, formel düşünme dünyasına varmadan önce, kavramların somutlaşmış yönlerini keşfetme ve aynı zamanda onları sembolik dünyada manipüle etme şansı verilmelidir. Öğrencilerin bu dünyalar arasında güvenle hareket etmelerini sağlamak ve bu dünyalardaki deneyimlerini genişletmek, onların bir matematiksel bilgi düzeyine ulaşmalarına yardımcı olacaktır (Stewart ve Thomas, 2010).

Yeterince gelişmemiş bir küme şemasına ve ikili işlemler şemasına sahip olmak vektör uzayının iç seviyelerde düşünme becerilerine ulaşmayı engelleyecek ve alt vektör uzayı

kavramı hakkında akıl yürütmelerini sağlayacak zihinsel yapıları geliştiremeyeceği için alt vektör uzayını anlamalarında güçlük meydana gelecektir (Mutambara ve Bansilal, 2017).

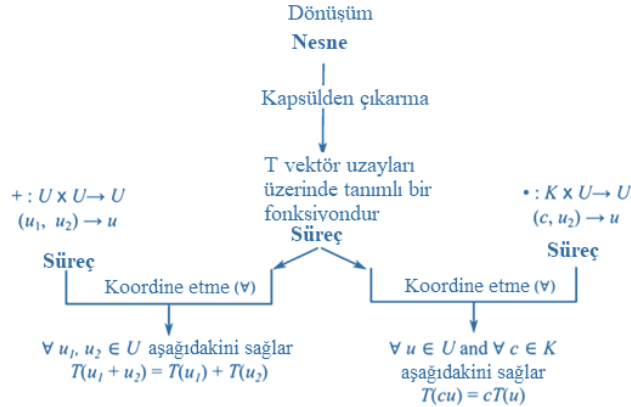
2.4.2. Lineer Dönüşüm Kavramı

Vektör uzayları arasında tanımlanan fonksiyonu ifade eden dönüşüm doğrusallık özelliğini sağlaması için vektörlerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre dönüşümü korumalıdır. Yani U vektör uzayı üzerinde tanımlanan T dönüşümü $\forall u_1, u_2 \in U$ için $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ ve $\forall u \in U$ ve $\forall c \in K$ için $T(cu) = cT(u)$ ifadelerini sağladığında lineer dönüşümdür.



Şekil 11. Lineer dönüşüm genetik çözümlemesi

(Roa-Fuentes ve Oktaç, 2010, s.105)



Şekil 12. Bir nesne olarak dönüşümle başlayan süreçler olarak doğrusallık özelliklerinin yapılandırılması

(Arnon vd, 2014).

Lineer dönüşümlerde Eylem, Süreç ve Nesne aşamaları dönüşümlerin görüntü kümesi, görüntü, tanım kümesi, boyut ve lineer denklem sistemleri gibi ilgili olduğu kavramlar ve bunlar arasındaki geçiş süreçlerinden oluşmaktadır (Oktaç, 2019).

Öğrenci bir vektörün görüntüsünü cebirsel kurala göre ya da matris cebiri ile gerçekleştirdiğinde eylem aşamasında, tanım vektör uzayının herhangi bir x vektörünün görüntüsünü cebirsel kurala göre ya da matris cebiri ile gerçekleştirdiğinde (uzayın tüm vektörleri için görüntüsünü zihninde bulabildiğinde) süreç aşamasında, cebirsel kurala göre ya da matris cebiri ile dönüşümünlerin toplamını, bileşkesini ya da tersini bulabildiğinde nesne aşamasında beceriler sergiler (Oktaç, 2019). Kapsüllenen süreç sonunda oluşan nesne aşamasında öğrenciler yeni eylemleri nesne üzerinde uygulayabildiği tersine süreç gözlemlenebilir. Vektör uzayı kavramı nesne aşamasında anlaşılmamış ise, lineer dönüşümlerin matris cebiri ile gerçekleştirilen uygulamalarında dönüşüm matrisi ile tanım uzayından seçilen vektör matrisinin birlikte kullanıldığı işlemleri anlamlandırmada sorun yaşar ve işlem sonucunda hesaplanan görüntü uzayının vektörünün anlamını kavramada güçlük meydana yaşayabilir.

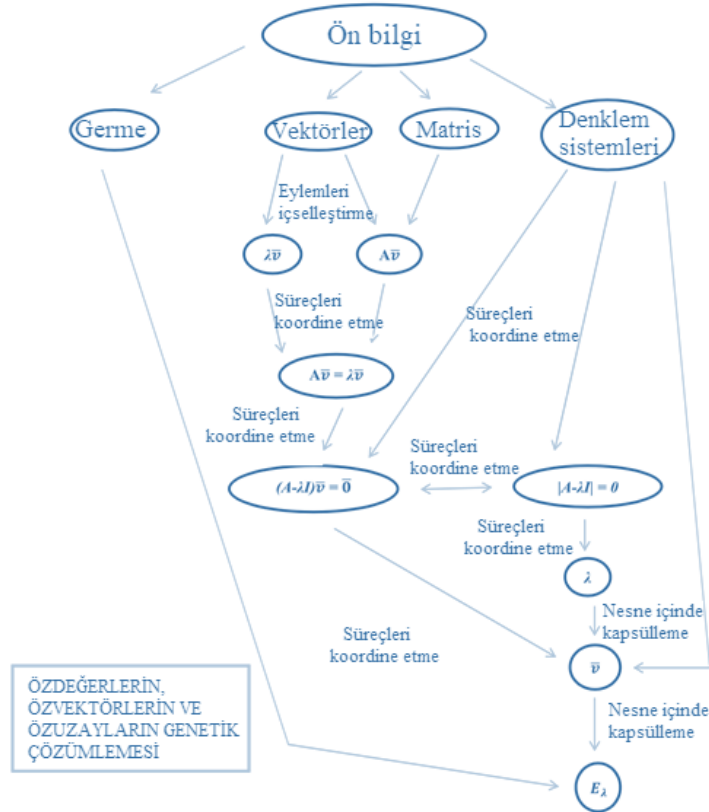
Belirli bir dinamik geometri ortamının oluşturulması, öğretmenin müdahaleleriyle öğrencilerin geometrik dönüşümün matris temsili üzerinde anlamlandırması için bir bağlam sağlar. Sürüklemeye aracı, ortak değişkenlik ve bağımsız/bağımlı değişkenler hakkında bir anlayış duygusu uyandırır ve sürüklemeye aracının ve ızgara işlevinin eşzamanlı kullanımı, geometrik dönüşüm duygusu ve geometrik dönüşümlerin matris temsili kavramını çağrıştırırken ApplyMatrix komutu ile dönüşüm ve matris dönüşümü kavramlarını birbirine bağlamada önemli bir rol oynar. Öğrenciler belirli geometrik dönüşümlerin matris gösterimini öğrendikleri için, doğrusal dönüşüm kavramını sadece $\mathbb{R}^n$ için değil, aynı zamanda V ve W vektör uzayları için de daha fazla kavramsallaştırmaları mümkün olabilir (Turğut, 2019).

2.4.3. Öz Değer-Öz Vektör Kavramı

Lineer dönüşümlerde, tanım vektör uzayındaki her bir vektörün görüntü vektör uzayında bir vektör karşılığı vardır. Öklit uzayları düşünüldüğünde bu görüntü bazen eksenlere simetri şeklinde, bazen iz düşüm şeklinde bazen de sadece A dönüşüm matrisine bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Diğer vektör uzaylarında (polinomlar, matrisler, sürekli fonksiyonlar vb.) da benzer şekilde dönüşümün kuralına ya da dönüşüm matrisine göre görüntü vektörleri oluşmaktadır. Aslında bu dönüşümler gerçekleşirken bazı özel durumlarla karşılaşılır. Bu özel durumlar görüntüsü kendisinin λ katı olan tanım uzayındaki vektörlerdir. Bu vektörler $A.x = \lambda.x$ eşitliğini sağlamaktadır ve x vektörlerini bulabilmek için önce karakteristik polinomun köklerini, sonra da bu eşitlikteki denklem çözümünü bulmak gerekir. Çözüm sonucunda ulaşılan x vektörlerinin oluşturduğu küme tanım uzayının alt uzayı olan öz uzaydır. Lineer denklem sisteminin çözümüyle bulunan öz uzaylar her öz vektöre has olmaktadır. Aslında öz değer ve öz vektörleri ifade ettiğimiz bu cümlelerde geçen vektör

uzayı, lineer denklem sistemi, matris, lineer dönüşüm gibi kavramlar öz değer ve öz vektörleri anlayabilmek için önceden öğrenilmiş olması gereken kavramlardır.

Şekil 13' teki genetik çözümleme incelendiğinde matris, denklem sistemleri, vektörler ve germe ön bilgi kavramlarıdır. Vektörlerin skalerle çarpma işlemi $\lambda.v$ ve bir matris ile vektörün çarpılması işlemi $A.v$ eylemleri içselleştirilir ve bu ikili işlemlerde süreç aşamasına geçilir. Bu süreçlerin koordine edilmesiyle $\lambda.v = A.v$ sürecine ulaşılır. Bu süreç ile denklem sistemleri sürecinin koordinasyonu ile $(A - \lambda I_n).v = 0$ süreci ve bu sürecin yine denklem sistemleri süreci ile koordinasyonu ile $|A - \lambda I_n| = 0$ sürecine geçilir. Burada determinant hesabı ve kök bulma ile öz değerlere sonra $(A - \lambda I_n).v = 0$ süreci ile koordine ederek lineer denklem sistemi çözümü ile öz vektörleri bulma gerçekleştirilir. Öz vektörlerin oluşturduğu öz uzaylarını anladığında nesne içine kapsüllemenin gerçekleştiği anlaşılabılır.



Şekil 13. Öz değer ve öz vektör kavramlarının genetik çözümlemesi

(Salgado ve Trigueros, 2015)

Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith ve Nelipovich (2007), Sierpinska (2000), Possani, Trigueros, Preciado ve Lozano (2010), diğerlerinin yanı sıra hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin öz değer-öz vektörler kavramını zor olduğunu düşündüklerini bulmuşlardır.

Öğrenciler öz değer ve özvektörlerde hem doğru hem de yanlış cevaplarda "doğrusal bir kombinasyondur" ifadesini kullandıkları, skalerleri özdeğerlerle lineer birleşimde

birleştirdikleri ve öz uzayların boyutuna karşı özvektör sayısı hakkında akıl yürütmektedir (Wawro, Watson ve Zandieh, 2019).

Lineer cebirde öz vektörler ve öz değerler öğretilirken, karakteristik denklemin köklerinin sayısı ile öz vektörlerin arasındaki ilişkilerin kavramsal olarak kazandırılması, cebirsel ve matris işlemlerinin geometrik anlamlarına kazandırmak, $A.x$ ve $\lambda.x$ gibi iki farklı sürecin neden birbirine eşit olduğu ve bu iki farklı sürecin sembolik dünyasında cebirsel olarak ilerleme aşamalarına ve I_n birim matrisinin nereden geldiğine yönelik kavramsal anlamları kazandırmak hedeflenmelidir. Çünkü öğrenciler diğer lineer cebir kavramlarında da olduğu gibi öz değer ve öz vektörler kavramlarında da öncelikle sembolik düşünme eğilimindedir, formel fikirlerin önemli olduğunu bilseler de bu tanımları anlamadıkları için basit durumlarda da bu tanımları uygulayamamaktadırlar, $A.x=\lambda.x$ dan $(A-\lambda I_n).x=0$ sürecine nasıl geçtiğini ve I_n birim matrisinin nereden geldiğini anlamlandıramamaktadır (Stewart ve Thomas, 2006; Thomas ve Stewart, 2011)

Bununla birlikte öz değer ve özvektörleri bulma süreçlerini algılayan öğrenciler, öz vektörlerin oluşturduğu öz uzayları anlamakta güçlük çekebilir. Bu güçlükler öz uzay kavramının inşasında lineer bağımsızlık, germe ve taban kavramlarının gerekli olması ve üç boyutlu uzaydaki farklı geometrik alt uzayların karşılaştırılmasındaki zorluklar olabilir (Salgado ve Trigueros, 2015).

Gol (2012) nin çalışmasında dinamik geometri ortamında öğrencilerin öz vektörleri hareket ettirerek görüntülerinin kendisiyle aynı yönde ve paralel olduğunu görebileceği bir etkinlik tasarlamıştır ve bu çalışma ortamı öğrencilerin iletişim kurmasını teşvik etmiştir ve farklı öz vektörleri değerlendirme şansı bulmuşlardır. Ayrıca öğrencilerle yapılan görüşmelerde öğrencilerin zihinsel imajlarını ifade etmek için ellerini ve kollarını kullandıklarını belirtmişlerdir.

Gol Tabaghi ve Sinclair (2013) temel lineer cebir öğretiminde dinamik bir geometrik ortamın entegrasyonunun, öğrencilerin kendi kavramlarını daha geometrik olarak anlamalarını sağlayabileceğini ifade etmektedir. Sürükleme aracının kullanımı ve vektörlerin hareketliliği, jestleri ve somutlaştırılmış dili kullanmalarıyla kendini göstermesinin yanı sıra, düşünme tarzlarını etkilemektedir. Öz vektörlerin öğretiminde dinamik geometrik diyagramının kullanımı öğrencilerin dinamik-sentetik-geometrik bir düşünme tarzı geliştirmelerini sağlamaktadır. Araçsal oluşum teorileri, öğrencilerin belirli bir araçla etkileşim şemaları geliştirme şeklini açıklarken, şekilsel/fiziki biliş teorileri, araçla yapılan eylemlerin (sürükleme) öğrencilerin öz vektörlerin dinamik ve kinestetik görüntülerini iletme yollarını (sözlü ifadeler ve jestler) nasıl etkilediğine dair daha fazla fikir sağlar. Ayrıca, dinamik-

sentetik-geometrik düşüncenin gelişimi, ortak özellikleri paylaştıkları için lineer cebirde yapısal düşünme biçimlerinin gelişimini sağlayabilir.

2.5. Hologram ve Lineer Cebir

2.5.1. Hologram Teknolojisi ve Fiziksel Özellikleri

Holografik teknolojiler Gabor'un (1949) elektron mikroskobunun çözünürlüğünü arttırmaya yönelik çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Hologram kelimesi “bütün” anlamındaki “holos” ve “mesaj” anlamındaki “gram” Yunan kelimelerinin birleşimiyle meydana gelmiştir (Aina, 2010).

Holografinin pek çok uygulamasının yanında en çok bilinen özelliği üç boyutlu görseller oluşturmastır.

Hologramlar farklı açılardan bakıldığında farklı açılardan görülebilir olduğundan insanların nesneleri gerçekte görmeleriyle aynıdır (Wilson, 2010).

Holografi için gerekli teknolojiler

3DHT'nin çalışma şekli, üç boyutlu görüntü yansıtması yaratmaktır. Bir ışık kaynağı bir nesnenin yüzeyine yansıtılır ve saçılır. İkinci bir ışık, her iki kaynak arasında parazit oluşturmak için nesneyi aydınlatır. Esasen, iki ışık kaynağı birbiriyle etkileşir ve 3D görüntü olarak görünen kırınımına neden olur (Sudeep, 2018).

Musion System Company, dünyanın ilk gerçek zamanlı sanal sunumunu oluşturmak için 3D holografik görüntüleme teknolojisini Cisco'nun Telepresence sistemiyle sorunsuz bir şekilde entegre etti (Musion System, 2009). Canlı ve gerçek boyutlu 3D Telepresence hologramları, ister sahnede performans gösteren bir grup, bir açılış konuşması yapan bir politikacı, isterse dünyanın dört bir yanındaki meslektaşlarıyla etkileşimli bir toplantı yapan bir CEO olsun, artık uzaktaki izleyicileriyle etkileşime girebilir.

Etkileşimli hologram destekli materyallerin derste kullanılması ile okul öncesi dönemdeki çocuklarda öğrencilerin aktif katılımına yardımcı olmasının yanı sıra, farklı duyu organlarına hitap eden, ilgi çekici, güdüleyici olduğu ve kalıcı öğrenmeye imkân verdiğini ifade eden Turan Güntepe (2020) gözlenmesi zor ve zaman isteyen soyut kavramları somutlaştırarak bilimsel bilgilerin zihinde oluşturulmasına imkân verdiğini de belirtmiştir. Hologram destekli öğretim öğrencilerin tutumlarını olumlu etkilemektedir (Türk, 2020).

Kaufmann ve diğ. (2000) yaptıkları çalışmada matematik ve geometri öğretimi için tasarladıkları artırılmış gerçekliğe dayalı Construct3D uygulaması ile gerçekleştirilen öğretimin geometrik yapılarla gerçekleştirilecek deneyimleri destekleyen ve öğrenmeyi kolaylaştıran özellikte olduğunu belirtmişlerdir. Literatür incelendiğinde hologram

teknolojilerinin matematik eğitiminde kullanımına ilişkin çalışmaların yeterli olmadığı görülmektedir.

Aina (2010) yaptığı çalışmasında ulaşılabilir hologram teknolojilerinden ve bunların farklı alanlardaki uygulamalarından bahsetmiştir. Ayrıca hologram teknolojilerinin eğitimde nasıl kullanılabileceği hakkında önerilerde bulunmuş ve hologram teknolojilerinin eğitimdeki birtakım problemleri çözmedeki rolü hakkında ayrıntılı bilgi vermektedir.

Lee'ye (2013) göre hologram, öğrenci merkezli öğretimi destekleyen, öğrenciyi kendi öğrenme ortamının merkezine yerleştiren, öğrenme materyalleriyle doğrudan iletişim kurmasını sağlayan ve böylece öğrenmelerini kendi deneyimleriyle kazanmalarına yardımcı olan bir araçtır.



BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin hologram destekli lineer cebir öğretiminde kavramları nasıl oluşturduğunu incelemektir. Bu sebeple araştırma deseni öğretim deneyidir. Araştırma temel anlamda üç aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada öğrencilere uygulanacak lineer cebir problemlerinin ve genetik çözümlemelerin geçerlik güvenirlik çalışmaları yapılmıştır. Araştırmacı, alan yazın ve araştırmacı deneyimlerine dayanarak hazırlanan problemleri lineer cebir dersini alan öğrencilere uygulayarak çözüm sürecindeki düşüncelerini araştırmak üzere klinik mülakatlar gerçekleştirdiği için araştırmanın ilk aşaması nitel yaklaşımlardan durum çalışması araştırması olarak gerçekleştirilmiştir (Creswell, 2013). Araştırmanın ikinci aşaması, araştırma kapsamında geliştirilen hologram sisteminin pilot çalışmasıdır. Geliştirilen yazılım ve hologram sisteminin öğretime entegre edilmesindeki durumları belirleyebilmek amacıyla gerçekleştirilen pilot çalışmada hologram sisteminin aksayan özelliklerini tespit edebilmek ve öğrencilerin süreçte yaşadığı olumlu-olumsuz öğrenme durumlarını inceleyebilmek amacıyla gerçekleştirildiğinden öğretim deneyi çalışmasıdır (Steffe ve Thompson, 2000). Araştırmanın üçüncü durumunda ise hologram sistemi destekli lineer cebir öğretimi gerçekleştirildiğinden ve öğrencilerden lineer cebir problemleri çözümleri ile klinik mülakatlardan elde edilen verilerle anlama süreçleri ve hataları incelendiğinden öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir (Steffe ve Thompson, 2000).

3.2. Çalışma Grubu

Üç aşamada gerçekleşen araştırmanın farklı çalışma gruplarında bulunan öğrenciler gönüllü katılımcı formunu onaylamıştır. Aşağıda bu aşamalara göre çalışma gruplarının özelliklerinden bahsedilmiştir. Gönüllü katılımcı onam formları sırasıyla EK 3-5-7'de yer almaktadır.

3.2.1. Hologram Destekli Öğretim ve HoloDEU Yazılımının Pilot Araştırmasının Çalışma Grubu

İlköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıfta öğrenim görmekte ve hologram destekli lineer cebir dersini almak isteyen a ve b şubesinden öğrenciler araştırmanın çalışma

grubunu oluşturmaktadır. Bu çalışma grubuyla geliştirilen hologram sistemi ile vektör uzayı öğretimi gerçekleştirilmiştir. Bu öğretim Bölüm 3.4.3 de ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

3.2.2. Hologram Destekli Lineer Cebir Öğretimi Araştırmasının Çalışma Grubu

İlköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıfta öğrenim görmekte ve lineer cebir dersini almakta olan yedi öğrenciden oluşmaktadır. Bu öğrenciler pilot çalışmada uygulanan vektör uzayı sorularına nesne aşamasında cevaplar veren öğrencilerdir. İç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer-öz vektörler kavramları için vektör uzayı kavramı bilinmesi gereken ön kavramdır. Bu sebeple vektör uzayı sorularına eylem-süreç-nesne aşamalarından en üst düzeyi olan nesne aşamasına yönelik beceriler gösteren bu öğrenciler seçilmiştir. İlk başta bu çalışma grubu dokuz öğrenci ile oluşturulmuştur. Ancak iki öğrencinin 3B Hologram destekli derslere devam edemediği zamanlar olmuştur ve bu dersleri normal işlenen lineer cebir derslerinde telafi etmişlerdir. Dolayısıyla bu iki öğrenci çalışma grubuna dahil edilmemiştir. Çalışma nitel desenli durum çalışmasıdır. Ayrıca hologram sisteminin öğretimde kalabalık sınıflarda kullanılması durumunda zaman açısından olumsuz durumlar meydana gelmektedir. Bu sebeple çalışmaya gönüllü olan bu yedi öğrenciyle asıl uygulamada çalışılmasının uygun olduğuna araştırmacı-danışman APOS teorisi uzmanı-lineer cebir öğretimi uzmanı ve nitel çalışma uzmanı görüşü alınarak karar verilmiştir.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Tez çalışmasının veri toplama araçları *Vektör Uzayı Problemleri, İç Çarpım Uzayı Problemleri, Lineer Dönüşüm Problemleri, Öz Değer Öz Vektörler Problemleri*, öğrencilerin 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretimine ilişkin *Görüşme Formu* ve *Araştırmacı Gözlem Formudur*. Öğrencilerden geçerlik güvenirlik çalışmasında, pilot çalışmada, asıl çalışmada vektör uzayı, iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer-öz vektörler problemlerini yanıtlamaları istenmiştir. Bu süreçte problemlere verilen yanıtlar, görüşme ve kamera kayıtları veri toplama kaynakları olarak kullanılmıştır. Ayrıca pilot çalışma ve asıl uygulamada öğretim süreci kamera ile kayıt altına alınmıştır. Öğrencilerle gerçekleştirilen görüşme ve klinik mülakatlarda yine anket ve kamera ile kayıt altına alma gerçekleştirilmiştir.

Lineer cebir problemlerinin geçerlik-güvenirlik çalışması kapsamında vektör uzayı, iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer-öz vektörler sorularının geliştirilme sürecinde ilk olarak alan yazın taraması yapılmıştır. Lineer cebir alanında uzman iki, APOS teorisi üzerine çalışma yapmış bir ve nitel araştırmalar konusunda uzman bir araştırmacıdan APOS teorisi, soruların sırası, anlaşılabilirliği, öğrenci seviyesine uygunluğu bakımından görüşler alınarak

sorular düzenlenmiştir. Uzman öğretim üyeleriyle görüşmeler yüz yüze sorular incelenerek gerçekleştirilmiştir. Uzman görüşleri araştırmacı tarafından not edilerek kayıt altına alınmıştır. Lineer cebir dersini başarıyla tamamlamış ve gönüllü olarak çalışmaya katılmak isteyen iki öğrenciden soruları çözmesi istenmiştir. Soruları çözüm sırasında soruyu okuması, sorudan ne anladığını açıklaması, çözümü dış sesli düşünerek yapması istenmiştir. Bu süreç video ile kayıt altına alınmıştır. Aşağıda sırasıyla kullanılan lineer cebir problemlerinin geliştirilmesi süreci açıklanmıştır.

Genetik çözümleme ve problemlerin geçerlik-güvenirlik çalışmasını gerçekleştirmek üzere çalışılan grup Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında öğrenim görmekte ve Lineer Cebir dersini almakta olan ikinci sınıf düzeyinden beş öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın nitel boyutunda amaçlı örnekleme yöntemlerinden homojen örnekleme kullanılmıştır. Böylece araştırma sorusuyla ilgili benzeşik bir örneklem oluşturma yoluyla belirgin bir alt grup oluşturarak, araştırma sorusuna ilişkin derinlemesine inceleme yapmak amaçlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Lineer cebir 1 ve 2'yi başarılı bir şekilde AA notuyla geçen ve derslerde katılımı aktif olan öğrenciler beş kişilik çalışma grubunu oluşturmuştur. Bu öğrenciler lineer cebir 1 ve lineer cebir iki derslerini alan öğrencilerdir. Öğrenciler bu dersleri alırken ders öğretimi boyunca sınıfta kamera bulundurulmuştur. Bunun sebebi kamera ile kayda alışkın olmalarını sağlamaktır. Böylece veri toplama sırasında kameraya yabancı olmalarından kaynaklı eksik veri toplamayı önlemek amaçlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin veri toplama sırasında araştırmacıya yabancılık çekmemesi ve daha derinlemesine veri elde edebilmek için araştırmacı dersleri takip etmiştir.

3.3.1. Vektör Uzayı Problemlerinin Oluşturulması

Vektör uzayı kavramı lineer cebir dersinin temel kavramlarından biridir. Boş kümeden farklı bir V kümesinin üzerinde tanımlanan vektörel toplama ve V ile K cismi üzerinde tanımlanan skalerle çarpma işlemlerine göre on aksiyomu sağlayan V kümesine vektör uzayı denir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi vektör uzayını anlayabilmek için küme, fonksiyon, ikili işlem, cisim ve aksiyom kavramlarını öğrenmiş olmak gerekir.

Vektör uzayı genetik çözümleme:

Vektör uzayı: küme, fonksiyon, ikili işlem, aksiyom ve cisim kavramları gerekli ön kavramlardır ve bu kavramlarda şema aşamasında olmaları gereklidir. İkili işlemin belirli elemanlara uygulanması (eylem), ikili işlemin bir kümenin belirli elemanlarına uygulanması (süreç), üzerinde ikili işlem tanımlanmış bir küme (nesne), ikili işlemin bir kümenin belirli elemanlarına uygulanması (süreç) ve belli işlem özelliklerinin sağlandığının kontrol edilmesi

(süreç) süreçlerinin asimilasyonu, aksiyomları sağlayan üzerinde ikili işlem tanımlanmış küme (nesne),

1- üzerinde toplama işlemi tanımlanmış bir küme (nesne)

2-üzerinde skalerle çarpma işlemi tanımlanmış bir küme (nesne)

1 ve 2 nesnelerinin dağılma kuralları ile koordinasyonu sonucunda üzerinde iki tane ikili işlem tanımlanmış ve aksiyomları sağlayan küme (vektör uzayı) (Parraguez ve Okaç, 2010).

Vektör uzayı genetik çözümlemesi problemlerin hazırlanmasında, problemleri değerlendirmede kullanılacak değerlendirme rubriğinde, öğretim etkinliklerin hazırlanmasında ve öğrencilerin vektör uzayı performanslarının değerlendirilmesinde kullanılmıştır.

Bir kavramın eylem anlayışında öğrenci dış uyaranlara tepki olarak matematiksel nesneler üzerinde hesaplamalar ve dönüşümler gerçekleştirebilir, birbirini tetikleyen birkaç adımlı çözümleri gerçekleştirebilir. Vektör uzayı kavramının eylem anlayışından bahsettiğimizde öğrenci bir kümenin belirli elemanlarına ikili işlemi uygulayabilir ve sonucu bulabilir.

Öğrenci eylemleri içselleştirdiğinde ve süreç anlayışına ulaştığında, bu eylemler hakkında düşündüğünde çözümleri açıkça yazmadan zihninde adımları gerçekleştirebilir. İki ya da daha fazla süreci koordine ederek yeni süreçler oluşturabilir. Vektör uzayı kavramının süreç anlayışında öğrenci genel anlamda bir ikili işlemin kümenin her elemanına ne yaptığının farkındadır ve bu konuda düşüncelerini ifade edebilir.

Bu süreçler üzerinde dönüşümleri gerçekleştirme ihtiyacı duyduğunda öğrenci süreçleri nesneye kapsülleyebilir. Vektör uzayı nesne anlayışında öğrenci kapsüllemeyi ve bir kümenin tüm elemanlarına ikili işlemi uygulama süreci ile aksiyom şemasının özümsemesini gerçekleştirdiğinde aksiyomları sağlayan ve üzerinde ikili işlem (iç işlem) tanımlanmış kümenin nesne anlayışına ulaşmıştır. Öğrenci bütün verilen aksiyomların sağlanıp sağlanmadığını doğrulayabilir. Üzerinde çalışılan kümenin üzerinde başka bir ikili işlem daha tanımlanabildiği için tüm aksiyomları sağlayan üzerinde ikili işlem tanımlanmış küme nesnesi ile cisim nesnesinin (field schema) koordine edilmelidir. Buradaki koordinasyon sonucunda üzerinde vektörün skalerle çarpılması ikili işlemi (cisim ve küme üzerinde tanımlanmış dış işlem) tanımlanmış olan küme nesnesi anlayışına ulaşılır. Üzerinde bir ikili işlem tanımlanmış küme nesnesi ve üzerinde vektörün skalerle çarpılması ikili işlemi tanımlanmış ikili işlem nesnesi arasında dağılma kurallarının koordine edilmesiyle üzerinde iki ikili işlem tanımlanmış (bir iç işlem ve bir dış işlem) ve aksiyomları sağlayan küme nesnesi anlayışına

yani vektör uzayı nesnesine ulaşılır. Burada öğrenci iç işlem ve dış işlemlere göre verilen bütün aksiyomların sağlanıp sağlanmadığını gösterebilir. Sağlanmadığı durumlarda vektör uzayı olabilmesi için kümeyi veya işlemleri manipüle edebilir. Böyle bir durum vektör uzayı nesnesine ilerlerken koordine edilen iki nesnenin içerdiği süreçlere geri dönebilmek için kapsülünden çıkarma mekanizmasını gerektirir. Araştırma üzerinde iç işlem tanımlanmış küme nesnesi ile üzerinde dış işlem tanımlanmış küme nesnesi arasındaki koordinasyonu süreci bakımından genetik çözümleme Parraguez ve Okaç (2010) çalışmasındakine göre farklılık göstermektedir.

Bir problemi çözmek istediğinde öğrencinin harekete geçireceği bu eylemler, süreçler ve nesneler kavramın şema yapısını oluşturmaktadır. Şema anlayışına sahip olan bir öğrenci asimile ederek yeni nesneler oluşturabilir. Şema anlayışı kendi içinde “İç”, “Ara” ve “İleri” seviyelere ayrılmaktadır. İç seviyede yeni oluşturulan nesne ve diğer nesne ve süreçler mevcuttur ancak öğrenci bunlar arasında mevcut olabilecek ilişkilerin farkında değildir. Vektör uzayı kavramının şema anlayışının iç seviyesinde öğrenci farklı vektör uzaylarının ya da vektör uzayı olmayan durumların farkındadır ancak alt uzay, germe gibi diğer kavramlarla ilişkilerin farkında değildir. Ara seviyede ilişkilerin farkına varılmaya başlanmıştır. Öğrenci bu aşamada alt uzay, lineer dönüşüm, öz değer öz vektör gibi kavramlarla ilişkilendirmelere başlamıştır. İleri seviyede ise öğrenci tüm ilişkilerin farkındadır ve herhangi bir problemde hangi şemanın kullanılacağına karar verebilir. Bireyin vektör uzayında nesne anlayışına ulaşabilmesi için küme, fonksiyon, ikili işlem, aksiyom ve cisim şema anlayışlarına sahip olması gerekmektedir.

Vektör uzayı problemleri Ek 8’dedir. Vektör uzayı problemleri oluşturulurken öğrenciler için rutin olmayan problemler olmasına dikkat edilmiştir. Sorularda rutin olmayan işlemler, sonlu ve sonsuz kümeler kullanılmıştır. Sorularda verilen şartları sağlayacak şekilde vektör uzayı yazmaları, vektör uzayı belirtecek işlem bulmaları istenmiştir. Böylece her açıdan vektör uzayını nasıl oluşturduğunu incelemek amaçlanmıştır. Vektör uzayı problemlerinin APOS Teorisi temel alınarak hazırlanan değerlendirme rubriği Ek 9’da yer almaktadır. Bu rubrik vektör uzayı genetik çözümlemesi dikkate alınarak hazırlanmıştır.

Öğrencilerin rutin olmayan işlemlerle verilen problemlerde lineer bağımsızlık, taban, boyut gibi kavramlarla ilişki kurmada, sonlu sayıda vektör uzayı problemlerinde, işlemleri belli olan vektör uzayı için vektör kümesi belirlemede, vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini bir bütün olarak düşünebilmede güçlük yaşadıkları belirlenmiştir.

Tablo 1

Vektör uzayı sorularının kodlamaları

Vektör uzayı soruları	Ö1	Ö2
1	Süreç	Süreç
1a	Hatalı çözüm	Eylem
1b	Eylem	Nesne
1c	Eylem	Eylem
1d	Nesne	Nesne
1e	Nesne	Nesne
2	Eylem	Nesne
3a	Hatalı çözüm	Hatalı çözüm
3b	Nesne	Hatalı çözüm
4	Nesne	Hatalı çözüm
5	Nesne	Boş soru
6	Nesne	Hatalı çözüm

Sorular değerlendirildiğinde birinci sorunun alt basamağındaki sorular öğrenciler tarafından birinci sorudan bağımsız olarak algılanmıştır. Dolayısıyla öğrenciler ilk olarak soruları hatalı çözmüşlerdir. Çözümünü sözlü olarak anlatma sürecinde alt soruların birinci sorunun devamı olduğunu araştırmacı tarafından dile getirildiğinde öğrenciler soruyu doğru olarak çözebilmişlerdir. Bu sebeple alt basamaklı olan sorulara bu konuda bilgilendirme notu eklenmesine karar verilmiştir. Ö1 verdiği cevaplarda bazı sorularda hatalı çözüm yapmıştır. 1a da hatalı çözüm yapmasının sebebi a seçeneğini birinci sorudan bağımsız düşünmesidir. 3a daki hatalı çözümünün sebebi ise küme şemasındaki eksikliklerdir. Ö2 3a ve 3b sorusunu zayıf vektör şemasına sahip olması sebebiyle hatalı çözmüştür. 4 ve 6. soruyu hatalı çözmesinin sebebi yetersiz ikili işlem şemasına sahip olmasıdır. Bunun yanı sıra öğrenciler vektör uzayı olma aksiyomlarını kümenin tüm elemanlarına uygulayarak süreç aşamasındaki becerileri göstermişlerdir. Vektör uzayı olabilecek küme veya işlem belirleme sorularında doğru yanıtlar vererek, kapsülleme ve aksiyom şemasıyla özümleme işleminin gerçekleştiği ve bunun sayesinde nesneden geri dönerek doğru küme veya işlemleri belirleyebildikleri söylenebilir. Bu süreçte elde edilen verilere göre öğrencilerin küme fonksiyon ve ikili işlem şemalarının hareketle eylem ve süreç aşamalarından geçtiği, aksiyom şemasıyla özüm senerek nesne aşamasına geçildiği, küme üzerindeki toplama işlemli nesnesini cisim ile ikili işlem nesnesiyle ilişkilendirilerek vektör uzayı nesnesine ulaşmıştır. Böylece genetik çözümlemenin geçerliği görülmüştür.

3.3.2. İç Çarpım Uzayı Problemlerinin Oluşturulması

Vektör uzayı, vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri kullanılarak inşa edilmiş bir kavramdır. Bu işlemlere göre on aksiyomu sağlayan kümelerde, vektörlerin oluşturduğu alt vektör uzayları, vektörlerin lineer birleşimleri, vektörlerin gerdiği kümeler (uzaylar), lineer

bağımlı-bağımsız vektörler, uzayların tabanları ve boyutları incelenebilir. Vektörlerin arasındaki açıların incelenebilmesi bu işlemler ile mümkün değildir. Açı kavramını incelemek iç çarpım ile gerçekleştirilebilir. Vektör uzayı üzerinde tanımlanan bir fonksiyon dört aksiyomu sağlıyor ise iç çarpımdır ve vektör uzayı da iç çarpım uzayı belirtir. İç çarpımın sonucu vektör uzayında skalerle çarpma işlemindeki cismin bir elemanıdır (dört aksiyom; $x, y, z \in V$ ve $r \in K$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $r \langle x, y \rangle = \langle r.x, y \rangle = \langle x, r.y \rangle$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Tanımda geçen vektör uzayı, fonksiyon, cisim, aksiyom kavramlarını öğrenmiş olmak iç çarpım uzayı kavramını öğrenebilmek için gereklidir.

İç çarpım uzayı genetik çözümleme;

Vektör uzayı, fonksiyon ve cisim şemaları arasında ilişkilendirme yapar. Vektör uzayının belli elemanları ile fonksiyon sonucuna ulaşır (eylem). Vektör uzayından seçilen her iki vektörün fonksiyon sonucunu nasıl bulacağını açıklayabilir (içselleştirme-süreç). Aksiyomları sağlayan fonksiyonun iç çarpım olduğunu açıklar (sürecin kapsüllenmesi ve aksiyom şeması ile özümseme-nesne). Üzerinde iç çarpım tanımlanmış vektör uzayının iç çarpım uzayı belirttiğini açıklar (iç çarpım ve vektör uzayının temalandırması, nesne). İç çarpım uzayı problemleri Ek 10'da yer almaktadır. İç çarpım uzayı problemleri öğrenciler için rutin olmayan sorulardan oluşmaktadır. Sorular öğrencilerin hem cebirsel hem geometrik olarak APOS Teorisine göre hangi süreçlerde olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla oluşturulmuştur. Kavram haritası ile APOS Teorisine göre süreç becerilerini karşılaştırmak amacıyla son soru eklenmiştir. İç çarpım uzayı problemlerini değerlendirmede kullanmak üzere APOS Teorisine göre hazırlanmış rubrik Ek 11'deki gibidir.

Geçerlik güvenirlik çalışmasında öğrencilerin verdikleri yanıtlar Tablo 2'deki gibidir.

Tablo 2

İç çarpım uzayı sorularının kodlamaları

İç çarpım uzayı soruları	Ö1	Ö2
1	Süreç	Eylem
2	Süreç	Eylem
3	Nesne	Süreç
4	Nesne	Süreç
5	Süreç	Eylem
6	Boş soru	Boş soru
7	Süreç	Hatalı çözüm
8	Eylem	Süreç
9	Eylem	Eylem
10	Eylem	Eylem
11	Ara (inter)	Ara (inter)
12	Nesne	Süreç
13	Eylem	Eylem
14	Süreç	Nesne

İç çarpım ve vektörlerin geometrik ilişkisini açıklamada, iç çarpım aksiyomlarını bir bütün olarak düşünmede, farklı bir iç çarpım fonksiyonu yazmada güçlük çektikleri tespit edilmiştir. Altıncı soruda Ö1 ve Ö2 soruyu cevaplayamamışlardır. Bunun sebebi soruda reel değerli sürekli fonksiyonlar konusundaki yetersiz bilgileri yani yetersiz vektör uzayı şemasına sahip olmalarıdır. Yedinci soruda Ö2 pisagor teoremini ispatlamak yerine var olan teoremin iç çarpımla nasıl sağlandığını göstermiştir. Bu sebeple hatalı çözüm olarak değerlendirilmiştir. Dördüncü soruda Ö1 verilen küme üzerinde aksiyomları sağlayacak bir iç çarpım yazabildiği ve bu süreci doğrulayabildiği için nesne becerilerine sahiptir. Sorular genel olarak değerlendirildiğinde öğrenciler ikili işlem-vektör uzayı şeması ile aksiyom şemasını özümseyerek iç çarpım uzayı kavramında eylem ve süreç aşamalarından geçmişlerdir. Bu durum iç çarpım kavramı için verilen genetik çözümlemenin geçerli olduğunu göstermektedir.

3.3.3. Lineer Dönüşüm Problemlerinin Oluşturulması

Lineer dönüşüm, iki vektör uzayı arasında tanımlanan ve lineer birleşim aksiyomunu sağlayan bir dönüşüm-fonksiyondur. $(L: V \rightarrow W, \forall x, y \in V, r, s \in K \text{ için } L(rx + sy) = rL(x) + sL(y))$ Bu tanıma göre vektör uzayı, fonksiyon ve lineer birleşim kavramlarını öğrenmiş olmak lineer dönüşüm kavramını öğrenebilmek için gereklidir.

Lineer dönüşüm genetik çözümleme;

Lineer Dönüşümler: fonksiyon şeması, vektör uzayı nesnesi ve lineer birleşim nesnesi gerekli ön kavramlardır. Vektör uzayından seçilen a ve b gibi belli vektörler arasında

- 1- $L(a + b) = L(a) + L(b)$ uygulaması (eylem)
- 2- cisimden seçilen r skaleri için $L(r \cdot a) = r \cdot L(a)$ (eylem)

vektör uzayının her x ve y vektörü için

- 1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ uygulaması (süreç)
- 2) cisimden seçilen r skaleri için $L(r \cdot x) = r \cdot L(x)$ (süreç)

1 ve 2 süreçlerinin koordinasyonu ile vektör uzayının her x ve y elemanı ve cisimden seçilen her r ve k skaleri için $L(r \cdot x + k \cdot y) = r \cdot L(x) + k \cdot L(y)$ (süreç), lineer dönüşümleri toplama, bileşkesini alma, tersinin olabilmesi için gerekli koşulları sorgulayabilme (nesne).

Lineer dönüşüm problemleri için Ek 12'ye bakınız. Lineer dönüşüm problemleri hazırlanırken öğrenciler için rutin olmayan sorular olmasına dikkat edilmiştir. Öğrencilerin cebirsel ve geometrik düşünme süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla hazırlanmıştır. Lineer dönüşüm problemlerini APOS Teorisine göre değerlendirmek amacıyla rubrik hazırlanmıştır ve Ek 13'te yer almaktadır.

Öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtların kodlamaları Tablo 3'te yer almaktadır.

Tablo 3

Lineer dönüşüm sorularının kodlamaları

Lineer dönüşüm soruları	Ö1	Ö2
1	Eylem	Eylem
2	Süreç	Süreç
3	Süreç	Süreç
4	Nesne	Nesne
5	Nesne	Nesne
6a	Nesne	Nesne
6b	Nesne	Nesne
6c	Intra	Intra
6d	Intra	Intra
6e	Inter	Inter
6f	Inter	Hatalı çözüm
6g	Inter	Inter
7	Inter	Inter

Görüntü ve çekirdek kümesini geometrik yorumlamada, farklı tabanlarda verilen vektörleri birbirine çevirmede ve bunları geometrik olarak ifade etmede güçlük yaşadıkları bulunmuştur. Ö2 lineer dönüşümde farklı tabanlardaki koordinatlar arasında geçiş yapmada sorun yaşamıştır. Bunun sebebi öğrencinin taban şeması ve lineer dönüşümü özümsemeye yetersiz kalmasıdır. Sorular genel olarak değerlendirildiğinde, öğrenciler vektör uzayı şeması, fonksiyon şeması ve lineer birleşim şemasını özümseyerek, vektör uzayları üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun aksiyomları sağladığını göstermeye çalışmıştır. Bunu uzayın tüm vektörleri için içselleştirerek söylediğinde süreç, tüm lineer dönüşüm yapısının farkında olduğunda nesne aşamasında beceriler göstermişlerdir. Ayrıca lineer dönüşüm kavramında taban şeması-matris şeması becerileriyle özümseme süreç becerilerini göstermişlerdir. Bu durum lineer dönüşüm genetik çözümlemesinin geçerli olduğunu göstermektedir.

3.3.4. Öz Değer-Öz Vektör Problemlerinin Oluşturulması

Lineer dönüşümde görüntüsü kendisinin r katı olan vektörlere öz vektör denir ve r skalerine öz değer denir. Ayrıca $L: V \rightarrow V$, $\forall x, y \in V$ $r, s \in K$ ve A lineer dönüşümün matrisi olmak üzere $L(x) = A \cdot x = r \cdot x$ ifadesinde r , L dönüşümünün öz değeri, x dönüşümün öz vektörüdür. Her bir öz vektör için $r \cdot x$ lerin oluşturduğu kümeye öz uzay denir. Bu ifadeler dikkate alındığında öz değer-öz vektör kavramlarını anlayabilmek için lineer dönüşüm, vektör, matris ve lineer denklem sistemleri kavramlarını öğrenmiş olmak ve bu kavramlar arasında ilişkilendirme yapabilmek gerekir. Ayrıca germe nesnesi ve öz vektör nesnesi temalandırılarak öz uzayda nesne aşamasında öğrenme becerileri gösterilebilir.

Öz değer-öz vektör genetik çözümlemesi;

Özdeğer-Özvektörler: vektör uzayı, lineer dönüşüm şemaları ve lineer denklem sistemleri, determinant süreçleri gerekli ön kavramlardır. Belli x vektörleri için $A.x$ ve $\lambda.x$ işlemlerini hesaplama (eylem), bu işlemleri vektör uzayının tüm x vektörleri için ne etkisi olduğunu anlama (süreç), bu iki sürecin koordinasyonu ile $A.x = \lambda.x$ sürecini oluşturma, $(A - \lambda I).x = 0$ (eylem), $(A - \lambda I).x = 0$ her x için sağladığının ve $I.x = x$ olduğunun farkında olma (süreç), lineer denklem sistemleri süreciyle asimilasyonu ile bulunan λ ve x lerin özdeğer ve özvektörler olduğunun farkında olma (süreç), görüntüsü kendisinin λ katı olan vektörlerin özdeğer olduğunun, görüntünün aynı doğrultuda λ ile uzatılan ya da kısaltılan vektörler olduğunun farkında olma (nesne).

Öz değer- öz vektör problemleri Ek 14’ deki gibidir. Bu problemleri değerlendirmek için APOS Teorisine uygun şekilde hazırlanan rubrik ise Ek 15’ de yer almaktadır.

Öğrencilerin sorulara verdikleri cevapların APOS Teorisine göre kodlamaları Tablo 4’deki gibidir.

Tablo 4 Öz değer-öz vektör sorularının kodlamaları

Öz değer-öz vektör sorularının kodlamaları

Öz değer- Öz vektörler soruları	Ö1	Ö2
1a	Eylem	Eylem
1b	Boş soru	Eylem
1c	Boş soru	Hatalı soru
1d	Boş soru	Hatalı soru
1e	Boş soru	Hatalı soru
1f	Boş soru	Hatalı soru
2a	Eylem	Süreç
2b	Eylem	Süreç
2c	Eylem	Süreç
2d	Süreç	Süreç
2e	Eylem	Süreç
2f	Eylem	Süreç
2g	Eylem	Süreç
3a	Süreç	Eylem
3b	Nesne	Boş soru
4a	Eylem	Eylem
4b	Eylem	Eylem
4c	Eylem	Eylem
4d	Eylem	Eylem
5	Süreç	Süreç
6	Süreç	Süreç
7	Eylem	Süreç
8	Eylem	Süreç

Elde edilen verilerden soruların öğrenciler tarafından doğru anlaşıldığı görülmüştür. Öğrencilerin açık uçlu sorulara verdikleri çözümler incelenmiştir. Bu verilerin katılımcı teyidi için çözüm sürecinin kayıtları incelenmiştir. Araştırmacının elde edilen verileri APOS

teorisine uygun olarak hazırlanan değerlendirme rubriklerine göre yaptığı kodlamalar kayıt altına alınmıştır. Yaklaşık bir ay sonra araştırmacı öğrenci çözümlerini ve video kayıtlarını tekrar analiz ederek verileri tekrar kodlamıştır. Miles ve Huberman güvenirlik katsayısı .80 üzerinde bulunmuştur.

3.3.5. Görüşme

Öğrencilerin hologram destekli öğretim ile ilgili görüşlerini almak amacıyla kullanılmıştır. Hologram destekli lineer cebir öğretimi ilk defa kullanılacağından süreçte öğrencilerin bakış açısıyla yaşanabilecek olumlu ya da olumsuz durumlar belirlenmeye çalışılmıştır. Bu alt amaç doğrultusunda görüşme formunun soruları taslak olarak hazırlanmıştır. Bu sorular için nitel araştırmalarda çalışmaları olan üç ve bilgisayar destekli öğretim konusunda uzman bir öğretim elemanının görüşüne başvurulmuştur. Yüz yüze gerçekleşen görüşmelerle uzman görüşleri alınmıştır ve araştırmacı notlarıyla kayıt altına alınmıştır. Soruların uygun olduğuna karar verilmiştir. Alınan görüşler doğrultusunda düzenleme yapılarak sorular aşağıdaki gibi oluşturulmuştur:

GeoGebra uygulamaları ve HOLOGRAM modelleri destekli lineer cebir öğretiminde yaşadığınız öğrenme süreciniz ile ilgili olumlu düşünceleriniz nelerdir?

GeoGebra uygulamaları ve HOLOGRAM modelleri destekli lineer cebir öğretiminde yaşadığınız öğrenme süreciniz ile ilgili olumsuz düşünceleriniz nelerdir?

3.3.6. Araştırmacı Gözlemleri

Hologram destekli öğretim lineer cebir öğretiminde ilk defa kullanılacaktır. Ayrıca HoloDEU yazılımı tez çalışması kapsamında hologram cihazının hem öğrenciler hem de öğretmen tarafından aktif olarak kullanılabilmesi için geliştirilmiş olup öğretimde ilk defa kullanılacaktır. Bu sebeple süreç boyunca GeoGebra yazılımının, hologram cihazının, HoloDEU yazılımının, bilgisayar kullanımının ve APOS teorisinin öğretimde bütünleşmesinde yaşanabilecek durumlar araştırmacı tarafından izlenecek ve kayıt altına alınacaktır. Gözlemcinin öğretim sürecindeki bu durumları tespit edebilmesi için gözlem formunun taslak soruları hazırlanmıştır. Bu sorular için nitel araştırmalarda çalışmaları bulunan ve lineer cebir alanında uzman olan üç ve bilgisayar destekli öğretim konusunda uzman bir öğretim elemanının görüşüne başvurulmuştur. Uzman görüşü alındıktan sonra ön görülen bu durumların dışındaki öğretim sürecini etkileyebilecek diğer durumların da not alınabileceği gözlem formunun son halini almıştır. Araştırmacı hem öğretmen hem gözlemci rolünde olması sebebiyle süreçte gözden kaçan durumların olmaması ve araştırmacının tespit ettiği durumları teyit edebilmesi için dersler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Bu kayıtlarda

ve gözlemlerde HoloDEU, 3B hologram cihazı, GoeGebra ve vektör uzayı öğretimi ile ilgili durumlar incelenmiştir.

3.4. Tasarım, Geliştirme, Uygulama Süreci

Araştırma kapsamında hologram sistemi ve HoloDEU yazılımı geliştirilmiştir. Ayrıca <https://holodeu.deu.edu.tr> adresli web sitesi tasarlanmıştır. Web sitesinde yazılım indirme linki ve genel bilgiler yer almaktadır. Ayrıca projenin çıktıları ve diğer çalışmalar interaktif olarak güncellenecektir.

3.4.1. Hologram Destekli Öğretim İçin HoloDEU Yazılımının Tasarımı ve Geliştirilmesi

Lineer cebir öğretiminde ihtiyaç duyulan vektör, vektörlerin toplamı, vektörlerin skalarla çarpımı, düzlem, doğru çizimi, kare prizma çizimi, aynı anda birden fazla vektörün gösterimi gibi özellikleri içinde barındıran GeoGebra3D de hazırlanacak .stl uzantıdaki modelleri üç boyutlu hologram cihazına atabilecek bir yazılıma ihtiyaç duyulmuştur. Ayrıca 3ds max, Unity gibi 3d yazılım ortamlarında hazırlanan vektörlerin hareketlerini gösteren animasyon ve tasarımların cihaza uygun hale getirilmesi yaklaşık 3 saat ile 12 saat arasında değişmektedir. Ek olarak ışıklandırmada sorunlar yaşanmaktadır. Bu süreyi kısaltacak ve ışıklandırma sorunun ortadan kaldıracak bir ara yazılıma da ihtiyaç duyulmuştur. Son olarak öğrencilerin hazırladıkları tasarımları öğretmenin kontrolünde hologram cihazına göndermesine ve öğrenci tasarımlarının bir havuzda toplanmasına olanak sağlayacak çevrimiçi bir platforma ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyaçlar doğrultusunda geliştirilen olan hologram sisteminin özellikleri aşağıdaki gibidir;

- Çok yönlü sistem ile hologram cihazlarının, bilgisayar, tablet ve akıllı telefonlar ile etkileşime girebilmektedir.
- Bu sistemde;
 - a) Hologram cihazları için oyun motorları ile hazırlanmış olan özel görüntüleme yazılımı,
 - b) Bilgisayarlar için “standalone” tasarım ve kontrol uygulaması,
 - c) Bir de tüm sistemi yönetebilmek için üyelik sistemi barındıran ve tüm cihazların erişimine açık bir kontrol paneli yer almaktadır.

a) Hologram Görüntüleme Yazılımı

Hologram cihazlarında yer alabilen olan bu yazılım, diğer tüm cihazlar ile eşzamanlı olarak ve kablolu bağlantı ile haberleşerek istenilen objeleri hologram görüntüleyiciye yansıtabilmektedir.

b-c) Standalone Uygulama ve Mobil Uygulamalar

Bu uygulamalar ile aşağıda belirtilen farklı yöntemler kullanılarak 3D objeler ve grafikler çizilip hologram cihazlarına aktarılabilmektedir. Cihaza aktarım işlemi eşzamanlıdır ve yetkili (öğretmen) kontrolündedir. Yönetim panelini kullanarak öğrenciler kendi üyelikleri ile bu uygulamaları kullanarak farklı tasarımlar üretilip, 3D model havuzunda paylaşabilmektedir.

Hologram cihazı ile obje paylaşma yöntemleri;

- Uygulama içerisinde GeoGebra desteği ile matematiksel işlemler ile oluşturulan grafikler
- Uygulama içerisinde çizilebilen özgün 3D modeller
- Uygulama dışı çeşitli 3D tasarım programları ile çizilen modeller ve içerdikleri animasyonlar

Ayrıca bu uygulamalar ile hologram görüntüyle eşzamanlı bir etkileşim kurulabilecek ve aşağıdaki etkinlikler hologram görüntüye uygulanabilmektedir;

- Objeyi döndürme
- Objeyi yakınlaştırma
- Objeyi taşıma
- Objedeki animasyonu başlatıp duraklatma

Bu işlemler yine yetkili (öğretmen) tarafından veya yetkilinin anlık olarak belirlediği öğrenci tarafından yapılabilmektedir.

d) Yönetim Paneli

Tüm sistemi yönetebilmek için öğretmen ve öğrencilerin üyeliklerini oluşturup, 3D model havuzunda farklı yöntemler ile objelerini sergileyip hologram cihazlarında görüntüleyebilecekleri, tüm cihazların erişimine açık bir kontrol paneli de sistemin tamamen kablosuz şekilde haberleşmesini sağlamaktadır.

3.4.2. HoloDEU Yazılımının Pilot Çalışması

Araştırmanın amacı doğrultusunda, hologram sistemi geliştirilmiştir. Hologram sistemi her bilgisayara yüklenebilen ve GeoGebrada hazırlanan modelleri hologram cihazına aktarmayı sağlayan HoloDEU yazılımı, hologram cihazına yüklenen HoloDEU yazılımı, internet üzerinde bir sunucu yardımıyla oluşturulan ve tarihlere göre yüklenen modelleri içinde barındıran GeoGebra modellerini hologramda görüntülemeye imkân veren bir sistemden oluşmaktadır. Bu sistemin geliştirilmesi dört hafta sürmüştür, pilot çalışmaları ise üç hafta sürmüştür.

Hologram sisteminin pilot çalışmaları; öğrencilere iki haftalık (6 saat a şubesi+6 saat b şubesi) GeoGebrada uygulama yapma, HoloDEU yu bilgisayarlarına yükleme, HoloDEU yazılımını kullanma becerilerini kazandırmak üzere ders verilmiştir. Daha sonra vektör uzayı konusunun öğretime hologram destekli öğretim ile başlanmıştır ve üç haftalık öğretim süreci (3x3 a, 3x3 b şubesi dersleri) gerçekleştirilmiştir.

3.4.3. Hologram Destekli Etkinlikler

Araştırmanın asıl uygulama sürecinde iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörler kavramlarının öğretimi hologram destekli öğretimle kavramların genetik çözümlemeleri dikkate alınarak APOS Teorisine dayalı öğretimle gerçekleştirilmiştir.

Temelde yapılandırmacı özelliklere sahip olan gerçekçi matematik eğitimi (RME) bir matematik kavramının öğretiminde didaktik fenomenolojiyi (tarihsel gelişimini) dikkate alarak kavramı sürecin yeniden keşfi ile kazanma, yönlendirilmiş keşfetme ile matematiği gerçekleştirme ve kendi kendine gelişen modellerle formal ve informal bilgileri ilişkilendirme ilkelerine dayanır (Altun, 2006). APOS Teorisine dayalı öğretimle gerçekleştirilen etkinlikler RME kuramına dayalı olarak lineer cebir kavramlarının tarihsel gelişimi göz önünde bulundurularak ve öğrencilerin ESA (ACE) öğretim döngüsündeki uygulamalarda yeni kavramları önceki bilgileri ile keşfedecekleri, 3B hologram modellerini kullanacakları ve sınıf tartışması ile formal-informal bilgilerini ilişkilendirecekleri şekilde tasarlanmıştır. Kavramlara göre öğretim saatleri Tablo 5’deki gibidir.

Tablo 5

Kavramlara göre öğretim saatleri

	İç çarpım uzayı	Lineer dönüşüm	Öz değer-öz vektör
Ders saati	6 ders saati (6x45 dakika)	3 ders saati (3x45 dakika)	3 ders saati (3x45 dakika)

Her bir kavramın öğretimi için öncelikle, genetik çözümlemelerde bahsettiğimiz öğrenilmiş olması gereken kavramların ilişkilendirmesi için etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Bu etkinlikler GeoGebra çalışma yaprakları üzerinden yürütülmüştür. Etkinlikleri tamamladıktan sonra sınıf tartışması ile kavram tanımları ve teoremlerden bahsedilmiştir. Geometrik uygulaması bulunan durumlarda GeoGebra ve HoloDEU kullanılarak geometrik açıklamalar yapılmıştır. Konuyla ilgili alıştırma çözümleri ve dersin genel değerlendirilmesi yapılarak dersler tamamlanmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Betimsel analiz, elde edilen verilerin daha önceden belirlenen temalara göre kodlanması sürecidir. Betimsel analizde, ilk olarak bir çerçeve oluşturulur, tematik çerçeveye göre veriler işlenir, bulgular tanımlanır ve yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Pilot çalışmalarda, genetik çözümlemelere göre hazırlanan açık uçlu soruların her biri için elde edilebilecek cevaplar eylem-süreç-nesne aşamasına ait davranışlar kapsamında değerlendirilerek tematik bir çerçeve oluşturulmuştur. Vektör uzayı problemlerinin APOS Teorisi temel alınarak hazırlanan değerlendirme rubriği Ek 9'da yer almaktadır. Bu rubrik vektör uzayı genetik çözümlemesi dikkate alınarak hazırlanmıştır. İç çarpım uzayı problemlerini değerlendirmede kullanmak üzere APOS Teorisine göre hazırlanmış rubrik Ek 11'deki gibidir. Lineer dönüşüm problemlerini APOS Teorisine göre değerlendirmek amacıyla rubrik hazırlanmıştır ve Ek 13'te yer almaktadır. Öz değer- öz vektör problemlerini değerlendirmek için APOS Teorisine uygun şekilde hazırlanan rubrik ise Ek 15'te yer almaktadır.

Problemlerin öğrencilere uygulamasıyla ve klinik mülakatlardan elde edilen veriler APOS teorisi çerçevesinde hazırlanan tematik çerçeveye göre betimsel analiz ile incelenmiştir. Öğrenci görüşmelerinden elde edilen veriler ise içerik analiziyle incelenmiştir. İçerik analizi, nitel analizde bazen tekrar eden metinler gibi benzer temaların örüntülerini tanıma, önceden belli olmayan bu örüntüleri tümevarımsal yaklaşımla ortaya çıkarma işidir (Patton, 2002).

Teyit edilebilirlik için ise, araştırmacı elde ettiği nitel verileri analiz ettikten bir ay sonra, tüm analiz sürecini tekrar gerçekleştirmiştir. Kodlayıcı iç tutarlılığını hesaplamak için Miles ve Huberman (1994) kodlama güvenirlik katsayısı kullanılmıştır ($\Delta = \frac{C}{C+\partial} \times 100$, Δ =güvenirlik katsayısı, C=üzerinde görüş birliği sağlanan terim sayısı, ∂ =üzerinde görüş birliği bulunmayan terim sayısı).

3.6. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Nitel araştırmada veri analizi yorumlayıcıyı yorumlamayla ilgilenir. Bu sebeple veri analizini standart hale getirebilmek mümkün değildir. Nitel veri analizinde üç temel kavram vurgulanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016): betimleme, analiz ve yorumlama. Betimleme izlenen olguyla ilgili süreç boyunca olup biten her şeydir. Analiz, veri setinde kodlama ve temaların ortaya çıktığı süreçtir. Yorumlama ise analiz sürecinde elde edilenlerin araştırma kapsamında ne anlama geldiğidir.

Araştırma amacı öğrencilerin lineer cebir kavramlarını oluşturma süreci incelenmektir. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerden vektör uzayı soruları, iç çarpım uzayı

soruları, lineer dönüşüm soruları ve öz değer öz vektör sorularını çözmeleri istenmiştir. Öğrenci yanıtları doküman olarak veri analizinde kullanılmıştır.

Öğrencilerin verdikleri yanıtları derinlemesine incelemek, katılımcı teyidi almak amacıyla öğrencilerle klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Her bir kavram için bir öğrenciyle yaklaşık 50 dakikalık görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Görüşmelerde aşağıdaki sorular öğrencilere yöneltilmiştir:

- Bu soruyu çözerken nasıl düşündüğünü açıklar mısın?
- İç çarpım uzayı neden vardır?
- Bu sorunun cevabı olan başka durumlar var mıdır?
- Bu soruya eklemek istediğin bir açıklama/düşüncen var mı?

Her öğrencinin probleme verdikleri yanıtlar farklı olduğundan, derinlemesine bilgi elde edebilmek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme tekniği tercih edilmiştir. Görüşmelerde geçen konuşmalar transkript edilmiştir.

Çalışma kapsamında öğrencilerin kavramları oluşturma süreçleri APOS teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Bu sebeple birinci alt probleme ait analizler gerçekleştirilirken betimsel analiz yapılmıştır. Betimsel analiz için APOS teorisine uygun olarak bir çerçeve geliştirilmiştir. Her kavram için hazırlanan soruların hepsine yönelik değerlendirme rubrikleri hazırlanmıştır. Bu rubrikler için lineer cebir öğretiminde ve APOS teorisinde uzman iki araştırmacının görüşleri alınmıştır. Rubriklerin araştırmacı tarafından değerlendirilmesi, geçerlik güvenirlik analizleri sürecinde iki öğrenciden alınan verilerin işlenmesi sürecinde yapılmıştır. Her öğrencinin verilerini değerlendirmede uygun işleyiş gösterdiği için bu haliyle araştırmanın asıl çalışmasında kullanılmasının uygun olduğu görülmüştür. Doküman ve görüşme verilerinin hepsi tematik çerçeveye göre gözden geçirilmiştir.

Nitel bir çalışmada geçerlik ve güvenirlik kavramları yerine inandırıcılık-aktarılabirlik ve tutarlık-teyit edilebilirlik kavramları geçmektedir.

İnandırıcılık (iç geçerlik) konusunda başarılı olabilmek için çalışmada, araştırmacı çalışma gruplarıyla araştırma öncesinden lineer cebir derslerinde iletişime geçmiştir. Öğretim uygulamaları, soruların uygulanması ve görüşmelerin gerçekleştirilmesi sürecinin tümünde araştırmacı araştırma sahasında katılımcılarla bire bir iletişim halinde olmuştur. Dokümandan elde edilen yanıtlarda öğrencilerin ne düşündüğünü anlayabilmek için her bir konuda her öğrenciyle uzun görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin verdikleri yanıtlarda APOS teorisine odaklanıldığından, yanıtların hatalı olanlarında neden yanlış yaptığını anlayabilmek, hangi nesne-şemalardaki beceri eksikliklerinden kaynaklandığını tespit edebilmek, doğru yanıtlarda yanıtları diğer durumlara genelleyip genelleyemediğini görebilmek amacıyla

görüşmelerde ek sorular yöneltilerek derin odaklı veri toplamaya çalışılmıştır. Doküman, gözlem, görüşme, didaktik görüşme sırasında dokümanları kullanma gerçekleştirildiğinden veri kaynağı çeşitlemesi yapılmıştır. Görüşmelerde katılımcılara dokümanda verdikleri cevaplar konusunda ne düşündükleri sorulmuştur. Bu durumda araştırmada katılımcı teyidi de alınmıştır. Ayrıca elde edilen verilerin analizleri tamamlandıktan bir ay sonra araştırmacı tarafından veri analizi tekrarlanmıştır. Verilerin büyük olması sebebiyle sadece bir kısmı alanda uzman başka bir araştırmacı tarafından kodlaması istenmiştir.

Ayrıca APOS Teorisi üzerinde çalışmalar yapmış olan bir uzman ile APOS teorisi fonksiyon kavramı üzerinden değerlendirilmiştir. Lineer dönüşüm ve fonksiyon kavramları işlevsel olarak benzer olduğu için lineer dönüşümde APOS teorisi kodlamalarının nasıl yapılabileceği fonksiyon kavramı üzerinden tartışılmıştır. Bu da araştırmacı çeşitliğini sağladığımız anlamına gelmektedir.

Verilerin analizinde öğrencilerin yanıtları doğrudan dokümandan alınmıştır. Ayrıca görüşmelerdeki söylemlere, önemli noktalarda bulguya destek olması amacıyla doğrudan alıntı olarak bulgulara yer verilmiştir. Veriler böylelikle ayrıntılı betimlenmeye çalışılmıştır. Araştırmanın asıl uygulamasında iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer- öz vektörler kavramlarının öğretimi gerçekleştirilmiştir. Bu süreç öncesinde vektör uzayı nesnesine sahip olmak gerekmektedir, çünkü bu kavramlar vektör uzayı kavramının üzerinde inşa edilen kavramlardır. Bu sebeple asıl çalışmanın çalışma grubu vektör uzayı sorularına süreç-nesne düzeyinde cevaplar veren öğrenciler arasından seçilerek amaçlı örnekleme yapılmıştır. Araştırmada veri toplama araçlarının oluşturulması, verilerin toplanması, analizi aşamalarında tutarlı olabilmek için bazı kriterlere dikkat edilmiştir. Veri toplama araçlarının oluşturulmasında APOS teorisine dayandırılarak sorular hazırlanmıştır. Verilerin toplanmasında aynı sorular öğrencilere yöneltilmiş ve görüşmelerde ortak benzer görüşme soruları yöneltilmiştir. Ancak bazı görüşmelerde öğrencilerin yaptığı kendilerine has hataların sebeplerini algılayabilmek amacıyla ek sorular yöneltilmiştir. Veri analizinde de değerlendirme rubriklerine dayanarak hareket edilmiştir. Teyit incelemesi için araştırmacı veri analizi tamamlandıktan sonra tüm verileri tekrar analiz edilmiştir. Bu süreçte tez danışmanı da analiz sürecini baştan sona kontrol etmiştir.

Pilot çalışmada teyit edilebilirlik için, sorumlu araştırmacı elde ettiği nitel verileri analiz ettikten bir ay sonra, tüm analiz sürecini tekrar gerçekleştirmiştir. Kodlayıcı iç tutarlığı Miles ve Huberman (1994) kodlayıcı güvenirlik katsayısı hesaplamasına göre %85.71 olarak hesaplanmıştır. İnanırcılık (iç geçerlik) konusunda başarılı olabilmek için çalışmada, araştırmacı çalışma gruplarıyla araştırma öncesinden lineer cebir derslerinde iletişime

geçmiştir. Öğretim uygulamaları, soruların uygulanması ve görüşmelerin gerçekleştirilmesi sürecinin tümünde araştırmacı araştırma sahasında katılımcılarla bire bir iletişim halinde olmuştur. Ayrıca görüşmelerdeki söylemlere, önemli noktalarda bulguya destek olması amacıyla doğrudan alıntı olarak bulgularda yer verilmiştir. Veriler böylelikle ayrıntılı betimlenmeye çalışılmıştır.

3.7. Araştırmacının Rolü

Araştırmanın amacı hologram destekli öğrenmede öğrencilerin lineer cebir kavramlarını oluşturma süreçlerinin nasıl olduğunu incelemektir. Bu amaç doğrultusunda öğretim deneyi ve klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı tüm aşamalarda öğrencilerle iletişim halindedir. Öğrencilerin yabancılık çekmesi ve veri kaybına sebep olmasını engellemek için, matris, determinant ve lineer denklem sistemlerinin ele alındığı lineer cebir bir dersini dersin öğretim üyesi ile takip etmiştir. Derslerde kamera bulundurarak öğrencilerin kameraya alışmasını kolaylaştırmıştır. Öğrencilerin dersteki davranış ve katılımları takip ederek araştırmanın amacına uygun öğrencilerin seçilmesini kolaylaştırmıştır. Araştırmanın çalışma gruplarına araştırma konusunda derinlemesine bilgi vermiştir. Yetkili kurumdaki (EK 2-4-6) ve öğrenciden onayını alarak çalışmaya dahil ettiği öğrencilerle gerçekleştirilen her türlü çalışmada öğrencilerin vereceği cevapları yönlendirmeden derinlemesine bilgi almak için ek sorular sormuştur.

BÖLÜM IV

BULGULAR

4.1. Vektör Uzaı Öğretimi (Pilot Çalışma Bulguları)

4.1.1.HoloDEU Yazılımı ve 3B Hologram Cihazı Sınıfta Kullanımı

3B Hologram Destekli vektör uzaı öğretimi ESA (ACE) Öğretim Döngüsü Uygulamasına göre gerçekleştirilmiştir. Öğretim etkinlikleri uygulamanın gerçekleştirildiği eğitim fakültesinin Hologram ve Çok Amaçlı Okuma Salonunda yapılmıştır (Şekil 13). Burada 3B Hologram cihazı ve çalışma grubundaki öğrencilerin hologram cihazındaki modelleri görebilecekleri şekilde uygun sayıda sandalye bulunmaktadır. Hologram ve Çok Amaçlı Okuma Salonu kullanım amacı gereği duvarları açık renk boyanmıştır. 3B Hologram cihazında oluşturulan görüntünün netliğinin artması amacıyla ön yüzeyi hariç siyah renkle kaplı bir küp şeklinde tasarlanmıştır. 3B Hologram cihazının boyutları gereği bilgisayar laboratuvarlarında kullanımının verimli olmayacağı düşünülerek Okuma Salonuna yerleştirilmiştir. Salonda çalışma masalarına bilgisayar yerleştirilmemiştir ancak priz soketleri vardır. Ayrıca yüksek hızda kablosuz internet imkanına sahiptir. Bilgisayara sahip olan öğrenciler derse bilgisayarını getirmiştir. Bilgisayarı olmayan öğrenciler ise GeoGebra uygulamalarını akıllı telefonlarından gerçekleştirmişlerdir.



Şekil 14. 3B Hologram cihazı ve okuma salonu

Derste ilk olarak 3B Hologram cihazı tanıtılmıştır. Birkaç hologram modeli ile öğrencilerin ilgileri çekildikten sonra HoloDEU yazılımı indirme linki veya USB bellek kullanarak bilgisayarlara yüklenmiştir. Yazılımın ilk kez kullanımı gerçekleştirileceği için yazılımın prototip versiyonu çevrimiçi mağazaya yüklenmemiştir. Bu yüzden yazılım sadece bilgisayarlarda kullanılabilmektedir. Akıllı telefonlarında GeoGebra tasarımlarını yapan öğrenciler ise .stl olarak indirdiği tasarımları bilgisayarı olan arkadaşlarına göndererek HoloDEU aracılığıyla tasarımlarını 3B Hologram cihazına transfer etmişlerdir.

GeoGebra etkileşimli matematik uygulamalarının yapılabildiği her kademe eğitimde kullanılabilen dinamik bir yazılımdır. Çalışma grubu öğrencileri GeoGebrayı önceden kullanmadıkları için öğretim faaliyetlerine bu yazılımın ara yüzünün tanıtımı eklenmiştir. GeoGebra ve HoloDEU yazılımlarının kullanımı hakkında bilgilerin sunumu ve örnek uygulamaların yapılması ve tasarımların hologram cihazına aktarılması sürecinde akıllı telefon kullanan öğrencilerin zorluk yaşadığı gözlemlenmiştir.

HoloDEU bilgisayarlara yüklenirken güvenlik yazılımlarından kaynaklı yüklemde bazı problemlerle karşılaşmıştır. Tasarımların .stl dosyalarını öğrenciler HoloDEU ya aktarırken bazı bilgisayarların model ismini kabul etmediği gözlemlenmiştir. İsim değişikliği yaptıklarında bu durum ortadan kalkmıştır. HoloDEU havuzuna aktarılan tasarımların çoğaldıkça farklı derslerdeki tasarımların bulunmasının zor olduğu gözlemlenmiştir. Hologram cihazına aktarılan tasarımın boyutlarının sabit olması sebebiyle modelleri büyütme-küçültme fonksiyonunun ihtiyacı gözlemlenmiştir. Model havuzunda bir model görüntülendiğinde model havuzuna geri dönebilmek için yazılımın ana ekrana dönmek gerektiği gözlemlenmiştir.

HoloDEU ile yaşanan bu problemler yazılımın tasarım ekibi ile paylaşarak yazılımın güncellemesi gerçekleştirilmiştir. Bu güncellemelerle modeller havuzda tarihe göre gruplandırılmıştır. Ekranda hologram modeli açıkken model havuzuna dönebilmek için bir sekme eklenmiştir. Tasarımı döndürme, yaklaştırma, taşıma fonksiyonları eklenmiştir.

HoloDEU yazılımının üyelik işlevinin olması, öğrenci bir modeli holograma aktaracağı zaman yönetici onayının gerekmesi, model havuzundaki tasarımların yönetici tarafından kontrol edilebilmesi, HoloDEU ya bir tasarımın yüklenmesinin ve hologram cihazına aktarılma süresinin (bilgisayar hızına göre değişeceği not edilmelidir) birkaç saniye sürmesi ve öğrencilerin model havuzundaki tüm tasarımlara kablosuz erişim sağlayabilmesi özelliklerinin 3B Hologram destekli öğretim sürecini olumlu etkilediği gözlemlenmiştir.

Ayrıca HoloDEU üç boyutlu tasarım programlarında çizilebilecek model, video render ve animasyonlar da 3B Hologram ve kullanıcılar ile paylaşılabilirdi için tıp, mühendislik, güzel sanatlar, fen bilimleri vb. alanlarda da kullanıma uygun olabileceği düşünülmektedir. HoloDEU yazılımının ekran görünümü ve 3B Hologram cihazında örnek bir tasarım aşağıdaki Şekil 15 ve Şekil 16' daki gibidir.



Şekil 15. Araştırmacılar tarafından geliştirilen HoloDEU yazılımının arayüzü



Şekil 16. 3B Hologram cihazında örnek bir tasarım

Pilot çalışma süreci boyunca araştırmacının gözlemlerine göre HoloDEU yazılımının kullanımı ile ilgili sorunlar (öğrencilerin bölüm bilgisi değiştirilemiyor, modellerin isimleri hologramda görülmüyor, modellerin büyütme-küçültme oranları yetersiz), GeoGebra kullanım becerilerinin yetersizliği ile ilgili sorunlar, GeoGebra yazılımından modeli HoloDEU yazılımına aktarma sürecinde yaşanan sıkıntılar (modellerin renkleri sürekli sistemde değişiyor, renkler öğrencilerin attığı modellerle aynı görünmüyor, modeli yüklerken girilen

isimleri kabul etmeyebiliyor), ve sınıf mevcudunun kalabalık olmasına bağlı yaşanan aksaklıklar meydana geldiği tespit edilmiştir.

4.1.2.3B Hologram Destekli Vektör Uzayı Öğretimine İlişkin Öğrenci Görüşleri (Pilot Çalışma)

3B Hologram destekli vektör uzayı kavramının öğretim etkinlikleri tamamlandıktan sonra öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerin içerik analizi bulguları bu bölümde incelenmiştir.

Pilot çalışma süreci sonunda gönüllülük esasına dayalı olarak öğrencilerle görüşme (45 öğrenci) yapılmıştır. Görüşme sorularından (EK 5) elde edilen verilerin içerik analizi sonucunda, 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretim süreciyle ilgili olumlu görüşlere göre ortaya çıkan temalar üç boyutlu düşünme becerilerini geliştirme, anlamayı geliştirme, derse olan ilgiyi artırma ve beceri kazanma şeklindedir. 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretim süreciyle ilgili olumsuz görüşlere ilişkin ortaya çıkan temalar ise zaman problemleri, sınıf mevcudundan kaynaklı problemler, bilgi ve iletişim teknolojileri ile ilgili sorunlar (öğrenci kaynaklı sorunlar ve yazılım, bilgisayar, internet kaynaklı sorunlar) şeklindedir.

“GeoGebra uygulamaları ve Hologram modelleri destekli lineer cebir öğretiminde yaşadığınız öğrenme süreciniz ile ilgili olumlu düşünceleriniz nelerdir?” sorusuna verilen yanıtların temaları ve frekans bilgileri Tablo 6’daki gibidir.

Tablo 6

Olumlu görüşlerin temalara göre frekansları

Öğrencilerin olumlu görüşlerinin temaları	f
Üç boyutlu düşünme becerilerini geliştirme	20
Anlamayı geliştirme	19
Beceri kazandırma	2
Derse olan ilgiyi artırma	9

Tablo 6’ya göre öğrencilerin 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretimine ilişkin olumlu görüşlerinin bu öğretimin üç boyutlu düşünme becerilerini geliştirdiği, anlamalarını geliştirdiği, beceri kazandırdığını ve derse olan ilgilerini arttırdığı yönünde olduğu görülmektedir. Üç boyutlu düşünme becerilerini ve anlamalarını geliştirdiği yönünde görüşlerin %40 ve %38, derse olan ilgiyi arttırdığı ve beceri kazandırdığı yönündeki görüşlerin ise %18 ve %4 ünü oluşturmaktadır.

Üç boyutlu düşünme becerilerini geliştirme

Öğrencilerin 3B Hologram destekli öğretimin üç boyutlu düşünme becerilerini geliştirdiğine yönelik görüşlerden bazıları şu şekildedir:

Bence lineer cebir dersinin vektör uzayı konusunu bu şekilde daha kolay kavradım ve 3 boyutlu düşünmemi kolaylaştırdı.

Üç boyutlu düşünmemiz daha kolay bir hale geldi.

3 boyutu kafamda daha iyi canlandırımdı.

Zihnimde canlandırmakta zorlandığım kısımları somut olarak görebiliyorum.

Derste birçok konuyu üç boyut yönünden görebilmemizi sağlıyor.

Görsel açıdan etkili oluyor.

Lineer cebir öğretiminde hologram modelleri kullanıyor olmak büyük şanstı. Hologram kullanımı üç boyutta düşünmeyi kolaylaştırdı.

Soyut düşünme yeteneğimi arttırdı. Bir soruda yanlış işlem yapıp yapmadığımı koordinat üzerinde soyut olarak düşünerek test edebiliyorum.

Üç boyutlu kavramları zihnimizde canlandırmak normalde zor bir durumken hologram desteği ile bu durum kolaylaştı.

Konuyu anlamamızda yardımcı oldu grafikleyerek somut bir şekilde anladım.

Bence lineer cebir dersinin vektör uzayı konusunu bu şekilde daha kolay kavradım ve 3 boyutlu düşünmemi kolaylaştırdı.

Somutlaştırmada zorlandığımız bazı konuların öğreniminde faydalı bir eğitim aracı olduğunu düşünüyorum.

Öğrencilerin görüş ifadelerine bakıldığında 3B Hologram destekli öğretim ile lineer cebirdeki geometrik cisimleri zihninde daha kolay canlandırabildiğini, üç boyutlu düşünmeyi kolaylaştırdığını, şekilleri 3B görebildiklerini ve zihninde soyut olarak düşünmekte zorlandığı şekillerin 3B Hologram cihazı ile somut hale getirebildiklerini düşündükleri görülmektedir.

Anlamayı geliştirme

Anlamayı geliştirdiğine yönelik öğrenci görüşlerinden bazılarına aşağıda yer verilmiştir.

Görsel boyut kazandığı için kalıcılığı arttı ve anlam kazandı, lineer in uzun uzun ispatlarından bir nefes alıp görsel etkili bir materyalle çalışmak görsel zekama dokunan güzel bir süreçti.

Daha akılda kalıcı olduğunu düşünüyorum soyut bir şeyleri somut olarak gördüğümüzde.

Konuyla ilgili örnek verileceği zaman görsel olarak görmek daha iyi anlamamı sağlıyor.

Konunun pekiştirilmesini daha olanaklı sağlıyor.

Dersi aktif bir şekilde işleme olanağı sağlıyor.

Bölümümüz nedeniyle birkaç dersimiz hariç tüm dersleri teorik olarak almaktayız. Lineer Cebir gibi teorik bir derste; vektör, vektör uzayı, çeşitli cebirsel işlemler ... vb. konularda tahta üzerinde cebirsel ifadelerle anlatım yapmak çoğumuzun kuralları ezber yoluyla öğrenmesine neden olmaktadır. Ancak hocamızın dersi desteklemede kullandığı yöntem sayesinde ders içeriğimizdeki konular görsel ve 3D olarak anlaşılır hale gelmiştir. Teorik

derslerde bunun gibi hologram modelleri zihinde görsel algılamayı artırmaktadır, bu durum bizim ders başarılarımızı olumlu etkilemektedir.

Çalışmalar üç boyutlu olduğu için akılda kalıcı ve öğretici.

Dersi daha kolay kavırıyorum.

3 boyutlu gözlem yapma konusunda yardımcı oldu olayları görsel bakış açısıyla inceleyip bilgilerin daha iyi oturmasına yardımcı oldu.

Üç boyutta nasıl şekiller düzlemler üzerinde nasıl çalıştığımızı görebildik.

Göz önünde görme, akılda kalma açısından görsel olarak baya olumlu.

Kendimiz çabalayarak ve bizzat uğraşarak yaptığımız için daha kalıcı öğrenme oluyor.

Öğretmenimiz her birimize daha çok vakit ayırabiliyor.

3 boyutlu anlamamız açısından yararlı olduğunu düşünüyorum.

Öğrencilerin anlamayı geliştirme yönündeki görüşleri 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretiminde 3B olan geometrik şekilleri somut olarak inceleyebildikleri ve bu sebeple daha iyi anlayabildikleri, kalıcılığı arttırdığı, başarılarını arttırdığını ve öğrenme sürecinde kendilerinin aktif rol aldığı yönündedir.

Beceri kazanma

Öğrencilerin 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretimine ilişkin beceri kazanma boyutundaki görüşleri aşağıdaki gibidir:

Bilgisayar üzerinden matematik ile ilgili çizimler yapabilmeyi öğreniyoruz.

Hologramı tanımış olduk.

3B Hologram destekli öğrenme sürecinde öğrencilerin bilgisayardaki yazılımlarda lineer cebir ile ilgili tasarımlar yapmaya ve 3B hologram cihazını kullanmaya yönelik beceriler kazandığına ilişkin görüşler bulunmaktadır.

Derse olan ilgiyi artırma

Öğrencilerin 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretiminin derse olan ilgilerini olumlu etkilediğine yönelik görüşler aşağıdaki gibidir:

Derse olan ilgimi ve çalışma isteğimi artırdı.

Daha akılda kalıcı ve öğrenimi destekleyici olduğunu düşünüyorum. Derse olan ilgimin ve merakımın artmasını sağladı. Güzel bir uygulamaydı.

Hologram bana çok farklı geldi en başta zorlandım ama sonradan eğlenceli ve güzel mantıklı geldi.

Üç boyutlu şekilleri daha somut olarak görmemizi sağladı dersi de daha ilgi çekici hale getirmiş oldu.

Ders daha zevkliydi ve somuttu.

Süreci görsel olarak takip edebildiğimiz için bilgiler daha kalıcı oluyor, eğlenerek öğreniyoruz.

GeoGebra ve hologram uygulamaları derse olan ilgimi arttırdı. Şekillerin 3 boyutlu hallerini görmek konuyu kavramada kolaylık sağladı.

Bu görüşler doğrultusunda öğrenciler 3B Hologram destekli vektör uzayı kavramını öğrenmenin derse olan ilgilerini, meraklarını ve çalışma isteklerini arttırdığını, dersin bu şekilde zevkli geçtiğini ve vektör uzaylarını eğlenerek öğrendiklerini düşündükleri görülmektedir.

“GeoGebra uygulamaları ve Hologram modelleri destekli lineer cebir öğretiminde yaşadığınız öğrenme süreciniz ile ilgili olumsuz düşünceleriniz nelerdir?” sorusuna verilen yanıtların temaları ve frekans bilgileri Tablo 7’deki gibidir.

Tablo 7

Olumsuz görüşlerin temalara göre frekansları

Öğrencilerin olumsuz görüşlerinin temaları		f
1-Zaman problemleri		18
2-Sınıf mevcudundan kaynaklı problemler		5
3-Bilgi-iletişim teknolojileri ile ilgili sorunlar	3-a) Öğrenci kaynaklı sorunlar	6
	3-b) Yazılım, bilgisayar kaynaklı sorunlar	19

Öğrencilerin 3B Hologram destekli vektör uzayı öğrenme deneyimlerine ilişkin olumsuz görüşleri içerik analizi ile değerlendirilmiştir. İçerik analizi sonucunda öğrencilerin görüşlerinin zaman problemleri, sınıf mevcudundan kaynaklanan problemler ve BİT ile ilgili sorunlar olmak üzere üç temada toplandığı görülmektedir. BİT ile ilgili sorunlar, öğrencilerin BİT kullanmadaki beceri yetersizliklerinden ve yazılım (HoloDEU)-bilgisayardan kaynaklanan sorunlar olmak üzere iki alt temada toplanmaktadır. Olumsuz görüşlerin %37,5 si zaman problemlerinden, %10 u sınıf mevcudundan, %12,5 i öğrencilerin BİT kullanım becerilerinin yetersizliklerinden ve %40 ı yazılım ve bilgisayar ile ilgili sorunlardan kaynaklanmaktadır.

Zaman problemleri

3B Hologram destekli vektör uzayı öğretimine ilişkin olumsuz düşüncelerden zamandan kaynaklanan problemler ile ilgili görüşlerden bazıları aşağıdaki gibidir:

Biraz uzun sürüyor.

Zaman kaybı.

Fazla zaman alıyor.

İlk öğrenme sürecinde ne yapacağımızı bilemediğimiz için vakit kaybımız oldu.

Teorik bilgileri öğrenmek için daha az zaman kaldı.

Tek olumsuz yanı zaman kaybı olması ama normal bir şekilde öğrenmektense bu şekilde öğrenmeyi tercih ediyorum.

HoloDEU yazılımının prototipinin lineer cebir öğretiminde kullanılabilirliğinin pilot çalışmasının gerçekleştirildiği 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretimi ile ilgili öğrenci

düşüncelerine yönelik ifadeleri bu uygulamanın zaman aldığı, vakit kaybı yaşadıkları ve tanım-teorem-soru çözümü için daha az zaman kaldığı yönündedir. Öğrencilerin bu görüşlere sahip olmalarının sebeplerinin GeoGebra'yı ilk defa kullandıkları için deneyim eksikliği yaşamaları, akıllı telefonda GeoGebra'yı kullanmada zorluk çekmeleri ve HoloDEU ile ilgili yaşanan yükleme, güvenlik, dosya ismini kabul etmemesi, akıllı telefondaki tasarımın bilgisayarı olan arkadaşına gönderilmesi gibi sorunların olduğu düşünülmektedir.

Sınıf mevcudundan kaynaklı problemler

Öğrencilerin görüşleri arasındaki sınıf mevcudundan kaynaklanan problemlere yönelik ifadeler aşağıdaki gibidir:

Çok etkili bir yöntem olduğunu düşünüyorum fakat sınıftaki öğrenci sayısının fazlalığından ve bilgisayar eksikliğimizden bizim için zorluğu var. Hem klasik ders hem modern öğretimi bir arada götürmenin de zor olduğunu düşünüyorum.

Kalabalık gruplar halinde olduğumuz zaman anlayış zorlaşıyor.

Sınıftaki kişi sayısı fazlaştığında verimin düştüğünü düşünüyorum.

Hologramın sınıftaki konumu elverişli değildi. Her açıdan görmek mümkün olmuyor ya birkaç kişi görebiliyor ya da herkesin görmesi için kargaşa yaşıyordu. Uygulamayı telefondan yapıyor olmak beni zorladı.

Yazılım kullanımları ile ilgili problemler ortaya çıktığında araştırmacı sorunları çözmek için öğrencilerle bireysel olarak ilgilenmek durumunda kalmıştır. Bu durumlarda derslerde birkaç dakikalık duraksamalar yaşanmıştır. Sınıfta her iki grupta yaklaşık 50 öğrenci olduğu için böyle zamanlarda sınıf mevcudu dezavantaj haline gelmiştir. Bunun öğrencilerin görüşlerinde sınıf mevcudundan dolayı anlamının olumsuz etkilendiği ve hologram cihazının üç yanı kapalı olduğu için tasarımları görmek istediklerinde yerlerinden kalkmalarının kargaşa yaşattığı yönünde ortaya çıktığı görülmektedir.

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden kaynaklanan sorunlar

Öğrenci kaynaklı sorunlar

Öğrencilerin bilgi ve iletişim teknolojilerini kullanma becerilerindeki eksikleri sebebiyle yaşanan problemlere ilişkin görüşlerden bazıları aşağıdaki gibidir:

Teknoloji alanında yeteneğim olmadığı için ders esnasında zorlanıyorum bu da dersi anlamamı geciktiriyor.

Teknolojik cihazları kullanmada sorun yaşayanlar olduğunda ona doğrusu gösterilirken zaman kaybı oluyor bence aynı zamanda da diğer yapanlar beklerken sıkılıyor ve dersten kopuyorlar.

GeoGebra uygulamasının her özelliğini tam bilmediğimiz için verilen direktifleri uygulamada gecikebiliyoruz. Zamanında yapanlar beklemek zorunda kalıyor ve derse olan ilgi dağılıyor.

Öğrencilerden bazıları kendilerini teknoloji kullanımında yeterli görmediği, yazılımları kullanmakta çok iyi olmadıkları için adımları takip etmekte geç kalmaları, yazılımları kullanmada sorun yaşayanlara bireysel olarak yardım edilmesi ve yazılımı kullanmada sorun yaşamayan öğrencilerin ise diğerlerini bekleme sürecinde ilgilerinin dağıldığı ve öğrenme sürecini olumsuz etkilediğine ilişkin düşüncelerin yer aldığı görülmektedir.

Yazılım ve bilgisayardan kaynaklanan sorunlar

3B Hologram destekli vektör uzayı öğretimine ilişkin yazılım ve bilgisayardan kaynaklanan sorunlarla ilgili öğrenci görüşleri aşağıdaki gibidir:

Teknik arızalar yüzünden zaman kaybımız çok fazla. Kalabalık bir grupla bu çalışmayı yapmaya hala hazır olunmadığını düşünüyorum.

Bilgisayar kullanmayı bilmeyen ve şahsi bilgisayara sahip değilseniz gerçekten öğrenme sürecini zorlaştırıp öğretmen için de zaman kaybına sebep oluyor.

Bilgisayardan holograma bağlanma konusunda sıkıntı yaşamıştık ama o da kısa sürede halledildi.

Okula ait bilgisayarların kullanılması yerine her öğrencinin kendi bilgisayarını getirme durumu.

Bu uygulamada yetersiz olduğumuzu düşünüyorum. Herkes eşit şartlarda olmadığı için eşit şartlarda değerlendiremiyoruz. Eğer okulumuzun bilgisayar odası olsaydı ya da sunulacak başka bir imkân kimse bu konuda zorlanmazdı açıkçası. İmkânı olmayan insanlar derse tam katılım sağlayamıyor. Okulumuzda böyle bir ders yapılacaksa bunun için gerekli argümanlar çalışma ortamı da hazır olmalı. Teşekkür ederim.

Bence herkes için eşit şartlarda olmalıydı. Yani bazılarının bilgisayarı varken bazılarının yok ya da telefonları uygulama için uygun işletim sistemine sahip olmayabiliyor derste bunun sıkıntısını çok fazla yaşadık. Eşit şartlar altında olmadığından yeterli verim alınmıyor.

Programı yüklerken ve yaptığımız uygulamaları programa atarken bazı sıkıntılar oldu ismimizi filan kabul etmedi.

İnternet gerektiren bir uygulama olduğu için zaman zaman çizdiğimiz vektörlerin kaydedilmediği oldu. Bu da bizim açımızdan sıkıntılara neden oldu.

Uyum sağlamada zorlanma işlemlerin yazılımında yapılan hatalardan dolayı geri kalmamıza ve konudan bir süre sonra kopmamıza neden olabiliyor.

Bence tek olumsuz tarafı bu imkanların öğrencilerin kullanımı açısından kısıtlı olmasıdır. Yani her okulda hologramın olamayacak olmasıdır.

Bazen bilgisayarlarda sistem yazdığımız denklemi kabul etmediği için tekrar tekrar uğraşıyoruz ve uzun zamanımızı alıyor.

Okuldan bize sunulan imkanlar yetersizdi ve herkes eşit imkanlara sahip olmadığı için öğrenme süreci zorlaştı. Bilgisayarı olmayanlar her ne kadar telefondan da ulaşmaya çalışsa zorluk yaşadılar ve bilgisayara aktarma kısmı zorladı. Programı bilgisayarlara yükleme süreci ve hepimizin programı anlama süreci büyük bir zaman kaybına sebep oldu.

Yapılan uygulamalardaki zaman problemi ve uygulama içi kaydetme sorunları.

Öğrenci görüşlerinin çoğunun bu temada toplandığı görülmektedir.

Herkesin kendine ait bilgisayarının olmaması, deneme sürümündeki HoloDEU ile ilgili yaşanan yazılım sorunları, GeoGebra kullanımında yaşanan sorunların bu görüşlerin ortaya çıkma sebepleri olduğu görülmektedir. Hologram cihazı her ne kadar taşınabilir olsa da boyutlarından dolayı bilgisayar laboratuvarlarında uygun bir yer bulunamadığı için öğrencilerden kendi bilgisayarlarını getirmeleri istenmiştir. Herkesin bilgisayarı olmasa da uygulamalar akıllı telefondan da gerçekleştirilebilmektedir. Ancak sınıf mevcudu kalabalık olduğu, öğrenciler yazılımlarla yeni tanıştığı için ve HoloDEU yazılımı deneme versiyonu olduğu için ortaya çıkan olumsuz durumlar öğrencilerin görüşlerinde yer almıştır.

Elde edilen veriler, süreçte yaşanan sorunlarla ilgili araştırmacının gözlemlerini desteklemektedir. Bu bulgular ışığında yaşanan sorunları azaltmak için daha az sayıda öğrenciyle 3B Hologram destekli öğretim yapılmasının araştırmanın amacına daha iyi hizmet edeceğine karar verilmiştir.

Bu öğrencileri belirlemek için Vektör uzayı sorularından üç tanesi tüm öğrencilere uygulanmıştır. Elde edilen veriler neticesinde soruları doğru-doğruya yakın yapan ve eylem-süreç-nesne becerilerini gösteren yedi öğrenci seçilmiştir.

Tablo 8’ deki verilere göre vektör uzayını öğrenme becerileri yüksek olan öğrencilerden çalışma için gönüllü olanlarla asıl uygulama grubuna oluşturulmuştur (Ek 18).

Tablo 8

Vektör uzayı ölçme aracının değerlendirilmesi

	Eylem	Süreç	Nesne
Öğrenci cevapları	533	163	16

Tablo 8 değerlendirildiğinde öğrencilerin cevaplarının çoğunluğunun eylem becerilerinde olduğu görülmektedir. Bunu süreç ve nesne becerileri takip etmektedir.

4.2. Lineer Uzay Kavramlarını Öğrenme Sürecine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

4.2.1. Vektör Uzayı Kavramını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Vektör uzayı kavramının üç boyutlu hologram öğretimi sonrasında öğrencilere sorulan vektör uzayı problemleri aşağıdaki gibidir (Ek 8):

1. a) 3 elemandan oluşan vektör uzayı var mıdır? Gösterin.
b) 1 elemandan oluşan vektör uzayı var mıdır? Gösterin.
2. $x \oplus y = (x_1y_1, x_2y_2, 0)$ ve $\lambda \odot x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, 0)$
işlemlerine göre vektör uzayı belirten V kümesini bulun.
bulduğunuz V den başka kümeler bu işlemlere göre vektör uzayı belirtir mi? Gösterin.
3. R^2 üzerinde vektörel toplama ve K cismi ile birlikte skalerle çarpma işlemleri tanımlayın.
Bu işlemlere göre R^2 nin vektör uzayı belirttiğini gösterin.

Vektör uzayı problemlerine verilen yanıtlar vektör uzayı genetik çözümlemesine bağlı olarak hazırlanan değerlendirme rubriğine göre analiz edilmiştir (Ek 9). Gerçekleştirilen betimsel analiz sonucunda öğrencilerin APOS Teorisine göre gösterdiği beceriler Tablo 9' daki gibidir.

Tablo 9

Vektör uzayı problemlerinin değerlendirilmesi

Vektör uzayı	Aslı	Beyza	Elif	Hasan	İpek	Manas	Zeynep
Soru 1a	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Hatalı çözüm	Süreç	Nesne
Soru 1b	Çözüm yok	Nesne	Nesne	Nesne	Hatalı çözüm	Nesne	Nesne
Soru 2	Nesne	Nesne	Nesne	Hatalı çözüm	Eylem	Süreç	Nesne
Soru 3	Eylem	Nesne	Nesne	Nesne	Süreç	Nesne	Nesne

Tablo 9 incelendiğinde; öğrencilerin hatalı çözüm yapandan nesne aşaması becerilerini gösterenlere kadar değiştiği görülmektedir. Bir öğrenci nesne aşamasında beceri gösterirken, diğer sorularda hatalı çözüm yapabilmektedir. Dört soruda yedi öğrencinin verdiği yanıtlarda 4 durumda yanlış çözüm, iki durumda eylem, üç durumda süreç, 19 durumda nesne becerileri bulunmaktadır. Öğrencilere göre baktığımızda ise Beyza, Elif ve Zeynep'in tüm sorularda nesne becerileri gösterdiği görülmektedir.

Öğrencilere vektör uzayı problemleri verilmiştir ve yanıtlamaları istenmiştir. Yanıtlar incelendikten sonra, süreci daha derinlemesine incelemek ve katılımcı teyidi almak üzere klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin hatalı yanıtları üzerine didaktik sorular sorularak öğrenme süreci derinlemesine anlamaya ve sorunun kaynağı tespit edilmeye çalışılmıştır. Bazı öğrenciler problemlerdeki hatalarını düzelterek nesne aşamasına ulaşmış, bazıları ise hataları tekrarlamıştır. Bu süreçte öğrencilerde gözlemlenen hataların kaynaklandığı durumlar Tablo 10'daki gibidir.

Tablo 10

Vektör uzayı problemlerindeki hataların değerlendirilmesi

Vektör uzayı	Soru 1a	Soru 1b	Soru 2	Soru 3
Aslı	-	-	Küme-ikili koordinasyonu	İkili işlem şeması
Beyza	-	-	Vektör şeması	-
Elif	-	-	-	-
Hasan	Vektör şeması	Vektör şeması	Küme şeması ve ikili işlem şeması	-
İpek	Küme-vektör şeması	Vektör şeması	Aksiyom şeması	İkili işlem şeması
Manas	Aksiyom şeması, ikili işlem şeması	-	Matematik dili kullanımı, skalerle çarpma işlemi şeması	Matematik dili kullanımı

Hataların kaynakları incelendiğinde küme, ikili işlem, vektör, aksiyom ve cisim şemaları ve bu şemaların birbiriyle koordinasyonu sürecinde yaşanan problemlerin öğrencilerde hatalara sebep olduğu görülmüştür. Aslında bu durum, bahsi geçen şemaların vektör uzayı kavramını öğrenmek için temel kavramlar olduğunu ve bunları nesne aşamasında öğrenmenin vektör uzayı kavramını öğrenmede temel oluşturacağını göstermektedir. Bu da vektör uzayı genetik çözümlemesini destekleyen bir durumdur.

Sırasıyla vektör uzayı problemlerine öğrencilerin verdiği yanıtlar aşağıda incelenmiştir. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlarda öğrencilerin çözümü düşünme süreci incelenmiştir.

İpek'in 1-a problemine verdiği yanıt aşağıdaki gibidir. İpek'ten üç elemanlı bir küme yazıp, bu küme üzerinde vektörel toplama ve küme ve cisim üzerinde skalerle çarpma işlemi tanımlayıp 10 vektör uzayı olma aksiyomunu sağladığını göstermesi beklenmektedir. Ancak İpek vektör kümesi olarak R^3 yazmıştır. Bu küme sonsuz elemanlıdır. İpek ile yapılan görüşmelerde onun üç bileşenli olduğu için bu kümeyi seçtiği anlaşılmıştır. Yani üç bileşende her bir bileşeni bir eleman olarak algıladığı görülmektedir. Bu durum vektör şemasından kaynaklanmaktadır. Vektörü eleman olarak algılamak yerine vektörün bileşenlerini eleman olarak algılamaktadır.

İ-Eğer bunları 3 eleman alsam 3 tane de vektör yazsam. 1. Özellik için bunları toplasam R^3 için bunların toplamı R^3 te kapalıdır. Daha sonra ikinci özellik...

A-üç elemanlı bir küme söyler misin?

İ: mod gibi Z_2 diyebilirim.

A: mesela Z_2 'nin elemanları neler?

İ: 0,1,2'dir.

A: 2 mod 2 ye göre nedir?

İ: 0'dır.

A: yani 2 yoktur bunda.

İ: evet.

A: 3 elemanlı hangisi?

İ: Z_3 oluyor o zaman ben burada Z_3 dersem 0,1,2 olur.

$$\rightarrow \{0, 1, 2\}$$

Şimdi birinci özellik olarak x, y ler aldım.

Bunlar R^3 ten...

A: neden R^3 ten seçiyorsun?

① $\forall x, y \in R^3$ ise $x + y \in R^3$ olur.
 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$
 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in R^3$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

② $\forall x, y \in R^3$ ise $x + y = y + x$ olur.
 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
 $y + x = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$
 $x + y = y + x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

③ $\forall x \in R^3$ ise $x + 0 = x$ olur.
 $x + 0 = (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0)$
 $x + 0 = (x_1, x_2, x_3)$
 $x + 0 = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

④ $\forall x \in R^3$ ise $kx \in R^3$ olur.
 $kx = (kx_1, kx_2, kx_3) \in R^3$
 $kx = (kx_1, kx_2, kx_3)$
 $kx = (kx_1, kx_2, kx_3)$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑤ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑥ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑦ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑧ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑨ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑩ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑪ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑫ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑬ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑭ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑮ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑯ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑰ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑱ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑲ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

⑳ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉑ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉒ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉓ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉔ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉕ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉖ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉗ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉘ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉙ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉚ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉛ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉜ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉝ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉞ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㉟ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊱ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊲ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊳ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊴ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊵ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊶ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊷ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊸ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊹ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊺ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊻ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊼ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊽ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊾ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

㊿ $\forall x \in R^3$ ise $kx = x$ olur.
 $kx = x$ (Her bir bileşeni bir eleman olarak algıladı)

yanıtlayamaması sürecinde hem aksiyom şemasında hem de ikili işlem şemasında eksik bilgilerinin olduğu ortaya çıkmıştır.

Aslı birinci problemin a sorusuna verdiği yanıtta Z_3^2 kümesinde (x, x) özelliklerinde olan vektörlerden oluşan bir küme seçmiş ve on aksiyoma göre standart işlemleri incelemiştir. Aslı ile yapılan klinik mülakatta, soruyu çözerken ne düşündüğünü açıklaması istendiğinde:

A: ... Üç elemanlı vektör uzayı deyince vektör uzaylarında 11.. bir cisimden

diğer cisme doğru hani vektör uzayları tanımlıyorduk. Daha sonra vektör uzayının on özelliğini gösterip yapıyorduk. Acaba dedim hani tanımladığım vektör uzayı mı üç elemanlı olacak yoksa hani götüreceğim hani mesela burada K 'dan Z_3^2 ye demişim oradaki K mı üç elemanlı olacak diye ...

Handwritten work by Aslı showing the definition of a vector space over Z_3 . The set is $V = \{(1,1), (0,0), (2,2)\}$. Addition is defined as $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2) \mod 3$ and scalar multiplication as $rx = (rx_1, rx_2) \mod 3$. The work then checks the vector space axioms, such as $x+x=0$, $x+0=x$, and $rx = x$ for $r=1$.

Burada öğrencinin yaptığı açıklamaya göre, vektör uzayı ve lineer dönüşüm şemaları arasında karmaşa yaşadığı görülmektedir. 'K cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı' ifadesinin vektör uzayı tanımında kullanılmasının yaşanan bu karmaşada etken olduğu söylenebilir.

Hasan'ın 1-a problemine verdiği yanıt aşağıdaki gibidir.

Handwritten work by Hasan showing the definition of a vector space over Z_3 . The set is $A = \{(x,0,0) | x \in Z_3\}$. Addition is defined as $x+y = (x_1+y_1, 0, 0) \mod 3$ and scalar multiplication as $rx = (rx_1, 0, 0) \mod 3$. The work then checks the vector space axioms, such as $x+x=x$, $x+0=x$, and $rx = x$ for $r=1$.

Hasan çözümünde R^3 ten vektörler seçtiği, bu vektörlerin $(x,0,0)$ şeklinde olduğu ve $x \in Z_3$ olduğu görülmektedir. Standart işlemleri mod3 e göre tanımlayan Hasan, 10 aksiyonu zihninden sağladığını göstermiştir. Bu durum Hasan'ın nesne aşamasında olduğunu göstermektedir. Ancak çözümü doğru olsa da doğrudan $(Z_3, +, \cdot)$ vektör uzayı yerine, vektörleri

üç bileşenli yazması ve A kümesini $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının alt vektör kümesi olarak ele alması Hasan'ın vektör uzayını sonsuz küme olarak algılamasının sonucu olabilir.

Beyza'nın 1-a problemine verdiği yanıt incelendiğinde;

a) 3 elemandan oluşan vektör uzayı var mıdır? Gösterin.
 $\mathbb{R}^3$ 'den ya da $\mathbb{R}^2$ 'den 3 eleman seçerim, seçtiğim elemanlarla yapacağım işlemlerden küme içinde olmayan elemanlar elde edebilirim. Bu nedenle 3 elemanlı dan 2 işlemler yapınca gelse bana 0 kümesini içinden eleman vererek dan bir küme seçmişliyim. $\mathbb{R}_3$ 'e seçerim. $\mathbb{R}_3 = \{0,1,2\}$ elemanlı bir küme. İstenilen el san sayıların arkasında.

Reel Öklit uzaylarında yapacağı incelemelerde üç vektör seçerse kapalılık özelliğinin sağlanmayacağını belirtmiştir. $\mathbb{Z}_3$ kümesini seçmiş ve standart işlemlere göre vektör uzayı aksiyomlarını incelemiştir.

B: Vektör uzayı dediğinde ilk başta $\mathbb{R}$ kümesinden mi ya da $\mathbb{R}^2$ 'den mi almalıyım diye düşündüm çünkü sonucumun üç elemanlı olup olmayacağını algılayamadım ilk başta daha sonradan 3 elemandan oluşan dediği için sadece 3 elemanlı olması gereken bir küme olması gerekir diye düşündüm. Bu nedenle de $\mathbb{Z}_3$ kümesini seçtim. İçerisinde (0,1,2) olacak şekilde 3 adet elemanı olduğu için onu seçtim. $\mathbb{R}^2$ 'yi seçmeme sebebim uzay belirleme işlemlerine göre yapınca üçten fazla eleman elde edebilirim. Soruda 3'ten fazla eleman olmayacağını belirttiği için o kümeyi seçmedim.

$\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ toplama ve skalerle çarpma işlemleri uygulanır.

1) $\forall x,y \in \mathbb{Z}_3$ için
 $x+y \in \mathbb{Z}_3$

2) $\forall x,y \in \mathbb{Z}_3$ için
 $x+y = y+x$ sağlanacağından $\in \mathbb{Z}_3$

3) $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}_3$ için
 $(x+y)+z = x+(y+z)$ toplamada birleşme sağlanacağından $\in \mathbb{Z}_3$

4) $\forall x,y \in \mathbb{Z}_3$ için
 $x+e = x$
 $x+e_1 = x \Rightarrow e_1 = 0$ olur. 0 elemanı $\mathbb{Z}_3$ 'ün elemanıdır.

5) $\forall x \in \mathbb{Z}_3$ için
 $x+(-x) = 0$
 $x+(-x) = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow 2$ olur. $1+2=0$ olur.
 $x=2 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow 1$ olur. $2+1=0$ olur.
 $x=0 \Rightarrow -x=0$ olur. $0+0=0$ olur.

6- $\forall x \in \mathbb{Z}_3$ için
 $r \cdot x = r \cdot x \Rightarrow$ küme içinde olmayan bir sayı çarpınca 0 çıkar. Bu şekilde çarpılabilir.

7- $(r \cdot x) \cdot y = r \cdot (x \cdot y) \Rightarrow r \cdot x \cdot y = r \cdot x \cdot y$ eşitliği sağlanır.

8- $r \cdot (x \cdot y) = (r \cdot x) \cdot y \Rightarrow r \cdot x \cdot y = r \cdot x \cdot y$ eşitliği sağlanır.

9- $(r \cdot x) + s \cdot x = (r+s) \cdot x$
 $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = (1+1) \cdot 0$
 $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = (1+1) \cdot 1$
 $1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = (1+1) \cdot 2$

Aksiyomları incelerken tüm elemanlar için sağlayacağını içselleştirmiştir. Vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine yönelik aksiyomları incelerken süreç aşamasında olduğunu gösteren Beyza, vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin süreçlerini koordine ederek vektör uzayı nesne becerilerini de sergilemiştir.

Elif'in 1-a problemine verdiği yanıt aşağıdaki gibidir.

E: Z_3 şey x_1 ve x_2 'yi seçtiğim küme.

A: Z_3^2 'de kaç eleman var?

E: İki elemanlı.

A: Elemanları sayabilir misin?

E: Kümenin elemanları $\{0,1,2\}$ onların içinden iki tane bileşen seçtim.

A: Mesela bir tane vektör söyler misin?

E: $(1,1)$ olabilir, $(0,2)$ olabilir.

A: Kaç tane vardır böyle?

E: $(2,2)$ de var. Altı taneydi galiba.

Yanlış anlamışım tamamen, seçtiklerimi üç elemanlı aldım.

Kendisinin üç elemanlı olması için ne yapabiliyordum? Sadece 0 ve 1 olsaydı ne olurdu? $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ o zaman dört elemanlı olurdu ama. Sıfırı çıkarsam olabilirdi belki. Emin değilim kümeden sıfırı çıkarsam... Çıkarsa zaten etkisiz eleman da çıkacak. Bir de tersinde de sıkıntı çıkacak gibi duruyor onu çıkarınca. Sıfır elemanı olmayınca olmayacak. Sıfıra hiç dokunmayayım. 1

ya da 2'yi çıkarayım. İkiyi çıkarırım. İkiyi çıkaramam o zamanda toplamada sorun çıkar. Yok, hayır çıkmaz modüler olduğu için. 2 ya da 1 herhangi birini çıkarırım ama ben 2'yi çıkarırdım sanırım. Hımhım 0 ile 1'i bırakırdım. $x_1 \neq x_2$ o zaman da olmaz. Şey olduğu gibi bırakıp iki bileşen birbirine eşit olmayacak desem üç elemanlıya düşer mi? $(1,1)$, $(0,0)$, $(2,2)$ yi almayacağız o zaman kümeye $x_1 \neq x_2$ olacak. $(0,0)$ ı almak zorundayım.

A: Peki ne yapabilirsiniz başka?

E: Standart işlemlere göre miydi bu? $x_1 = x_2$ alsam $(0,0)$, $(1,1)$ ve $(2,2)$ 'yi almam gerekiyor sadece $(0,0)$ dahil olduğu için bizim kümemize etkisiz elemanda sorun çıkmayacak o zaman.

A: Böyle düzenleme yapabiliriz miyiz?

E: Aynen etkisiz elemanı bozmaz, zaten eksilisini alacak tersini de bozmuyor. Bu şekilde halledilebilir gibi görünüyor şu an için. Aklım karışmıştı benim

$$\begin{aligned}
 & Z_3 = \{0,1,2\} \\
 & \alpha) \quad \sqrt{Z_3} = \{ (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in Z_3^2 \} \\
 & 1. \quad \forall x, y \in Z_3^2 \\
 & \quad x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \in Z_3^2 \\
 & 2. \quad \forall x, y \in Z_3^2 \\
 & \quad x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) = (y_1+y_1, y_2+y_2) = y+x \\
 & 3. \quad \forall x, y, z \in Z_3^2 \\
 & \quad (x+y)+z = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) + (z_1, z_2) = (x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2)) \\
 & \quad = (x_1, x_2) + (y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z) \\
 & 4. \quad \forall x \in Z_3^2 \text{ için} \\
 & \quad x+x = x \\
 & \quad (x_1, x_2) + (x_1, x_2) = (x_1+x_1, x_2+x_2) = (x_1, x_2) \\
 & \quad x_1+x_1 = x_1 \quad x_2+x_2 = x_2 \\
 & \quad e_1 = 0 \quad e_2 = 0 \quad (0,0) \in Z_3^2 \\
 & 5. \quad \forall x \in Z_3^2 \\
 & \quad x+x^{-1} = e \\
 & \quad (x_1, x_2) + (x_1^{-1}, x_2^{-1}) = (e_1, e_2) \\
 & \quad (x_1+x_1^{-1}, x_2+x_2^{-1}) = (e_1, e_2) \\
 & \quad x_1^{-1} = -x_1 \quad x_2^{-1} = -x_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 6. \quad \forall x \in V \quad \forall r \in R \text{ için} \\
 & \quad r(x) = r((x_1, x_2)) = (rx_1, rx_2) \in V \quad \text{mod } 3 \text{ 'e göre modülünü düzenler.} \\
 & 7. \quad \forall x, y \in V \quad \forall r \in R \text{ için} \\
 & \quad r(x+y) = r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (r(x_1+y_1), r(x_2+y_2)) = (rx_1+ry_1, rx_2+ry_2) = r(x_1, x_2) + r(y_1, y_2) = r(x) + r(y) \\
 & 8. \quad \forall x \in V \quad \forall r, s \in R \text{ için} \\
 & \quad (rs)x = (rs)((x_1, x_2)) = ((rs)x_1, (rs)x_2) = (r(sx_1), r(sx_2)) = (r(sx_1), r(sx_2)) = r(sx) \\
 & 9. \quad \forall x \in V \quad \forall r, s \in R \text{ için} \\
 & \quad (r+s)x = ((r+s)(x_1, x_2)) = (r(sx_1), r(sx_2)) = r(sx) \\
 & 10. \quad \forall x \in V \quad \forall r \in R \\
 & \quad rx = x \\
 & \quad r(x_1, x_2) = x \Rightarrow (rx_1, rx_2) = (x_1, x_2) \\
 & \quad r = 1
 \end{aligned}$$

seçeceğim küme mi üç elemanlı olacaktı yoksa en son iki bileşenli elemanların kümesi mi üç elemanlı olacaktı? Onun için karar verememiştim. Hata yapmışım.

A: Yukarıda yazdığın Z_3 ve aşağıda yazdığın V arasında nasıl bir fark var? Bunlar ne?

E: $Z_3 \text{ mod } 3$ 'e göre sayıların kümesi Z_3^2 de bu kümeden iki bileşenli elemanlar seçiyoruz, sıralı ikililer onlar.

A: Peki bu vektör uzayının cismi ne?

E: Cisim Z_3 .

Elif vektör kümesi olarak Z_3^2 seçerek bu küme üzerinde mod3 e göre standart vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini incelemiştir. Vektör uzayı aksiyomlarını incelerken içselleştirmeyi gerçekleştirdiği gözlenen Elif, kümenin her elemanı için 10 aksiyomun sağlandığını göstermiştir. Ancak problemde üç elemandan oluşan bir vektör uzayı sorulmaktadır. Elif'in seçtiği küme 9 elemanlıdır. Klinik mülakatta Elif'in vektörün bileşenlerini Z_3 ten seçtiği için kümeye üç elemanlı olarak düşündüğü görülmektedir. Ayrıca görüşmede geçen ifadelerde kümenin eleman sayısını altı olarak hesaplamaktadır. Burada küme şemasında eksik bilgi olabileceği gibi, görüşme sırasında heyecan faktörünün de etkili olduğu düşünülebilir. Çünkü ilerleyen ifadelerde vektör uzayı oluşturabilecek kümeyi belirleyip, etkisiz elemanını ve diğer aksiyomların sağlanmasıyla ilgili kritikleri yapabildiğini ve kümenin elemanlarını bu özelliklere göre değerlendirebildiğini görüyoruz. Burada vektör bileşenini eleman olarak kabul etme ve bu bileşeni kümenin elemanı olarak kabul etme karmaşası karşımıza çıkmaktadır. Ancak didaktik görüşmelerde öğrencinin bu karmaşayı ortadan kaldırdığı görülmektedir. Elif Z_3^2 kümesindeki $x_1 = x_2$ sağlayan vektörleri alarak yeni oluşturduğu kümedeki aksiyomları sağlama durumunu ve bazı elemanları çıkardığında bu durumun bozulabileceğini ifade ettiği düşünüldüğünde tersine çevirme, vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri arasında koordinasyonu sağlayabildiği anlaşılmaktadır. Bu durum Elif'in nesne anlayışında olduğunu göstermektedir.

Zeynep vektör uzayının birinci problemin a sorusuna aşağıdaki gibi yanıt vermiştir.

A: $\{(1,2), (2,0), (1,1)\}$ kümesini yazmışsın. Bu vektör uzayı mıdır?

Z: Vektör uzayıdır.

A: Kapalılık sağlanır mı toplamaya göre?

Z: Sağlanır.

A: $(1,2)$ ile $(2,0)$ ı topladığımızda bir bakalım.

Z: $(3,2)$ olur. Ama bunun Z_3 deki yani mod3 deki karşılığı $(0,2)$ dir. Ama bu benim vektör kümemin elemanı değildir. O halde vektör uzayı değildi. Yanlış örnek vermişim. Peki ben nasıl bir örnek vermeliyim? $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ alsam olur belki.

A: Peki bu küme için etkisiz eleman ne?

Z: Toplamaya göre $(0,0)$. Ancak $(0,0)$ bunun elemanı değil. Hocam o zaman bu da sağlamadı. Bunlara bakmak çözerken aklıma gelmemişti.

A: Vektör uzayının özellikleri neydi ?

Z: Kapalı ,birleşme, değişme ,etkisiz eleman, ters eleman özelliklerini iki işlem içinde sağlamış olması gerekiyor.

A: Özellikleri sağlayacak şekilde üç elemanlı bir vektör kümesi var mıdır?

Z: Üç elemanlı olup özellikleri sağlayan ,biraz düşünüyüm hocam. Bu kümenin bir elemanı $(0,0,0)$ olsa ve ben bunu Z_3 de değil Z_2 de yazayım . Z_2 den Z_3 e tanımlanmış olsun . Toplama için $(0,0,0)$ a, çarpma için $(1,1,1)$ e ihtiyacım var etkisiz eleman için.

A: Hangi çarpma ?

Z: Skaler ile çarpma .

A: $(1,1,1)$ skaler mi ?

Z: Yok yok değil . Pardon. Bu olmayacak .Bu r nin yani skalerin $K = Z_3$ kümesinin elemanı olması yeterli. Mesela $\{(0,0),(1,2),(2,1)\}$ olsun.Şimdi toplamının özelliklerini sağlar. Baktığımızda diğer özellikleri de sağlar. Evet hocam bu küme sorunun doğru cevabıdır, ben orda yanlış yazmışım.

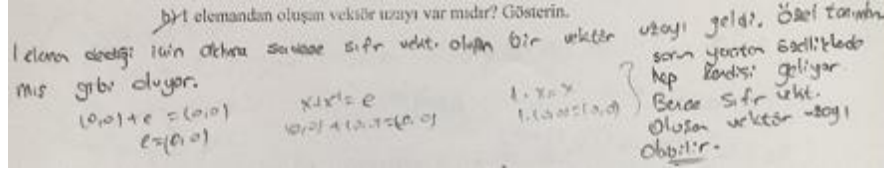
Zeynep bu soruda yazdığı V kümesinde aksiyomları incelemeyi yazıp bıraktığı görülmüştür. Zeynep ile yapılan görüşmede bu çözümü neden yaptığını anlatması istenmiştir. Araştırmacının sorduğu soruya yanıt ararken, kapalılığı sağlayıp sağlamadığını araştırırken kapalı olmadığını fark edip, verdiği kümenin vektör uzayı olmadığını tespit ediyor. Daha sonra yeni bir küme yazarak sorgulamaya devam ediyor. Sorgulamaları sonucunda istenen özelliklere sahip bir küme yazarak, vektör uzayı özelliklerini sağladığını tespit edebiliyor. Bu aşamada eylem basamağındaki hatalı çözümden, sorgulayarak kümenin tüm elemanlarının özelliklerini sağladığını göstererek nesne aşamasındaki beceriyi göstermiştir.

Öğrencilerin vektör uzayı problemlerinden 1-b ye verdikleri yanıtlar aşağıda incelenmiştir.

Aslı 1-b sorusuna uygulamada ve klinik mülakatta yanıt verememiştir. İpek'in yanıtı incelendiğinde 1-a probleminde yaşadığı güçlüğü bu problemde de yaşadığı görülmektedir. İpek bir elemandan oluşan vektör uzayı olarak bir bileşenli vektörlerden oluşan R kümesini incelemiştir. Vektör şemasındaki vektör bileşeni-vektör sayısı karmaması bu soruyu yanlış yanıtlamasındaki sebep olmuştur.

(İpek'in 1-b problemine verdiği yanıt)

Beyza'nın cevabı incelendiğinde;



$\mathbb{R}^2$ uzayının sıfır vektöründen oluşan kümeyi incelediği görülmektedir. Klinik mülakatta etkisiz ve ters elemanı sağladığını, diğer özellikleri de gerçeklediğini ifade ederek zihninden yaptığı bu işlemle öğrenci vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin süreçlerini koordine ederek nesne aşamasını yansıtmaktadır.

Elif'in yanıtını incelersek;

Ö: $\mathbb{R}$ 'den seçtim (0,0) toplamaya göre falan sorun çıkarmıyordu. Etkisiz elemanda tekrar kümeye ait oluyordu (0,0) o yüzden sadece sıfır olan kümeyi almıştım.

A: K 'yi sıfır mı aldın? 0 dan oluşan küme cisim midir?

Ö: V 'de ki bileşenleri K cisiminden seçmem gerekiyor diye (0,0) seçebilmek için onu sıfır almıştım doğrudan.

A: Peki bu koşullar altında özellikleri sağlaması için küme üzerinde nasıl bir değişiklik yaparsın?

Ö: $\mathbb{R}$ 'nin biz 0 olmasını istiyoruz sadece değil mi her değeri alması? Sadece sıfırın kalması için nasıl bir düzenleme yapacağımı tam algılayamadım... Çarpmaya göre etkisiz elemanı bulmaya çalışıyoruz. 1 olması lazım

A: 1 kümenin elemanı mı?

Ö: Eşitsizlik yazsak aynına mesela?

A: Nasıl bir eşitsizlik?

Ö: K 'yi pozitif tam sayılar alsak, sadece 1 alsak olmaz değil mi kümeyi? Cisim olması gerekiyor, reel sayılar olsa.

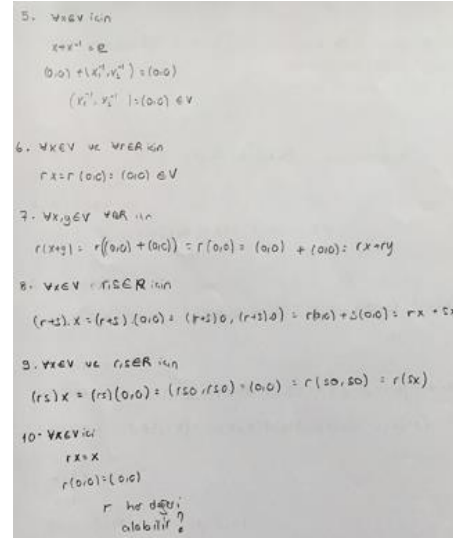
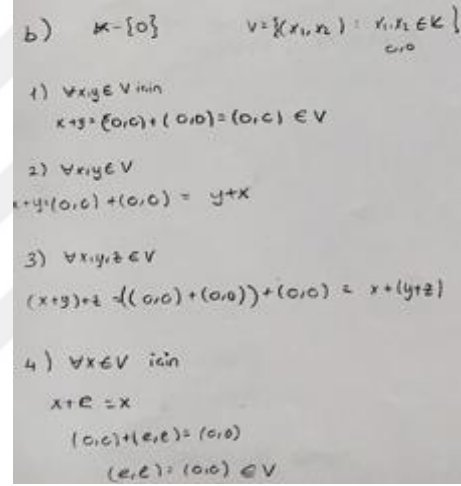
A: Reel sayılar olursa ne olur?

Ö: Sadece 1 olması gerek reel sayılar olsa olmaz galiba.

A: Neden olmaz?

Ö: Diğer değerleri de alıyor. Kısıtı yok mu onun? 1 de olur, 2 de olur. 1 kesinlikle olsun

yeterli demek. O zaman reel sayıları alayım cisim yerine. Niye K 'yi kendim tanımlamışım ki sadece $\mathbb{R}$ olsun. Cisim $\mathbb{R}$ olsun dedik bu sefer 0 yerine. $V = \{(0,0)\}$ seçtik doğrudan Onu



gözden kaçırmışım ben ikisini de cisimden seçmem gerektiğini düşünüyordum hep şimdiye kadar.

Elif'in de Beyza gibi R^2 uzayının sıfır vektöründen oluşan kümeyi bu soruda incelediğini görmekteyiz. Ancak Elif sadece sıfırın elemanı olduğu kümeyi cisim olarak kullandığını görmekteyiz. Vektör uzayı aksiyomlarını standart işlemlere göre inceleyen Elif'in 10. aksiyomda verdiği yanıtı dikkat edersek, r nin her değeri alabildiğini yazmıştır. Vektör uzayı olma aksiyomlarının onuncusu vektörün skalerle çarpma işleminin birim özelliğidir. Burada önemli olan 1 birim elemanının bu aksiyomu sağlaması ve cismin elemanı olmasıdır. Ancak Elif'in bu aksiyomda sorun yaşadığı görülmektedir. Didaktik görüşmelerde vektör uzayının elemanlarının cismin elemanlarından seçilmesi durumunda vektör uzayının sıfır vektöründen oluşması için cismin sadece sıfırdan oluşması gerektiğini düşünürken sadece sıfırdan oluşan kümenin standart işlemlere göre cisim olamayacağını gözden kaçırmıştır. Bu Elif'in cisim kavramındaki öğrenme eksikliklerini ortaya çıkarmaktadır. Elif vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinde süreç becerilerini koordine ederek vektör uzayı nesne becerisine ulaşmıştır. Ancak skalerle çarpma işleminin birim elemanı aksiyomunda her r nin bu eşitliği sağlaması durumu birim eleman özelliğinde karmaşaya sebep olmuştur.

Hasan'ın yanıtı incelendiğinde, mod1 e göre $(x,0,0)$ vektöründen oluşan bir vektör kümesi yazdığı görülmektedir. Bu vektör de $(0,0,0)$ dır. Hasan sıfır vektöründen oluşan kümenin tüm özellikleri sağladığını klinik mülakatta açıklamıştır ve nesne aşamasında beceri göstermiştir.

Manas ise sıfır vektöründen oluşan kümeyi standart işlemlere göre inceleyerek aksiyomları sağladığını belirtmiştir. Nesne becerisi göstermiştir.

Zeynep' in yanıtı R^2 uzayında sıfır vektöründen

oluşan kümedir. Bu küme için standart işlemleri düşünerek on aksiyomun sağlandığını açıklamıştır. Zeynep de bu soruda nesne aşamasında olduğunu göstermiştir.

Öğrencilerin vektör uzayı problemlerinden ikincisine verdikleri yanıtlar aşağıdaki gibidir.

Hasan'ın yanıtı incelendiğinde, ilk iki bileşeni sıfırdan farklı olmak üzere $(x_1, x_2, 0)$ şeklinde vektörlerden oluşan bir küme belirlemiştir. On aksiyomu soruda verilen işlemlere göre incelemiştir. Beşinci aksiyomda işlem hatası yapmıştır. Vektör uzayının cismini Z_2 seçmiştir. Ancak seçilen cisim sebebiyle bu

2) $V = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2\}$

$x = (x_1, x_2, 0) \in V$

$y = (y_1, y_2, 0) \in V$

1) $(x_1, y_1, x_2, y_2, 0) \in V$ kabul ed.

2) $(x_1, y_1, x_2, y_2, 0) = (y_1, x_1, y_2, x_2, 0) \in V$

3) $(x_1, y_1, x_2, y_2, 0) = (y_1, x_1, y_2, x_2, 0) \in V$

4) $x + x = x$

$x_1, x_2, x_2, 0 = x_1, x_2, 0$

$x_1, x_2, 0 = (x_1, x_2, 0) \in V$

5) $x + x = (x_1, x_2, 0)$

$x_1, x_2, x_1, x_2, 0 = x_1, x_2, 0$

$\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, 0 = 0 \in V$

6) $x(x_1, x_2, 0) = (x_1^2, x_2^2, 0) \in V$

7) $x(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)$

8) $(x_1, x_2, 0) + (x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)$

9) $x(x_1, x_2, 0) = (x_1^2, x_2^2, 0) \in V$

10) $x(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)$

uzayda germe gerçekleşmeyecektir. Bu sebeple seçilen cisim vektör uzayı için doğru değildir. Öğrencinin burada nesne aşamasında beceri gösterse de inter aşamasındaki germe gibi durumları göz önünde bulundurmadığı görülmektedir.

2) $V = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$x = (x_1, x_2, 0) \in V$

$y = (y_1, y_2, 0) \in V$

$V = \mathbb{R}^2$ olarak kabul ed.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $x = \bar{x}$, $x = (x_1, x_2, 0)$ $y = (y_1, y_2, 0)$ $\bar{x} = (x_1, x_2, 0)$

olursa bu tanımlara göre vektör uzayıdır.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $x + y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in \mathbb{R}^2$

İpek'in yanıtını incelediğimizde, soruya $\mathbb{R}^3$ kümesi ile başlayıp karmaşık kümeye geçmiştir. Klinik mülakatta ise bu soruyu anlamadığı ve yanıtı doğru veremediği görülmüştür.

Aslı'nın yanıtını incelersek;

$V = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$x = (x_1, x_2, 0)$

$y = (y_1, y_2, 0)$

$x + y = (x_1, y_1, x_2, y_2, 0)$

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0)$

$(x_1, x_2, 0)$ şeklinde vektörlerden oluşan bir küme yazmıştır. Aksiyomları incelerken beşinci maddede bileşenlerin sıfır olması durumunda ifadenin tanımsız geleceğini fark edememiştir.

Diğer aksiyomları sağladığını gösterse de beşinci maddede seçtiği kümenin vektör uzayı belirtmediği görülmektedir. Gözden kaçırdığı bu durum soruyu hatalı çözmesine sebep

olmuştur. Klinik mülakatta yanıtını açıklaması istendiğinde aksiyomların hepsinin sağlandığını ve vektör uzayı olduğunu ifade etmiştir. Ek olarak Aslı matematiksel terminolojiyi kullanırken vektörleri parantez içinde gösterirken eksik parantezlerin olduğu görülmektedir. İşlemleri tanımladığı ifadede skaleri r ile ifade edip, vektörün skalerle çarpılması işleminde skaleri λ olarak aldığı görülmektedir. Görüşmelerde yazdığı kümenin ve işlemlerin vektör uzayı aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol ederken vektör uzayını K cisminden R^3 e tanımladığı görülmektedir. Tanım ve değer kümeleri vektör uzaylarında iç ve dış işlemleri tanımlarken kullanılmaktadır. İç ve dış işlemler on vektör uzayı aksiyomunu sağladığında $(V, +, \cdot)$ cebirsel yapısı vektör uzayı belirtmektedir. Bu bakımdan vektör uzayını K cisminden R^3 e tanımlaması matematiksel dile uygun değildir. Ancak çözümde ikili işlemlerin tanım ve değer kümelerini doğru kullanması işlemler için temel ve operatör kümeleri K ve R^3 olarak aldığı (kendince) bu şekilde ifade ettiği söylenebilir.

2) $V: K \rightarrow R^3$
 $x = (x_1, x_2, 0), y = (y_1, y_2, 0) \in V$
 $1) x+y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) \in V$
 $2) x+y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) = y+x$
 $3) x+y+z = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) + (z_1, z_2, 0) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, 0) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) + (z_1, z_2, 0) = (x+y)+z$
 $4) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $5) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $6) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $7) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $8) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $9) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $10) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$

Beyza'nın yanıtı incelendiğinde, ilk olarak $(x_1, x_2, 0)$ şeklinde vektörlerden oluşan bir küme seçtiği, aksiyomları sağlarken her elemanın tersinin incelendiği beşinci maddede ilk iki bileşenin sıfırdan farklı olması gerektiğini tespit etmiştir. Bunu fark edince kümede x_1 ve x_2 nin sıfırdan farklı olması gerektiğini kümenin özelliklerine eklemiştir.

1) $x+y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) \in V$
 $2) x+y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) = y+x$
 $3) x+y+z = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) + (z_1, z_2, 0) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, 0) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0) + (z_1, z_2, 0) = (x+y)+z$
 $4) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $5) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $6) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $7) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $8) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $9) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$
 $10) x+e = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0) = x$

Ö: Bu soruda R^3 'te tanımlı dememin sebebi 3 bileşeni olmasıydı. x_1 ifadesinin x_2 ye eşit olmamasını da söylememin sebebi etkisiz elemanın (1,1,1) çıkmış olması. Ayrıca ifade içinde payda sıfır olamayacağından dolayı eşit olmadığını söyledim.

Beyza nesne aşamasında matematiksel davranışlar göstermektedir.

Manas'ın çözümünü incelediğimizde, lineer dönüşümlerde gördüğümüz ifadelerle benzer ifadeler yazdığı görülmektedir. Klinik mülakatta yapılan görüşmelerde, öğrencinin vektöre değişken dediği görülmüştür. Öğrenci değişken derken, her ilk iki bileşenin $x+y$ ve $x-y$ lerden oluştuğunu, değişen x ve y lere göre vektörün de değiştiğini, x ve y yi değişken olarak adlandırdığını, $(x+y, x-y, 0)$ şeklinde vektörün oluştuğunu ifade etmiştir. Öğrencinin burada derste kullanılan matematik dilden farklı bir dil geliştirdiği anlaşılmaktadır. Öğrencinin yanıtı bu bağlamda incelendiğinde dördüncü ve onuncu aksiyomlar dışındaki diğer aksiyomları doğru incelediği anlaşılmaktadır. Dördüncü aksiyomda bulunduğu toplama işlemine ait birim vektör V kümesinin elemanı değildir.

Onuncu aksiyomda bulunduğu skalerle çarpma işleminin etkisiz elemanı cismin elemanı değildir. Bu sebeple Manas bu soruda vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinde süreç aşaması becerileri göstermektedir. Ancak nesne aşamasına geçememiştir.

Elif cevabında ilk iki bileşeni sıfır hariç olmak üzere $(x_1, x_2, 0)$ şeklinde vektörlerden oluşan V kümesini incelemiştir. Elif V kümesi üzerinde tanımlı vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemine göre on aksiyomu inceleyerek koordinasyon süreçlerini gerçekleştirmiştir. Ancak bir önceki sorudaki hatasını devam ettirmektedir. Görüşmelerde vektör uzayının elemanlarının cisimden seçileceğini ve beşinci aksiyomda vektörün tersini bulurken $1/x_i$ bileşenlerinin tanımsız olmaması için paydaların sıfırdan farklı olması gerektiğini düşünerek K cisminin elemanlarından sıfırı çıkardığını ifade etmektedir.

Handwritten mathematical work showing vector operations in R^3 . It includes definitions of vector addition and scalar multiplication, and a proof that the set $V = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$ is a vector space under these operations.

Handwritten mathematical work showing vector operations in R^3 . It includes definitions of vector addition and scalar multiplication, and a proof that the set $V = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$ is a vector space under these operations.

Handwritten mathematical work showing vector operations in R^3 . It includes definitions of vector addition and scalar multiplication, and a proof that the set $V = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$ is a vector space under these operations.

Ö: Sıfırı niye çıkardım? Ters bulma işleminde sorun olmasın diye. K'den seçmişim ben yine aynı hatayı yapıp. Aynı mantıkla devam ediyor hep. Cisimde değişiklik yapmamam gerekiyor sanırım ama 0 olursa sorun çıkacak... 2. Soruda bileşenleri R'den seçerdim. Zaten o dahil değil benim tanımlamalarım bile uymuyor. $K=R$

A: Vektörel toplama işlemini hangi kümeler üzerinde tanımlıyoruz.

Ö: V'nin üzerinde.

A: Skalerle çarpmayı hangi küme ya da kümeler üzerinde kuruyoruz?

Ö: Sonucuna baktığımızda yine V kümesi üzerinde sadece r yi K'den seçeyim ben.

A: Skalerle çarpma işleminin olduğu aksiyomlar hangileri?

Ö: Skalerle çarpma bu maddelerde var (6-10 aksiyom incelemelerini gösteriyor).

A: Bu maddelerde cisimden sıfırı çıkarmaya sebep olacak bir durum var mı?

Ö: Hayır yok üst alma işlemi var zaten bura da sıfırı çıkartmama gerek yokmuş.

A: Peki bir de şunu düşünelim sıfırı çıkarırsan, $K-\{0\}$ kümesi bir cisim olur mu?

Ö: Cisim olmaz.

A: Olmama sebebi ne olur, yani cisim özelliğini bozan durum ne olur?

Ö: Etkisiz eleman özelliği vardı tekrar cisimde de kapalılık falan devam ediyordu orada da bozulma olacak.

Devam eden didaktik görüşmelerle Elif'in kümeden eleman çıkarıldığında diğer cisim aksiyomlarını nasıl etkilediğinin farkında olduğu ve vektör uzayının elemanları cisimden seçilse de bu elemanların özelleştirilmesi için seçilecek kriterlerin cisim üzerinde değil vektör kümesi üzerinde belirleneceğinin farkında olduğu anlaşılmaktadır. Buna ek olarak genetik çözümlemeye göre iç ve dış işlem

$V = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ Çarpma ve üst alma işleminde, ayrıca ters bulmada sorun çıkarmaması için ilk iki eleman 0'dan büyük olmalı

$K = \mathbb{R} - \{0\}$ $V = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in K\}$ kullanılabiliyor.

- $\forall x, y \in V$ için
 $x + y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in V$
- $\forall x, y \in V$
 $x + y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, 0) = y + x$
- $\forall x, y, z \in V$
 $(x + y) + z = ((x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) + (z_1, z_2, 0)) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, 0) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), 0) = x + (y + z)$
- $\forall x \in V$ için
 $x + 0 = x$
 $(x_1, x_2, 0) + (0, 0, 0) = (x_1, x_2, 0)$
 $(x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)$
 $0 = (0, 0, 0)$ $0 = (1, 1, 0) \in V$ d
- $\forall x \in V$ için
 $x + x^{-1} = 0$
 $(x_1, x_2, 0) + (x_1^{-1}, x_2^{-1}, 0) = (1, 1, 0)$
 $(x_1 \cdot x_1^{-1}, x_2 \cdot x_2^{-1}, 0) = (1, 1, 0)$
 $x_1^{-1} = \frac{1}{x_1}$ $x_2^{-1} = \frac{1}{x_2}$ 0'ı aralıktan çıkardığımız için belirsizlik yok
- $\forall x \in V, \forall r \in \mathbb{R}$ için
 $rx = r(x_1, x_2, 0) = (rx_1, rx_2, 0) \in V$
- $\forall x, y \in V, \forall r \in \mathbb{R}$ için
 $r(x + y) = r((x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0)) = r(x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) = (r(x_1 + y_1), r(x_2 + y_2), 0) = (rx_1 + ry_1, rx_2 + ry_2, 0) = (rx_1, rx_2, 0) + (ry_1, ry_2, 0) = rx + ry$
- $\forall x \in V, \forall r, s \in \mathbb{R}$
 $(r + s)x = (r + s)(x_1, x_2, 0) = (x_1^{r+s}, x_2^{r+s}, 0) = (x_1^r x_1^s, x_2^r x_2^s, 0) = (x_1^r, x_2^r, 0) + (x_1^s, x_2^s, 0) = rx + sx$
- $\forall x \in V, \forall r \in \mathbb{R}$
 $(r \cdot s)x = (rs)(x_1, x_2, 0) = (x_1^{rs}, x_2^{rs}, 0) = ((x_1^r)^s, (x_2^r)^s, 0) = r(x_1^s, x_2^s, 0) = r(sx)$
- $\forall x \in V, \forall r \in \mathbb{R}$ için
 $rx = x$
 $r(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)$
 $(x_1^r, x_2^r, 0) = (x_1, x_2, 0)$
 $r = 1$ Vektör uzayıdır.

İ: $x+y=|x_1-y_1|, |x_2-y_2|$, skalerle çarptığımda da $x_1/y_1, x_2/y_2$ demişim. Daha sonra birinci özelliği sağlarken x_1 ve x_2 'nin toplamını bu şekilde olacak. Bu mutlaklar da $\mathbb{R}^2$ 'nin elemanı olduğundan kapalıdır. 2. Sinde x ve y yi bu şekilde yazdığımızda y ile x 'i yer değiştirebiliyorum. Sonuç değişmeyeceğinden burada değişme özelliği vardır. Burada üçüncü özellik

İ: $x+y=|x_1-y_1|, |x_2-y_2|$, skalerle çarptığımda da $x_1/y_1, x_2/y_2$ demişim. Daha sonra birinci özelliği sağlarken x_1 ve x_2 'nin toplamını bu şekilde olacak. Bu mutlaklar da $\mathbb{R}^2$ 'nin elemanı olduğundan kapalıdır. 2. Sinde x ve y yi bu şekilde yazdığımızda y ile x 'i yer değiştirebiliyorum. Sonuç değişmeyeceğinden burada değişme özelliği vardır. Burada üçüncü özellik

olarak $x+y+z$ 'yi bu şekilde tanımladığımda mutlak içinde bu şekilde olacaktır. Burada da devam ettirmiş miyim? Bu özelliği sağlamamış. Burada bir daha denesem üçün devamını. x_1+x_1, y_2+z_2 daha sonra bunun üçünü de toplayabilirim. Daha sonra bunun üçünün toplamında birinci artı ikinci yi bu ikisi aldığımda $x_1-y_1-z_1, x_2-y_1-z_2$ oluyor. Burada da bunları nasıl ayırabilirim. Amacım $(x+y)+z$ yapmak. Ama burada sağlamıyor. Burada $-z$ oluyor. Bu vektör uzayı değildir. O zaman yeni bir işlem tanımlamam gerekecek.

İpek farklı bir işlem tanımlamaya çalışmış. Mutlak değer kullanarak yaptığı işlem tanımında aksiyomların sağlanmadığını görünce farklı bir işlem denemeye karar veriyor.

İ: - yerine burayı + yapsam bir sıkıntı çıkmayacak gibi görünüyor. $x+y=|x_1+y_1|, |x_2+y_2|$ birinci özelliğe bakarsak. Her x, y elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için, $x+y=(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=|x_1+y_1|, |x_2+y_2|$ elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için bu kapalı olur. İkinci özellik Her x, y elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için. değişme özelliğine bakacağım. $x+y=(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)=(y_1+x_1, y_2+x_2)$ olarak da yazabilirim. Bu $y+x$ 'e eşit olduğundan değişme özelliği vardır. 3. Özellik olarak her x, y, z elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için. tamam daha sonra burada bunu $|y_1+z_1|$ olarak bunu $|y_2+z_2|$ olarak tanımlayacağım. Daha sonra üçünn toplamını da $|x_1+y_1+z_1|, |x_2+y_2+z_2|$ olarak tanımlayacağım. Birleşme özelliği vardır. 4. Özellik olarak da her x elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için. $x+e=x$ olacak şekilde bir e var mıdır? $(x_1, x_2)+(e_1, e_2)=(x_1, x_2)$ $(|x_1+e_1|, |x_2+e_2|)=(x_1, x_2)$ $|x_1+e_1|=x_1$ olmalıdır. Bunları bir + 'lı bir de - 'li olarak mutlaklardan çıkaracağım. Bu da vektör uzayı olmamış oluyor. Kareköklü bir şeyler mi tanımlasam acaba?

İ: - yerine burayı + yapsam bir sıkıntı çıkmayacak gibi görünüyor. $x+y=|x_1+y_1|, |x_2+y_2|$ birinci özelliğe bakarsak. Her x, y elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için, $x+y=(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=|x_1+y_1|, |x_2+y_2|$ elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için bu kapalı olur. İkinci özellik Her x, y elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için. değişme özelliğine bakacağım. $x+y=(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2)=(y_1+x_1, y_2+x_2)$ olarak da yazabilirim. Bu $y+x$ 'e eşit olduğundan değişme özelliği vardır. 3. Özellik olarak her x, y, z elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için. tamam daha sonra burada bunu $|y_1+z_1|$ olarak bunu $|y_2+z_2|$ olarak tanımlayacağım. Daha sonra üçünn toplamını da $|x_1+y_1+z_1|, |x_2+y_2+z_2|$ olarak tanımlayacağım. Birleşme özelliği vardır. 4. Özellik olarak da her x elemanıdır $\mathbb{R}^2$ için. $x+e=x$ olacak şekilde bir e var mıdır? $(x_1, x_2)+(e_1, e_2)=(x_1, x_2)$ $(|x_1+e_1|, |x_2+e_2|)=(x_1, x_2)$ $|x_1+e_1|=x_1$ olmalıdır. Bunları bir + 'lı bir de - 'li olarak mutlaklardan çıkaracağım. Bu da vektör uzayı olmamış oluyor. Kareköklü bir şeyler mi tanımlasam acaba?

Ancak aşağıdaki şekilde bulunan işlemin de

aksiyomları sağlamadığını gösteriyor. Ayrıca skalerle çarpma işlemi tanımında λ yerine y değerlerini yazması da skalerle çarpma işlemi ile ilgili ikili işlem şemasında eksiklik yaşadığını göstermektedir.

Zeynep'in üçüncü probleme verdiği yanıtı incelersek;

Handwritten mathematical work showing vector space axioms for $\mathbb{R}^2$. The work defines addition and scalar multiplication, and verifies several axioms like associativity, commutativity, and distributivity.

$\mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde standart vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin aksiyomlarını incelediğini görüyoruz.

Klinik mülakatta öğrenciye, bu yanıtı dışında verilen kümeyi vektör uzayı yapabilecek başka işlemler olup olmadığı sorulduğunda;

Z: Himm. Vektör kümesi $V = \{x \mid x = (x_1, 1/x_1), x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ olsun. Bu vektör kümesi oldu bence.

Ama böyle vektör kümesinin özelliğini değiştirdim, işlemi değiştirmedim daha. Peki işlemi nasıl değiştireyim? Mesela $x+y = (x_1, 1/x_1) + (y_1, 1/y_1)$ için diyelim ki kural şu şekilde olsun; $x+y = (x_1+y_1, 1/x_1 \cdot 1/y_1)$ dedim. Sonuçta ben tanımsızlık yaratan sıfırı tanım kümesinden çıkardığım için sıkıntı oluşturacak bir durum olmaz bence.

A: Toplama işlemine göre etkisiz eleman ne?

Z: Toplama işlemine göre etkisiz eleman sıfır. Aaa o zaman olmadı. Himm nasıl yapalım.

A: Toplama işlemine göre etkisiz elemanı nasıl buluyorsun?

Z: $x+e = x$ olacak. Burda $e = (e_1, e_2)$ olsun. $x+e = (x_1, 1/x_1) + (e_1, 1/e_1) = (x_1, 1/x_1)$ olmalı. Ama burada bir yanlışlık olur. Ben yukarıda bir değişiklik yapmalıyım. $V = \{x \mid x = (x_1, 1/x_2), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ olsun ve $x+y = (x_1+y_1, 1/x_2 \cdot 1/y_2)$ olsun. O halde $x+e = (x_1, 1/x_2) + (e_1, 1/e_2) = (x_1, 1/x_2)$ olmalı. $x_1+e_1 = x_1$ için $e_1=0$, $1/x_2 \cdot 1/e_2 = 1/x_2$ için $e_2=1$ olur. Yani $e=(0,1)$ bulunur.

A: Acaba diğer özelliklerde sağlanır mı? Mesela tersi var mıdır?

Z: Tamam ona bakalım. Mesela $x+x^{-1}=(0,1)$ olması için x^{-1} ne olmalıdır? Buna bakalım.

Handwritten mathematical work showing the verification of vector space axioms for the set $V = \{(x_1, 1/x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. It defines addition and scalar multiplication, and verifies several axioms like associativity, commutativity, and distributivity.

$$x+y = (x_1, 1/x_2) + (x_1^{-1}, 1/x_2^{-1}) = (0, 1) \text{ için}$$

$$x_1 + x_1^{-1} = 0 \text{ ise } x_1^{-1} = -x_1, 1/x_2 \cdot 1/x_2^{-1} = 1 \text{ ise}$$

$$x_2^{-1} = x_2 \text{ dir. Yani } x^{-1} = (-x_1, x_2) \text{ dir. Onu standart çarpma işlemi olarak tanımlayalım. } r \in K = R \setminus \{0\}$$

için $r.x = (r.x_1, r/x_2)$ olsun. Burada $r.x_1 \in R, r/x_2 \in R$ olur.

A: İkinci işlemin herhangi bir başka özelliğini dener misin?

Z: Mesela $(r+k).x = r.x + k.x$ özelliği için ; $(r.x_1, r/x_2) + (k.x_1, k/x_2) = ((r+k).x_1, (r+k)/x_2)$ olur ve özellik sağlanır.

Cisim kümesini sıfırı içermeyen R olarak seçiyor. Aksiyomları sağlaması için yaptığı bu adımda cisimden sıfır çıkarıldığında, cisim özelliklerini sağlamayacağını göz ardı ediyor. Bu durum cisim şemasındaki eksik becerileri ortaya çıkarıyor.

Burada öğrencinin rutin olmayan problem çözümünü görüyoruz. Zeynep ilk olarak üçüncü soruya önceden gördüğü örneklerle benzer olarak işlemler tanımladı. Bu işlemlerin kümenin tüm elemanları için aksiyomları sağladığını gösterdi. Bu yanıtıyla süreç aşamasında olduğunu görüyoruz. Klinik mülakatta başka işlemlere göre kümenin vektör uzayı belirtip belirtmeyeceği soruldu. Öğrenci yaptığı sorgulamalarla yeni işlemler yazdı ve bunlara göre kümenin vektör uzayı aksiyomlarını sağladığını gösterdi. Bu durumda öğrenci bu soruda nesne aşamasında beceri sergiledi.

Handwritten mathematical work showing the construction of a vector space from a set of pairs $(x_1, 1/x_2)$.

Left Column:

- ① $x+y = x \cdot y$
 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$
 $(x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) \in R^2 \Rightarrow (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2 \text{ dir.}$
- ② $x+y = (y+x)$
 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 \cdot x_1, y_2 \cdot x_2)$
 $(x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (y_2 \cdot x_2, y_1 \cdot x_1)$
- ③ $x+(y+z) = (x+y)+z$
 $(x_1, y_1) + ((y_2, z_2) + (y_3, z_3)) = ((y_2, z_2) + (y_3, z_3)) + (x_1, y_1)$
 $(x_1, y_1 + (y_2 \cdot z_2)) = ((y_2 \cdot z_2) + (y_3 \cdot z_3)) + (x_1, y_1)$
 $(x_1, y_1 + (y_2 \cdot z_2)) = (x_1, y_1 + (y_2 \cdot z_2))$
- ④ $x+e = x$
 $(x_1, y_1) + (e_1, e_2) = (x_1, y_1)$
 $(e_1, e_2) = (1, 1)$

Right Column:

- ⑥ $r \cdot x = r \cdot x \cdot y$
 $r \cdot (x_1, y_1) = (r \cdot x_1, r \cdot y_1) \in R^2 \text{ dir.}$
- ⑦ $r \cdot (x+y) = r \cdot x + r \cdot y$
 $r \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (r \cdot (x_1 \cdot y_1), r \cdot (x_2 \cdot y_2))$
 $(r \cdot x_1 + r \cdot x_2, r \cdot y_1 + r \cdot y_2) = (r \cdot x_1, r \cdot y_1) + (r \cdot x_2, r \cdot y_2)$
- ⑧ $(r+s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
 $(r+s) \cdot x = (r+s) \cdot x$
 $r \cdot x + s \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
 $r \cdot x + s \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
 $r \cdot x + s \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- ⑨ $(r \cdot s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
 $(r \cdot s) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
 $r \cdot (s \cdot x) = r \cdot (s \cdot x)$
- ⑩ $x \cdot e = x$
 $e = ?$
 $(x_1, y_1) \cdot (e_1, e_2) = (x_1, y_1)$
 $(x_1 \cdot e_1, y_1 \cdot e_2) = (x_1, y_1)$
 $(e_1, e_2) = (1, 1)$

Manas'ın üçüncü probleme verdiği yanıtı incelediğimizde, ikinci problemde karşımıza çıkan durumları burada da görüyoruz. Manas, vektörlerin bileşenlerini x ve y

değişkenlerine göre oluşturarak farklı bir matematik dili kullanıyor. Ayrıca son aksiyomda skalerle çarpma işleminin birim elemanının (1,1) bulunmasıyla cisme ait olmayan bir eleman elde ediliyor. 6,7,8,9 aksiyomlarında doğru uygulanan skalerle çarpma işleminin son aksiyomda yanlış uygulanması ikinci işlemin birim elemanı aksiyomunda yaşanan problemi ortaya çıkarıyor.

Şimdiye kadar bir işlemin etkisiz elemanının o kümenin elemanları gibi olması ve bu aksiyomda etkisiz elemanın ve vektörün farklı kümelerden olması bu karışıklığın sebebi olabileceğini düşündürüyor.

3) $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$r.x = (rx_1, rx_2)$

1) $(x_1+y_1, x_2+y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad x, y \in \mathbb{R}^2$

2) $(x_1+y_1, x_2+y_2) = (y_1+x_1, y_2+x_2) \Rightarrow x+y = y+x$

3) $(x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) = (x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2)) \Rightarrow x+(y+z) = (x+y)+z$

4) $x+e = x$

5) $x+x^{-1} = (e_1, 0)$

$(xe_1, xe_2) = (e_1, e_2)$

$(x+x^{-1}) \cdot y = x \cdot y = (0, 0)$

$e_1, e_2 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

6) $r.x = (rx_1, rx_2) \in \mathbb{R}^2$

7) $r(x+y) = r(x_1+y_1, r(x_2+y_2)) = (r(x_1+y_1), r(x_2+y_2)) = (rx_1+ry_1, rx_2+ry_2) = r(x_1, x_2) + r(y_1, y_2) = r.x + r.y$

8) $(r.s).x = r.(s.x)$

$(r.s).x = (r.s)(x_1, x_2) = (r.sx_1, r.sx_2) = r(sx_1, sx_2) = r(s.x)$

9) $(r.s).x = r.(s.x)$

$(r.s).x = (r.s)(x_1, x_2) = (r.sx_1, r.sx_2) = r(sx_1, sx_2) = r(s.x)$

10) $e.x = x$

$e.x = (e_1, e_2).x = (e_1x_1, e_2x_2) = (x_1, x_2) = x$

$x+x^{-1} \in \mathbb{R}^2$

Hasan'ın yanıtı incelendiğinde, standart işlemlere göre aksiyomları gösterdiği için süreç aşamasındadır. Klinik mülakatta farklı işlemler tanımlaması istenmiştir.

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$r.x = (rx_1, rx_2)$

Hasan'ın görüşmelerde verdiği yanıtta işlemlerin aksiyomları sağlayacağını zihninden açıklayabildiği ve iki işlem arasında koordine kurabildiği için nesne aşamasında olduğu görülmektedir.

Beyza'nın üçüncü probleme verdiği yanıtı incelersek;

Handwritten mathematical work for problem 3, showing the definition of vector addition and scalar multiplication in $\mathbb{R}^2$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
 $x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
 $x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
 $(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) = x + (y + z)$

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$

5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $(\alpha + \beta)x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha x + \beta x$

6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $\alpha(x + y) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha x + \alpha y$

7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $\alpha(\beta x) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2)) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

8. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = (x_1, x_2) = x$

Yine standart işlemler tanımlanmış ve bunlara göre $\mathbb{R}^2$ nin vektör uzayı olduğu gösterilmiştir.

Handwritten mathematical work for problem 4, showing the definition of vector addition and scalar multiplication in $\mathbb{R}^2$.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
 $x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$
 $x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x$

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$
 $(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) = x + (y + z)$

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$

5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $(\alpha + \beta)x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha x + \beta x$

6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $\alpha(x + y) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha x + \alpha y$

7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $\alpha(\beta x) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2)) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

8. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
 $1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = (x_1, x_2) = x$

Beyza ile gerçekleştirilen klinik mülakatta bu işlemlerden farklı işlemler tanımlaması istenmiştir. Beyza $\mathbb{R}^2$ den sıfır vektörünü çıkararak vektörel toplamın bileşenlerin çarpılması ve skalerle çarpma işleminin de skalerin üs kuvvet olması şeklinde tanımlanabileceğini açıklamıştır. Beyza nesne aşamasındadır.

Elif'in üçüncü probleme verdiği yanıt incelendiğinde tanımladığı işlemlere göre kümenin vektör uzayı oluşunu aksiyomlar üzerinden göstermiştir.

E: Büyük almışım sıfırdan ama burada sıfırı çıkarmamışım. Aynı hatayı yapmamışım bu soruda. Ben sadece R^+ almışım.

A: Pozitif reel sayıları almanın sebebi nedir?

E: Bu kısımda sorun çıkmasın diye yani tekrar çarpmaya göre ters almada.

A: R^2 olarak düşünürsen kümeyi, kısıtlama yapmadan komple R^2 'de hangi işlemleri tanımlarsın vektör uzayı olması için?

E: Çarpmaya hiç girmeden standart toplama ve standart çarpma yapsaydım büyük ihtimalle zaten sorun çıkmayacaktı. Hepsini yapabilecektim. Bunun dışında büyük ihtimal var ama ben nasıl tanımlarım onu bilmiyorum. Çok fazla işlem ayarlayabilirim kendim.

Sadece üs alma ve standart işlemler üzerinde durduğumuz için onlar geliyor aklıma. Yeni bir şey düşünemiyorum ama yapabileceğimize eminim nedense.

D: Bahsettiğin işlem nasıl olabilir?

E: $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ olsun.
 $x+y = (2x_1+x_2, y_1+y_2)$ toplamayı böyle tanımlasam bir kere kapalılığı bozmaz. Çıkarma değişimi bozar mı acaba? Hiç ona girmeyip toplama yapsam değişmeyi bozmaz. Etkisiz elemanı yine $(0,0)$ bulmaz mıyım zaten?

D: Deneyelim.

E: Etkisiz elemanda da sorun çıkmıyor. Ters elemana bakayım, bu kısımda sorun çıkmıyor belki skalerle çarpmada sorun olur. Bir de çarpma tanımlamam lazım.

D: Değişme özelliği var mı acaba?

E: Değişmeye bakmadım. Sadece pozitif sayılarla sorun çıkmayacak ama negatifler de olunca sorun çıkıyor bence.

D: Sorun çıkaran kısım neresi oluyor?

E: Çıkmaz aslında belki emin olamadım.

D: Eklemek istediğin bir şey varsa ekleyebilirsin ama olmuyorsa sorun değil.

E: Aklıma gelmiyor.

$V = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 > 0 \}$ $K = \mathbb{R}$ cisim

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$
 $rx = (rx_1, rx_2)$ olarak tanımlansın.

1. $\forall x, y \in V$ için
 $x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \in V$
 $x_1, y_1 > 0$
 $x_2, y_2 > 0$ olur çünkü kendileri 0'dan büyük

2. $\forall x, y \in V$ için
 $x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) = (y_1+y_1, y_2+y_2) = y+x$

3. $\forall x, y, z \in V$ için
 $(x+y)+z = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) + (z_1, z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2)$
 $= (x_1, x_2) + (y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z)$

4. $\forall x \in V$ için
 $x+x = x$
 $(x_1, x_2) + (x_1, x_2) = (x_1+x_1, x_2+x_2)$
 $(x_1, x_2) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$
 $x_1, x_1 = x_1$ $x_2, x_2 = x_2$ $e = (1, 1) \in V$
 $e_1 = 1$ $e_2 = 1$

5. $\forall x \in V$ için
 $x+x^{-1} = e$
 $(x_1, x_2) + (x_1^{-1}, x_2^{-1}) = (1, 1)$
 $x_1, x_1^{-1} = 1$ $x_2, x_2^{-1} = 1$ $x^{-1} = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2})$
 $x_1^{-1} = \frac{1}{x_1}$ $x_2^{-1} = \frac{1}{x_2}$
 $x_1, x_2 > 0$
 0'tan daha küçük için belirsizlik yaratacak bir durum yok

6. $\forall x \in V$ ve $\forall r \in R$ için
 $rx = r(x_1, x_2) = (rx_1, rx_2) \in V$ $r=0$ olsa bile sonucu $(0,0)$ olur

7. $\forall x, y \in V$ $r \in R$ için
 $r(x+y) = r((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = r(x_1+y_1, x_2+y_2) = (r(x_1+y_1), r(x_2+y_2)) = (rx_1+ry_1, rx_2+ry_2)$
 $= (rx_1, rx_2) + (ry_1, ry_2) = rx+ry$

8. $\forall x \in V$ $\forall rs \in R$ için
 $(rs)x = (rs)(x_1, x_2) = (rsx_1, rsx_2) = (r(sx_1), r(sx_2)) = (r(sx_1), r(sx_2)) = r(sx)$

9. $\forall x \in V$ ve $\forall r, s \in R$ için
 $(rs)x = (rs)(x_1, x_2) = (rsx_1, rsx_2) = (r(sx_1), r(sx_2)) = r(sx)$

10. $\forall x \in V$ ve $\forall r \in R$ için
 $rx = x$
 $r(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$
 $(x_1^r, x_2^r) = (x_1, x_2)$
 $x_1^r = x_1$ $x_2^r = x_2$
 $r=1$ $r=1$

Tanımladığım işlemi vektör uzayının
 on özelliğini kullanarak inceledim ve sonucu
 vektör uzayı olduğunu gördüm.

Elif önceki sorularda vektör uzayının elemanlarını cisimden seçerken vektör kümesinde yapması gereken eleman kısıtlamalarını cisimde yapmıştı ve cisim aksiyomlarını sağlamayan kümeler üzerinde çalışmıştı. Bu soruda ise cisim R kümesi üzerinde çalıştığını görmekteyiz. Elif, V vektör kümesi üzerinde tanımladığı iç ve dış işlemlerle ilgili aksiyomları incelediği ve süreçlerin koordinasyonunu gerçekleştirdiği için nesne aşamasındadır.

4.2.2.İç Çarpım Uzayı Kavramını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

İç çarpım uzayı kavramının üç boyutlu hologram öğretimi sonrasında öğrencilere sorulan iç çarpım uzayı problemleri Ek 10'daki gibidir.

İç çarpım uzayı problemlerine verilen yanıtlar iç çarpım uzayı genetik çözümlemesine bağlı olarak hazırlanan değerlendirme rubriğine göre analiz edilmiştir (Ek 11). Gerçekleştirilen betimsel analiz sonucunda öğrencilerin iç çarpım uzayı problemlerinin APOS Teorisine göre gösterdiği beceriler Tablo 11' deki gibidir.

Tablo 11 İç çarpım uzayı problemlerinin değerlendirilmesi

İç çarpım uzayı problemlerinin değerlendirilmesi

İç çarpım uzayı	Aslı	Beyza	Elif	Hasan	İpek	Manas	Zeynep
Soru 3	Süreç	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Süreç
Soru 4	Süreç	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Eylem (hatalı çözüm)	Süreç
Soru 5	Eylem	Nesne	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Süreç
Soru 6	Eylem (hatalı çözüm)	Eylem (Hatalı çözüm)	-	Nesne	Nesne	Nesne	İleri
Soru 7	-	Eylem (Hatalı çözüm)	Nesne	Nesne	Süreç	Nesne	İç
Soru 8	Nesne	Nesne	Hatalı çözüm	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne
Soru 9	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem
Soru 10	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem
Soru 11	Süreç	Nesne	Süreç	-	Süreç	Nesne	İç
Soru 12	Süreç	Süreç	Nesne	Süreç	Süreç	Süreç	Nesne
Soru 13	Süreç	Süreç	Nesne	Süreç	Süreç	Süreç	-

Tablo 11 incelendiğinde Aslı'nın nesne anlayışına ulaşamadığı, diğer öğrencilerin nesne anlayışında cevaplar verdiği ve Zeynep'in ise iç seviyede olduğu görülmektedir. Dokuz ve onuncu soruların eylem aşamasında davranışları içeren bir çözüme sahiptir. Bu sebeple

öğrenciler Tablo 10'daki dokuz ve onuncu sorularda eylem aşamasında olarak kaydedilmiştir. Bu süreçte öğrencilerde gözlemlenen hataların kaynaklandığı durumlar Tablo 12'deki gibidir.

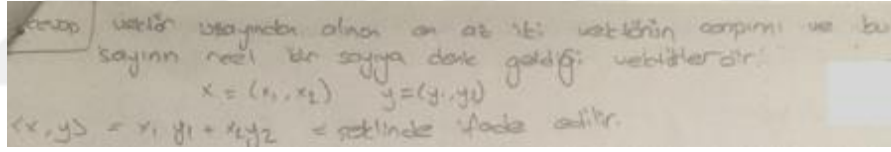
Tablo 12

İç çarpım uzayı problemlerindeki hataların değerlendirilmesi

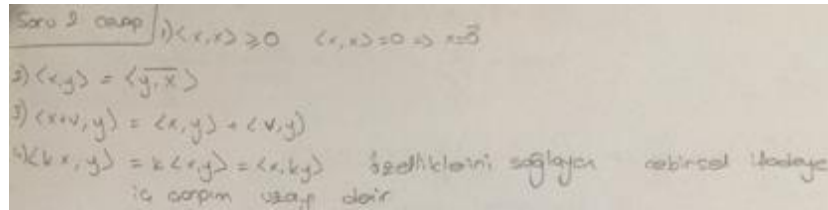
İç çarpım uzayı	Beyza	Elif	Hasan	Manas
Soru 3			İkili işlem şeması	
Soru 4				İkili işlem şeması
Soru 6	İkili işlem şeması			
Soru 8		Germe nesnesi		
Soru 11		Germe nesnesi		

Tablo 12 incelendiğinde öğrencilerin hatalarının ikili işlem şeması ve germe nesnesindeki eksik bilgilerden kaynaklandığı görülmektedir. İç çarpım uzayı problemlerine öğrencilerin verdiği yanıtlar aşağıda incelenmiştir. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar ile öğrencilerin çözümü düşünme süreci incelenmiştir.

Aslı'nın verdiği yanıtlar aşağıdaki gibidir;



A: İç çarpımın bir işlem olduğunu biliyorum. Daha sonra şey dedim biz bu iç çarpımları vektör uzaylarında uyguluyoruz. Ondan sonra vektör uzayı kaç elemanlı olursa olsun iç çarpımda tek bir sayıya gidiyor diye düşündüm. İç çarpım işlemi özel bir işlem o yüzden onları hani belirledikleri uzayı hani iç çarpım diyormuşuz gibi...



Aslı'nın ikinci probleme verdiği yanıt

İkili işlemin iç çarpım belirtmesi için sağlaması gereken dört aksiyom vardır. Üzerinde iç çarpım tanımlanan vektör uzayına ise iç çarpım uzayı denir. Aslı'nın yanıtları incelendiğinde her işlemin iç çarpım olabileceğini düşündüğü görülmektedir. R^2 uzayında tanımladığı işlemi örnek vermesi eylem aşamasında olduğunu göstermektedir. İkinci probleme verdiği yanıt incelenirse dört aksiyomu sağlayan cebirsel ifadeye iç çarpım uzayı demiştir. Burada iki işleme göre aksiyomları sağlayan kümeye vektör uzayı denmesi tanımına benzer

şekilde iç çarpım uzayını ifade etmeye çalışmıştır. Ancak bu aksiyomlar iç çarpım aksiyomlarıdır. Öğrenci iç çarpım da nesne aşamasına geçemediği için iç çarpım ve aksiyom şemalarında koordine sürecini gerçekleştirememiştir.

$x \in \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$
 1) $\langle x, x \rangle = x_1x_1 - x_2x_2 + 5x_2x_2 \geq 0$
 $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x_1x_1 - x_2x_2 + 5x_2x_2 = 0 \Rightarrow x = 0$
 2) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + 5x_2y_2$
 $\langle y, x \rangle = y_1x_1 - y_2x_2 + 5y_2x_2$ } $\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
 3) $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $u = (u_1, u_2)$ $x+u = (x_1+u_1, x_2+u_2)$
 $\langle x+u, y \rangle = (x_1+u_1)y_1 - (x_2+u_2)y_2 + 5(x_2+u_2)y_2$
 $= x_1y_1 + u_1y_1 - x_2y_2 - u_2y_2 - x_2y_2 - u_2y_2 + 5x_2y_2 + 5u_2y_2$
 $= \langle x, y \rangle + \langle u, y \rangle$
 4) $k \in \mathbb{R}$ $kx = (kx_1, kx_2)$
 $\langle kx, y \rangle = kx_1y_1 - kx_2y_2 + 5kx_2y_2$
 $= k(x_1y_1 - x_2y_2 + 5x_2y_2)$
 $= k\langle x, y \rangle = \langle x, ky \rangle$
 $\mathbb{R}^2$ iç çarpım uzayı belirlenir.

Aslı üçüncü problemde verilen ikili işlem üzerinde dört aksiyomu incelemiş ve sağladığını görmüştür. Ancak verilen fonksiyonun iç çarpım olduğunu ve $\mathbb{R}^2$ nin buna göre iç çarpım uzayı olduğunu belirtmek yerine, $\mathbb{R}^2$ nin iç çarpım uzayı belirttiğini yazması yine birinci ve ikinci problemlerde karşımıza çıkan koordine sürecinde yaşanan güçlük ile ilgilidir.

$\langle x, y \rangle = (x_1y_1)^2 + (x_2y_2)^2$
 1) $\langle x, x \rangle = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 \geq 0$
 $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = (0, 0)$
 2) $\langle y, x \rangle = (y_1x_1)^2 + (y_2x_2)^2 = (x_1y_1)^2 + (x_2y_2)^2 = \langle x, y \rangle$
 3) $u = (u_1, u_2)$ $x+u = (x_1+u_1, x_2+u_2)$
 $\langle x+u, y \rangle = ((x_1+u_1)y_1)^2 + ((x_2+u_2)y_2)^2$
 $= (x_1^2y_1^2 + 2x_1u_1y_1^2 + u_1^2y_1^2) + (x_2^2y_2^2 + 2x_2u_2y_2^2 + u_2^2y_2^2)$
 $= \langle x, y \rangle + \langle u, y \rangle$
 4) $k \in \mathbb{R}$ $kx = (kx_1, kx_2)$
 $\langle kx, y \rangle = (kx_1y_1)^2 + (kx_2y_2)^2 = k^2(x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2) = k^2\langle x, y \rangle$

Dördüncü problemin yanıtında Aslı, aksiyomları sağlayacak şekilde bir ikili işlem bulmaya çalışmıştır. Üçüncü ve dördüncü aksiyomları incelerken kullandığı vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine dikkat edilirse, $\mathbb{R}^2$ bu işlemlere göre göre vektör uzayı belirtmez. Vektör uzayı şeması ile iç çarpım aksiyomlarını koordine etme sürecinde yaşanan güçlükten dolayı meydana gelen bu durum öğrencinin süreç aşamasında olduğunu göstermektedir. Ayrıca vektör uzayı şemasının iç çarpım uzayı şemasına ulaşabilmek için gerekli olduğunu ortaya çıkarmaktadır.

Soru 5

$x = (1, 2, 1)$
 $y = (1, 0, 1)$
 $\|x\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$
 $\|y\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$
 $\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{2}{\sqrt{6} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
 $\vec{p} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y = \frac{2}{2} y = y = (1, 0, 1)$
 $\vec{p} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Aslı beşinci problemde verilen vektörlerin iz düşümünü bulmaya yönelik işlemleri gerçekleştirmiştir. Bu süreçte gerekli formülleri kullanmıştır. Formüllerin nasıl elde edildiğini açıklamadan işlemsel olarak çözüm gerçekleştirdiği için eylem aşamasındadır.

Soru 6) $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$x, y \in [0, 1] \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$
 1) $\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 \geq 0 \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
 2) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle y, x \rangle$
 3) $\langle x + u, y \rangle = (x_1 + u_1) y_1 + (x_2 + u_2) y_2$
 $= x_1 y_1 + u_1 y_1 + x_2 y_2 + u_2 y_2 = \langle x, y \rangle + \langle u, y \rangle$
 4) $\langle kx, y \rangle = k x_1 y_1 + k x_2 y_2 = k (x_1 y_1 + x_2 y_2) = k \langle x, y \rangle$

Altıncı soruda reel değerli fonksiyonlar vektör uzayı üzerinde iç çarpım tanımlanması istenmişti. Öğrenci burada $\mathbb{R}^2$ uzayından vektörler seçmiş ve vektörlerin seçildiği aralığı kısıtlamıştır. Böyle yaparak kısıtlanmış bölgedeki vektörlerin vektör uzayı belirtmediğini gözden kaçırmıştır.

(b) $[0, 1]$

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$
 $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$
 $\langle p(x), p(x) \rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx$
 $\langle p(x), g(x) \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot g(x) dx$

Aslı'dan görüşmelerde altıncı soruyu dikkatlice okuması istendiğinde, elemanların fonksiyon olması gerektiğini belirtmiştir. Verilen aralıkları fonksiyonları grafikte çizerek genel bir ifade ile bu elemanları $p(x)$ ile belirterek iç çarpım fonksiyonu yazmıştır. Aksiyomları sağladığını açıklamıştır. Bu sebeple bu soruda öğrenci süreç aşamasındadır.

x vektörü u ve v vektörlerine dik ise u ve v vektörleri düzlem belirtir x vektörü bu düzlemin normalidir.

Aslı standart iç çarpıma göre hazırlanan on birinci problemde, germe şeması, taban şeması ve iç çarpım şemaları arasında bağlantı kurarak soruyu doğru çözmüştür. Öğrenciyle yapılan görüşmede yaptıklarını diğer vektörlere göre de çözümün nasıl olacağını açıklayabildiği için süreç aşamasındadır.

$$a(1,2,1) + b(1,0,1) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned} a+b &= x_1 \\ 2a &= x_2 \\ a+b &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & x_1 \\ 2 & 0 & : & x_2 \\ 1 & 1 & : & x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & x_1 \\ 2 & 0 & : & x_2 \\ 0 & 0 & : & x_3 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{x_2}{2}, \quad b = \frac{2x_1 - x_2}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 4, \quad x_3 = 6$$

Aslı: Aralarındaki açı 90 derece ise aralarındaki açıyı kosinüs teoremiyle buluyorduk. Oradan ilişkilendirebiliriz. İç çarpımlarını bölü normlarının çarpımı aralarındaki açı da 90 derece olduğu için $\cos 90$ diyerek o şekilde ilişkilendiririz. $\cos 90 = 0$ olduğu için normları sıfır gelmemesi için iç çarpımları sıfır normları sıfırdan farklı şekilde yorumlayarak iç çarpımları sıfır olan vektörlerin aralarındaki açının 90 derece olduğunu söyleyebiliriz.

Aslı'nın on ikinci probleme verdiği yanıtta geometrik şekildeki dik vektörlerin arasındaki ilişkinin iç çarpım ile açıklanabileceğini belirttiği görülmektedir. $\mathbb{R}^3$ ten rastgele seçilen siyah renkte çizilmiş vektörlerin birim-dik hale getirilmesi ile oluşan kırmızı vektörlerin birbiriyle olan ilişkisinde sadece dik vektörlerin durumundan bahsettiği için Aslı bu problemde süreç aşamasının davranışlarını sergilemiştir.

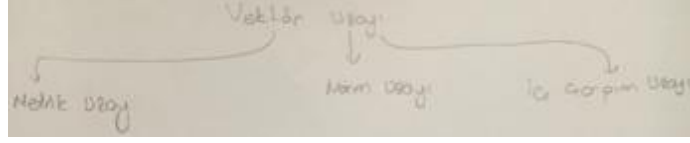
$$\text{Soru 12)} \quad v \text{ ve } x \text{ ile vektörler olsun}$$

$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{p} = \vec{v} - \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\| \|x\|} \cdot \vec{x}$$

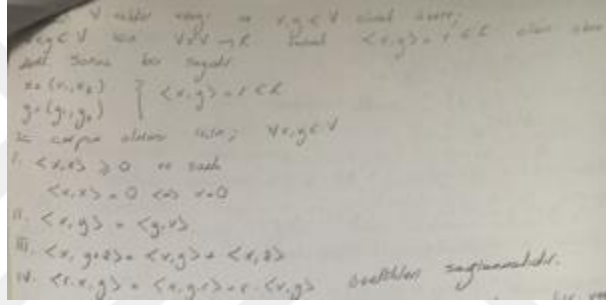
$$\vec{v} = \vec{p} + \frac{\langle v, x \rangle}{\|x\| \|v\|} \cdot \vec{x}$$

Aslı on üçüncü soruda x ve y vektörlerini sonuç vektörleri yerine girdi vektörleri olarak kabul etmiştir. Bu durum öğrencinin süreci tersten düşünemediğini, nesne aşamasına geçemediğini, vektörleri genel vektörler üzerinden düşündüğü için süreç aşamasında olduğunu göstermektedir.



Aslı'nın kavram haritası incelendiğinde haritanın iç çarpım üzerinden değil vektör uzayı üzerinden hazırlandığı görülmektedir. Metrik, norm ve iç çarpım uzaylarını vektör uzayına bağlı göstermiştir. Burada iç çarpım uzayının bileşenlerinin olmaması ve diğer uzaylarla arasında bağlantı kurmaması öğrencinin iç çarpım uzayında nesne aşamasına ulaşamadığını destekleyen bir durumdur.

Zeynep'e iç çarpım uzayı problemleri verilmiştir. Öğrencinin birinci probleme verdiği yanıt aşağıdaki gibidir.

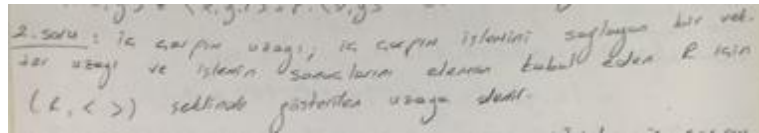


Zeynep tanımı formel olarak doğru yanıtlamıştır. Klinik mülakatta verdiği yanıtı açıklaması istenmiştir.

Ö: Birinci soruda iç çarpımı tanımlayın demişsiniz. İç çarpımın dört özelliğinin sağlanması gerekiyordu, ben de o dört özelliği yazdım. Birini sağlamadığı takdirde zaten olmuyor.

Burada öğrencinin verdiği açıklama ve yanıtı dikkate alındığında, iç çarpımın tanım ve değer kümesini doğru olarak yazmıştır. Uzayın her elemanının aksiyomları sağlaması gerektiğini belirtmiştir. Bu bakımdan süreç aşamasındadır.

Öğrencinin ikinci probleme verdiği yanıt aşağıda verilmiştir.



Verdiği yanıt incelendiğinde sadece R uzayı için tanım yaptığı görülmüştür. Öğrenciyle yapılan görüşmede bu uzay dışında başka uzayların olup olmadığı sorulmuştur.

A: buradaki R ne?

Ö: İşlemin tanımlı olduğu uzay.

A: R yerine başka bir şey olabilir mi?

Ö: Olabilir tabi. Mesela C de olur, R^2 de olur. Ben onu seçtiğim için onu yazdım.

Öğrencinin verdiği yanıt değerlendirildiğinde diğer vektör uzaylarında da iç çarpım tanımlanabileceğini söylediği için yine süreç aşamasındadır.

Öğrencinin üçüncü probleme verdiği yanıt aşağıdaki gibidir.

3. soru: $\langle v, g \rangle = x_1g_1 - x_2g_2 + 5x_2g_2$ $\mathbb{R}^2$ 'de iç çarpım
uzayı belirlenir mi?
Eğer $x \in \mathbb{R}^2$ için
 $x = (x_1, x_2)$
 $\langle v, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1x_1 - x_2x_1 - x_1x_2 + 5x_2x_2$
 $= x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0$
Ancak ancak $x_1 > x_2$ olduğunda bu ifade pozitif sağlanmaz. O halde $(\mathbb{R}^2, \langle v, g \rangle)$ iç çarpım uzayı belirlenmez.

Öğrencinin yanıtı yanlıştır. Görüşmede problemi yanıtlarken nasıl düşündüğünü açıklamasını istedik.

Ö: Şimdi özellikten dolayı $\langle x, x \rangle$ bir vektörün kendisi ile iç çarpımı sıfırdan büyük eşittir. O yüzden $x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$ özellikten dolayı sıfırdan büyük eşit olmalıdır. Peki $x_1 > x_2$ olduğunda sağlanmaz. Demişim bu doğru mu? Bakalım. Mesela $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ verelim. Baktığımızda özellik sağlanır. Ama yanlış yaptım sanırım.... Tam kareye çevirdiğimizde $(x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2$ olur. O zaman sağlar hocam ben orda bunu düşünmemiştim.

3. $x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0$ $x_1 > x_2$ olduğunda sağlanır.
Doğru mu?
Eğer $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ $\rightarrow 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1^2 = 9 - 6 + 5 = 8 > 0$
 $x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0$
 $(x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2 \geq 0$
 $\langle x, g \rangle = \langle (x_1, x_2), (g_1, g_2) \rangle$ ✓ *gerekli yapıldı.*
 $\langle x, g+z \rangle = \langle x, g \rangle + \langle x, z \rangle$
 $\langle (x_1, x_2), (g_1+z_1, g_2+z_2) \rangle$
 $\rightarrow x_1(g_1+z_1) - x_2(g_1+z_1) - x_1(g_2+z_2) + 5x_2(g_2+z_2)$ ✓

...Mesela üçüncü özellik vardı $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ özelliği yazdığımda sağlanıyor.

Diğerlerine baktığımızda diğer iki özelliklerde sağlanır. Sonuç olarak bu iç çarpım işlemi $\mathbb{R}^2$ 'de bir iç çarpım uzayı belirtir.

Görüşmede öğrenci cevabını oluştururken ne düşündüğünü açıklaması sırasında yanlış yaptığının farkına varmıştır. İlk önce x ve y ye sayı vererek aslında birinci aksiyomu sağladığını gösterdi. Bu davranışıyla eylem aşamasında beceri sergilemiştir. Daha sonra birinci aksiyomun uzayın tüm elemanları için geçerli olduğunu göstererek süreç aşamasında olduğunu göstermiştir. Uzayın üzerinde tanımlanan bu işlemin diğer aksiyomları da sağladığını göstererek doğru çözüme ulaşmıştır.

Zeynep'in dördüncü soruya verdiği yanıt aşağıda verilmiştir.

4. soru: $\mathbb{R}^2$ de bir iç çarpım tanımlayın.
 $\langle x, y \rangle = |x_1 \cdot y_1| + |x_2 \cdot y_2|$ olsun
 1. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için
 $\langle x, x \rangle = |x_1 \cdot x_1| + |x_2 \cdot x_2| \geq 0$
 $|x_1 \cdot x_1| + |x_2 \cdot x_2| = 0$
 $\Rightarrow x_1 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $(0,0) \in \mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow x_2 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ $\Rightarrow x = 0$ $\Rightarrow$ özellik sağlanır.

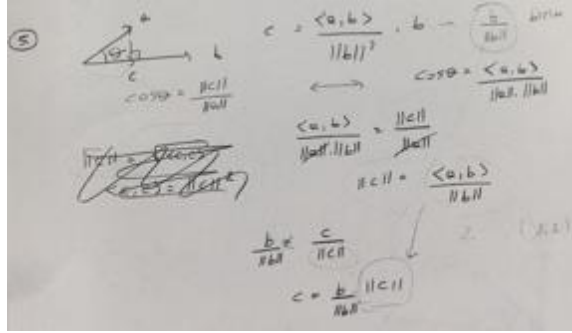
Dördüncü soruda $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı üzerinde iç çarpım belirtecek bir iç çarpım yazmasını ve gerçekleymesini istenmiştir.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ için;
 $\langle x, y \rangle = |x_1 \cdot y_1| + |x_2 \cdot y_2|$
 $= |y_1 \cdot x_1| + |y_2 \cdot x_2|$
 $= \langle y, x \rangle$ $\Rightarrow$ özellik sağlanır.
 3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ için;
 $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ $z = (z_1, z_2)$
 $\langle x, y+z \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1+z_1, y_2+z_2) \rangle$
 $= |x_1 \cdot (y_1+z_1)| + |x_2 \cdot (y_2+z_2)|$
 $(\text{mutlaklık özellikleri}) = |x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot z_1| + |x_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot z_2|$
 $(\text{mutlaklık üçgeni}) = |x_1 \cdot y_1| + |x_1 \cdot z_1| + |x_2 \cdot y_2| + |x_2 \cdot z_2|$
 $= |x_1 \cdot y_1| + |x_2 \cdot y_2| + |x_1 \cdot z_1| + |x_2 \cdot z_2|$
 $= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ $\Rightarrow$ özellik sağlanır.
 4. $\forall x, y \in V, r \in \mathbb{R}$ için;
 $\langle r \cdot x, y \rangle = |r \cdot x_1 \cdot y_1| + |r \cdot x_2 \cdot y_2|$
 $= |r \cdot x_1 \cdot y_1| + |r \cdot x_2 \cdot y_2| = r \cdot |x_1 \cdot y_1| + r \cdot |x_2 \cdot y_2|$
 $= r(|x_1 \cdot y_1| + |x_2 \cdot y_2|) = r \cdot \langle x, y \rangle$ $\Rightarrow$ özellik sağlanır.
 0. $\mathbb{R}^2$ de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bir iç çarpım uzayı belirtir.

Öğrencinin yanıtı incelendiğinde $\mathbb{R}^2$ vektör uzayı üzerinde yazdığı iç çarpım fonksiyonunun dört aksiyonu da gerçekleştirdiğini gösterdiği görülmektedir. Burada dört aksiyonu sağlayacak ve uzayın üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon yazabildiği ve bunun nasıl gerçekleştirildiğini gösterebildiği için öğrenci bu cevabında nesne aşamasında beceri göstermiştir. Zeynep'in beşinci probleme verdiği yanıt aşağıdaki gibidir.

5. soru: $\mathbb{R}^3$ de bir iç çarpım: $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$
 için; $\langle (1, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 + 0 + 1 = 2$

Beşinci soruda öğrenciden $(1, 2, 1)$ vektörünün $(1, 0, 1)$ vektörü üzerine iz düşümünü bulmasını istenmişti. Öğrencinin bu iki vektörün iç çarpımını hesapladığı görülmektedir. Görüşmede öğrencinin diğer soruyla karıştırdığı için bu şekilde çözüm yaptığı anlaşılmıştır. Bunun üzerine öğrenci ve araştırmacı arasında geçen konuşmalar şu şekildedir:



Ö: Diyelim ki bir a vektörünün b vektörü üzerine izdüşümünü istiyor bizden; o halde oluşan izdüşüm vektörü $c = (\langle a, b \rangle / \|b\|^2) \cdot b$ ile bulunur. Ama ben orda eksik yapmışım şu an sebebini bilmiyorum yapayım çözümü?

Öğrenci bir vektörün diğer bir vektörün üzerine iz düşüm fonksiyonunu doğru söyledi.

Ancak bu kuralın anlamını bilip bilmediğini anlayabilmek için görüşmeye devam edildi.

Ö: Hımm . Cosinus den geliyordu. Şimdi a ile b arasındaki açı Q açısı olsun. Ve a nın b üzerine izdüşümü dik olur. Buradaki üçgende $\cos Q$ yı okuduğum zaman $\cos Q = \|c\| / \|a\|$ olur. Bir şey daha vardı. Ben bunu biliyorum ama her seferinde bir yerini unutuyorum. Kosinüslü formülden yapıldığını biliyorum.

A : Şimdi bu iki kosinüs yani senin az önce yazdığınla normal iki vektör arasındaki açıyı bulurken kullandığımız cos formülü eşit değil mi ?

Ö : Evet , bunlar birbirine eşit olsun hocam. Burdan $\|c\| = \langle a, b \rangle / \|b\|$ gelir. Bir de şey vardı bir vektörün normu kendisiyle olan iç çarpımının kareköküne eşitti. Oradan gelir mi? Ama bu benim işime yaramaz.

A : Şimdi sen buraya kadar geldin ya peki bulduğun bu ifade ile ilk baştaki formül arasında nasıl bir fark var ?

Ö : İkisi arasında $b / \|b\|$ ile çarpılması farkı var. Az önceki ifadelere hiç gerek yokmuş burada neyse. Benim birim vektörü bulmam lazım niye çünkü b nin doğrultusunda bir izdüşüm bulmam gerekiyor. O zaman bu doğrultudaki birim vektörü de bulmalıyım. Şimdi burada $b / \|b\| = c / \|c\|$ ye eşittir. İkisi de birim vektör demektir. Eee ben yukarıda $\|c\| = \langle a, b \rangle / \|b\|$ bulmuştum . Burada bir içler dışlar çarpımı yapılır ve c izdüşüm vektörü $c = (\langle a, b \rangle / \|b\|^2) \cdot b$ bulunur.

Beşinci problem üzerine gerçekleştirilen söylemler sonucunda öğrenci iz düşüm fonksiyonunun nerden geldiğinin ispatını geometrik ve cebirsel olarak gerçekleştirmiştir. Değerlendirme rubriğinde her vektör için iz düşümü geometrik olarak açıklayabilmesi gösterebilmesi süreç aşamasının becerisidir. Ancak burada öğrenci hem geometrik hem de cebirsel olarak tüm vektörler için iz düşümün nasıl olacağını açıklayabildiği için nesne aşamasındadır.

Zeynep'in altıncı soruya yanıt verememiştir. Görüşmede soruyu tekrar okuması ve ne düşündüğünü açıklaması istenmiştir.

Ö: Bu şey demek bu aralıkta tanımlı olan fonksiyonları eleman olarak kabul eden bir küme var. Yani fonksiyonlar kümesini yazmamızı istemişsiniz. Mesela bu kümeyi görüntü kümesi tanım kümesi olarak genel yazabilirim ama içine yazacak olduğum elemanlar ne onu bilmiyorum.

Öğrenci bu verdiği yanıtla sürekli fonksiyonlar vektör uzayı nesnesinde sorun yaşadığını gösteriyor. Öğrenci soru üzerinde düşündükten sonra;

Ö: Hımm. Mesela x^2 ile x^2 nin çarpımı x^4 olsun bu aralığın elemanıdır. Yani standart işlem tanımlamış olayım. Olmaz mı?

A: Standart işlem?

Ö: R^n de bileşen bileşene çarp.

A: Burada bileşen var mı?

Ö: Böyle yazmam yanlış olur. Mesela $\langle f(x), g(x) \rangle = f(x) + g(x)$ böyle olsa birinci özellik de iç çarpım kuralından $f(x) + f(x) = 2f(x)$ büyük eşittir sıfırı sağlar mı? Hımmm. Bunu tam olarak bilemeyiz sonuçta fonksiyonun ne olduğunu bilmiyoruz. O zaman mutlak koyalım. Yani $|f(x) + g(x)|$ olsun.

A: Tamam peki bunun diğer özellikleri sağladıklarını da gösterelim.

Ö: Birinci özelliği sağlar, ikinci özelliği de sağlar.

A: Üçüncü özelliği sağladığını gösterelim.

A: $|a + b|$ ile $|a| + |b|$ arasındaki ilişki ne?

Ö: $|a + b|$ ile $|a| + |b|$ arasında küçük eşittir var.

A: Üçüncüyü sağlıyor mu bakalım.

Ö: Bu buna eşit olmaz.

A: Peki bunun dışında nasıl bir iç çarpım tanımlaman gerekiyor ki üçüncü özellik sağlansın.

Ö: Nasıl olsa acaba? Ben mutlağı birinci özelliği sağlasın diye koymuştum. Ama olmadı.

A: Düşün istersen yapmak istersen yap.

Ö: Benim bunu baştan değiştirmem lazım. Şöyle olsa; $\langle f(x), g(x) \rangle = f(x) \cdot g(x)$

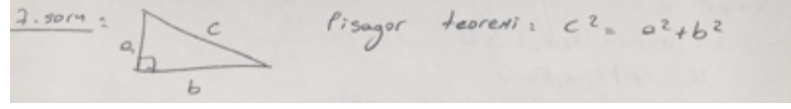
Ö: Kendisi ile olan iç çarpımı $f(x)^2$ dir. Sıfırdan büyük eşittir, birinci özellik sağlanır. Yazdığımız da ikinci özellik de sağlanır. Gelelim üçüncü özelliğe $\langle f(x), g(x) + h(x) \rangle$ için açalım adım adım yazınca bu özellik de sağlanır. Bu sefer oldu hocam.

$$\begin{aligned} \text{iii. } \langle f(x), g(x) + h(x) \rangle &= f(x) \cdot (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) \\ &= \langle f(x), g(x) \rangle + \langle f(x), h(x) \rangle \end{aligned}$$

Zeynep'in altıncı probleme mülakatta verdiği yanıt incelendiğinde öncelikle ele aldığı fonksiyonun pozitif tanımlılığı sağlayamayabileceğini tespit edince mutlak değeri kullanmak istedi. Ancak bu fonksiyonda diğer aksiyomlarda sorun yaşadı. Fonksiyonu tamamen değiştirerek yeni ele aldığı fonksiyonun dört aksiyomu gerçekleştirdiğini gösterdi. Burada iç

çarpımda nesne düzeyindeki becerisini sürekli fonksiyonlar nesnesi ile ilişkilendirerek bilgiyi transfer edebildiği için trans aşamasında beceri sergiledi.

Zeynep'in yedinci probleme verdiği yanıt aşağıda yer verilmiştir.

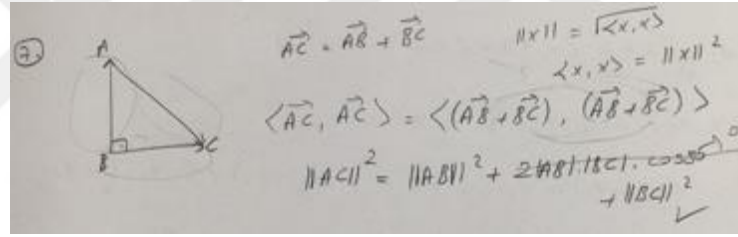


Zeynep problemde sadece Pisagor teoremini yazmış, ancak iç çarpım kullanarak ispatlamamıştır. Görüşmede problemi çözerken ne düşündüğü sorulduğunda:

Ö: Şimdi benden Pisagor teoremini iç çarpım yardımıyla ispatlamamı istemiş. Bize $[AB]$ vektörü ile $[BC]$ vektörü birbirine dik olarak verilmiş olsun. Bunların arasında oluşan vektör de $[AC]$ vektörü olsun. Yani $[AC] = [AB] + [BC]$ olsun. Bir vektörün normu kök içinde kendisiyle olan iç çarpımdır. Burdan hareketle $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ olur.

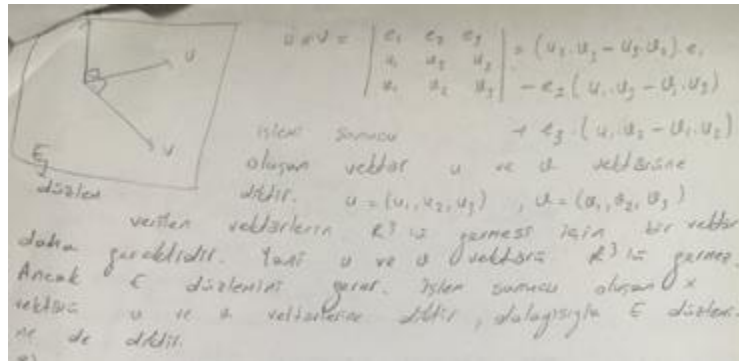
$\langle [AC], [AC] \rangle = \langle [AB] + [BC], [AB] + [BC] \rangle$ buradan

$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + 2\|AB\| \cdot \|BC\| \cdot \cos 90^\circ + \|BC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2$ eşitliği olur ve Pisagor teoremi ispatlanmış olur.



Görüşmede öğrenci Pisagor teoremini kullanarak ispatı gerçekleştirmiştir. İspat sürecinde hem iç çarpımı kullandı hem de geometrik ve cebirsel ilişkiyi açıklayarak ispatı gerçekleştirdi. Pisagor teoremini hem geometrik hem cebirsel temsiller kullanarak iç çarpımla ispatlayabildiği için intra aşamasında beceri sergilemiştir.

Zeynep'in sekizinci probleme verdiği yanıt aşağıdaki gibidir:



Öğrenci burada sadece R^3 için soruyu incelemiştir. Bunun üzerine görüşmede;

Ö: Ben bunu vektörel çarpımdan yararlanarak açıkladım hocam ve o açıklamadan hareketle iki vektöre dik olan x vektörü bu iki vektörün gerdiği uzaya da diktir. Doğru bence.

A: Peki sen bunu vektörel çarpımla yapmışsın ve vektörel çarpım R^3 için geçerli. Ama ben soruyu R^n için sormuştum. Bunu nasıl ispatlarız?

Ö: Hmm. Aklıma gelmiyor ama bir düşüneyim.

A: R^n kaç olursa olsun iki vektörün gerdiği uzay nedir?

Ö: Düzlemdir.

A: u iki vektöre dik olan vektör ile vektörlerin gerdiği düzlem arasındaki ilişki nedir?

Ö: Vektör o düzleme diktir.

A: Düzlemin içindeki vektörlerle arasındaki ilişki nasıldır?

Ö: Onlara da diktir.

Öğrenci söylemlerine göre R^3 te düşündüğünü diğer uzaylara genelleylebilmiştir. Bu sebeple nesne aşamasındadır.

Zeynep'in dokuzuncu probleme verdiği yanıt aşağıdaki gibidir:

9) $\cos \theta = \frac{\langle v, g \rangle}{\|v\| \cdot \|g\|}$ için
 $(1, 1)$ ve $(2, 1)$ arasındaki açı;
 $\rightarrow \langle v, g \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$
 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$

Dokuzuncu soruda öğrenciden verilen vektörler arasındaki açıyı üçüncü sorudaki iç çarpıma göre yapması istenmiştir. Öğrencinin verdiği cevapta verilen vektörler uygun iç çarpıma göre değerlendirilerek aralarındaki açı hesaplaması yapılmıştır. Bu sebeple eylem aşamasındadır.

Zeynep'in onuncu probleme verdiği yanıt aşağıdaki şekilde gibidir.

10) $\langle v, x \rangle = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3$
 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
 $x = (2, 1)$ için $\langle v, x \rangle = \langle (2, 3), (2, 1) \rangle = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$
 $\|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
 $\|x\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{65}} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{7}{\sqrt{65}}$

Burada öğrenci x vektörünün normunu üçüncü sorudaki iç çarpıma uygun olarak hesapladığı için eylem aşamasındadır.

22) $(1, 2, 1)$ ve $(1, 0, 1)$ için germe bütünü

$r(1, 2, 1) + k(1, 0, 1) = (x_1, x_2, x_3)$

$(r, 2r, r) + (k, 0, k) = (x_1, x_2, x_3)$

$(r+k, 2r, r+k) = (x_1, x_2, x_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{array} \right] \xrightarrow[C_{23}(-1)]{C_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \end{array} \right]$$

$x_3 - x_1 = 0$ olursa E^3 'te gerer. Ancak $\neq 0$ olduğunda E^3 'te germez.

0 halinde bu iki vektör $x_3 - x_1 = 0$ düzleminde gerer.

$x_3 - x_1 = 0$ için $(1, 2, 1)$, $(-1, 2, -1)$ vektörleri bu düzlemin tabanıdır.

$\langle v, y \rangle = 0$ dır. $\cos \theta = \frac{\langle v, y \rangle}{\|v\| \|y\|} = \frac{0}{\|v\| \|y\|} = 0$ olduğunda $\theta = \pi/2$

$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$ birim vektörler.

$\|x\| = \sqrt{5}$

$\|y\| = \sqrt{6}$

$x' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

$y' = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$

vektörleri $x_3 - x_1 = 0$ düzleminin birim dik tabanıdır.

Zeynep'in on birinci probleme verdiği yanıt incelendiğinde x ve y vektörlerinin gerdiği uzayın düzlem olduğunu ve düzlemin denklemini nasıl bulunduğunu görebiliriz. Bu düzlemde sırasıyla birbirine iki dik vektör seçmiş ve bunları $\frac{1}{\|x\|}$ ile çarparak birim hale getirmiştir. Yaptığı bu doğru adımlar düşünüldüğünde iç çarpım nesnesi ile germe nesnesi arasında ilişkilendirme yaparak çözüme ulaştığı gözlemlenmektedir. Bu sebeple öğrenci bu problemde intra basamağında olduğunu göstermektedir.

12) Diyelim ki uzayda b ve z vektörleri olsun. Ve uzayda θ açısı olsun. b vektörüne z vektörüne dik yapmak için gram schmidt yönteminde faydalanabiliriz. b'nin z üzerine (ortogonal) vektörüne buluruz.

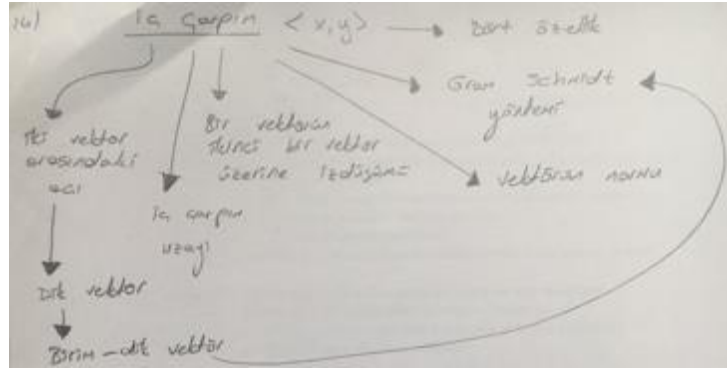
$u = \frac{\langle b, z \rangle}{\|z\|^2} z$ ile ortogonal vektör buluruz. Ve b vektöründen tersi $(-u)$ çıkarılırsa c vektörü elde edilir.

$c \perp z$ olur.

Uzayda c ve z vektörleri olsun. Bu iki vektöre dik olan vektör bunların vektörel çarpımı sonucu (*) elde edilir. $x \perp c$, $x \perp z$, $c \perp z$ olduğundan bu üç vektör birbirine diktir.

Zeynep'in on ikinci soruya verdiği yanıt incelendiğinde siyah vektörlere b ve z vektörleri olarak adlandırmıştır. b ve z vektörlerini Gram-Schmidt teoremi yardımıyla dik hale nasıl getireceğini göstermiştir. Sonuçta kırmızı vektörler olan x, c ve z vektörlerinin birbirine nasıl dik olduğunu açıklayabilmiştir. Bu yanıtıyla öğrenci nesne aşamasında olduğunu göstermektedir.

Zeynep'in on üçüncü probleme yanıt verememiştir. Görüşmede de çok düşündüğünü ve cevabı olmadığını ifade etmiştir.



Zeynep'ten on dördüncü soruda iç çarpım kavramına yönelik kavram haritası çizmesi istenmişti. Çizdiği kavram haritası incelendiğinde, iç çarpımın simgesinden dört özelliğe ok çizdiği görülmüştür. Burada dört aksiyomu sağladığında iç çarpım olacağını düşündüğü görülmektedir. Diğer oklar incelenirse iç çarpımın içindeki iç çarpım uzayı, norm, açı, birim vektör, birim-dik vektör gibi kavramın kendi içindeki kavramlarla ilişkilendirmeyi görüyoruz. Bu durum öğrencinin inter aşaması becerilerini destekleyen bir sonuç olarak kaydedilebilir.

4.2.3. Lineer Dönüşüm Kavramını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Lineer dönüşüm kavramının üç boyutlu hologram öğretimi sonrasında öğrencilere sorulan lineer dönüşüm problemleri Ek 12'de yer almaktadır.

Lineer dönüşüm problemlerine verilen yanıtlar lineer dönüşüm genetik çözümlemesine bağlı olarak hazırlanan değerlendirme rubriğine göre analiz edilmiştir (Ek 13). Gerçekleştirilen betimsel analiz sonucunda öğrencilerin lineer dönüşüm problemlerinin APOS Teorisine göre gösterdiği beceriler Tablo 13'deki gibidir.

Tablo 13

Lineer dönüşüm problemlerinin değerlendirilmesi

Lineer dönüşüm	Aslı	Beyza	Elif	Hasan	İpek	Manas	Zeynep
Soru 2	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Eylem	Süreç (hatalı işlem)	Nesne
Soru 3	Nesne	Süreç	Nesne	Nense	Nesne	Nesne	Nesne
Soru 4	Nesne	Eylem	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne
Soru 5	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne
Soru 6-a	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne
Soru 6-b	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne
Soru 6-c	İç	İç	İç	İç	İç	İç	İç
Soru 6-d	İç	İç	İç	İç	İç	Nesne	İç
Soru 6-e	Ara	Ara	Ara	Ara	Nesne	Nesne	Ara

Soru 6-f	Nesne	Nesne	Ara	-	Ara	Nesne	Ara
Soru 6-g	Ara	Ara	Ara	-	Ara	Hatalı çözüm	Ara

Tablo 13 incelendiğinde öğrencilerin hepsinin lineer dönüşümde nesne anlayışına ulaştığı görülmektedir. Tüm öğrencilerin 6-c probleminde iç seviyede olduğu görülmektedir. Bu durum lineer dönüşümlerde nesne anlayışına ulaşan bu öğrencilerin lineer dönüşüm nesnesi ve bu kavramla ilgili diğer kavramların süreçlerini koordine etmeyi gerektiren problemleri çözebildiklerini göstermektedir. Bu süreçte öğrencilerde gözlemlenen hataların kaynaklandığı durumlar Tablo 14'teki gibidir.

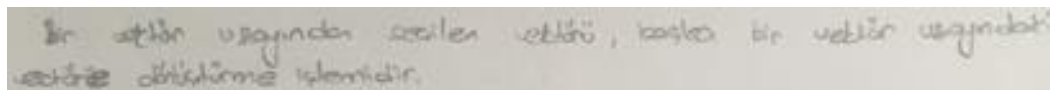
Tablo 14

Lineer dönüşüm problemlerindeki hataların değerlendirilmesi

Lineer dönüşüm	Aslı	Beyza	İpek	Manas
Soru 2			Vektör nesnesi	vektör nesnesi
Soru 6-d				Germe süreci koordinasyonu
Soru 6-e			Taban şeması	Germe süreci koordinasyonu
Soru 6-f	Taban süreci	Taban süreci		Taban süreci
Soru 6-g				İşlem hatası

Tablo 14 incelendiğinde öğrencilerin hatalarının sebepleri vektör, taban ve germe süreci ile lineer dönüşüm süreçlerinin koordinasyonunu gerçekleştirememeleridir. Lineer dönüşüm problemlerine öğrencilerin verdiği yanıtlar aşağıdaki gibidir. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar ile öğrencilerin çözümü düşünme süreci incelenmiştir.

Öğrencilerin lineer dönüşüm kavramını nasıl oluşturduklarını incelemek amacıyla sorduğumuz bu problemlere verilen yanıtlar aşağıdaki gibidir.



Lineer dönüşüm, vektör uzayları arasında tanımlanan bir fonksiyondur. Aslı birinci probleme verdiği yanıtında lineer dönüşümün uzaylar arasında vektörü vektöre dönüştüren bir işlem olarak algıladığı görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2) \\
 & \quad y = (y_1, y_2) \\
 & L(x+y) = L((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = L(x_1+y_1, x_2+y_2) \\
 & = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot (x_1+y_1, x_2+y_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cos\theta(x_1+y_1) + (-\sin\theta)(x_2+y_2) \\ \sin\theta(x_1+y_1) + \cos\theta(x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 + \cos\theta y_1 - \sin\theta y_2 \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 + \sin\theta y_1 + \cos\theta y_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta y_1 - \sin\theta y_2 \\ \sin\theta y_1 + \cos\theta y_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot y \\
 & = L(x) + L(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{2) } \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2) \\
 & \quad r \in \mathbb{R} \\
 & L(rx) = L(r(x_1, x_2)) = L(rx_1, rx_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cos\theta rx_1 - \sin\theta rx_2 \\ \sin\theta rx_1 + \cos\theta rx_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot x \\
 & = r \cdot L(x)
 \end{aligned}$$

Tanımlanan dönüşüm, lineer dönüşüm özelliklerini sağladığı için bu dönüşüm lineer dönüşümdür.

Matris şeması ve lineer dönüşüm süreci arasında koordinasyon gerektiren ikinci problemde Aslı, lineer dönüşümü matris formunda incelemiştir. Aksiyomları tüm vektörler için sağladığını göstermesi ve iki aksiyomu birlikte değerlendirmesi bakımından nesne aşamasındadır.

$$\begin{aligned}
 & L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) \\
 & \text{1) } L(x, y) = L((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = L(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\
 & = L(x_1, x_2, x_3) + L(y_1, y_2, y_3) = L(x_1, y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\
 & = L(x) + L(y) \\
 & \text{2) } L(rx) = L(r(x_1, x_2, x_3)) = L(rx_1, rx_2, rx_3) \\
 & = r L(x_1, x_2, x_3) = r \cdot L(x)
 \end{aligned}$$

L dönüşümü lineer dönüşüm kriteri

Üçüncü problemde tanım ve değer uzayları verilmiş, bu koşullar altında lineer dönüşüm belirtecek bir fonksiyon yazmaları istenmiştir. Aslı, yazdığı dönüşümü $\mathbb{R}^3$ ten seçilen bir vektörü $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde bir vektöre dönüştüren, vektörün düzlem üzerindeki iz düşümüne çeviren bir dönüşüm olarak açıklamıştır. Aksiyomları sağladığını da göstermesiyle, bu soruda lineer dönüşümde nesne aşamasında olduğunu göstermiştir.

birebir ve örten olması için
tüm matris ve $\det \neq 0$ olmalıdır.

Dördüncü problemde Aslı lineer dönüşümde tersinin olabilmesi için, fonksiyon şemasından bilgileriyle birebir ve örten olduğunu söylediği düşünülebilir, ancak ek olarak

Aslı'nın 6b problemine yanıtı

Aslı 6a ve 6b problemlerini fonksiyon şemasıyla lineer dönüşüm nesnesini ilişkilendirerek yeni dönüşümleri hesaplamıştır.

$$L_3(x) = (rx_1, -rx_2)$$

$$rx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$-rx_2 = 0$$

$$\text{Gek } L = (0,0)$$

$$\text{boy gek } L = 0$$

Aslı'nın 6c problemine yanıtı

$$\text{boy gek } L_3 + \text{boy gör } L_3 = \text{boy } L_3$$

$$0 + \text{boy gör } L_3 = 2$$

$$\text{boy gör } L_3 = 2$$

$$\boxed{\text{gör } L_3 = \mathbb{R}^2 \text{ olur}}$$

Aslı'nın 6d problemine yanıtı

Çekirdek ve görüntü kümelerini ve bu uzayların boyutlarını incelemiş, bu sebeple nesne aşamasındadır.

$$T = \{x = (1, -1), y = (2, 3)\}$$

Aslı'nın 6e problemine yanıtı

Taban şeması ve lineer dönüşüm nesnesini koordine edebilmiş ve görüntü uzayının tabanını yazmış, taban olma özelliklerini açıklayabildiği için inter aşamasındadır.

$$[x]_S = P [x]_T$$

P matrisi S tabanında T tabanına geçiş matrisi

$$(1, 2) = a_{11} \overset{\rightarrow{r_1}}{(1, 1)} + a_{21} \overset{\rightarrow{r_1}}{(1, 0)}$$

$$(1, 1) = a_{12} \overset{\rightarrow{r_1}}{(1, 1)} + a_{22} \overset{\rightarrow{r_1}}{(1, 0)}$$

$$a_{11} = 2 \quad a_{21} = -1 \quad a_{12} = -1 \quad a_{22} = 0 \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aslı'nın 6f problemine yanıtı

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a - c &= 1 \\ -2b + d &= 0 \\ -a &= 0 \\ -b &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} c &= -1 \\ d &= -2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_T$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_T \Rightarrow \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_T$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 \\ -x_1 - 2(-1) &= 0 \\ x_1 &= 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} [x]_S &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [x]_T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aslı'nın 6f problemine yanıtının devamı

6f problemi diğerlerine göre daha karmaşık süreç içermektedir. Çünkü tabanlar arası dönüşüm, lineer dönüşüm, taban ve matris şemalarının ilişkilendirmesini içermektedir. Aslı önce tabanlar arası geçiş matrisini bularak t tabanında verilen $L(x)$ görüntü vektörünün s tabanına göre koordinatlarını hesaplamıştır. Ancak s tabanında bulduğu $L(x)$ görüntü vektörü için tanım uzayındaki x vektörünü hesaplamayı gözden kaçırmıştır. Bu durum öğrencinin tabanlar arası geçiş matrisi ve lineer dönüşüm matrisi arasında ilişkilendirmede sorun yaşadığını göstermektedir.

$$L_S = (r_1, -r_2)$$

İf'nin standart tabanını baz alarak dönüşüm matrisi bulalım

$T = \{ (1,0), (0,1) \}$

$$L(f_1) = f(r_1, 0) = a_1 f_1 + b_1 f_2 \quad a = r_1 \quad b = 0$$

$$L(f_2) = f(0, -r) = a_2 f_1 + b_2 f_2 \quad c = 0 \quad d = -r$$

A, lineer dönüşüm matrisi olarak şeker

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -r - \lambda \end{vmatrix} = -(r - \lambda)(r + \lambda) = -r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = -r$$

$\lambda_1 = r$ için

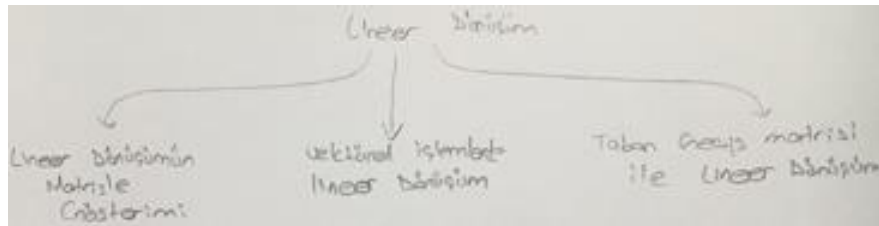
$$\begin{bmatrix} r-r & 0 \\ 0 & -r-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2rx_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$\lambda_2 = -r$ için

$$\begin{bmatrix} r+r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2rx_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Aslı'nın 6g problemine yanıtı

6g problemi ise lineer dönüşümü öz değerlerle ilişkilendirmesini incelemek için sorulmuştur. Öğrenci burada lineer dönüşümün matrisini bularak, lineer dönüşüm ve matris şeması ilişkilendirmesini gerçekleştirmiştir. Daha sonra öz değerleri ve öz vektörleri bularak lineer dönüşümde inter aşamasında olduğunu göstermektedir.



Aslı'nın lineer dönüşüm kavram haritası

Aslı'nın lineer dönüşüm kavram haritası incelendiğinde, lineer dönüşümü matrislerle gösterimi, vektörel işlemleri ve taban geçiş matrisi ile ilişkilendirdiği görülmektedir. Aslı'nın lineer dönüşüm matrisi ve taban geçiş matrisi arasında ilişkilendirme yapmaması, 6f de yaşadığı sorunu desteklemektedir. Görüşmelerde eklemek istediği başka lineer dönüşüm kavramları olup olmadığı sorulduğunda, öğrenci çekirdek kümesi, görüntü kümesi gibi kavramları ekleyebileceğini ancak ok işaretleriyle yerleştirmede sorun yaşadığı için kavram haritasına yerleştiremeyeceğini belirtmiştir.

Lineer dönüşüm vektör uzayının kendi üzerine dönüşüdür. Birbirine eşit olan gibi düşünülebilir. Boyut değişimine dönüşebilir.

Beyza'nın birinci probleme verdiği yanıt incelenirse, tanım ve değer uzaylarının vektör uzayı olduğunu, bir vektörü diğer vektör cinsinden yazma ve boyutların değişebildiğini ifade etmiştir.

Şekil 3: Beyza'nın birinci probleme verdiği yanıt

$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün lineer dönüşüm olup olmadığını gösterin.

$x = x_1 i + x_2 j$ $y = y_1 i + y_2 j$ olsun.

i) $L(x+y) = L(x) + L(y)$ $\checkmark$ old. göster.
 ii) $L(rx) = r \cdot L(x)$ $\checkmark$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ için

i) $L(x+y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (x+y) = \begin{bmatrix} \cos \theta(x+y) & -\sin \theta(x+y) \\ \sin \theta(x+y) & \cos \theta(x+y) \end{bmatrix}$
 $L(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (x+y)$
 $L(x+y) = L(x) + L(y)$

ii) $\forall r \in \mathbb{R}$ için $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için

$L(rx) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (rx) = \begin{bmatrix} (rx_1) \cos \theta & -(rx_2) \sin \theta \\ (rx_1) \sin \theta & (rx_2) \cos \theta \end{bmatrix} =$
 $r \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta & -x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta & x_2 \cos \theta \end{bmatrix} = r \cdot L(x)$

Beyza, ikinci problemde verilen dönüşüm için aksiyomları uzayın tüm vektörleri için incelemiş ve süreç aşamasında olduğunu göstermiştir.

3) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektör uzayları üzerinde x, y vektörlerine göre L dönüşümünü tanımlayın ve lineer dönüşüm olup olmadığını gösterin.

$L(x) = (x_1 + x_2, 2x_2)$

1) $L(x+y) = L\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ 2x_2+2y_2 \end{pmatrix}$

$L(x) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ $L(y) = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow L(x+y) = L(x) + L(y)$

2) $L(rx) = L\left(\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} rx_1+rx_2 \\ 2rx_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = r \cdot L(x)$

Beyza, üçüncü problemde iz düşün kavramı ile lineer dönüşüm nesnesini ilişkilendirememiş ve iz düşün fonksiyonunu yazamamıştır. Bunun yerine tanım ve değer uzaylarına uygun olacak şekilde bir dönüşüm yazmış ve lineer dönüşüm olduğunu göstermiştir. Yine süreç aşamasındadır.

→ Dönüşüm tersinin elde edilmesi için dönüşüm matrisine, elemanlar ihtiyacımız vardır.

Beyza'nın dördüncü problemdeki yanıtında, lineer dönüşümün tersinin sorgulanabilmesi için dönüşümün matrisinin verilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Oysaki her lineer dönüşüm matris ile ifade edilebilir. Burada öğrencinin lineer dönüşüm matrisi ve lineer dönüşüm arasında gerekli bağlantıyı kuramadığı fark edilmektedir.

$L(x,y) = (x+y, x-y)$

1) $L(x+y) = L\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ x_1+y_1-x_2-y_2 \end{pmatrix}$

$L(x) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$ $L(y) = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow L(x+y) = L(x) + L(y)$

2) $L(rx) = L\left(\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} rx_1+rx_2 \\ rx_1-rx_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} = r \cdot L(x)$

Lineer dönüşümdür.

Beşinci problem yanıtında sonlu vektör uzayları arasında $(x+y, x-y)$ dönüşümü tanımlayan Beyza, aksiyomları uzayın tüm vektörleri için içselleştirerek incelediğinden nesne aşamasındadır.

$$\begin{aligned}
 T(x) &= L_1 + L_2 = (x_1, x_2) + (rx_1, rx_2) = (x_1 + rx_1, rx_2 - x_2) \\
 i) T(x+y) &= T(x) + T(y) \\
 T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\
 &= (x_1+y_1+rx_1+ry_1, rx_2+ry_2-x_2-y_2) \\
 T(x) &= (x_1+rx_1, rx_2-x_2) + \Rightarrow (x_1+rx_1+ry_1+ry_1, rx_2-x_2-ry_2-ry_2) \checkmark \\
 T(y) &= (y_1+ry_1, ry_2-y_2) \\
 \forall x \in \mathbb{R}^2 \wedge r \in \mathbb{R} & \quad \text{ii) } T(rx) = T(r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T\left(\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}\right) = (rx_1+rx_1, rx_2-rx_2) = r(x_1+rx_1, rx_2-rx_2) \\
 &= r \cdot T(x) \checkmark \\
 L(x_1, x_2) &= (rx_1, rx_2) = r(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

Beyza'nın 6a problemine yanıtı

$$\begin{aligned}
 L(x) &= L_3 = (rx_1, -rx_2) \\
 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \\
 i) L_3(x+y) &= L_3(x) + L_3(y) \\
 L_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= L_3\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = (r \cdot (x_1+y_1), -r \cdot (x_2+y_2)) = (rx_1+ry_1, -rx_2-ry_2) \\
 L_3(x) &= (rx_1, -rx_2) + \Rightarrow (rx_1+ry_1, -rx_2-ry_2) \stackrel{\text{Beyza}}{\Rightarrow} L_3(x+y) = L_3(x) + L_3(y) \\
 L_3(y) &= (ry_1, -ry_2) \\
 ii) \forall x \in \mathbb{R}^2 \wedge r \in \mathbb{R} & \quad L_3(rx) = L_3(r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = L_3\left(\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}\right) = (r^2x_1, -r^2x_2) = r \cdot (rx_1, -rx_2) \\
 &= r \cdot L_3(x)
 \end{aligned}$$

Beyza'nın 6b problemine yanıtı

$$\begin{aligned}
 L_3 &= (rx_1, -rx_2) \quad (\mathbb{R}^2 \text{ de tanımlı } (0,0)^T, \text{ ekleme işlemi}) \\
 rx_1 &= 0 \wedge -rx_2 = 0 \\
 x_1 &= 0 \quad x_2 = 0 \\
 (0,0) \\
 \text{Görev } L_3 &= \{0\} \\
 \text{boy } L_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Beyza'nın 6c problemine yanıtı

$$\begin{aligned}
 \text{boy } L_3 + \text{boy } L_3 &= 2 \\
 \frac{0}{2} &= 2 \text{ old. } \text{boy } L_3 \\
 \text{Görev } L_3 &= \mathbb{R}^2 \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

Beyza'nın 6d problemine yanıtı

$$= \{(5, -2), (3, -8)\}$$

Beyza'nın 6e problemine yanıtı

Beyza, lineer dönüşümlerin toplama ve bileşke işlemlerini gerçekleştirmiş ve bunların lineer dönüşüm olduklarını aksiyomlar üzerinden göstermiştir. Süreç becerileri gösteren

Beyza, çekirdek ve görüntü kümelerini doğru bularak iç aşaması ve taban şeması ile koordine ederek ara becerileri göstermiştir.

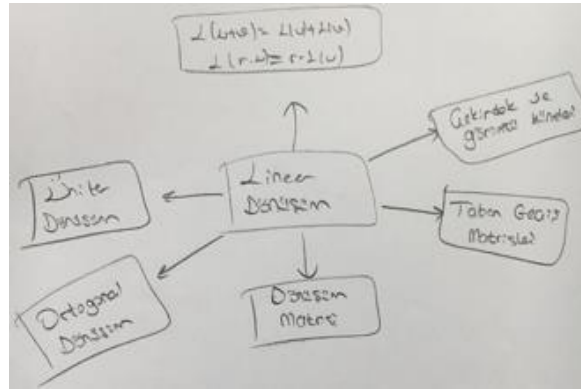
$$\begin{aligned}
 L(X) &= A \cdot X \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{aligned}
 a_{11} + 2a_{12} &= 1 \\
 a_{21} + 2a_{22} &= 5 \\
 a_{11} + a_{12} &= 1 \\
 a_{21} + a_{22} &= 5
 \end{aligned} \\
 \begin{aligned}
 a_{11} + 2a_{12} &= 1 \\
 a_{11} + a_{12} &= 1 \quad \Rightarrow \quad a_{12} = 0 \\
 a_{11} &= 1 \\
 a_{21} + 2a_{22} &= 5 \\
 a_{21} + a_{22} &= 5 \quad \Rightarrow \quad a_{22} = 0 \\
 a_{21} &= 5
 \end{aligned} \\
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\
 X_T &= P \cdot X_S \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot X_S \\
 X_S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1,2) &= a_{11}(1,0) + a_{12}(0,1) \\
 (4,1) &= a_{21}(1,0) + a_{22}(0,1) \\
 \begin{aligned}
 a_{11} &= 1 & a_{12} &= 2 \\
 a_{21} &= -1 & a_{22} &= 1
 \end{aligned} \\
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
 (x-y, 2x+y) \\
 \begin{aligned}
 x-y &= 1 \\
 2x+y &= 5 \\
 3x &= 6 \quad \Rightarrow \quad x=2 \\
 y &= 1
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Ancak 6f probleminde taban vektörlerinin görüntülerini (1,5) e eşitlediği görülmektedir. Burada taban değişim ve lineer dönüşüm kavramları arasında bağlantıların doğru kurulmadığı görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 L &= \begin{bmatrix} r & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\
 \text{Standard taban göre} &\Rightarrow \begin{aligned}
 (1,0) &= (r,0) = a_{11}(1,0) + a_{12}(0,1) \\
 (0,1) &= (0,-r) = a_{21}(1,0) + a_{22}(0,1) \\
 a_{11} &= r & a_{12} &= 0 \\
 a_{21} &= 0 & a_{22} &= -r
 \end{aligned} \\
 A &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} \quad \text{eigen değerler: } r, -r \\
 |A - \lambda I| &= 0 \text{ için} \\
 \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} r-\lambda & 0 \\ 0 & -r-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (r-\lambda)(-r-\lambda) = 0 \text{ için} \\
 r &= \lambda_1 & -r &= \lambda_2 \\
 \begin{aligned}
 \lambda_1 &= r \text{ için} \\
 \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2r \end{bmatrix} \Rightarrow (t_1, 0) = 1. \\
 \lambda_2 &= -r \text{ için} \\
 \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (0, t_2) = 2.
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

6g probleminde ise L_3 dönüşümünün öz değer ve öz vektörlerini bulabilmek için dönüşüm matrisini hesaplamış ve r skalerine bağlı öz değer ve öz vektörleri bulmuştur. Burada ara aşamasında davranış göstermiştir.



Beyza'nın lineer dönüşüm kavram haritası incelenirse, lineer dönüşüm kavramını aksiyomlar, dönüşüm bileşenleri ve çeşitleri olan kavramlarla ilişkilendirmiştir.

Bir dönüşüm fonksiyonunu farklı tabanlarda yazılmasını sağlayan, fonksiyonu temelde bozmayıp sadece yön ve büyüklüğünü değiştiren dönüşumdür.

Elif'in tanımına bakarsak, "bir dönüşümü fonksiyonunu farklı tabanlarda yazılmasını sağlayan" ifadesiyle tabanlar arası geçiş şemasıyla lineer dönüşüm arasında ilişki kurduğunu, ikinci ifadesinde ise lineer dönüşümün lineer özelliğine vurgu yaptığı görülmektedir. Burada hologram destekli öğretimde hologramda hazırladıkları modellerin etkili olduğu söylenebilir. Hologram öğretiminde kullanılan F harfinin köşe noktalarının lineer dönüşümdeki görüntülerinin yön ve büyüklüğü değişmesi öğrencide lineer dönüşüm imajını etkilediği görülmektedir. Ancak Elif'in bir lineer dönüşümün yön ve büyüklüğünü değiştirdiğini söylemesi birim matrisin dönüşüm matrisi olduğu lineer dönüşümleri gözden kaçırdığını göstermektedir.

Bir lineer dönüşüm $L(u+v) = L(u) + L(v)$

$L(cu) = c.L(u)$ $c \in \mathbb{R}$ skalarmali

① $L(u) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot u = \begin{bmatrix} u \cos \theta - v \sin \theta \\ u \sin \theta + v \cos \theta \end{bmatrix}$

$L(v) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} v \cos \theta - u \sin \theta \\ v \sin \theta + u \cos \theta \end{bmatrix}$

$L(u+v) = \begin{bmatrix} u \cos \theta + v \cos \theta & -u \sin \theta - v \sin \theta \\ u \sin \theta + v \sin \theta & u \cos \theta + v \cos \theta \end{bmatrix}$

$L(u) + L(v) = \begin{bmatrix} u \cos \theta & -u \sin \theta \\ u \sin \theta & u \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \cos \theta & -v \sin \theta \\ v \sin \theta & v \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos \theta + v \cos \theta & -u \sin \theta - v \sin \theta \\ u \sin \theta + v \sin \theta & u \cos \theta + v \cos \theta \end{bmatrix}$

$L(u+v) = L(u) + L(v)$ 1. özellik sağlandı

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad L(cu) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} cu = \begin{bmatrix} cu \cos \alpha & -cu \sin \alpha \\ cu \sin \alpha & cu \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 c \cdot L(u) &= c \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} u = c \begin{bmatrix} u \cos \alpha & -u \sin \alpha \\ u \sin \alpha & u \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (cu) \cos \alpha & -(cu) \sin \alpha \\ (cu) \sin \alpha & (cu) \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 L(cu) &= c L(u) \quad \text{olur.} \\
 &\text{ik. özelliği de sağladığı için lineer dönüşumdür.}
 \end{aligned}$$

Elif ikinci problemde vektör uzayının her elemanı için aksiyomları incelemiş ve süreç becerisi göstermiştir.

$$\begin{aligned}
 L(u_1, u_2, u_3) &= (u_1, u_2) \\
 L(x_1, x_2, x_3) &= L(x_1, x_2) \quad u = (u_1, u_2, u_3) \quad v = (v_1, v_2, v_3) \\
 L(u+v) &= L(u_1+u_2, u_1+u_2, u_1+u_2) = (u_1+u_2, u_1+u_2) \\
 L(u) &= L(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2) \\
 L(v) &= L(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2) \\
 L(u)+L(v) &= (u_1+u_2, u_1+u_2) \\
 L(cu) &= L(cu_1, cu_2, cu_3) = (cu_1, cu_2) \\
 cL(u) &= cL(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2) \quad \text{1. özellik sağlandı.}
 \end{aligned}$$

Elif üçüncü problemde tanım uzayı ve görüntü uzayındaki vektörleri geometrik olarak göstererek çözüme başlamıştır. Tanımda da geometrik olarak yorum katmasının, burada da geometrik olarak çözümü temsil etmesinin hologram destekli öğretimdeki uygulamaların bir sonucu olduğu söylenebilir. İz düşünüm dönüşümünü doğru yazan Elif aksiyomları da nesne aşamasındadır.

Linear dönüşümde dönüşüm matrisinin tersi varsa Linear dönüşümün de tersi vardır. Dönüşüm matrisin determinantı 0'dan farklı olmalı.

Lineer dönüşümü dönüşüm matrisi ile ilişkilendirerek dördüncü problemi doğru cevaplayan Elif, aynı zamanda matris şemasıyla koordinasyon gerçekleştirmiştir. Yine nesne aşamasında beceri göstermiştir.

$$\begin{aligned}
 L: \mathbb{Z}_3^2 &\rightarrow \mathbb{Z}_5^2 & \mathbb{Z}_3 &= \{0,1,2\} \\
 x &= (x_1, x_2) & \mathbb{Z}_5 &= \{0,1,2,3,4\} \\
 y &= (y_1, y_2) \\
 L(x) &= (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2) \\
 \textcircled{1} L(x+y) &= (x_1 - x_2 + y_1 - y_2, 2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2) + (y_1 - y_2, 2y_1 + y_2) \\
 &= L(x) + L(y) \quad \checkmark \\
 \textcircled{2} L(cx) &= (c(x_1 - x_2), c(2x_1 + x_2)) = (cx_1 - cx_2, c2x_1 + cx_2) = cL(x) \text{ olur.} \\
 &\text{Bir Linear dönüşüm belirtir.}
 \end{aligned}$$

Beşinci problemde sonlu vektör uzaylar arasında bir dönüşüm yazan Elif, bu dönüşümün lineer olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

$$\begin{aligned}
 \text{6. soru } L_1: L(x) &= (x_1, -x_2) \\
 L_2: L(x) &= (rx_1, rx_2), \quad r > 1 \\
 \text{a) } L_1 + L_2 &= (x_1 + rx_1, -x_2 + rx_2) \\
 \textcircled{1} L(x+y) &= (x_1 + rx_1 + y_1 + ry_1, -x_2 + rx_2 - y_2 + ry_2) = (x_1 + rx_1, -x_2 + rx_2) + (y_1 + ry_1, -y_2 + ry_2) \\
 &= L(x) + L(y) \quad \checkmark \\
 \textcircled{2} L(cx) &= (cx_1 + crx_1, -cx_2 + crx_2) = (c(x_1 + rx_1), c(-x_2 + rx_2)) = c(x_1 + rx_1, -x_2 + rx_2) \\
 &= c \cdot L(x) \\
 L_1 + L_2 &\rightarrow \text{bir lineer dönüşümdür}
 \end{aligned}$$

Elif'in 6a probleme yanıtı

Elif lineer dönüşümlerin toplanmasını bulup lineer dönüşüm olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } L_1 \circ L_2 &= L_3 \\
 L_1 \circ L_2 &= (x_1, -x_2) \cdot (rx_1, rx_2) = (rx_1^2, -rx_2^2) \\
 L(x) &= (rx_1^2, -rx_2^2) \\
 \textcircled{1} L(x+y) &= (rx_1^2 + ry_1^2, -rx_2^2 - ry_2^2) = (rx_1^2, -rx_2^2) + (ry_1^2, -ry_2^2) = L(x) + L(y) \\
 \textcircled{2} L(cx) &= (rcx_1^2, -rcx_2^2) = (c \cdot rx_1^2, c \cdot -rx_2^2) = c(rx_1^2, -rx_2^2) = c \cdot L(x) \\
 L_3 &\text{ bir lineer dönüşümdür.}
 \end{aligned}$$

Elif'in 6b problemine yanıtı

Ancak bileşke işaretini çarpma olarak algıladığı için bu soruyu yanlış çözmüştür. L_3 dönüşümünü yanlış bulduğu için diğer seçenekleri de yanlış hesaplamıştır. Görüşme sırasında işlemi bileşke olarak düşünmesi istendiğinde L_3 lineer dönüşümünü doğru olarak bularak diğer adımları açıklamıştır.

$$\begin{aligned}
 c) \quad L_3 : L(x) &= (rx_1^2, -rx_2^2) \quad r > 1 \\
 (rx_1^2, -rx_2^2) &= (0, 0) \\
 rx_1^2 &= 0 \quad -rx_2^2 = 0 \quad r > 1 \\
 x_1 &= 0 \quad x_2 = 0 \text{ olması} \quad \text{Çek } L_3 = \{0, 0\}
 \end{aligned}$$

Elif'in 6c problemine yanıtı

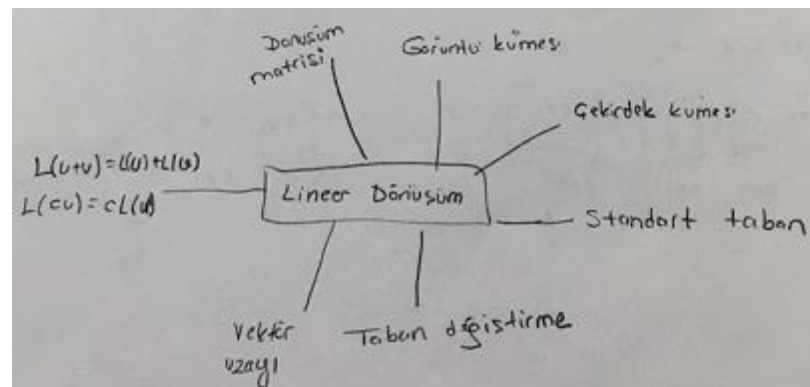
$$\begin{aligned}
 d) \quad L_3 \text{ görüntü kümesi} \\
 L(x_1, x_2) &= A \cdot X \\
 \begin{bmatrix} rx_1 & 0 \\ 0 & -rx_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rx_1^2 \\ -rx_2^2 \end{bmatrix} \quad ? \\
 \begin{matrix} 2 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \end{matrix} & \quad \begin{bmatrix} rx_1 & 0 \\ 0 & -rx_2 \end{bmatrix} \text{ Linear dönüşüm matrisi}
 \end{aligned}$$

Elif'in 6d problemine yanıtı

$$\begin{aligned}
 a_{11}(1,2) + a_{21}(-1,1) &= (1,5) \quad rx_1, -rx_2 \\
 a_{12}(1,2) + a_{22}(-1,1) &= (1,5) \quad (1,1) \quad (r, -r) \\
 & \quad (1,0) \quad (r, 0) \\
 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r & r \\ -r & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r-\lambda & 0 \\ -r & -\lambda \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Elif'in 6f-6g problemine yanıtı

E: L_2 'de gördüğüm rx_1 'i yukarıda x_1 yerine yazdım, rx_2 'i de x_2 yerine yazdım $(rx_1, -rx_2)$ diye bir fonksiyon buldum en son bileşke olarak.



Elif'in kavram haritasını incelersek, lineer dönüşümün aksiyomları, kendi içinde ilişkili olduğu kavramlar ve kavram dışı ilişkili olduğu kavramlar arasında ilişki kurarak bir kavram haritası çizdiği görülmektedir.

1-) Lineer dönüşüm: Bir cismin tabanlarını değiştirerek ve matrisler yardımıyla boyutunu değiştirmek. Mesela 2 boyutlu bir vektör 3 boyutlu bir uzayda tüm elemanları elde edilebilir. 0'lı lineer dönüşümdür.

İpek'in birinci probleme verdiği yanıt

İpek verdiği bu yanıt, hologram destekli öğretim uygulamalarının bir yansımasıdır. Bahsettiği şekli lineer dönüştürmek, taban değişimiyle matrisin boyutunun değişmesi, iki boyutlu vektörü üç boyutlu vektöre dönüştürmek öğrencinin lineer dönüşümü, taban değişimi, matris şeması, boyut şeması ve fonksiyon şeması ile ilişkilendirdiği görülmektedir.

2-) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot x$ lineer dönüşüm mü?

Yani $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ için $L(x+y) = L(x) + L(y)$ olur.

① $L(x+y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (x+y) + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (x+y)$

$L(x) + L(y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2) + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (y_1, y_2)$

$\Rightarrow L(x+y) = L(x) + L(y)$

② $L(r \cdot x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (r \cdot x_1, r \cdot x_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot r \cdot (x_1, x_2)$

$= r \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2) = r \cdot L(x)$

lineer dönüşümdür.

İpek'in ikinci problem yanıtında vektör uzayı şemasında (vektör nesnesi) sorun yaşadığı için aksiyomları doğru şekilde inceleyemediği böylece birinci çözümde eksik adımlar bulunduğu görülmektedir.

③ $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$ için $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ 0 vektörü

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, 0)$

$(y_1, y_2, y_3) \rightarrow (y_1, y_2, 0)$

$(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_1, z_2, 0)$

lineer dönüşümdür.

İpek, iz düşüm probleminde $\mathbb{R}^3$ ten $\mathbb{R}^3$ e dönüşüm yazmıştır. Görüşmede görüntü uzayının ne olduğu sorulduğunda yanıtını aşağıdaki gibi değiştirmiştir.

③ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ $L(x+y) = L(x) + L(y)$
 $(y_1, y_2) \rightarrow (y_1, y_2)$ $L(rx) = rL(x)$
 $(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_1, z_2)$

① $L(x+y) = L(x_1, x_2) + L(y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$
 $L(x) + L(y) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

② $L(rx) = L(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) = rL(x)$ lineer dönüşümdür.

$|A - \lambda I_n| = 0$

İpek, lineer dönüşüm olacak şekilde, verilen tanım ve değer uzayları arasında iz dönüşüm fonksiyonu yazıp lineer dönüşüm olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

④ Bence lineer dönüşüm için determinatın sıfırdan farklı olması lazım. Çünkü $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$ denir. Burada A nın det'i 0 olması durumunda tanımlı olur. Matrisin tersi bulurken de A^{-1} ile karşılaşıyoruz. Bence 0 yarıdan det'i 0 olamaz.

İpek, dördüncü problemde lineer dönüşümün tersini düşünürken, lineer dönüşüm ve dönüşüm matrisi şemaları arasında bağlantı kurarak dönüşüm matrisini determinantının sıfırdan farklı olması gerektiğini belirtmiştir. Nesne aşamasındadır.

⑤ $L: \mathbb{R}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^2$ lin. d. n. tanımla

$\mathbb{R}_2^2 = \{0, 1, 2\}$ $L: \mathbb{R}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}_2^2$ $L(x) = (x_1+x_2, 2x_2)$
 $\mathbb{R}_2^2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$L(x+y) = (x_1+x_2) + (y_1+y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$
 $= (x_1+y_1+x_2+y_2, 2x_2+2y_2)$
 $= (x_1+x_2, 2x_2) + (y_1+y_2, 2y_2)$
 $= L(x) + L(y) \checkmark$

$L(rx) = (rx_1+rx_2, 2rx_2)$
 $= (r(x_1+x_2), 2rx_2) = r(x_1+x_2, 2x_2)$
 $= rL(x) \checkmark$

lineer dönüşümdür.

Beşinci problemde sonlu vektör uzayları üzerinde dönüşüm tanımlayan İpek, aksiyomlara göre incelemeleri sonucunda dönüşümün lineer olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

⑥ $L_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yansıma dönüşümü $L_1(x) = (x_1, -x_2)$
 $L_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gerçekte dönüşümü $L_2(x) = (rx_1, rx_2)$ $r \neq 1$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$ olsun; $r \in \mathbb{R}$

a) $L_1 + L_2$ bul. Lin dönüşü = ?

① $L_1 + L_2 = (x_1 + rx_1, -x_2 + rx_2)$

$L(x+y) = (x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1+rx_1+ry_1, -x_2-y_2+rx_2+ry_2)$
 $= (x_1+rx_1, -x_2+rx_2) + (y_1+ry_1, -y_2+ry_2)$
 $= L(x) + L(y) \quad \checkmark$

② $L(rx) = (rx_1+rx_1, -rx_2+rx_2)$
 $= (r(x_1+rx_1), r(-x_2+rx_2)) = r \cdot (x_1+rx_1, -x_2+rx_2)$
 $= r \cdot L(x)$

lineer dönüşümdür.

İpek'in 6a problemine verdiği yanıt

b) $L_1 \circ L_2 = L_3 \Rightarrow (rx_1, -rx_2)$

① $L(x+y) = (x_1+y_1, x_2+y_2) = (rx_1+ry_1, -rx_2-ry_2)$
 $= (rx_1, -rx_2) + (ry_1, -ry_2) = L(x) + L(y) \quad \checkmark$

② $L(rx) = (r(rx_1), -r(rx_2)) = r(rx_1, -rx_2) = r \cdot L(x) \quad \checkmark$

lineer dönüşümdür.

İpek'in 6b problemine verdiği yanıt

İpek lineer dönüşümleri toplama ve bileşke işlemlerine göre düzenlemiş ve lineer dönüşüm olduklarını göstermiştir. L_3 bileşke dönüşümünün çekirdek ve görüntü kümelerini bulmuş, örten olduğuna karar vermiş ve görüntü kümesinin boyutunu iki bulmuştur. Nesne aşamasının becerilerini göstermiştir.

c) $\text{Gek } L_3 = ?$

$L_3 = (rx_1, -rx_2)$ $(rx_1, -rx_2) = (0, 0)$
 $r(x_1, x_2) = (0, 0)$
 $x_1 = 0$
 $x_2 = 0$

$\text{Gek } L_3 = \{0\}$

İpek'in 6c problemine verdiği yanıt

Gör $L_3 = ?$ $L_3 = (rx_1, -rx_2)$

$L_3(x) = y$ olarak verilmiş bir x var mıdır?

$(rx_1, -rx_2) = (y_1, y_2)$

$rx_1 = y_1$ $x_1 = \frac{y_1}{r}$ $\forall x_1$ için bir y değeri vardır.

$-rx_2 = y_2$ $x_2 = \frac{y_2}{-r}$ L_3 lineer.

Gör $L_3 = (\frac{y_1}{r}, \frac{y_2}{-r})$

İpek'in 6d problemine verdiği yanıt

Gör L_3 'ün tabanı = ?

boy $\text{Gör } L_3 = 0 + \text{Gör } L_3 = 2$ $\text{Gör } L_3 = 2$

$\hookrightarrow 2$

İpek'in 6e problemine verdiği yanıt

Ancak görüntü kümesinin tabanını yazmamıştır.

$T = \{(1,2), (-1,1)\}$ tabana göre koordinatları, $(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_T$ olan görüntü vektörüdür.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_T$

$(1,5) = a_{11}(1,2) + a_{21}(-1,1)$

$(1,5) = a_{12}(1,2) + a_{22}(-1,1)$

$-2/a_{11} - a_{21} = 1$ $-2/a_{11} - a_{22} = 1$

$2a_{11} + a_{21} = 5$ $2a_{12} + a_{22} = 5$

$3a_{21} = 3$ $3a_{22} = 3$

$a_{21} = 1$ $a_{22} = 1$

$a_{11} = 2$ $a_{12} = 2$

Dön mat $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

İpek, 6f problemine verdiği yanıtta taban değişim şemasında sorun yaşamaktadır. Bir vektör farklı tabanlarda farklı bileşenlerle ifade edilebilir. Ancak bunda yaşanan güçlükten dolayı taban değişim matrisi ve lineer dönüşüm matrisi şemaları arasında ilişkilendirme kurulamamış ve soru doğru yanıtlanamamıştır.

Görüşmede soruyu okuyup çözümü anlatması istendiğinde çözümünün yanlış olduğunu belirterek aşağıdaki çözümü yapmıştır. Bu çözümde ise İpek, taban geçiş matrisini hesaplamış ve $L(x_s)$ bulduktan sonra dönüşüm matrisi yardımıyla x_s vektörünü bulmuştur. Ara aşamasındadır.

6-f

$$\begin{aligned} (1,1) &= a_{11}(1,1) + a_{12}(-1,1) \\ (1,0) &= a_{21}(1,1) + a_{22}(-1,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} - a_{12} &= 1 \\ a_{21} - a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} + 1 \\ a_{21} &= a_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 \\ a_{12} &= 0 \\ a_{21} &= 1 \\ a_{22} &= 1 \end{aligned}$$

$$T \text{ den } T^2 \text{ taban} \\ \text{gelişim matrisi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ L(u) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

İpek'in 6f problemine görüşmede verdiği yanıt

$$L_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ r & r \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ r & r - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= -r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 = r^2$$

$$\lambda = \pm r$$

$$\lambda = r \text{ için}$$

$$\begin{bmatrix} -r & 0 \\ r & -r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -r & 0 \\ r & -r \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - x_2 &= 0 & x_1 &= x_2 \\ -x_1 &= 0 & x_1 &= 0 = x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İpek'in 6g problemine verdiği yanıt

$$\lambda = r \text{ için}$$

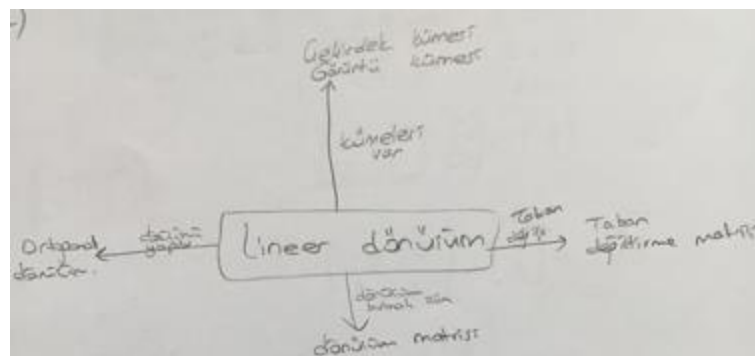
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 0$$

$$x_1 = r$$

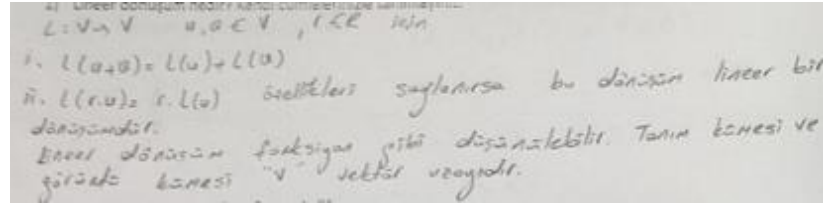
İpek'in 6g problemine verdiği yanıtın devamı

Lineer dönüşüm matrisini kullanarak dönüşümün öz değer ve öz vektörlerini hesaplamış ve ara aşamasında davranış göstermiştir.



İpek'in lineer dönüşüm kavram haritası

İpek'in lineer dönüşüm kavram haritası incelendiğinde, kavramın iç yani kendi içindeki kavramlarıyla ilişkilendirdiği görülmektedir.



Zeynep'in lineer dönüşüm tanımını incelersek, kavram tanımını matematiksel dille belirtmiş ve fonksiyon şeması ile ilişkilendirmiştir.

örnek olarak gösterelim
 $L(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow L(x) = (\cos \theta \cdot x_1 - \sin \theta \cdot x_2, \sin \theta \cdot x_1 + \cos \theta \cdot x_2)$ için;
 i. $u, v, g \in V$ için, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olsun.
 $L(x+y) = L(x_1+y_1, x_2+y_2) = (\cos \theta(x_1+y_1) - \sin \theta(x_2+y_2), \sin \theta(x_1+y_1) + \cos \theta(x_2+y_2))$
 $\Rightarrow (\cos \theta x_1 + \cos \theta y_1 - \sin \theta x_2 - \sin \theta y_2, \sin \theta x_1 + \sin \theta y_1 + \cos \theta x_2 + \cos \theta y_2)$
 $\Rightarrow (\cos \theta x_1 - \sin \theta x_2, \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2) + (\cos \theta y_1 - \sin \theta y_2, \sin \theta y_1 + \cos \theta y_2)$
 $\Rightarrow L(x) + L(y)$
 Sonuç olarak: $L(x+y) = L(x) + L(y)$ özellik sağlanır.
 ii. $\forall x \in V, r \in \mathbb{R}$ için; $x = (x_1, x_2)$
 $L(r.x) = L(r.x_1, r.x_2)$
 $L(r.x_1, r.x_2) = (r \cos \theta x_1 - r \sin \theta x_2, r \sin \theta x_1 + r \cos \theta x_2)$
 $= r(\cos \theta x_1 - \sin \theta x_2, \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2)$
 $= r.L(x)$ özellik sağlanır.
 O halde bu özellik de sağlandığından L bir lineer dönüşümdür.

Zeynep ikinci problemde verilen dönüşümü aksiyomlara göre incelemiş ve lineer dönüşüm olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

lineer dönüşüm olup olmadığını gösterin.

$(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{R}^3$
 $(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$
 $L(x) = (x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$
 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

i. $L(u+v) = L(u) + L(v)$
 ii. $L(r \cdot u) = r \cdot L(u)$

$u = (u_1, u_2)$
 $v = (v_1, v_2)$

i. $L(u+v) = L(u) + L(v)$
 $L(u+v) = L(u_1+u_2, u_2+v_2)$
 $= (u_1+u_2, u_2+v_2)$
 $= (u_1, u_2) + (u_2, v_2)$
 $= L(u) + L(v)$

ii. $L(r \cdot u) = L(r u_1, r u_2)$
 $= (r u_1, r u_2)$
 $= r(u_1, u_2)$
 $= r \cdot L(u)$

iki özellik sağlanır. lineer dönüşüm.

Zeynep üçüncü problemde iz dönüşümü anlamadığı için soruyu yanıtlamamış, görüşmede soruyu tekrar okuması istenmiştir. Geometrik olarak çizimi dikkate alındığında öğrencinin ilk olarak bu soruyu doğru çizdiği ancak cebirsel ifadeye geçemediği düşünülmüştür. Görüşmede tekrar çözüm için düşünen öğrenci, tanım ve değer uzaylarını dikkate alarak iz dönüşüm dönüşümünü bularak lineer dönüşüm olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

4) Lineer dönüşümün tersinin bulunması için gerekli koşullar nedir?

V bir vektör uzay, $x \in V$ için $L(x) = A \cdot x$ bu işlem sonucunda bir vektör bulunur. Yapılan işlem şu şekilde de ifade edilir.

$[y] = A \cdot [x] \rightarrow [y] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dir. Bu işlemi bakılarak x vektörü dönüşüm ile y ye dönüştürür. Ancak y vektöründen x ic geri dönüş mümkün değildir. Çünkü bu işlemi alması için matrislerde bölme işlemi olması gerekir. Ancak matrislerin bölme işlemi yoktur. Yani çarpma işleminin tersi yoktur. O yüzden lineer dönüşümün tersi bulunamaz.

Zeynep dördüncü problemdeki çözümünde matrislerle lineer dönüşümü ifade etmiş ve y vektöründen x vektörüne geri dönüş için matrislerde bölme işleminin olmadığını ifade etmiştir. Burada x vektörünü yalnız bırakabilmek için A matrisinin tersiyle çarpılabileceğini gözden kaçırmıştır. Matris şemasıyla ilgili yaşanan güçlük bu soruyu doğru yanıtlamamasına sebep olmuştur. Zeynep ile gerçekleştirilen görüşmelerde;

A: A matrisine bölmek derken x in yanındaki A matrisinden mi bahsediyorsun?

Ö: Evet hani sadeleştirme yapıyoruz ya.

A: A matrisini yok etmek için bölme haricinde bir şey kullanabilir misin?

Ö: A matrisinin tersiyle çarpalım.

A: Ne demek istiyorsun? Gösterebilir misin.

Ö: Yazayım şuraya. Eşitliğin her iki tarafını soldan A'nın tersiyle çarpalım. O zaman x'in yanında bir birim matris oluşur. Mesela benim burada yazdığım x ve y'ler 1x2 tipinde dolayısıyla A matrisi de 2x2 tipinde olur ve A'nın tersi de 2x2 tipindedir. Şimdi eşitliğin sağ tarafında oluşan birim matris 2x2 tipindedir. Biz bu birim matrisle x matrisini matrislerde çarpma işlemine sokamayız. Çünkü; matrislerde çarpma işlemini yapabilmek için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısının aynı olması lazım.

A: Matris 2x2 tipinde ise.

Ö: Hımm. O zaman yapabiliriz. Eee tersi de vardır. Aaa ben orda yanlış yapmışım. Neyse öğrenmiş oldum.

A: Peki her lineer dönüşümün tersi var mıdır?

Ö: O olmayabilir işte.

A: Peki sen burada neyi kullanarak tersine ulaştın?

Ö: Dönüşüm matrisinin tersini kullanarak. Yani şöyle söyleyeyim eğer kullandığımız lineer dönüşüm matrisinin tersi yoksa lineer dönüşümün tersi yoktur.

şeklinde ifadeler bulunmaktadır. Bu ifadelere göre Zeynep nesne aşamasındadır.

$Z_1 = \{0, 1, 2\}$, $Z_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $L: Z_1^2 \rightarrow Z_2^2$, $L(v) = (x_1 - x_2, x_1) \pmod{5}$ Her bir lineer dönüşüm mü? Bakalım.
 i. $\forall x, y \in Z_1^2$, $r \in Z_2 = \{0, 1, 2\}$ için $L(x+y) \stackrel{?}{=} L(x) + L(y)$
 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ için $L(x+y) = L(x_1+y_1, x_2+y_2) \pmod{5} = (x_1+y_1 - x_2-y_2, x_1+y_1) \pmod{5} = (x_1-x_2, x_1) \pmod{5} + (y_1-y_2, y_1) \pmod{5} = L(x) + L(y)$
 ii. $\forall x \in Z_1^2$, $r \in Z_2$ için $L(rx) \stackrel{?}{=} r.L(x)$
 $L(rx) = L(rx_1, rx_2) = (rx_1 - rx_2, rx_1) \pmod{5} = r(x_1 - x_2, x_1) \pmod{5} = r.L(x)$
 O halde her özellikte sağlandığından tanımlanan işlen bir lineer dönüşümdür.

Beşinci problemde sonlu vektör uzayları arasında dönüşüm yazan Zeynep, dönüşümün lineer olduğunu göstermiştir. Nesne aşamasındadır.

$(x_1 - x_2, x_1) = (0, 0)$
 $x_1 - x_2 = 0$
 $x_1 = 0$
 $x_2 = 0$
 Çekirdek $L = \{0\}$ ✓ birebir $\rightarrow$ tersi var

Zeynep'in beşinci probleme görüşmede verdiği yanıt

Görüşmede verdiği bu yanıtla Zeynep sonlu vektör uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümün çekirdek kümesini ve birebir olduğunu, ayrıca lineer dönüşümün tersinin olduğunu ifade etmiştir.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L_1 + L_2 = (x_1, -x_2) + (rx_1, rx_2) = (rx_1 + x_1, rx_2 - x_2) = ((r+1)x_1, (r-1)x_2) \\
 L_2 &= ((r+1)x_1, (r-1)x_2) \text{ bir lineer dönüşüm müdür?} \\
 1. \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L(x+y) &\stackrel{?}{=} L(x) + L(y) \\
 L(x+y) &= ((r+1)(x_1+y_1), (r-1)(x_2+y_2)) = ((r+1)x_1 + (r+1)y_1, (r-1)x_2 + (r-1)y_2) \\
 &\Rightarrow ((r+1)x_1, (r-1)x_2) + ((r+1)y_1, (r-1)y_2) = L(x) + L(y) \quad \checkmark \\
 2. \forall x, y \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^+; L(k \cdot x) &\stackrel{?}{=} k \cdot L(x) \\
 L(k \cdot x) &= L(kx_1, kx_2) = ((r+1)kx_1, (r-1)kx_2) \\
 &= k((r+1)x_1, (r-1)x_2) \\
 &= k \cdot L(x) \quad \checkmark \\
 \text{Bu özellikler sağlandığından bu işlem lineer dönüşümdür.}
 \end{aligned}$$

Zeynep'in 6a problemine verdiği yanıt

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L_2 = L_1(L_2) = L_1(rx_1, rx_2) = (rx_1, -rx_2) = L_2 \\
 L_2 &= (rx_1, -rx_2) \quad (r > 1) \\
 L_2 \text{ bir lineer dönüşüm müdür?} \\
 1. \forall x, y \in \mathbb{R}^2; L(x+y) &\stackrel{?}{=} L(x) + L(y) \\
 L(x+y) &= L(x_1+y_1, x_2+y_2) = (r(x_1+y_1), -r(x_2+y_2)) \\
 &\Rightarrow (rx_1+ry_1, -rx_2-ry_2) = (rx_1, -rx_2) + (ry_1, -ry_2) \\
 &= L(x) + L(y) \quad \checkmark \\
 2. \forall x, y \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^+; L(k \cdot x) &\stackrel{?}{=} k \cdot L(x) \\
 L(k \cdot x) &= L(kx_1, kx_2) = (krx_1, -krx_2) = k(rx_1, -rx_2) \\
 &= k \cdot L(x) \quad \checkmark \\
 \text{Bu özellikler sağlanır. Bu işlem lineer dönüşümdür.}
 \end{aligned}$$

Zeynep'in 6b problemine verdiği yanıt

$$\begin{aligned}
 L_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad L(x) &= (rx_1, -rx_2) \text{ ifadenin altında} \\
 \text{değerler } r > 1 \text{ (sıfırdan büyük) } &\text{gösterir.} \\
 \mathbb{R}^2 \text{ vektör uzayından oluşan } &\text{lineer dönüşüm.} \\
 (0,0) = (rx_1, -rx_2) &\Rightarrow rx_1 = 0 \quad x_1 = 0 \quad (r > 1) \\
 -rx_2 = 0 \quad x_2 = 0 \\
 \text{Çek } L = \{(0,0)\} = \{0\}
 \end{aligned}$$

Zeynep'in 6c problemine verdiği yanıt

$$\begin{aligned}
 d) L_2 \text{ ün görüntü köşmanlı bulun.} \\
 L_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad L(x) &= (rx_1, -rx_2) \text{ ifadenin } \exists y \in \mathbb{R}^2 \\
 \text{var mı?} \\
 L(x) = (rx_1, -rx_2) = (y_1, y_2) &\text{ için } y_1 = rx_1 \quad x_1 = \frac{y_1}{r} \\
 y_2 = -rx_2 \quad x_2 &= \frac{-y_2}{-r} \\
 \text{Sevdiği ifade edilebilir. O halde } \forall x \in \mathbb{R}^2 &\text{ için bir } \\
 y \in \mathbb{R}^2 \text{ vardır. O yüzden görüntü } &\text{ köşmanlı. } \underline{\underline{\text{Gör} L = \mathbb{R}^2}}
 \end{aligned}$$

Zeynep'in 6d problemine verdiği yanıt

e) Gözle, bir tabanını yazın.
 $Gözl_3 = \mathbb{R}^2$ olduğundan $\mathbb{R}^2$ 'nin herhangi bir tabanını yazabiliriz.
 $A = \{(1,0), (0,1)\}$ $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır. A Gözle, $\mathbb{R}^2$ bir tabanıdır.

Zeynep'in 6e problemine verdiği yanıt

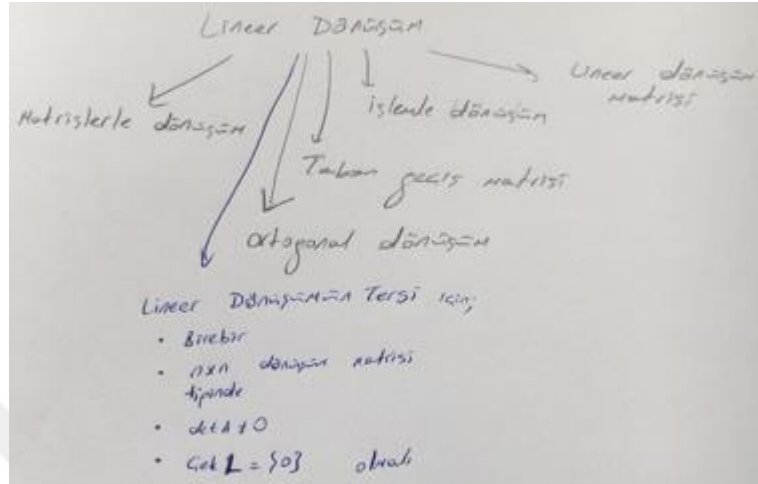
Zeynep, altıncı problemde lineer dönüşümlerin toplanması, bileşkesinin alınması, çekirdek ve görüntü kümesinin bulunması gibi nesne ve iç aşaması becerileri göstermiştir. Görüntü kümesinin tabanını bulmuş ve ara aşaması becerilerini de göstermiştir.

$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $L(x) = (1x_1, -1x_2)$ $10A$
 $r=2$ $10A$ $L(x) = (2x_1, -2x_2)$
 $L(1,2) = (2, -4) = a_{11}(1,2) + a_{21}(-1,1)$
 $L(-1,1) = (-2, -2) = a_{12}(1,2) + a_{22}(-1,1)$
 $a_{11} - a_{21} = 2$ $-\frac{1}{2} - a_{21} = 2$ $-\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} = a_{21}$
 $2a_{11} + a_{21} = -4$ $2a_{11} - \frac{5}{2} = -4$ $4a_{11} - 5 = -8$ $4a_{11} = -3$ $a_{11} = -\frac{3}{4}$
 $a_{12} - a_{22} = -2$ $-\frac{6}{2} - a_{22} = -2$ $-\frac{6}{2} + 2 = -1 = a_{22}$
 $2a_{12} + a_{22} = -2$ $2a_{12} - 1 = -2$ $2a_{12} = -1$ $a_{12} = -\frac{1}{2}$
 $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$ T tabanına göre lineer dönüşüm matrisidir.
 $A \cdot \vec{z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow T$ tabanına göre $\vec{z} = (z_1, z_2)$ 'nin lineer dönüşümü nedir? denektir.
 $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $3/ -\frac{3}{4} \cdot z_1 - \frac{1}{2} \cdot z_2 = \frac{1}{5}$
 $3/ -\frac{8}{2} \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 = \frac{1}{5}$
 $-4/ -2z_1 - 4z_2 = 3$
 $-8z_1 + 2z_2 = 15$
 $18z_2 = 3$ $z_2 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$
 $-8z_1 + 2 \cdot \frac{1}{6} = 15$ $15 - \frac{1}{3} = \frac{44}{3}$
 $-8z_1 = \frac{44}{3} - \frac{1}{3} = \frac{43}{3}$ $z_1 = -\frac{43}{24}$
 $\vec{z} = \begin{bmatrix} -\frac{43}{24} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ✓

$T \rightarrow S$ vektör dönüşümü için S den T 'ye taban geçiş matrisini bulalım.
 $(1,2) = a_{11}(1,2) + a_{21}(-1,1)$ S den T 'ye taban geçiş matrisi
 $(-1,1) = a_{12}(1,2) + a_{22}(-1,1)$ $8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ olur.
 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{43}{24} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{31}{6} \\ \frac{9}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{31}{6} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ S vektör istenen x_3 vektörüdür.
 $-\frac{31}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{30}{6}$
 $\frac{11}{6} - \frac{2}{6} = \frac{9}{6}$

Zeynep'in 6f problemine verdiği yanıt

Zeynep 6f probleminde taban değişimi şeması ve lineer dönüşüm şeması arasındaki ilişkileri kurarak soruyu doğru yanıtlamıştır. Ara aşamasındadır.



Zeynep siyah kalemle verdiği yanıtta, ilk cevaplarken lineer dönüşümün kendi alt kavramlarıyla kavram haritasını oluşturmuştur. Görüşmede lineer dönüşümün tersi için kavram haritasına eklemeler yapmıştır. Burada matris şeması ile ilgili kavramları da eklemiştir.

4.2.4.Öz Değer-Öz Vektör Kavramlarını Öğrenme Düzeyine İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Öz değer-Öz vektör kavramının üç boyutlu hologram öğretimi sonrasında öğrencilere sorulan öz değer öz vektör problemleri Ek 14' te yer almaktadır.

Öz değer-öz vektör problemlerine verilen yanıtlar öz değer-öz vektör genetik çözümlemesine bağlı olarak hazırlanan değerlendirme rubriğine göre analiz edilmiştir (Ek 15).

Gerçekleştirilen betimsel analiz sonucunda öğrencilerin öz değer ve öz vektör problemlerinin APOS Teorisine göre gösterdiği beceriler Tablo 15'deki gibidir.

Tablo 15

Öz değer-öz vektör problemlerinin değerlendirilmesi

Öz değer-öz vektör	Aslı	Beyza	Elif	Hasan	İpek	Manas	Zeynep
1	Nesne	Nesne	Eylem	Eylem	Nesne	Nesne	Nesne
2	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Eylem	Eylem	Nesne
3	Nesne	Nesne	Nesne	Süreç	Nesne	Nesne	Nesne
4	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem	Eylem
5	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Süreç	Nesne
6	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Eylem	Süreç	Eylem
7-8	Nesne	Nesne	Nesne	Nesne	Süreç	Süreç	Nesne

Tablo 15 incelendiğinde öğrencilerin hepsinin nesne anlayışına ulaştığı görülmektedir. Öğrenciler dördüncü soruda tüm A matrisleri için ifadelerin sağladığını

gösteremedikleri için eylem aşamasındadırlar. Bu süreçte öğrencilerde gözlemlenen hataların kaynaklandığı durumlar Tablo 16'daki gibidir.

Tablo 16

Öz değer-öz vektör problemlerindeki hataların değerlendirilmesi

Öz değer-öz vektör	Elif	İpek
1	Vektör şeması	
2		Vektör şeması ve dönüşüm matrisi süreci ile koordinasyon

Tablo 16 incelendiğinde öğrencilerin hatalarının sebeplerinin öz değer öz vektör süreçleri ile vektör sürecini ve dönüşüm matrisi süreçlerini koordine etme aşamasında yaşanan sorunlar olduğu görülmektedir. Öz değer ve öz vektör problemlerine öğrencilerin verdiği yanıtlar aşağıdaki gibidir.

A: Öz vektörlerde şu şekilde oluşanlar geometrik olarak ne belirtir?

Ö: Vektör.

A: Bu bir vektördür.

Bunu t ile çarptığın zaman?

Ö: ıııııı... Eğri..

Hayır. Doğru belirtmesi

gerekiyor.

A: Hıhı. Doğru belirtiyor. Yani diyelim ki şöyle bir doğru var. Hangi uzayda bu?

Ö: R^2 de.

A: R^2 de. Diyelim ki şöyle bir doğru olsun atıyorum tamamen. Bu şu vektörü temsilen. Şimdi bunla bundan farklı mı bu vektör? T ile çarparsan.

Ö: Böyle olacak. Bir doğru olacak.

A: Peki nerede olacak bu vektör?

Ö: Yine R^2 olacak.

A: Hıhı. Peki bu vektörle konumu nasıl olacak?

Ö: Yine aynı olacak. Aynı doğrultuda olacak.

A: Hıhı. Aynı doğrultuda. Şimdi bakıyorum bunla bunu aynı küme içerisinde yazmışsın. Doğru mu?

Ö: Hıhı.

A: Bu ikisini aynı küme içerisinde yazınca bunla bunu birleştirmişsin. Bu alt vektör uzayı mıdır? Uzay belirtir mi?

Ö: Alt vektör uzayı mıdır?

A: Alt vektör uzayı koşulu neydi?

Ö: Alt vektör uzayı olması için x+y elemanı olacak.

A: Mesela iki vektör alıp toplar mısın? İkisinden de.

Ö: Nereden?

A: Şuradan. Şimdi (2,1) bunların herhangi birinin üzerinde mi?

Ö: Değil. 2 ile çarpsak olmaz. Değil.

A: Toplama işlemine göre kapalı mı?

Ö: Toplama işlemine göre kapalı değil.

A: Kapalı değil. O zaman bu şekilde yazdığımız zaman uzay oluyor mu?

Ö: Olmuyor.

A: Peki ben böyle bir şey söylediğimde karşılaştığın şeyle ilgili ne düşünüyorsun?

Ö: Yanlış yapmışım bir kere onu düşünüyorum.

A: Bu yanlışlık nerede?

Ö: Farklı doğrultudaki vektörleri aynı küme içerisinde yazmışım. Alt vektör uzayı koşulunu göz önünde bulundurmamışım.

A: Peki biz onu düzeltmek için ne yapabiliriz? Sorumuz da şuydu öz vektörlere karşılık gelen öz uzayları bulun.

Ö: ayrı ayrı alırsız.

A: Ayrı ayrı alırsız.

Ö: İki küme şeklinde alırsak iki ayrı uzay olur.

A: Lineer bağımsızlık ne demektir?

Ö: Skaler çarpım. Skalerin vektörle çarpımı. Skalerin vektörle çarpımına bakıyorduk.

A: Hıhı. (0,0) a eşit olması için a'nın ne olması lazım?

Ö: Sıfır olması lazım.

A: Hıhı. Şimdi burada a sıfır ise bu vektör için ne diyoruz?

Ö: lineer bağımsız bir vektör diyoruz.

A: Hıhı. Peki bağımsız olan şey ne?

Ö: e de bağımsız olan x vektörü.

A: Hıhı. X vektörü. E de geren eleman ya da geren küme hangisi? Uzayı geren hangisi? Şeyi söyle şey yapalım. Germek ne demektir?

Ö: elimizde birkaç tane vektör var bunları ayrı ayrı skalerlerle çarpıp topladığımız zaman bize o uzaydaki bütün elemanları vermesi gerekiyor. O zaman o kümenin germesinden bahsedebiliriz.

A: Peki şu doğruyu oluşturan ne olabilir?

Ö: Noktalar.

A: Noktalar. Hepsi mi? Bir tane ile hepsini oluşturabilir misin?

Ö: oluşturulabilir.

A: Mesela bana şurada yaptığın işlemi anlatır mısın?

Ö: bir noktadır. O doğru noktanın katları şeklinde gidiyordur. O zaman o doğruyu oluşturabiliriz.

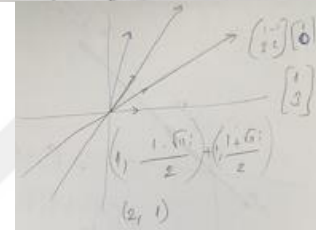
A: Hıhı. Şimdi bu oluşturduğun şey hangisi oldu? Doğruyu oluşturduğun eleman vektör?

Ö: Bire bir eksi kök iki bölü iki vektörü oldu.

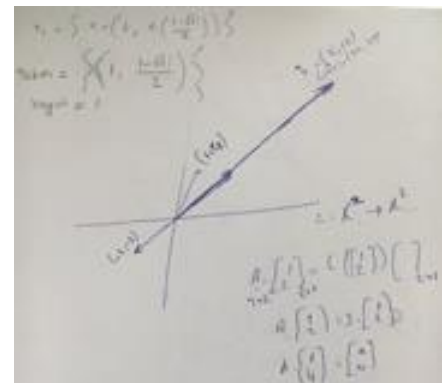
$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2-6t \end{pmatrix}$ $y = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2+6t \end{pmatrix}$ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
 $V = \{x, y\} \sim \mathbb{R}^2$
 $\mathbb{R}^2$ vektörlerine karşılık gelen öz vektör.

$T_1 = \left\{ x = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-6t \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
 $T_2 = \left\{ y = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+6t \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$a \cdot \vec{x} = (0,0) \quad a \in \mathbb{R}$
 T_1 için $a \left(1, \frac{1-6t}{2} \right) = (0,0) \Rightarrow a = 0$



$a \left(1, \frac{1-6t}{2} \right) = (x_1, x_2)$
 $a = x_1$
 $a \left(\frac{1-6t}{2} \right) = x_2$
 $a = \frac{x_2 \cdot 2}{1-6t}$
 $\left(a, a \left(\frac{1-6t}{2} \right) \right)$



A: Hıhı. Şimdi bu vektör burada da aynısını aldın. Lineer bağımsızlık ve germeyi sağlıyor mu?

Ö: evet.

A: Şimdi f şıkkına geri dönebiliriz. Şimdi bu T_1 in tabanını istiyoruz senden.

Ö: Tabanı bire bir eksi kök iki bölü iki

A: Evet. Tabanı vektör kümesi içinde gösterebilir misin? Peki tabanı buysa boyutu nedir T_1 in?

Ö: Bir. Çünkü tabanında bir tane vektörü var.

Aslı birinci problemde verilen matrisin öz değer ve öz vektörlerini hesaplamış, dönüşüm matrisi-öz değer ve öz vektör arasındaki ilişkileri açıklayabilmiş, öz uzay ve öz uzayın lineer bağımsız vektör kümesini, geren kümeyi, tabanını ve boyutunu açıklayabilmiştir. Geometrik açıklamalarında Aslı, öz vektörlerin görüntüsü kendisinin öz değer katı olduğunu çizmiş ve nesne aşamasında olduğunu göstermiştir. Ayrıca vektör uzayının germe, lineer bağımsızlık, taban, boyut kavramlarıyla ilişkilendirme ile ara aşamasında beceriler göstermiştir.

A: A matrisi ile çarpmanın sonucu neyi gösterir?

Ö: o noktanın dönüşümdeki değerini verir.

A: Değeri derken?

Ö: Görüntüsünü verir.

A: Görüntüsünü verir.

Peki 3 çarpı (1,2)

yaptığın zaman?

Ö: o da verir.

A: Hayır A matrisini düşünmezsen sana neyi verir?

Ö: yine görüntüsü değil mi?

A: Dönüşümü vermeden düşün. Ne demektir üç çarpı bir iki?

Ö: Bir iki matrisini üç ile çarpıyorum.

A: Üç ile çarptığın zaman nasıl değiştirir vektörü?

Ö: Üç kat artırır.

A: Peki. Şimdi (1,2) görüntüsünü veren soldaki ifadeyle sağdaki ifadenin eşit olması ne anlatır sana?

Böyle bir eşitlik varsa senin düşüncen ne olur? Çok basit bir şey sordum. Kafan karışmasın.

Ö: Üçün katı şeklinde artıyorsa o zaman...

A: Bu ifadeyi görünce ne anlamalıyım?

Ö: Dönüşüm matrisi ile o ifadeni skalerle çarpımı eşittir diyebilir miyiz?

A: Evet. Görüntüyle dönüşüm eşit. Hani çok zor bir şey beklemiyorum. Eşitliğin sağındaki işlemin ne olduğunu söyler misin?

Ö: sağdaki işlem skalerle çarpım soldaki işlem dönüşüm matrisi ile çarpımı.

A: Üçün bize anlatmaya çalıştığı şey ne bu ifadede?

Ö: Skalerle çarpım.

A: Hıhı. Peki bu vektörün görüntüsü kendisinin üç katıysa bu üçün anlamı ne demek? Özel bir durumu var mı?

Ö: Bence yoktur.

a) Eşitliğin sağındaki işlem nedir? $x = (1, 2)$

$$A \cdot x = 3 \cdot x$$

$$x(A - 3) = 0, x \neq 0$$

$$A = 3 \Rightarrow A \cdot I_n = 3 I_n$$

A dönüşüm matrisi ise
3, dönüşüm matrisinin özdeğeridir.

A: Bir de şöyle soralım. Bu eşitliği sağlayan görüntüsü kendisinin üç katına eşit olan $(1,2)$ den başka vektör var mıdır?

Ö: Olabilir.

A: Mesela ne olabilir?

Ö: $(2,4)$ $(1,3)$..

A: $(1,3)$ ün olacağını nasıl anladın?

Ö: Aslında anlamadım. Rastgele verdim.

A: Şimdi $(1,3)$ dedin ya bu eşitliği sağlar mı* sağlayıp sağlamayacağını ben nasıl anlarım?

Ö: Deneme yanılma yoluyla.

A: Denemeden ön görebilir misin?

Ö: ben anlayamam.

A: şimdi şey istiyorum senden. Bu verilen şeyi geometrik olarak nasıl yorumlamışsın. Burada yazmışsın zaten. Burada üçe ne cevap vermişsin?

Ö: Öz değeri anlatıyor demişim.

A: Peki buna eklemek istediğin bir şey var mı?

Ö: Hayır.

A: Peki ben şeyi sormak istiyorum. Aynı şey üzerinde gösterseydik. Mesela grafik şu vektör $(1,2)$ bu görüntüsü de $(3,6)$ şu olsun. Şimdi bu vektörün görüntüsü yine aynı doğrultuda bu. Bunlar aynı doğrultu da ya bunlar üzerinden doğru geçer mi?

Ö: Geçer.

A: Peki bu doğru üzerinden şu noktayı alsam $(-1,-2)$ olsun. Bu vektörün görüntüsü sence ne olabilir?

Ö: $(-3,-6)$ olur.

A: Peki $(5,10)$ vektörü?

Ö: $(15,30)$ olur.

A: neden peki?

Ö: 3 ile çarpıldığını biliyorum. Doğrultusu

değişmeyen vektörlerin öz değeri.

A: Anladım peki. Şunu tekrar sormak istiyorum. Eşitliğin sağındaki ve solundaki nasıl eşit olur demişiz ya cebirsel olarak eşit olmasından çok öz değer öz vektör açısından bakarsak bu ifade birbirine nasıl eşit olur? Bunu şöyle sorayım. Bu iki ifade birbirine nasıl eşit olur?

Ö: A nın bir matris olduğunu biliyorum için bir skaler olduğunu biliyorum. Eşitliği bozmayacak şekilde A yı birim matris haline getiririm. Biraz önce yazdığımı söyleyeyim mantıklıydı çünkü.

A: A nın temsil ettiği bir dönüşüm var mıdır?

Ö: Vardır.

A: Bu lineer dönüşümü göz önünde bulundurarak $(1,4)$ alırsam. Bunun görüntüsünü şuradan bulabilir miyim?

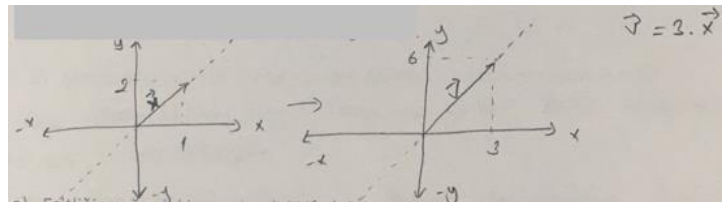
Ö: Buradan bulamayız.

A: Peki buradan ifadelerden birini kullanarak görüntüsünü bulabilir misin?

Ö: 3 ile çarparsak görüntüsü bulunur.

"öz değeri" anlatıyor.

2 lineer dönüşümünün matris ile gösterimidir.



$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisi vektör belirtir. $x \neq 0$ olacak şekilde eşitliğin her iki tarafını sadeleştiririz. Kalan ifadelerden A matris, 3 reel bir sayı olduğu için 3 sayısını birim matrisle çarparak onu matrise çeviririz. Bu şekilde eşitlik sağlanır.

A: Neden üçle çarptın?

Ö: eşitliklerden bir tarafı almam gerekiyordu üç ile çarpma özelliğini aldım.

A: Peki. Şimdi şöyle soralım A çarpı bir iki ile bulduğum neydi?

Ö: görüntüsü.

A: peki $l(1,2)$ yi buluyoruz. Hangi uzayın elemanı bu?

Ö: R^2 nin.

A: Peki tanım kümesi nedir bu dönüşümün? Nereden seçmiş vektörü?

Ö: R^2 den.

A: tabi görüntü için ne geleceğini bulman lazım. A nın ne olduğunu bilmemiz lazım ama şuraya baktığın zaman görüntü kümesi ne olduğunu bulabiliyor musun?

Ö: evet.

A: Ne olacak?

Ö: yine r kare.

A: yine R^2 den R^2 ye olacak dönüşüm için dönüşüm matrisinin boyu nedir?

Ö: 2 ye 2

A: Hıhı. Şimdi şunu düşünelim. Mesela A çarpı bir iki eşittir üç çarpı bir iki olduğunu biliyoruz. Şimdi merak ettiğim şu buraya bir dört yazdığında görüntü ne gelecek?

Ö: yine r kareden gelecek

A: ama bu doğrunun üzerinde mi gelecek başka mı gelecek?

Ö: Başka gelecek.

A: başka derken?

Ö: Yani doğrultusu değişecek.

A: Mesela bu doğrultu da mı başka bir doğrultuda mı?

Ö: Bir dördün doğrultusunda olur.

A: Peki her vektörün görüntüsü kendi doğrultusunda mı?

Ö: Söylediğime göre evet.

A: Peki söylediğin doğru mu? Önceki soruya dönelim. Dönüşüm matrisi için öz değeri şu karşılık gelen öz vektörü bulmuştun. Bunu çizmeni istesem şuradaki durumu. Şimdi bu durum için öz değer öz vektörler bunlar ya bir e sıfırın görüntüsünü bulur musun?

Ö: (1,3)

A: Aynı doğrultuda mı?

Ö: Hayır.

A: O zaman bir sıfır şuradaki

vektör görüntüsü bir e üç şuradan geldi. Aynı doğrultu üzerinde mi?

Ö: Değil.

A: o zaman şimdi böyle vektörler yazdığım zaman kendi doğrultu üzerinde olma olasılığı ne? Yani olasılık olarak değil de olmama durumu ne? Mümkün mü?

Ö: mümkün.

A: Peki böyle görüntüsü kendi üzerinde olmayan vektörler varken görüntüsü kendi üzerinde olan vektörlerin özel durumu ne? Özel bir şey mi diyoruz onlara?

Ö: Onlara özel bir şey diyoruz. Öz vektör diyoruz. Doğrultuları değişmediği için. Matris ile de çarpsak skalerle de çarpsak aynı doğrultuda

3 sayısı A matrisinin özdeğeri
x, L lineer dönüşümünde bir vektör
özdeğer ve x vektörünün çarpımı bize L lineer dönüşümünün
özümlerini verir.

x, L lineer dönüşümünde bir vektör
A matrisi
A.x, L lineer dönüşümünün matrisle gösterimi

A: Şimdi şeyi anlamadım kendisi ile çarpsak skalerle de çarpsak doğrultusu değişmiyor dedin ya

Ö: Dönüşüm matrisi ile.

A: Hıhı. Bunu biraz açıklar mısın? Neden öyle dedin?

Ö: Ya zaten skalerle çarpım o vektörü sürekli katlandıracak. Dönüşüm matrisi de o durumlar için özel bir matris bence o matrisle çarptığımızda sürekli doğrultusu aynı gelecek.

İkinci problemdeki yanıtı incelendiğinde, $L(x)=A.x=\lambda.x$ eşitliğindeki her bir ifadenin anlamının farkında olduğu, $(A - \lambda I_n) = 0$ da birim matrisin neden kullanıldığını da açıklamasına ekleyerek nesne aşamasında beceri göstermiştir.

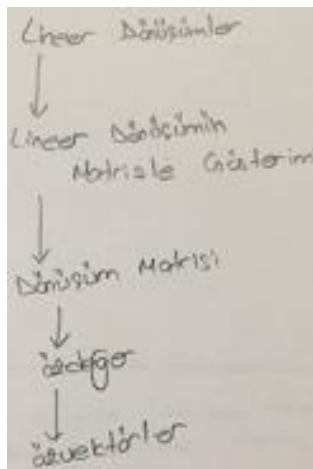
doğrultuları aynı, boyları farklı olan vektörlerin konumlarını alıyor.

Yine doğrultuları aynı, boy ve yönleri farklı olabilen durumdaki vektörlerdir.
Bu durum mümkündür. 2. lineer dönüşümün matris ile gösterimi olduğu durumda dönüşüm matrisinin öz değerleri olabilir ki bu değerleri bazı vektörlerin doğrultusunu değiştirebilir.

Aslı üçüncü probleme verdiği yanıtta b şıkkı için durumun mümkün olduğunu belirtmiştir. Ancak burada 2×2 tipinde dönüşüm matrisinden elde edilen karakteristik polinomun derecesi ikidir ve en fazla iki kök gelir. Bu sebeple üç farklı öz değer ve buna bağlı üç farklı öz vektör R^2 de bulunamaz. Aslı ile gerçekleştirilen görüşmede;

Ö: Öz değerleri bulurken A matrisinin determinantından yararlanıyoruz. Öz değerleri lambda diye belirliyoruz determinantta yerine yazarak buluyoruz. Matris determinant bulma özelliklerinden yararlanırsak en yüksek lambdanın derecesi iki gelir. O zaman iki farklı değeri olur lambdanın en yüksek. Üç farklı kökünün olması için derecesinin üç olması gerekir. Determinantı polinom çıkar diye dedim. Determinantı polinom çıkabilir. En yüksek derecesi iki geleceğinden en fazla iki farklı değeri olabilir.

ifadesiyle Aslı soruya doğru yanıt vermiştir. Bu sebeple nesne aşamasındadır.



Aslı altıncı probleme verdiği yanıtta özdeğer ve öz vektörlerin kavram haritasında lineer dönüşümlerin içinde öz değerler ve öz vektörleri göstermesi, bu kavramların lineer dönüşüm ile ilişkisini kurabildiğini göstermektedir.

Lineer dönüşümler vektörleri değişik konumlara getirir.
 Özvektörler, lineer dönüşümlerde ekle edilen deformeasyonu
 değişmeyen vektörlerdir.
 Bu gibi bir ilişkide söz edilebilir.

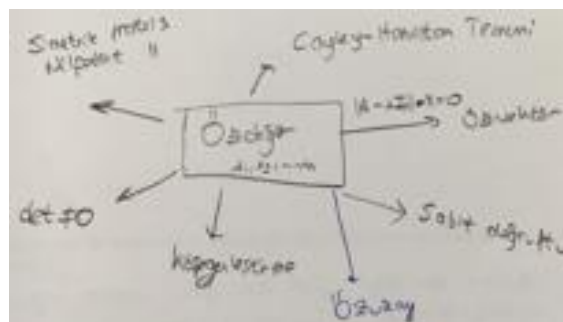
Aslı yedinci problemde lineer dönüşüm ve özdeğer-özvektörler arasında zihninde yapılandığı ilişkiyi açıklaması öz değer ve öz vektörleri genel anlamda anladığını ve nesne aşamasında olduğunu göstermektedir.

Beyza'nın birinci probleme verdiği yanıt incelendiğinde, öz değer ve öz vektörleri hesaplamış, öz uzayları bulmuş, germe, lineer bağımsızlık, taban boyut kavramlarıyla ilişkilendirme yapmıştır. Öğrenci nesne aşamasındadır.

u ile Au olarak gösterilen vektörlerin doğrultusu ve yönü aynıdır.
 λ gibi bir özdeğere sahiptir. Bu u ve Au ilişkisinde geçerlidir.

u ve Au ile u ve Au vekt. Sebittir. λ gibi bir özdeğere sahiptir. u ve Au ile w 'de λ gibi bir özdeğere sahiptir. u ve w vekt. değişebilir. Ancak doğrultu aynı kalmalıdır.

Beyza üçüncü problemin b sorusuna yanıtında R^2 uzayında üç öz değer olabileceğini söylediği için karakteristik denklem ve öz değer ilişkilendirmesinde güçlük yaşamaktadır. Ancak görüşmede R^2 uzayında üç öz değer olması mümkün mü diye sorulduğunda "Mümkün değil çünkü 2×2 tipinde olduğu için 2 tane vardır." yanıtını verdiği için öğrencinin nesne aşamasında olduğu anlaşılmaktadır.



Beyza altıncı problemde öz değer ve öz vektörlerin kendi içindeki kavramları kullanarak bir kavram haritası çizmiştir. Ayrıca bazı özel matrislerin öz değerlerini de kavram haritasına eklemiştir ve nesne aşamasındadır.

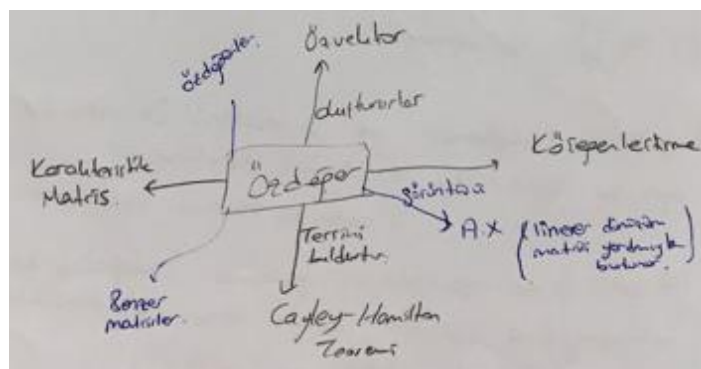
$$\begin{aligned}
 & (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
 & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \\
 & 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \\
 & \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \\
 & \Delta = 9 + 8 = 17 > 0 \quad \sqrt{17} \approx 4.1231 \\
 & \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\
 & \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\
 & \text{3. adım: Öz vektörler} \\
 & \begin{pmatrix} 1 - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} & 2 \\ 2 & 2 - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & -x_1 + x_2 \sqrt{17} = 0 \quad x_2 = x_1 \sqrt{17} \\
 & 2x_1 + x_2 \sqrt{17} = 0 \quad x_2 = -2x_1 \sqrt{17} \\
 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ öz vektör} \\
 & \begin{pmatrix} 1 - \frac{3 - \sqrt{17}}{2} & 2 \\ 2 & 2 - \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & -x_1 + x_2 \sqrt{17} = 0 \quad x_2 = x_1 \sqrt{17} \\
 & 2x_1 + x_2 \sqrt{17} = 0 \quad x_2 = -2x_1 \sqrt{17} \\
 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ öz vektör}
 \end{aligned}$$

Elif birinci problemde öz değer ve öz vektörleri bulmuştur ancak vektör uzayı kavramları ile ilişkilendirme gerçekleştirmemiştir. Eylem aşamasındadır.

İpek, birinci problemde vektör uzayı kavramlarıyla ilişkilendirme yapabilmiş, öz uzayın lineer bağımsız kümesini, geren kümeyi, tabanını ve boyutunu hesaplayabilmiştir. Öz değer ve öz vektörleri hesaplarırken eylem becerisi gösteren İpek, nesne aşamasındaki becerileri de göstermiştir.

$Ax = \lambda x$ diziye ve bulduğumuz λ değerlerini A değerlerine ekleteceğiz λ bulacağız. ve bulduğumuz λ değerleri aynı doğrultuda olan özdeğer vektörleri bulacağız. λ değerleri aynı doğrultuda da vektörler bulunur. Yani aynı doğrultuda olan bir diziye ait vektörler aynı şeye olan vektördür.

Beşinci soruda İpek öz değer ve öz vektörleri eşitlikte anlamlandırarak açıklayabilmektedir. Bu sebeple nesne aşamasındadır.



İpek kavram haritasında öz değeri öz vektör, karakteristik matris, Cayley-Hamilton teoremi ve köşegenleştirme ile, sonra benzer matrisler ve $A.x$ ile ilişkilendirmiştir. Burada öz değerin alt kavramlarıyla ilişkilendirildiği ve vektör uzayı lineer dönüşüm gibi diğer kavramların yer almadığı görülmektedir.

Zeynep birinci problemde öz değer ve öz vektörleri hesaplamış, öz uzayları ve bunlara ait lineer bağımsız kümeyi, geren kümeyi, tabanı ve boyutlarını hesaplamıştır. Öğrenci burada nesne aşaması becerilerini göstermiştir.

Sağdaki işlen bir $\lambda=3$ sayısı ile $(1,2)$ vektörünün çarpılması işlemidir. Yani vektörü skalarla çarpmadır.

Sağdaki işlen ise A matrisi ile $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpılmasıdır. Yani matrislerde çarpma işlemidir.

A matrisi ile $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpılması sonucu oluşan bir vektör vardır. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 'nin $\lambda=3$ katı bu vektöre eşittir.

$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow (A - 3 \cdot I_2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ I_2 bir matristir. $(1,2)$ vektörünün 8 katlarıyla oluşturulacak olan uzaydan bahsederek. Ve bir doğru denklemdir.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklinde bir matris olsun.
 $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ c+2d \end{bmatrix}$ olur. Bu da $(a+2b, c+2d)$ vektörü denektir.
 $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ olur. Bu da $(3,6)$ vektörü denektir.
 $(a+2b, c+2d) = (3,6)$ eşitliği iki vektörün eşitliği denektir. Buradan bitereder birbirine eşitler.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (1,2)$ vektördür. Bu vektörün $\lambda=3$ katı yani bir vektöre dıstırur.

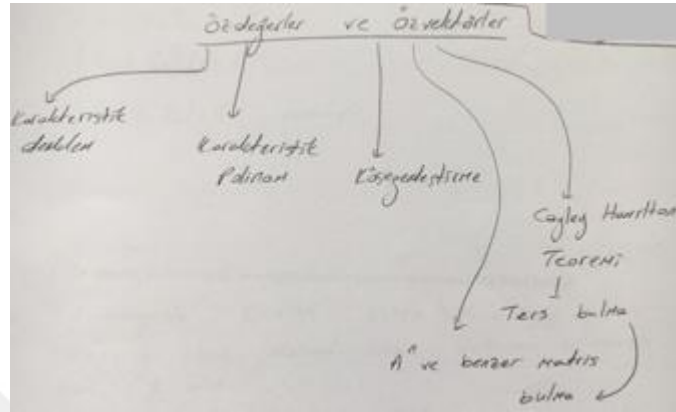
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve A arasındaki ilişki nedir?
 A matrisi bir dönüşüm matrisidir. A ile $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ çarpıldığında yani bir vektör oluşur.

Zeynep ikinci problem yanıtında $A.x = \lambda.x$ eşitliğinde, her bir ifadenin lineer cebir ve geometrik anlamını açıklamıştır. Nesne aşamasındadır.

$\mathbb{R}^2$ için u ve v $\mathbb{R}^2$ vektörleri verilmektedir. Au A vektör dönüşümü ile u ve v 'nin görüntüleridir.

$\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2$ vektör olarak u, v ve w üç vektör verilmektedir. Ve bunların görüntülerini verilmektedir. Ancak bu nünün değeri. Çünkü $\mathbb{R}^2$ 'nin tabanı 2'dir. Kelebişecek olan $\mathbb{R}^2$ vektör sayısı da max. 2'dir.

Zeynep üçüncü probleme verdiği yanıtta vektörlerin öz değer-özvektör ve lineer dönüşüm açıklamalarını doğru yapmıştır. B sorusunun yanlış olduğunu doğru açıklayarak nesne becerileri göstermiştir.



Zeynep öz değer ve öz vektörler için kavram haritası çizerken karakteristik denklem, karakteristik polinom, köşegenleştirme, Cayley-Hamilton teoremi ve benzer matris yoluyla matrisin büyük kuvvetlerini hesaplama kavramlarını kullanmıştır. Burada öğrencinin lineer dönüşüm ya da vektör uzayı kavramlarıyla ilişkilendirme yapmadığı görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 &V \text{ uzayında } L: V \rightarrow V \quad L(x) = \lambda \cdot x \text{ olsun.} \\
 &V \text{ uzayında } S \text{ tabanına göre } L \text{ 'ın matrisi } A \text{ olsun.} \\
 &A \cdot x = \lambda \cdot x \\
 &A \cdot x - \lambda \cdot I_n \cdot x = 0 \\
 &[A - \lambda \cdot I_n] \cdot x = 0 \\
 &|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \text{ olmalıdır.}
 \end{aligned}$$

V uzayında $L: V \rightarrow V$ $L(x) = \lambda \cdot x$ olsun.
 $L(x) = y$ olsun. Normal lineer dönüşüm işleminde sonuç y olur.
 Öz değer-özvektörlerle bu sonuç $y = \lambda \cdot x$ 'tir.
 Buradaki $\lambda \in \mathbb{R}$ bir skalerdir. Tekni olarak
 özdeğerleri ele aldığımız x vektörünle skaler
 çarpma yaparak y 'yı buluruz.

Zeynep yedinci problemde öz değer ve öz vektörlerde kavramsal anlamayı ve süreçler arasında koordinasyonu gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Genel olarak dördüncü soruda verilen teoremlerin ispatlarında öğrencilerin matematiksel ispat yapmak yerine sözel açıklamalarla ifadeleri gerçeklemeye çalıştıkları görülmüştür. Bu durumun, hologram destekli öğrenmede bilgisayar yazılımı ve hologram uygulamaları belli zaman aldığı için derslerde teorik ispatların üzerinde fazla durulmamasından kaynaklandığı söylenebilir.

4.3. Lineer Uzay Kavramlarını Öğretirken Kullanılan Geometrik Düşüncelere İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde öğrencilerin lineer cebir problemlerini çözerken kullandıkları iki-üç boyutlu geometrik düşünme becerilerini inceledik. Bazı öğrenciler problemi düşünürken ilk olarak geometrik açıklama yaparak problemin çözümünü gerçekleştirirken, bazıları geometrik açıklamaları cebirsel çözümlerini yapmada yardımcı olarak kullanmıştır. Sadece cebirsel çözüm yapan öğrencilere ise geometri düşüncelerini ortaya çıkaracak şekilde “bu çözümü uzayda geometrik olarak nasıl yorumlarsın” gibi soru sorularak klinik mülakatlar gerçekleştirilmiştir.

Öğrencilerin verdikleri yanıtlardaki geometrik düşünme becerileri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 17. Öğrencilerin Geometrik Düşünme Becerileri

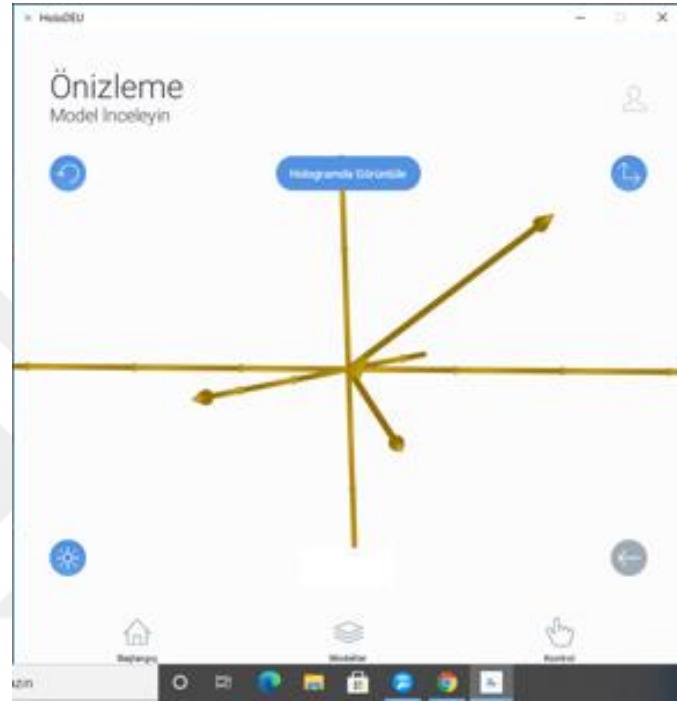
Öğrencilerin geometrik düşünme becerileri

Öğrenci	Kavram	APOS seviyesi
Aslı	İz düşünüm (iç çarpım uzayı)	Nesne
Zeynep	İç çarpım uzayı	Nesne
Zeynep	İç çarpım uzayı	Nesne
Beyza	İç çarpım uzayı	Nesne
Manas	İç çarpım uzayı	Nesne
Manas	İç çarpım uzayı	Nesne
Beyza	Lineer dönüşüm	Nesne
Zeynep	Lineer dönüşüm	Nesne
Aslı	Öz değer-öz vektör	Nesne
Beyza	Öz değer-öz vektör	Nesne
Elif	Öz değer-öz vektör	Nesne
Hasan	Öz değer-öz vektör	Nesne
Manas	Öz değer-öz vektör	Nesne
Zeynep	Öz değer-öz vektör	Nesne

Zeynep ile gerçekleştirdiğimiz klinik mülakatlarda öğrencinin bazı geometrik söylemleri şu şekildedir:

“ R^3 de olan bir vektörün R^2 ye iz düşümünü sağlayan dönüşümü tamamlamamı istemiştiniz. Ben orada ne demek istediğinizi anladım ama kuralı yazamadım, O yüzden boş bıraktım ama şimdi yazayım. Normalde $(x_1, x_2, x_3) \in V = R^3$ olan bir vektör var. Bir de normal şartlar da $(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0) \in R^2$ dir. Biz şimdi bunu kullanarak bir dönüşüm tanımlasak; $L: R^3 \Rightarrow R^2$ ye tanımlı $L(x) = (x_1, x_2)$ olsa acaba olur mu?... R^3 ün elemanı. $(x_1, x_2, 0)$ ile (x_1, x_2) ... İkisi de düzlemin içinde. Biri direk (x_1, x_2) gibi yazılıyor diğeri de $(x_1, x_2, 0)$ şeklinde yazılıyor ama bir bileşeni 0 olduğu için görüntüleri aynı oluyor. Düzlemin içinde oluyor.”

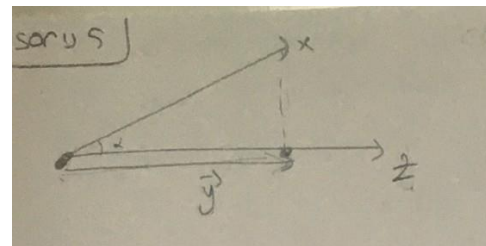
R^3 ten R^2 ye iz düşüm lineer dönüşümü yazmalarını istediğimiz soruda R^3 te verilen bir vektörün x - y düzlemine iz düşümünü geometrik olarak düşünerek üçüncü bileşeninin sıfır olacağını ve R^2 uzayında (x_1, x_2) şeklinde olacağını ifade ediyor. R^3 teki $(x_1, x_2, 0)$ vektörü ile (x_1, x_2) vektörlerinin aynı vektörler olacağını aynı düzlem içinde aynı görüntü vektörleri olduğundan bahsediyor.



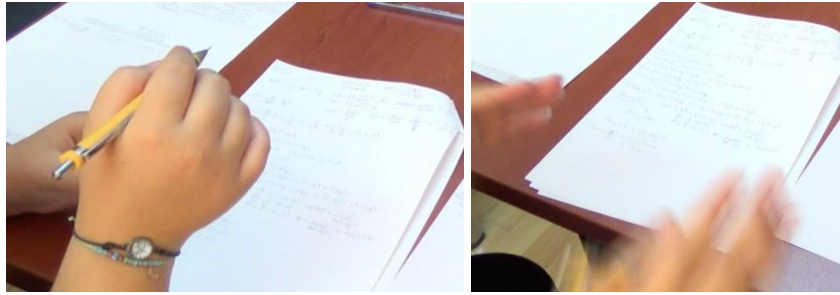
Şekil 17. İç çarpım uzayı öğrenimi sürecinde üretilen bir 3B Hologram modeli

Aslı vektörlerin iz düşümleri ile ilgili;

“ x vektörünün z vektörü üzerine izdüşümünü istediği için x vektörünün bitiş noktasından hani z ye bir dikme indirip hayali bir doğru gibi düşünüp buradan dik geçen z vektörüyle kesiştiği noktayı bitiş noktası kabul ederek x i, yani şurasını da



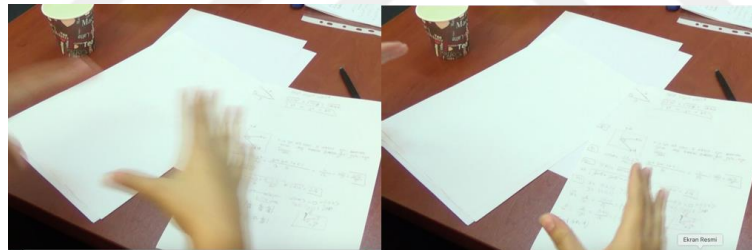
başlangıç noktası kabul ederek hani bu vektörü iz düşüm vektörü olarak aldım daha sonra aralarındaki açıdan açının kosinüsünü kullanarak y vektörünü buldum.”



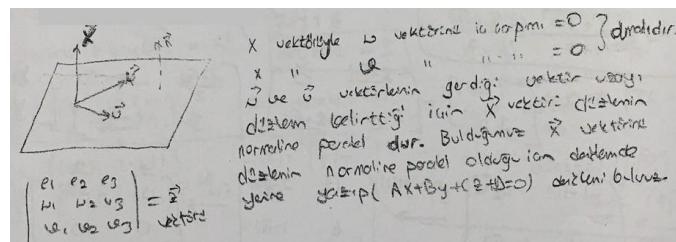
Beyza iç çarpım uzayı sorularından “ x , u ve v vektörlerine dik ise, u ve v vektörlerinin gerdiği uzaya da diktir. Gösterin.” sorusuna yanıt olarak aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

“ u ve v vektörlerine dik olan bunlar dik olmak zorunda değil. Bunları ben kendim dik yaptım. Şimdi bu iki vektöre dik olan vektör z vektörü olsun. u ve v vektörlerinin bulunduğu uzayı taban olarak düşündüm. Gerdiği uzayda R^n olur o zaman. Daha fazla sayıda vektörüm olsaydı uzayda değişebilirdi. Gerilen uzayı R^n seçtiğim için bu bir düzlem belirtir dedim. Burada bulunan z vektörü u ve v vektörlerine dik ise düzleme de diktir yani düzlemin normaline paraleldir.”

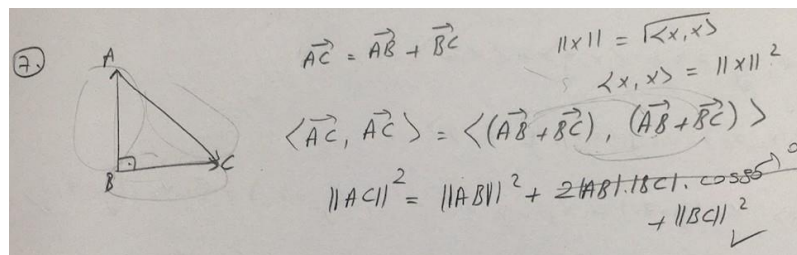
Geometrik açıklamalarıyla soruyu yanıtladığı görülmektedir. Geometrik olarak sorunun çözümünü düşünürken kullandığı dik olma, vektörlerin gerdiği uzay olan düzlemi, normal vektöre göre paralellik kavramlarını elleriyle modelleyerek anlatmıştır. Bu sırada elleriyle yaptığı modellerden düzlem çizme hareketi aşağıdaki resimde verilmiştir.



Cebirsel olarak çözümünü aşağıdaki şekilde yapmıştır:



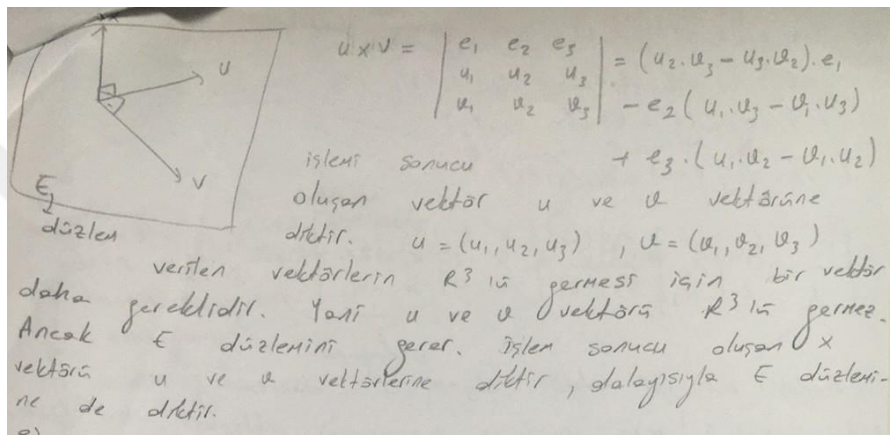
Zeynep;



Pisagor teoremini lineer cebiri kullanarak ispatlarken; öncelikle dik üçgen çizmiştir. Bu üçgen üzerinden vektörlerin mevcut ilişkisinden yola çıkarak cebirsel işlem özelliklerini de kullanarak ispatı tamamlamıştır.

Zeynep'in verdiği yanıtta R^3 için soruyu yanıtladığı görülmektedir. R^n için soruyu düşünmesi istendiğinde; iki vektörün gerdiği uzayın düzlem olacağını ve vektörün hem düzleme hem de u ve v vektörlerine dik olacağını ifade etmiştir.

Aslı ile gerçekleştirdiğimiz klinik mülakatlarda öz değer ve öz vektörler problemlerini açıklarken bazı geometrik söylemlerine rastladık.



Öz değer ve öz vektörün tanımına ilişkin gerçekleştirilen konuşmalar şu şekildedir:

A: Mesela A çarpı bir iki eşittir üç çarpı bir iki olduğunu biliyoruz (Bir önceki soruda konuşuldu).

Şimdi merak ettiğim şu buraya bir dört yazdığında görüntü ne gelecek?

Ö: yine r kareden gelecek

A: ama bu doğrunun üzerinde mi gelecek başka mı gelecek? Ö: Başka gelecek.

A: başka derken?

Ö: Yani doğrultusu değişecek.

A: Mesela bu doğrultu da mı başka bir doğrultuda mı? Ö: Bir dördün doğrultusunda olur.

A: Peki her vektörün görüntüsü kendi doğrultusunda mı? Ö: Söylediğime göre evet.

A: Önceki soruya dönelim. Dönüşüm matrisi için öz değeri şu karşılık gelen öz vektörü bulmuştun. Bunu çizmeni istesem şuradaki durumu. Şimdi bu durum için öz değer öz vektörler bunlar ya bir e sıfırın görüntüsünü bulur musun?

Ö: (1,3)

A: Aynı doğrultuda mı? Ö: Hayır.

A: böyle görüntüsü kendi üzerinde olmayan vektörler varken görüntüsü kendi üzerinde olan vektörler de var.

Ö: Onlara özel bir şey diyoruz. Öz vektör diyoruz. Doğrultuları değişmediği için. Matris ile de çarpsak skalerle de çarpsak aynı doğrultuda

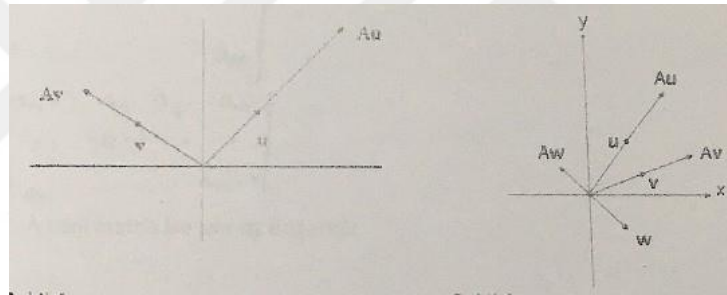
A: kendisi ile çarpsak skalerle de çarpsak doğrultusu değişmiyor dedin, açıklar mısın?

Ö: skalerle çarpım o vektörü sürekli katlandırarak. Dönüşüm matris de o durumlar için özel bir matris bence o matrisle çarptığımızda sürekli doğrultusu aynı gelecek.

Burada öğrenci öz değer ve öz vektörleri hem cebirsel anlamı ile hem de geometrik anlamı ile açıklıyor. Görüntüsü kendisinin bir katı olacağını ve aynı doğrultuda olacaklarını, öz vektör olmayanların görüntüsünün aynı doğrultuda olmayacağını söyleyebildiğini görüyoruz. Bu durum öğrencinin öz değer ve öz vektörü nesne aşamasında anladığını gösteriyor.

Öz vektörlerden oluşan öz uzayı tartışırken germe ile ilgili geometrik söylemi; “Elimizde birkaç tane vektör var bunları ayrı ayrı skalerlerle çarpıp topladığımız zaman bize o uzaydaki bütün elemanları vermesi gerekiyor. O zaman o kümenin germesinden bahsedebiliyoruz... Noktalar... O doğru noktanın katları şeklinde gidiyordur. O zaman o doğruyu oluşturabiliriz.”

Bu açıklamasında problemde bulduğu öz vektörün katları ile öz uzayın oluşacağını, yani öz vektörün öz uzayı gerdiğini açıklıyor. Öz uzayın bir doğru belirteceğini, bir vektörün bir doğruyu gereceğini ifade etmiştir.

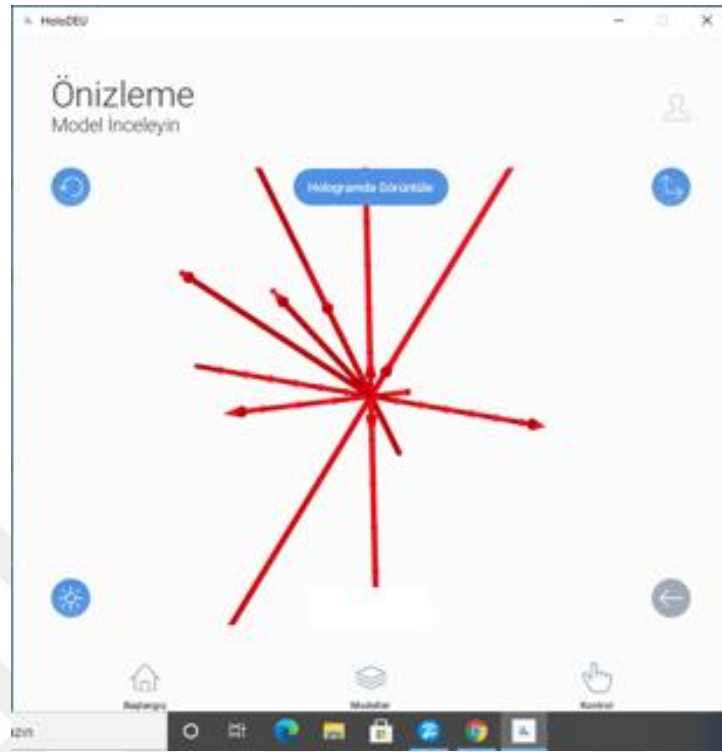


Aslı soldaki grafiği yorumlarken $A \cdot u$ nun matrisle vektörün çarpımı olduğunu, lineer dönüşümün görüntüyü verdiğini ve görüntüyle vektörün aynı doğrultuda olduğunu ifade etti. Aynı durumun v vektörü için de geçerli olduğunu söyledi. Ayrıca bu vektörlerin lineer dönüşümde özel vektörler olduğunu ve öz vektörler olduğunu belirtmiştir.

Sağdaki grafik için ise;

“Öz değerleri bulurken A matrisinin determinantından yararlanıyoruz. Öz değerleri lambda diye belirliyoruz determinantta yerine yazarak buluyoruz. Matris determinant bulma özelliklerinden yararlanırsak en yüksek lambdanın derecesi iki gelir. O zaman iki farklı değeri olur lambdanın en yüksek. Üç farklı kökünün olması için derecesinin üç olması gerekir. Determinantı polinom çıkar diye dedim. Determinantı polinom çıkabilir. En yüksek derecesi iki geleceğinden en fazla iki farklı değeri olabilir.”

şeklinde açıklama yapmıştır. Burada öğrencinin geometrik ve cebirsel olarak ilişkilendirme yapabildiği ve problemin çözümünü açıklayabildiği görülmektedir. Şekil 18’de öğrencinin derste öz değerler öz vektörler konusunda hazırladığı hologram modelinin bilgisayaradaki görüntüsü bulunmaktadır.



Şekil 18. Öz değer-öz vektör öğrenimi sürecinde üretilen bir 3B Hologram modeli

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Tez çalışmasında incelenen durumlardan ilki lineer cebir problemlerinin ve genetik çözümlemelerin geçerlik güvenilirliklerinin incelenmesidir. Alan yazın ve araştırmacı deneyimlerine göre hazırlanan genetik çözümlemelerin ve problemlerin geçerlik güvenilirlik çalışmasında, öğrencilerin bu problemleri çözerken lineer cebirin geometrik dünyasından paylaşımlarda bulunmadan cebir dünyasından temsillerle çözümleri gerçekleştirdiği görülmüştür. Ayrıca vektör şemasından kaynaklı hatalı çözümler yaptıkları, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörlerin geometrik dünyasında yeterli olmadıkları görülmüştür.

Bu çalışmada incelenen durumlardan bir diğeri ise HoloDEU yazılımının ve hologram sisteminin öğretim sürecindeki kullanımınıdır. HoloDEU yazılımı ve hologram sistemi lineer cebir dersinde cebir ve matris temsillerinin şekilsel dünyadaki formlarını 3B ve daha gerçekçi olarak gözlemlemeye imkân sağlamaktadır. Öğrenciler ve öğretmenler HoloDEU ile 3B Hologram cihazını lineer cebir öğretiminde aktif bir şekilde kullanabilmektedir. Vektör uzayı gibi soyut kavramların öğretimi ve öğrenilmesinde genetik çözümleme ile öğrenme sürecindeki zihinsel mekanizmaları ve yapıları açıklayan ve öğrenme sürecini değerlendirmede kullanılan, ESA (ACE) öğretim döngüsü ile öğretim planına yön veren APOS teorisi 3B Hologram destekli vektör uzayı öğretiminde çerçeve olarak kullanılmıştır. Öğretim süreci araştırmacının gözlemleri ve öğrencilerin görüşleri ile değerlendirilmiştir.

HoloDEU prototip yazılımının 3B hologram destekli öğretimde kullanımında yaşanan sorunlar; yazılımın akıllı telefonlara yüklenememesi, yazılım bilgisayara yüklenirken güvenlik yazılımlarının yüklemeye izin vermemesi, tasarım yazılıma aktarılırken isim vermede yaşanan problemler, tasarımı görüntülerken model havuzuna dönmenin uzun sürmesi, model havuzundaki tüm modeller tek grupta toplandığında model yığılması olması ve aranan modeli bulmakta sorun yaşanması, tasarım boyuttu küçük olduğunda tasarımı incelemenin zor olması şeklindedir. Bu sorunların giderilmesi için yazılım güncellenmiştir. Model havuzundaki tasarımlar tarihe göre kümelenmiştir. Yazılım ekranında tasarım açıldığında model havuzuna dönmeyi sağlayan bir buton eklenmiştir. Tasarımları büyütme-küçültme fonksiyonu eklenmiştir.

HoloDEU yazılımı üyelik girişi ile kullanıcıların yönetilen, öğrencinin modeli holograma göndereceğinde yönetici onayı gerektiği, havuzdaki tasarımların yönetici kontrolünde olduğu, HoloDEU'ya bir tasarımın yüklenme ve hologram cihazına aktarılma

süresinin (bilgisayar hızına göre değişmektedir) birkaç saniye sürdüğü ve öğrencilerin model havuzundaki tüm tasarımlara ve 3B Hologram cihazına kablosuz erişim sağlayabildiği bir yazılımdır. Bu özelliklere sahip olmasının 3B Hologram destekli öğretim sürecini olumlu etkilediği görülmüştür. Ayrıca HoloDEU 3B tasarım yazılımlarında çizilebilecek .obj, .stl, .fbx gibi uzantıya sahip model veya video animasyonları 3B Hologram cihazı ile kablosuz olarak saniyeler içinde paylaşılabilir ve diğer özellikleri ile mühendislik, tıp, güzel sanatlar ve fen bilimleri vb. alanlarda da kullanıma uygundur.

Öğrenciler 3B Hologram destekli öğretim ile şekilleri 3B olarak daha kolay canlandırdıklarını, 3B düşünme becerilerinin ve anlamalarının geliştiğini, öğrenmelerinin kalıcı olduğunu, bilgisayar ve yazılım kullanma becerilerini geliştirdiğini, dersin daha zevkli hale geldiğini ve ilgilerini arttırdığını düşünmektedir. Alan yazındaki çalışmalarda lineer cebirin şekilsel-matris-cebirselsel-formel temsilleri gibi çoklu temsiller arasında bağlantı kurulmasının başarıyı ve tutumu olumlu etkilediği sonuçları ile öğrencilerin bu görüşleri birbirine paraleldir. Bu sonuçlar alan yazındaki diğer çalışmalarla benzerdir (Stewart ve Thomas, 2009; İzgiol, 2014; Zogheib, Rabaa'i, Zogheib ve Elshaheli, 2015; Kaya ve Keşan, 2018). Stewart ve Thomas (2009) lineer cebir kavramlarının zihinde yapılandırılmasını incelemek için APOS Teorisi ve Tall'un üç dünyası teorisini kullanarak gerçekleştirdikleri öğretim uygulamasının öğrencinin anlama ve düşünme becerilerini geliştirmede etkili olduğunu, İzgiol (2014) çoklu temsil temelli öğretimle gerçekleştirdikleri lineer cebir öğretiminde öğrencilerin daha başarılı olduğunu, Zogheib, Rabaa'i, Zogheib ve Elshaheli (2015) eğitim alanında teknoloji kabul modelini uygulamışlar ve öğrencilerin öz yeterlilik, kullanıcı memnuniyeti, öznel normlar, algılanan kullanışlılık, algılanan kullanım kolaylığı ve öğrencilerin tutum yapılarının tümünün, öğrencilerin bir matematik sınıfında teknolojik araçları benimseme ve kullanma konusundaki davranışsal niyetleri üzerinde olumlu bir etkiye sahip olduğunu, Kaya ve Keşan (2018) ise çoklu temsil temelli cebir öğretiminin ortaokul öğrencilerinin cebirselsel muhakemelerini ve başarılarını arttırdığını göstermiştir.

Yazılım kullanmada yaşanan problemler, bilgisayarı olmayan öğrenciler, akıllı telefonda GeoGebra kullanırken ekran küçük olduğu için yaşanan sorunlar, mevcut 3B Hologram cihazından kaynaklı olarak sınıf mevcudunun fazla olması zaman problemlerine yol açmıştır. Bu durumların 3B Hologram destekli öğrenmelerini olumsuz etkilediğine yönelik öğrenci görüşleri bulunmaktadır. Araştırmada kullanılan 3B Hologram cihazı üç yan yüzeyi ile taban ve tavanı kapalı konumdadır. Oluşturulan 3B modelleri sadece ön yüzden görülebilmektedir. Bu durum da kalabalık sınıflarda bu tipteki hologram cihazlarının modelleri görebilme açısından elverişsiz olduğunu göstermektedir.

Tez çalışmasının pilot araştırması 18 saatlik video kaydı, araştırmaya katılan öğrencilerin yansıtmaları, görüşleri ve deneyimleri, araştırmacının gözlemleri ve deneyimleri, vektör uzayı kavramı, bu kavramın APOS Teorisi çerçevesinde hazırlanan öğretim döngüsü ve HoloDEU yazılımının özellikleri ile sınırlıdır.

Soyut kavramlardan oluşan lineer cebir dersinde kavramsal öğrenmede zorluk yaşanmaktadır. Özellikle geometrik temsillerle desteklenmeyen öğretim uygulamalarında öğrenci hataları artmaktadır. Bu probleme katkı sağlamak amacıyla araştırmada incelenen üçüncü durum hologram destekli öğrenme modelinde geometrik temsillerle öğrencilerin öğrenme sürecinin nasıl olduğu incelenmesidir. Bu incelemeler sonucunda öğrencilerin soruları çözerken lineer cebirin geometrik dünyasından söylemlerle çözümlerini destekledikleri görülmüştür. Derste gördükleri hologram modellerinden yola çıkarak soruları açıkladıkları tespit edilmiştir. İç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörlerin geometrik anlamlarını açıklama becerileri görülmüştür. Bu sonuç Stewart (2008) ve Stewart ve Thomas (2010) çalışmaları ile benzerdir. Stewart (2008)'in çalışmasındaki kavrama şekilsel dünyaya yönelik etkinliklerle giriş yapıldığında düşünme düzeylerini etkilediği sonucuyla benzerdir. Stewart ve Thomas (2010) öğrencilerin lineer cebirde taban, germe ve lineer bağımsızlık öğrenmelerini APOS Teorisi ve Tall'un üç dünyası teorisi çerçevesinde inlemişlerdir ve görsel-şekilsel düşüncelerin (temsillerin) matematik öğrenmelerine ve matematiğin üç dünyası arasında ilişki kurmalarına yardımcı olduğunu belirtmişlerdir.

Öğrencilerin vektör şemasındaki eksik bilgilerden dolayı vektörü eleman olarak algılamak yerine vektörün bileşenlerini eleman olarak aldıkları, sonlu bir küme örneği verirken vektörleri seçtiği uzayı Öklit uzaylarında devam ettirme eğiliminde oldukları, kavramların biçimsel tanımını kavrayamadıklarında problemlerde yanlış kavram üzerinden soru çözdükleri (vektör uzayı-lineer dönüşüm), ikili işlem şemasındaki eksik bilgilerden dolayı vektör uzayı aksiyomlarını değerlendirirken işlemleri yanlış değerlendirdikleri görülmektedir. Bu sonuçlar alan yazın ile paraleldir (Britton ve Henderson, 2009; Mutambara ve Bansilal, 2017). Britton ve Henderson (2009) lineer cebir öğreniminde öğrencilerin bir vektör uzayının alt vektör uzayından bahsederken yapacağı işlemlerde hangi uzaydan bahsettiğini ve vektörün bileşenlerinden yola çıkarak hangi uzaya ait oldukları karıştırdığını, vektörel işlemlerin sonucunun hangi uzaydan olacağı zihinlerinde karmaşa yarattığını, aksiyomların kontrolünde tümevarımsal olarak hareket etmeye çalıştığını, iki vektörün toplamının yine bir vektör olduğunu belirlemede, kapalılık sağlanması durumunu kontrol etmede güçlük yaşadığını bu durumun öğrencilerin fonksiyon ve ikili işlem şeması ile ilgili eksik anlayıştan kaynaklandığı söylemektedir. Mutambara ve Bansilal (2017) matematik öğretmenleri ile gerçekleştirdikleri

çalışmasında öğretmenlerin yanıtlarını APOS teorisine göre incelemişlerdir ve yeterince gelişmemiş bir küme ve ikili işlemler şemasına sahip olmanın vektör uzayının iç seviyelerde düşünme becerilerine ulaşmayı engelleyeceğini belirtmiştir.

Bazı öğrencilerin yanlış çözümleri klinik mülakatta görüşülürken, öğrencilerle didaktik görüşme gerçekleştirildiği için cevaba yönlendirmeden sorulan lineer cebir soruları ile öğrencilerin ilgili problemdeki hatalarını düzelttiği ve nesne anlayışına sahip olduğu görülmüştür.

Yine öğrencilerin cevapları ile vektör uzayı kavramını oluştururken küme, fonksiyon ve ikili işlem şemalarının üzerine inşa edilen ve cisim, aksiyom şemaları ile koordineli ilerleyen süreçte vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri süreçlerinin koordinasyonu ile nesne anlayışına sahip olduğu görülmüştür.

Öğrencilerin problemlerde belirlediği bir küme ya da işlem sorunun çözümünü doğrulamadığında kümeden bazı elemanları çıkarma eğiliminde oldukları görülmüştür (cisimden sıfırı çıkarma gibi). Bu durum öğrencilerin cisim, küme ve ikili işlem kavramlarının şema anlayışına ulaşamaması ya da zamanla bilgilerini unutması ile açıklanabilir.

İç çarpım uzayı problemlerinde öğrencilerin iç çarpım ve iç çarpım uzayı kavramlarını karıştırdıkları, vektör uzayı şeması ile iç çarpım uzayı aksiyomlarını koordine etmede güçlük yaşadıkları, farklı iç çarpım uzaylarında vektörler arasındaki açıları standart Öklit iç çarpımına göre hesapladıkları görülmüştür.

Lineer dönüşüm problemlerinde tabanlar arası geçiş durumlarında sorun yaşamaktadır. Her lineer dönüşümün bir dönüşüm matrisi ve her matrisin bir lineer dönüşüm olarak ifade edilebileceği anlayışını kazanmadıkları görülmektedir. Bu sonuçlar Oktaç (2019) çalışmasındaki sonuçlar ile paraleldir. Oktaç (2019) lineer cebir dersinde üniversite öğrencisinin lineer dönüşüm kavramı ile ilgili problem yanıtlarını incelemiştir ve lineer dönüşümlerde Eylem, Süreç ve Nesne aşamaları dönüşümlerin görüntü kümesi, görüntü, tanım kümesi, boyut ve lineer denklem sistemleri gibi ilgili olduğu kavramlar ve bunlar arasındaki geçiş süreçlerinden oluştuğunu, öğrencinin matris ve lineer dönüşüm arasındaki ilişkiyi kurmada zorluk yaşadığını belirtmiştir.

Öğrenciler öz değer ve öz vektör problemlerinde karakteristik denklemin köklerinin sayısı ile öz vektörlerin sayısını ilişkilendirmede yani cebirsel-matris temsilleri ile geometrik temsilleri ilişki kurmada güçlük yaşamaktadır. İspat gerektiren problemlerde örnek vererek ya da sözel açıklamalarla verdikleri yanıtlar şema anlayışında olmadıklarını ve biçimsel dünyaya erişemediklerini göstermektedir. Bu sonuçlar ilgili öz değer-öz vektör öğretimi çalışmalarının bulgularıyla uyumludur (Stewart ve Thomas, 2006). Stewart ve Thomas (2006) üniversite

öğrencileriyle gerçekleştirdiği ve öğrencilerin öz değer ve öz vektörler hakkında yaşadığı güçlükleri araştırdığı çalışmasında öğrencilerin $Ax = \lambda x$ süreçleri arasında koordinasyonu kurmada sorun yaşadığı, öz değer vektörün yönünü değiştirdiğini, öz vektörlerin sonlu sayıda olduğunu düşündüklerini, öz vektörleri bulurken her adımın dikkatlice anlatılması ve örneklerle desteklenmesi gerektiğini belirtmiştir. Thomas ve Stewart (2011) öğrencilerin $Ax = \lambda x$ sürecinde birim matrisin nereden geldiğini anlamadıkları ve bu işlemi anlamlandıramadıklarını belirtmiştir. Bu güçlük bu tez araştırmasının bulguları arasında yer almamaktadır. Yani bu çalışmada öğrenciler $Ax = \lambda x$ süreçlerinin birleşiminde birim matrisin neden geldiğinin farkındadır.

Öğrencilerin kavram haritaları ve problem çözümleri karşılaştırıldığında nesne anlayışından sonra iç, ara ve ileri seviyelerdeki yanıtları ile kavram haritalarında yer verdikleri kavramların ilişkili oldukları görülmüştür. Kavramsal anlayışı kazanan öğrencilerin kavram haritalarının ve kavramlar arası ilişkilendirmeleri daha zengindir.

Öğrencilerin problem çözümlerinde yaptıkları hataların, kavrama ilişkin ön bilgilerindeki eksikliklerinden kaynaklandığı görülmüştür. Öğrencinin genetik çözümlemelerdeki önceden bilinmesi gereken kavramlarda nesne aşamasında beceriler kazanmış olmasının ve diğer kavramlarla ilişkilendirme yapabilmesinin yeni kavramı öğrenmesinde etkili olduğu görülmektedir.

Araştırmanın asıl çalışma grubundaki öğrenciler vektör uzayı problemlerini nesne aşamasında yanıtlayan öğrencilerdir. Yaklaşık iki ay sonra tekrar uygulanan (Ek 8 de belirtilmektedir) vektör uzayları problemlerine nesne aşamasında yanıt verdikleri görülmektedir. Bu bakımdan 3B Hologram destekli öğretimin öğrencilerin vektör uzayı kavramını kalıcı olarak öğrendikleri söylenebilir.

5.2. Sonuç ve Öneriler

HoloDEU yazılımı ve hologram sistemi geliştirilmiştir. Pilot çalışmada belirlenen işlevsel eksiklikleri belirlenmiştir ve bu sorunları çözmek için yazılım güncellenmiştir.

HoloDEU yazılımı ve hologram sistemi üyelik girişi gerektirmektedir ve kullanıcıların yönetilebilmektedir. Öğrenci modeli holograma gönderirken yönetici onayı gerekmektedir ve havuzdaki tasarımlar yönetici kontrolündedir. HoloDEU'ya bir tasarımın yüklenmesi ve hologram cihazına aktarılma süresi birkaç saniye sürmektedir. Öğrenciler model havuzundaki tasarımlara ve 3B Hologram cihazına kablosuz erişim sağlayabilmektedir. .obj, .stl, .fbx gibi model ve video animasyonları 3B Hologram cihazına HoloDEU yazılımı ile aktarılabilir. Model havuzundaki tasarımlar tarihe göre gruplandırılmıştır. Yazılımda tasarımları büyütme-küçültme ve x-y-z eksen ekleme işlevleri bulunmaktadır.

Tıp, mühendislik, mimarlık ve eğitim alanlarında üç boyutlu hologram teknolojisi kullanılmak istendiğinde, üç boyutlu yazılımlarda tasarlanan modelleri saniyeler içinde hologram cihazına aktarmayı sağlayan bir yazılım geliştirilmiştir. Mevcut teknolojilerle yazılımlardan kamera animasyonu ile video render alma süreci saatler sürerken, HoloDEU sayesinde video render almaya gerek kalmadan .obj, .stl gibi uzantılardaki modelleri saniyeler içinde hologram cihazına aktarmak mümkün hale gelmiştir.

Öğrenciler 3B Hologram destekli öğretimin şekilleri üç boyutlu olarak canlandırmalarına yardımcı olduğunu, üç boyutlu düşünme becerilerini ve anlamalarını geliştirdiğini, kalıcı öğrenmelerini artırdığını, yazılım ve bilgisayar kullanma becerilerini geliştirdiğini, lineer cebir dersini daha zevkli hale getirdiğini ve ilgilerini artırdığını, yazılım kullanma becerilerindeki eksikliklerin, mevcut 3B Hologram cihazından kaynaklı olarak sınıfın kalabalık olmasının zaman problemlerine yol açtığını düşünmektedir.

Öğrenci bu yazılım ve sistemi öğrenme sürecinde aktif kullanarak, gerçekçi matematik eğitimi ilkelerine ve APOS Teorisinin ve ESA öğrenme döngüsüne dayanan öğretim uygulamalarını gerçekleştirmiştir. Öğrenciler soruları çözerken lineer cebirin geometrik dünyasından söylemlerle çözümlerini desteklemekte, derste tasarladıkları hologram modellerinden yola çıkarak soruları açıklamakta, İç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörlerin geometrik anlamlarını açıklayabilmektedir.

Bu sonuçlara bağlı olarak araştırmamızın önerileri şu şekildedir:

Yazılımın akıllı telefonlarda kullanılabilmesi ve bilgisayarlarda güvenlik izni durumu için HoloDEU internet mağazalarına yüklenmelidir.

3B Hologram cihazında modeli görüntülemeye kadar üç aşamalı 3B Holografik modelin tasarlama, HoloDEU'ya yüklenme ve HoloDEU aracılığıyla 3B Hologram cihazına aktarılma süreci yaşanmaktadır. Bu süreci tek aşamaya indirecek yazılımlar üretilebilir.

Gelişmekte olan teknolojilerden olan 3B Hologram teknolojilerinde oluşturulan modeli her açıdan görebilmeye imkân verebilecek yeni cihazların üretileceği düşünülmektedir. Kalabalık sınıflarda bu tipteki cihazlarla 3B hologram destekli öğretim gerçekleştirilerek öğretim sürecindeki olumlu ve olumsuz durumlar ve öğrenci başarıları incelenebilir.

Hologram cihazı yeni teknoloji olduğu için maliyeti yüksektir. Ancak daha portatif ve ucuz sistemler geliştirilebilir. MEB ya da özel okullar bu teknolojiye ve cihazlara sahip olabilirse HoloDEU yazılımı kurumlara temin edilerek tüm alanlarda bilgisayarda geliştirilen üç boyutlu modellerin hologram cihazlarına aktarılmasında kolaylıkla ve saniyeler içinde bu süreci gerçekleştirebildiği için zaman tasarrufuyla öğrencilere ve öğretmenlere büyük kolaylık

sağlayacaktır ve öğrencilere daha eğlenceli ve kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirebilecekleri ortamlar oluşturulabilecektir.

Öğrencilerin öğrenim süreçlerinin incelenmesinde genetik çözümlemeler oldukça yol gösterici olmuştur. Öğrencilerin problemlerdeki hatalarının genetik çözümlemelerdeki ön bilgi gerektiren kavramlara ilişkin eksik bilgilerden kaynaklandığı görülmüştür. Öğrencilerin problem çözümleri ve didaktik görüşme söylemlerinde her bir lineer cebir kavramında nesne aşamasında yanıtlar verdiği belirlenmiştir. 3B Hologram destekli öğretimin kalıcılığı sağladığı tespit edilmiştir.

Mevcut lisans programında GeoGebra gibi yazılımların öğretimi son sınıftadır. Öğrencilerin GeoGebra, HoloDEU gibi yazılımları kullanmayı lisans öğretiminin ilk yılına ders olarak eklenebilir. Böylece HoloDEU ve dinamik geometri yazılımlarını alan ve alan eğitimi derslerinde kullanabilir ve teknolojiyi öğretimde kullanmaya teşvik edebilir.

Mevcut sistemde 3B Hologram destekli öğretim küçük gruplarla gerçekleştirilerek zaman ve sınıf mevcudu kaynaklı sorunları azaltılabilir. Bilgisayar laboratuvarlarında 3B Hologram destekli öğretim gerçekleştirilirse öğrenciler tasarımlarını akıllı telefonlara göre daha büyük ekranda daha rahat oluşturabilir.

3B hologram destekli öğretim araştırmalarında vektör alanları ile ilgili çalışmalar yapılabilir. Rüzgârın, manyetik alanların ya da sıvıların ilerleyişlerindeki vektörel hareketler 3B hologram destekli modellenerek gerçekçi matematik öğretimi ortamlarında öğrencilerin başarıları, kalıcı öğrenmeleri veya kavramı öğrenme süreçleri araştırılabilir.

Nitel araştırma desenine göre gerçekleştirilen bu çalışmada 3B hologram destekli lineer cebir öğretimi ile öğrencilerin kavramları oluşturma süreci incelenmiştir. 3B hologram destekli öğretimin uygulandığı deneysel çalışmalar gerçekleştirilebilir.

3B hologram destekli öğretim araştırmalarında öğrencilerin matematik öğrenme süreçleri procept vb. öğrenme teorileri ile araştırılabilir. İleride yapılabilecek bu çalışmaların sonuçları ile öğrencilerin lineer cebir kavramlarını öğrenme süreçlerinin APOS Teorisi ile incelendiği bu çalışmanın sonuçları karşılaştırılabilir.

Bu araştırmada 3B hologram destekli öğretim vektör uzayı, iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer ve öz vektörler kavramlarının öğrenim süreçleri incelenmiştir. Matris, determinant ve lineer denklemler kavramlarının öğretim süreçleri 3B hologram destekli öğretim ile gerçekleştirilebilir. Ayrıca lineer bağımsızlık, germe, ortonormalleştirme, lineer dönüşümün tersi gibi lineer cebirin alt kavramlarının öğretim süreçleri 3B hologram destekli etkinliklerle gerçekleştirilerek öğrencilerin öğrenme süreci, başarıları, tutumları ya da motivasyonları vb. değişkenler araştırılabilir.

Autodesk 3ds Max gibi 3B tasarım programlarını, GeoGebra ya da diğer dinamik geometri yazılımlarını kullanmayı iyi bilen öğrencilerle 3B hologram destekli öğretim gerçekleştirilebilir ve öğrencilerin öğrenme süreçleri incelenebilir.

Parçacıkların ya da cisimlerin zamana bağlı hareketlerini belirten hodograf eğrilerinin 3B hologram teknolojileri ile modellenmesine ilişkin çalışmalar gerçekleştirilebilir.

Soyut yapıda olan lineer cebir kavramlarının daha iyi anlaşılabilmesi ve şekilsel işlemlerden kavramsal anlama düzeyine çıkılabilmesi için öğretim etkinlikleri geometrik temsillerle desteklenmelidir. Üç boyutlu uygulamaları bulunan kavramların hologram destekli modellerle açıklanması kavramların geometrik anlamlarını öğrenmesini olumlu etkilemektedir. Hologram destekli öğretim yeni bir teknoloji olması ve havada üç boyutlu modellerin oluşması sebebiyle öğrencilerin ilgisini çekmektedir. Hologram destekli öğretim geometrik uygulama içeren diğer matematik derslerinde uygulanabilir.

Fen derslerinde bir kalbin çalışma mekanizması, mühendislikte tasarlanan bir makinanın ön incelemesi, mimarlıkta tasarlanan bir yapının önceden gözlemlenebilmesi, coğrafyada bir doğa olayının modellenmesi gibi pek çok konu ve alanda hologram destekli öğretim kullanılabilir. Geliştirilen HoloDEU yazılımı bilgisayar ortamında hazırlanmış üç boyutlu modelleri çalıştırabildiği için tüm alanlarda kullanılabilir. Üç boyutlu modeller bilgisayar ortamında geliştirildiğinde gözle iki boyutlu olarak görülmektedir. Ancak hologram cihazında bu üç boyutlu modeller üç boyutlu olarak daha iyi algılandığında hem ilgiyi hem kavramsal öğrenmeyi olumlu yönde etkileyebileceğinden bu alanlara yönelik çalışmalar gerçekleştirilebilir.

Bernoulli akışkanlar mekaniğine göre sıvının basıncındaki vektörel hareketler, manyetik vektör alanları, rüzgâr ve dalga hareketlerinin deniz kıyısındaki falezlere etkisi 3B holografik görüntülerle modellenerek öğrencilerin fizik, coğrafya ve diğer derslerdeki kavramları, denklemleri, olayları üç boyutlu olarak düşünebileceği, daha iyi anlayabileceği, derslere olan ilgilerinin artabileceği düşünülmektedir. Buna alanlarda 3B Hologram destekli çalışmalar gerçekleştirilebilir.

Ortaokul-lise düzeyinde görev yapan öğretmenler veya akademisyenler farklı matematik kavramlarını öğretmek için 3B Hologram destekli öğrenme süreçlerini, başarılarını veya tutumlarını inceleyecekleri araştırmalar yapabilir.

HoloDEU yazılımının özelliklerini genişletecek yeni yazılımlar hayata geçirilebilir.

MEB ve üniversitelerin bünyesinde 3B model havuzları oluşturulabilir. 3B Hologram cihazı olan okullardaki öğrenciler bu modelleri kullanabilir, öğrenciler derste kendi 3B tasarımlarını üretebilir ve bu tasarımları hologram cihazında görüntüleyebilir.

Öğretmen yetiştiren anabilim dalları için öğretmen adaylarına hologram destekli öğretim hakkında bilgi sağlayabilecek çalıştaylar gerçekleştirilebilir. Böylece üniversitelerde Millî Eğitim Bakanlığı bünyesine gidecek öğretmenler daha nitelikli hale gelebilir.



KAYNAKÇA

- Aina, O. (2010). *Application of holographic technology in education*. Bachelor's Thesis of Degree Programme in Business Information Technology, Kemi-Tornio University of Applied Sciences, Tornio.
- Ackermann, G. K. ve Eichler, J. (2007). *Holography: A practical approach*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.
- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education* 33(2-3), 131-152.
- Akyıldız, P. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik tutumları ve alan dili becerilerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İlköğretim Anabilim Dalı, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Altun, M. (2006). Matematik öğretiminde gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19 (2), 223-238.
- Andrews-Larson, C., Wawro, M. ve Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(6), 809-829.
- Araya, A. C. ve Navarro, D. G. (2008). *Three-dimensional objects handling*. Icme 11 – Tsg 22.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. ve Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer Science+ Business Media.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. ve Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J. ve Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Mathematical Learning*, 3, 13-43.

- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. ve Schwingendorf K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. ve Oktaç, A. (1997). Student understanding of cosets, normality and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 241-309.
- Aslan, R. (2017). Uluslararası rekabette yeni imkanlar sanal gerçeklik, artırılmış gerçeklik ve hologram. *Göller Bölgesi Aylık Hakemli Ekonomi ve Kültür Dergisi Ayrıntı Sayı* 49,22.
- Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. ve Lewin, P. (1988). Computer experiences in the teaching of composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 246-259.
- Bagley, S., Rasmussen, C. ve Zandieh, M. (2015). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. *Journal of Mathematical Behavior*, 37, 36-47.
- Baki, A. (2015). Integration of Technology into Mathematics Teaching: Past, Present and Future. *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp.17-26), Seoul: Springer Cham Heideilberg New York Dordrecht Institute of Education, University of London.
- Berman, A. ve Shvartsman, L. (2016). Definitions are important: The case of linear algebra. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 4(1), 26- 32.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. ve Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.
- Britton, S. ve Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education In Science and Technology*, 40(7), 963-974.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education III, CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 114-162.
- Carmona, G. (1996). *The concept of tangent and its relationship with the concept of derivative*. Doctoral dissertation, Instituto Tecnológico Autonomo de Mexico.

- Confrey, J. ve Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. İçinde A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 305–345.
- Cottrill, J., E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf, K. Thomas ve D. Vidakovic (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.
- Cowan, P. (2006). *Teaching mathematics: A handbook for primary and secondary school teachers*. New York: Routledge.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design, choosing among five approaches*. Sage Publications.
- Çetin, İ. (2009). Students' understanding of limit concept: An APOS perspective. Doctoral Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- Day, J. M. ve Kalman, D. (2001). Teaching linear algebra: Issues and resources. *The College Mathematics Journal*, 32(3), 162-168.
- Dogan, H. (2018). Differing instructional modalities and cognitive structures: Linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 542, 464-483.
- Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and Its Applications*, 432, 2141–2159.
- Dogan-Dunlap, H. (2004). Computers and linear algebra. *WSEAS Trans. Math.*, 3(3), 537-542.
- Dorier, J. L. (2002). *On the learning linear algebra*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment design research on the understanding of the concept of parameter*. University of Utrecht, Freudenthal Institute, Utrecht.
- Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (Or doesn't). *PNA*, 8(1), 1-20.
- Dubinsky E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. İçinde: Tall D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

- Dubinsky, E. ve McDonald, M. A. (2001). Apos: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. İçinde: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht.
- Dubinsky, E. (1995). Isetl: A programming language for learning mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(9), 1027-1051.
- Ertekin E., Solak, S. ve Yazıcı, E. (2010). The effects of formalism on teacher trainees' algebraic and geometric interpretation of the notions of linear dependency/independency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(8), 1015-1035.
- Gabor, D. (1949). "Microscopy by reconstructed wavefronts". *Proceedings of the Royal Society*, 197 (1051), 454–487.
- Ghuloum H. (2010). *3D hologram technology in learning environment*. *Proceedings of Informing Science & It Education Conference (Insite)* 693-704.
- Gol Tabaghi, S. (2012). Using Dynamic Geometry to Explore Linear Algebra Concepts: The Emergence of Mobile, Visual Thinking. Doctoral dissertation. Mathematics Education Program, Faculty of Education, Simon Fraser University, Canada.
- Hannah, J., Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2013). Emphasizing language and visualization in teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(4), 475-489.
- Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students' basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21, 387– 392.
- Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 302-303, 601-613.
- Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. ve Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 195-222.

- Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. İçinde J.-L. Dorier (Ed.), *The teaching of linear algebra in question* (pp. 191–207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 55–72.
- Holograpy.ru (2020). *History of holography*. Retrieved from: http://www.holography.ru/history_eng.htm
- İzgiol, D. (2014). *Teknoloji destekli çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin lineer cebir öğrenimine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi*. Yayınlanmış yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Kan, O. (2014). *GeoGebra destekli öğretimin lineer cebir dersine ait bazı konularda akademik başarı üzerine etkisi*. Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Konya.
- Karadag, Z. (2008). *Improving online mathematical thinking*. 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Nuevo Leon, Mexico.
- Kardeş-Birinci, D. (2016). *Matematik öğretmen adaylarının lineer cebir kavramlarını anlayışlarının düşünme yapıları ve uzamsal yetenekleri bağlamında incelenmesi*. Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı. İstanbul.
- Kariadinata, R. (2021). Students' reflective abstraction ability on linear algebra problem solving and relationship with prerequisite knowledge. *Infinity*, 10(1), 1-16.
- Kaufmann, H., Schmalstieg, D. ve Wagner, M. (2000). Construct3D: A virtual reality application for mathematics and geometry education. *Education and Information Technologies*, 5(4), 263-276.
- Kaya, D. ve Keşan, C. (2018). Çoklu temsil temelli cebir öğretimin matematiğe yönelik tutuma etkisi. *KSBD*, 10(18), 1-22.
- Kayıkçı, Ş., ve Yürekli, A. (2020). Görüntülü mobil iletişimde hologram teknolojisinin kullanımı. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi, (Special Issue)*, 94-99.

- Kazci Y. (2008). *Fen ve matematik öğretmen adaylarının vektör uzayları teorisinde kavram yanlışlarının tespit edilmesi*. Yüksek Lisans Tezi. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı, Van.
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64, 291-314.
- Klasa J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and Its Applications*, 432, 2100–2111.
- Konyalıoğlu, A. C., Işık, A., Kaplan, A., Hızarcı, S. ve Durkaya, M. (2011). Visualization approach in teaching process of linear algebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 4040–4044.
- Konyalıoğlu, A. C., İpek, A. ve Işık, A. (2003). On the teaching linear algebra at the university level: The role of visualization in the teaching vector spaces. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research In Mathematical Education*, 7(1), 59–67.
- Ku', D., Oktaç, A. ve Trigueros, M. (2011). Spanning set and span—An analysis of the mental constructions of undergraduate students. İçinde: S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 14th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 176–186). Washington, DC: Special Interest Group of the Mathematical Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Ku, D., Trigueros, M. ve Oktaç, A. (2008). Comprension del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoria APOE. *Educacion Matematica*, 20(2), 65–89.
- Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. İçinde: A. P. Canavarro et al. (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 29-43). Lisboa: SEM/SPCE.
- Larson, C., Rasmussen, C., Zandieh, M., Smith, M. ve Nelipovich, J. (2007). *Modeling perspectives in linear algebra: A look at eigen-thinking*. Last Accessed on August 3, 2014, From ~[Http://Www.Rume.Org/Crume2007/Papers/Larson-Rasmussen-Zandieh-Smith Nelipovich.Pdf](http://Www.Rume.Org/Crume2007/Papers/Larson-Rasmussen-Zandieh-Smith-Nelipovich.Pdf)~.
- Lee, H. S. (2013). 3D Holographic technology and its educational potential. *TechTrends*, 57(4), 34-39.

- Mammana, M. F., Micale, B., ve Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(6), 818-830.
- Martínez-Planell, R. ve Trigueros Gaisman, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 365-384.
- Miles, M. B., ve Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Mitchelmore, M., ve White, P. (2004). *Abstraction in mathematics and mathematics learning*. Proceedings Of the 28th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education, Vol 3 Pp 329–336.
- Musion System (2009). <https://musion.com> adresinden erişilmiştir.
- Mutambara, L. ve Bansilal, S. (2017). *An APOS perspective of the understanding of the concept of vector subspace*. Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME, Dublin, Ireland.
- Oktaç, A. (2004). Student discussions on a linear algebra problem in a distance-education course. *Linear Algebra and Its Applications*, 379, 439–455.
- Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM*, 51, 1043-1054.
- Or, A. (2008). *Designing a teaching unit in Cabri 3d environment for concepts of 3D figures in Hong Kong secondary mathematics curriculum*. In Proceedings of Topic Study Group 22: New technologies in the teaching and learning of mathematics, 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Mexico: Academic Press. Retrieved from: <http://tsg.icme11.org/tsg/show/23>
- Parraguez, M. ve Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of apos theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112–2124.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Pavlopoulou, K. (1993). Un problème de cisif pour l'apprentissage de l'alge`bre line´arie: la coordination des registres de repre´sensation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 67–93.

- Pesonen, M. E. (1999). An attempt to facilitate the access to the concept of vector space. https://www.researchgate.net/publication/228788587_An_attempt_to_facilitate_the_access_to_the_concept_of_vector_space adresinden ulaşılmıştır.
- Petrov, P., Gyudzhenov, I. ve Tuparova. D. (2015). Adapting interactive methods in the teaching of linear algebra – Results from pilot studies. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 191, 142 – 146.
- Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. The Norton Library, Columbia University Press New York.
- Piaget, J. (1970). *Structuralism*. Basic Books, Inc. New York.
- Piaget, J. (1972). *The Principles of Genetic Epistemology* (W. Mays, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1970)
- Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. İçinde: A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: Proceedings of the second international congress on mathematical education* (pp. 79–87). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Piaget, J. (1980). *Adaptation and intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, G. ve Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(8), 2125–2140.
- Ramirez, A. A. (2009). *A cognitive approach to solving systems of linear equations*. A Dissertation Submitted In Partial Fulfillment of The Requirements for The Degree of Doctor of Philosophy Department of Mathematics Illinois State University.
- Rensaa, R. J., Hogstad, N. M. ve Monaghan, J. (2020). Perspectives and reflections on teaching linear algebra. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, 39, 296–309.
- Roa-Fuentes, S. ve Oktaç, A. (2010). Construcion de una descomposicion genetica: Analisis teorico del concepto transformacion lineal. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 13(1), 89–112.
- Roa-Fuentes, S. ve Oktaç, A. (2012). Validacion de una descomposicion genetica de transformacion lineal: Un analisis refinado por la aplicacion del ciclo de investigacion de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 15(2), 199–232.

- Salgado, H. ve Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100–120.
- Sandoval, I. ve Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in R^3 learning challenges. *Educ Stud Math*, 92, 109–127.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. İçinde: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Selling, S. K. (2016). Learning to represent, representing to learn. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 191–209.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. İçinde: J. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Pp. 209–246). Dordrecht: Kluwer.
- Souto- Rubio, B. (2012). *Visualizing mathematics at university? Examples from theory and practice of a linear algebra course*. 12th International Congress on Mathematical Education Regular Lectures 4-1 8 July – 15 July, Coex, Seoul, Korea.
- Soylu, Y. (2005). *Lineer dönüşümler ve lineer dönüşümlerle ilgili kavramların öğretilmesinde geometri ile somutlaştırma yönteminin etkinliği*. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi. Erzurum.
- Steffe, L. P. ve Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. İçinde: A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. London, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Stewart, S. (2008). *Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking*. Doctoral thesis, Science in Mathematics Education, The University of Auckland.
- Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2006). Process-object difficulties in linear algebra: Eigenvalues and eigenvectors. İçinde: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, Pp. 185-192. Prague: Pme. 5 – 185.

- Stewart, S., ve Thomas, M. O. J. (2007). Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(7), 927-937.
- Stewart, S. ve Thomas, M.O. (2009). *Linear algebraic snapshots through APOS and embodied, symbolic and formal words of mathematical thinking*. Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 173-188.
- Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2005). University student perceptions of CAS use in mathematics learning 2005. İçinde: Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings Of the 29th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, Pp. 233-240. Melbourne: PME.
- Stewart, S. (2005). *Concerns relating to the CAS use at university level*. Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Held at RMIT, Melbourne, 7-9 July.
- Thomas, M. O. J. ve Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Formal, symbolic and embodied thinking. *Math Ed Res J*, 23, 275–296.
- Stewart, S., ve Thomas, M. O. J. (2006). *Student thinking about eigenvalues and eigenvectors: Formal, Symbolic and embodied notions*. Proceedings of the 29th annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Stewart, S. ve Thomas, M. O. J. (2009a). A framework for mathematical thinking: the case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 951–961.
- Stewart, S. ve Thomas M. O. J. (2009b). *Linear algebraic snapshots Through APOS and embodied, symbolic and formal words of mathematical thinking*. Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Sudeep, U. (2018). Use of 3D Hologram technology in engineering education. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (Iosr-Jmce)* Issn: 2278-1684, Pp: 62-67

- Gol Tabaghi, S. ve Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, 18, 149–164.
- Tall, D. (1996). *Advanced mathematical thinking & The computer*. Proceedings Of the 20th University Mathematics Teaching Conference, Shell Centre, Nottingham, Pp. 1-8.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, A. ve Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.
- Trigueros, M., ve Oktaç, A. (2005). *La theorie APOS et l'enseignement de l'algebre lineaire. annales de didactique et de sciences cognitives*. Revue internationale de didactique des mathematiques (Vol. 10, pp. 157–176). IREM de Strasbourg, Universite Louis Pasteur.
- Trigueros, M., Oktaç, A., ve Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. İçinde: D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2359–2368). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.
- Turan Güntepe, E. (2020). *Etkileşimli hologram teknolojisiyle okul öncesi kavramlarının öğretimi*. Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Anabilim Dalı, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Trabzon Üniversitesi, Trabzon.
- Turğut M. (2019). Sense-making regarding matrix representation of geometric transformations in $\mathbb{R}^2$: A semiotic mediation perspective in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 51, 1199–1214.
- Turğut M. (2010). *Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine etkisi*. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Programı Doktora Tezi, İzmir.
- Türk, H. (2020). Fen eğitiminde yenilikçi teknoloji uygulamaları: Dijital hologram örneği. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Wawro, M., Watson K. ve Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM*, 51, 1111-1123.

Wilson, Tracy V. (2010). *How holograms work*. HowStuffWorks, Inc.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zandieh, M., Wawro, M. ve Rasmussen, C. (2017). An example of inquiry in linear algebra: The roles of symbolizing and brokering. *Primus*, 27(1), 96-124.

Zogheib, B., Rabaa'i, A., Zogheib, S. ve Elsayehi, A. (2015). University student perceptions of technology use in mathematics learning. *Journal of Information Technology Education: Research*, 14, 417-438.



EKLER

EK 1. Öğrencinin Akademik Özgeçmişi

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	Dilek HAZAR
E-postası/Web Sayfası	
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce (YDS 83,75, YÖKDİL 85)
Uzmanlık Alanı	Lineer cebir öğretimi, teknoloji destekli öğretim, çoklu temsil temelli öğretim, öğretimde hologram kullanımı, yansıtıcı soyutlama

Öğrenim Bilgileri

	Üniversite	Bölüm/ ABD	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2012
Yüksek Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2014
YL Tez Başlığı	Teknoloji Destekli Çoklu Temsil Temelli Öğretimin Öğrencilerin Lineer Cebir Öğrenimine ve Matematiğe Yönelik Tutumlarına Etkisi		
YL Tez Danışmanı	Prof. Dr. Cenk KEŞAN		

Akademik Eserler

(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.)

Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.

Yazar, İ., Hazar, D., Özer, M. ve Keşan C. (2021). Investigation of Verbs Used by Pre-Service Primary Teachers in The Context of Hierarchy of Needs With The SOM-Ward Method. International Online Journal of Primary Education, 10(1), 239-255.

*Hazar, D. ve Keşan, C. (2021). 3B Hologram Destekli Lineer Cebir Öğretimine İlişkin Öğrenci Görüşleri. International Journal Of New Trends In Arts, Sports & Science Education, 10(3), 195-211.

- Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D., Erkuş, Y. (2016). Achievement Level for Algebraic Reasoning Skills of Seventh Grade Students. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 142-163.
- Kaya, D., İzgiol, D., Keşan, C. (2014). The Investigation of Elementary Mathematics Teacher Candidates Problem Solving Skills According to Various Variables. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 6(2), 295-313.
- Kaya, D., Keşan, C. ve İzgiol, D. (2013). The Effect of Internet Based Education on Student Success in Teaching of 8th Grade Triangles Subject. *Turkish Online Journal of Distance Education-TOJDE*, 14(1), 202-210.
- Keşan C., İzgiol D. (2016)., *Lineer Cebir*. Birleşik Matbaacılık, Basım Sayısı: 2, Sayfa Sayısı 316, ISBN:978-605-83076-0-5, Türkçe (Ders Kitabı)
- * Hazar, D. ve Keşan, C. (2021). Öz Değer-Öz Vektör Kavramını Anlama Düzeylerinin İncelenmesi: 3B Hologram Destekli Öğretim Durumu. 2ND INTERNATIONAL SCIENCE, EDUCATION, ART & TECHNOLOGY SYMPOSIUM (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)
 - * İzgiol, D. ve Keşan, C. (2015). Teknoloji Destekli Çoklu Temsil Temelli Öğretimin Öğrencilerin Matematiğe Yönelik Tutumlarına Etkisi ve Uygulamaya İlişkin Öğrenci Görüşleri. VII. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresi, Muğla, Mayıs, serbest bildiri, Hakemli organizasyon
 - * İzgiol, D., Keşan, C. ve Kaya, D., (2014). Teknoloji Destekli Çoklu Temsil Temelli Öğretime Örnek Bir Uygulama. International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology, Konya, Mayıs, serbest bildiri, <http://2014.icemst.com/706-710>, Uluslararası organizasyon (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)
 - * İzgiol, D. ve Keşan, C. (2014). Teknoloji Destekli Çoklu Temsil Temelli Öğretimin Öğrencilerin Lineer Cebir Başarısına Etkisi. International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology, Konya, Mayıs, serbest bildiri, http://2014.icemst.com/ICEMST_Proceeding.pdf?rnd=615614374,711-715, Uluslararası organizasyon (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)

Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı İkinciliği

TÜBİTAK 2210/A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı 2012/3

TÜBİTAK 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı 2014/2

EK 2. Geçerlik Güvenirlik İzin Belgesi

	T.C. DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ Buca Eğitim Fakültesi	
Sayı : 85316909-399.99-E.43918 Konu : Geçerlik-Güvenirlik Çalışması (Dilek İZGİOL)	13/07/2018	
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ		
İlgi : 04.07.2018 tarih ve 1322 sayılı yazınız.		
Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2014950184 numaralı öğrencisi Dilek İZGİOL Üç Boyutlu Hologram Teknolojileri ve Etkileşimli Matematik Yazılımları Destekli Lineer Cebir Öğretiminin Öğrencilerin Lineer Cebir Kavramlarını Oluşturma Süreçlerine Etkileri konulu tez çalışması kapsamında Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde geçerlik-güvenirlik çalışması yapma isteği uygun görülmüştür.		
Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.		
Prof.Dr. Ercan AKPINAR Dekan V.		
Ekler : 1- Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü yazısı 2- Tez Uygulama Dosyası-Enstitü Etik Kurul Kararı (30 Sayfa)		
 Dokuz Eylül Üniversitesi - Buca Eğitim Fakültesi Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No:5 35150 Buca-İZMİR Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağ: http://bef.deu.edu.tr Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@nsf1.kep.tr	Bilgi için İrtibat: Sevgi TİFTİK Dahili: E-Posta: sevgi.tifitik@deu.edu.tr	
Bu belge 3670 sayılı y. İmza Enstitüsü'ne Prof. Dr. Ercan AKPINAR tarafından 13/07/2018 tarihinde e-imza ile onaylanmıştır. E-imza adresi: http://de-qrulanta.deu.edu.tr / imza@deu.edu.tr / 197.77.66.131 / imza@deu.edu.tr		

EK 3. Geçerlik Güvenirlik Çalışması Bilgilendirilmiş Onam Formu

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURULU

BİLGİLENDİRİLMİŞ ONAM FORMU

Bu formun amacı katılmanız rica edilen araştırma ile ilgili olarak sizi bilgilendirmek ve katılmanız ile ilgili izin almaktır.

Bu kapsamda Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi” başlıklı araştırma “Dilek İzgiol” tarafından **gönüllü katılımcılarla** yürütülmektedir. Araştırma sırasında sizden alınacak bilgiler gizli tutulacak ve sadece araştırma amaçlı kullanılacaktır. Araştırma sürecinde konu ile ilgili her türlü soru ve görüşleriniz için aşağıda iletişim bilgisi bulunan araştırmacıyla görüşebilirsiniz. Bu araştırmaya **katılmama** hakkınız bulunmaktadır. Aynı zamanda çalışmaya katıldıktan sonra çalışmadan **çıkabilirsiniz**. Bu formu onaylamanız, **araştırmaya katılım için onam verdiğiniz anlamına gelecektir.**

Araştırmayla İlgili Bilgiler: Araştırmanın Amacı: vektör uzayı, iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer öz vektörler konusunda sizin yaşadığınız güçlükleri ve bu kavramları zihninizde nasıl oluşturduğunuzu incelemek üzere bu çalışma gerçekleştirilecektir. Çalışmada size problemler yöneltilecek ve çözmeniz istenecektir. Daha sonra gerçekleştirilecek görüşmelerde, problemleri nasıl çözdüğünüzü anlatmanız, süreçte matematiksel düşüncelerinizi dile getirmeniz istenecek ve kamera ile kayıt altına alınacaktır. Her bir kavram için problemleri çözme yaklaşık 90 dakika, görüşmeler yaklaşık 60-90 dakika sürecektir.

Araştırmanın Nedeni: hologram destekli öğretim yeni bir teknoloji destekli öğretim yöntemidir ve öğretimde kullanılmak üzere bir yazılım geliştirilecektir. Bu yeni uygulama ve yazılımın tez araştırması boyunca geçerli ve güvenilir bir şekilde kullanılabilmesi için öğretim ortamında incelenmesi gerekmektedir. Bu sebeple bu çalışmaya ihtiyaç duyulmuştur. Sizle gerçekleştireceğimiz çalışmadan elde edeceğimiz verilere göre, hologram destekli öğretimdeki etkinlikler düzenlenecektir ve problemler uygulanacaktır.

Süresi: problem çözümü 90x4 dakika (farklı günlerde gerçekleştirilecektir), görüşmeler 60x4 dakika

Araştırmanın Yürütüleceği Yer: Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi

Çalışmaya Katılım Onayı:

Katılmam beklenen çalışmanın amacını, nedenini, katılmam gereken süreyi ve yeri ile ilgili bilgileri okudum ve gönüllü olarak çalışma süresince üzerime düşen sorumlulukları anladım. Çalışma ile ilgili ayrıntılı açıklamalar sözlü olarak araştırmacı tarafından yapıldı. Bu çalışma ile ilgili faydalar ve riskler ile ilgili bilgilendirildim.

Bu araştırmaya kendi isteğimle, hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın katılmayı kabul ediyorum.

Katılımcının (Islak imzası ile)

Adı-Soyadı:

İmzası:

Araştırmacının

Adı-Soyadı: Dilek İzgiol

e-posta:

İmzası:

EK 4. Pilot Çalışma İzin Belgesi



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
Buca Eğitim Fakültesi



Sayı : 85316909-399.99-E.7411
Konu : Tez uygulaması

21/01/2020

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 06.01.2020 tarih ve 19 sayılı yazınız.

Enstitünüz İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2014950184 numaralı öğrencisi Dilek İZGİOL'un *Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi* konulu tez çalışması kapsamında Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde pilot çalışma yapma isteği dersleri aksatmamak ve uygulamayı kendisinin takip etmesi koşuluyla uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Ercan AKPINAR
Dekan V.



Dokuz Eylül Üniversitesi – Buca Eğitim Fakültesi
Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No:5 35150 Buca-İZMİR
Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağı: <http://bef.deu.edu.tr>
Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@be01.kep.tr

Bilgi için İletişim:

Sevgi TİFTİK

Dahili:

E-Posta: sevgi.tiflik@deu.edu.tr



Bu belge 5079 sayılı e-İmza Kanununa göre Prof.Dr. Ercan AKPINAR tarafından 21.01.2020 tarihinde e-imzalanmıştır.
Evrakınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden 7B658CCEX3 kodu ile doğrutabilirsiniz.

EK 5. Pilot Çalışma Bilgilendirilmiş Onam Formu

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURULU
BİLGİLENDİRİLMİŞ ONAM FORMU

Bu formun amacı katılmanız rica edilen araştırma ile ilgili olarak sizi bilgilendirmek ve katılmanız ile ilgili izin almaktır.

Bu kapsamda Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi” başlıklı araştırma “Dilek İzgiol” tarafından **gönüllü katılımcılarla** yürütülmektedir. Araştırma sırasında sizden alınacak bilgiler gizli tutulacak ve sadece araştırma amaçlı kullanılacaktır. Araştırma sürecinde konu ile ilgili her türlü soru ve görüşleriniz için aşağıda iletişim bilgisi bulunan araştırmacıyla görüşebilirsiniz. Bu araştırmaya **katılmama** hakkınız bulunmaktadır. Aynı zamanda çalışmaya katıldıktan sonra çalışmadan **çıkabilirsiniz**. Bu formu onaylamanız, **araştırmaya katılım için onam verdiğiniz anlamına gelecektir.**

Araştırmayla İlgili Bilgiler: Araştırmanın Amacı: üç boyutlu hologram destekli öğretimde lineer cebir kavramlarının oluşturulma sürecinin incelenmesidir. Vektör uzayı gibi soyut ve öğrencilerin anlamakta güçlük çektiği lineer cebir kavramlarının öğretiminde şekilsel temsillerin kullanımı ile öğrencilerin bu kavramları daha iyi öğrenmeleri mümkündür (Stewart, 2008). R^2 uzayında lineer cebir kavramlarının uygulamalarını kolaylıkla yapan öğrenciler, R^3 uzayındaki uygulamalarda güçlük çekmektedirler. R^3 uzayındaki uygulamaların şekilsel temsilleri iki boyutlu düzlem konumundaki tahta ya da bilgisayar ortamında sunulduğunda üç boyutlu algıyı hissettirememektedir. Bu sebeple lineer cebir öğretimi hologram modelleriyle desteklenerek üç boyutlu şekillerle birlikte öğrencilerin öğrenme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Genel amacı bu şekilde olan tez çalışmasında kullanılacak hologram destekli ve APOS teorisine dayalı lineer cebir dersinin öğretim planlarının uygulanabilirliği ve araştırmanın amacına hizmet edip etmediğini belirlemek bu pilot çalışmanın amacıdır.

Araştırmanın Nedeni: hologram destekli öğretim yeni bir teknoloji destekli öğretim yöntemidir ve öğretimde kullanılmak üzere bir yazılım geliştirilmiştir. Bu yeni uygulama ve yazılımın tez araştırması boyunca geçerli ve güvenilir bir şekilde kullanılabilmesi için öğretim ortamında incelenmesi gerekmektedir. Bu sebeple bu pilot çalışmaya ihtiyaç duyulmuştur. Pilot çalışma boyunca kamera ile öğretim süreci kaydedilecektir. Böylece süreçteki uygun/geliştirilmesi gereken durumlar araştırmacı tarafından değerlendirilebilecektir.

Süresi: üç hafta boyunca her hafta üç saatlik lineer cebir dersinde her bir ders 45 dakika olmak üzere: 45x3x3dakika

Araştırmanın Yürütüleceği Yer: Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi

Çalışmaya Katılım Onayı:

Katılmam beklenen çalışmanın amacını, nedenini, katılmam gereken süreyi ve yeri ile ilgili bilgileri okudum ve gönüllü olarak çalışma süresince üzerime düşen sorumlulukları anladım. Çalışma ile ilgili ayrıntılı açıklamalar sözlü olarak araştırmacı tarafından yapıldı. Bu çalışma ile ilgili faydalar ve riskler ile ilgili bilgilendirildim.

Bu araştırmaya kendi isteğimle, hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın katılmayı kabul ediyorum.

Katılımcının (Islak imzası ile)

Adı-Soyadı:

İmzası:

Araştırmacının

Adı-Soyadı: Dilek İzgiol

e-posta:

İmzası:

EK 6. Asıl Uygulama İzin Belgesi



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
Buca Eğitim Fakültesi



Sayı : 85316909-399.99-E.27767
Konu : Dilek İZGİOL

12/03/2020

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 06.01.2020 tarih ve 19 sayılı yazınız.

İlgi yazı gereği, Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2014950184 numaralı öğrencisi Dilek İZGİOL'un "Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde tez uygulaması yapma isteği dersleri aksatmamak ve uygulamayı kendisinin takip etmesi koşuluyla uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Ercan AKPINAR
Dekan V.



Dokuz Eylül Üniversitesi – Buca Eğitim Fakültesi
Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No:5 35150 Buca-İZMİR
Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağ: <http://bef.deu.edu.tr>
Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@bu01.kep.tr
Bu belge 5070 sayılı e-İmza Kanununa göre Prof.Dr. Ercan AKPINAR tarafından 12.03.2020 tarihinde e-imzalanmıştır.
Evrakınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden 05B2FBDBXF kodu ile doğrulayabilirsiniz.

Bilgi için İrtibat:
Sevgi TİFTİK

Dahili:

E-Posta: sevgi.tifitik@deu.edu.tr



EK 7. Asıl Uygulama Bilgilendirilmiş Onam Formu

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURULU

BİLGİLENDİRİLMİŞ ONAM FORMU

Bu formun amacı katılmanız rica edilen araştırma ile ilgili olarak sizi bilgilendirmek ve katılmanız ile ilgili izin almaktır.

Bu kapsamda “Üç Boyutlu Hologram Destekli Öğrenmede Lineer Cebir Kavramlarının Oluşturulma Sürecinin İncelenmesi” başlıklı araştırma “Dilek İZGİOL” tarafından **gönüllü katılımcılarla** yürütülmektedir. Araştırma sırasında sizden alınacak bilgiler gizli tutulacak ve sadece araştırma amaçlı kullanılacaktır. Araştırma sürecinde konu ile ilgili her türlü soru ve görüşleriniz için aşağıda iletişim bilgisi bulunan araştırmacıyla görüşebilirsiniz. Bu araştırmaya **katılmama** hakkınız bulunmaktadır. Aynı zamanda çalışmaya katıldıktan sonra çalışmadan **çıkabilirsiniz**. Bu formu onaylamanız, **araştırmaya katılım için onam verdiğiniz** anlamına gelecektir.

Araştırmayla İlgili Bilgiler:

Araştırmanın Amacı: Üç boyutlu hologram destekli öğretimde lineer cebir kavramlarının oluşturulma sürecinin incelenmesidir. Vektör uzayı gibi soyut ve öğrencilerin anlamakta güçlük çektiği lineer cebir kavramlarının öğretiminde şekilsel temsillerin kullanımı ile öğrencilerin bu kavramları daha iyi öğrenmeleri mümkündür (Stewart, 2008). R^2 uzayında lineer cebir kavramlarının uygulamalarını kolaylıkla yapan öğrenciler, R^3 uzayındaki uygulamalarda güçlük çekmektedirler. R^3 uzayındaki uygulamaların şekilsel temsilleri iki boyutlu düzlem konumundaki tahta ya da bilgisayar ortamında sunulduğunda üç boyutlu algıyı hissettirememektedir. Bu sebeple lineer cebir öğretimi hologram modelleriyle desteklenerek üç boyutlu şekillerle birlikte öğrencilerin öğrenme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmanın Nedeni: Bu çalışma hologram destekli öğretimde iç çarpım uzayı, lineer dönüşüm ve öz değer-öz vektör kavramlarını öğrenme süreçlerinizin nasıl gerçekleşeceğini incelemek amacıyla gerçekleştirilecektir. Bu nedenle üç boyutlu modelleri boşlukta oluşturmamıza yarayan hologram cihazı ve araştırma kapsamında geliştirilen hologram sistemi kullanılarak lineer cebir öğretimi gerçekleştirilecektir. Yeni geliştirilen bu öğretim deneyinde lineer cebir kavramlarının öğrenirken geometrik anlamlarını da gerçeğe çok yakın üç boyutlu görüntü elde etmemizi sağlayan teknolojik imkanlarla görebileceksiniz. Bu süreç boyunca hem yukarda bahsedilen kavramların öğretimi hologram ve etkinlik-sınıf tartışması-ev ödevleri döngüsü destekli gerçekleştirilecek, hem de kavramlara ilişkin problemler çözmeniz istenecektir. Daha sonra problemlere verdiğiniz yanıtlar üzerinden konuyu nasıl öğrendiğinizi daha ayrıntılı inceleyebilmek için sizle görüşme yapılacak ve video ile kayıt altına alınacaktır. Böylece hem ders sırasındaki söylemlerinizi hem sorulara verdiğiniz yanıtlar incelenerek lineer cebir kavramlarını nasıl oluşturduğunuz incelenecektir.

Süresi: dört hafta boyunca her hafta üç saatlik lineer cebir dersinde her bir ders 45 dakika olmak üzere; 45x3x4 dakika

Araştırmanın Yürütüleceği Yer: Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi (matematik eğitimi derslikleri)

Çalışmaya Katılım Onayı:

Katılmam beklenen çalışmanın amacını, nedenini, katılmam gereken süreyi ve yeri ile ilgili bilgileri okudum ve gönüllü olarak çalışma süresince üzerime düşen sorumlulukları anladım. Çalışma ile ilgili ayrıntılı açıklamalar sözlü olarak araştırmacı tarafından yapıldı. Bu çalışma ile ilgili faydalar ve riskler ile ilgili bilgilendirildim.

Bu araştırmaya kendi isteğimle, hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın katılmayı kabul ediyorum.

Katılımcının (İslak imzası ile)

Adı-Soyadı:

İmzası:

Araştırmacının

Adı-Soyadı: Dilek İzgiol

e-posta:

İmzası:

EK 8. Vektör Uzayı Problemleri

1. $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1, x_2, x_3 > 0\}$ ve

$y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$x \oplus y = (x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3) \text{ ve } \lambda \odot x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, x_3^\lambda)$$

işlemlerine göre V vektör uzayı belirtir mi? Gösterin.

- $x = (1, 2, 1)$ ve $y = (2, 1, 3)$ vektörleri lineer bağımsız mıdır?
- $x = 1$ düzlemi üzerindeki vektörlerin oluşturduğu alt uzay W olsun. W nin bir vektörünü yazın.
- W nin elemanı olan $x = (1, 2, 4)$ vektörü için $-x$ i bulun?
- W nin lineer bağımsız iki vektörünü yazın.
- W uzayının tabanını bulun.

2. $V = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_3^2\}$

$K = \mathbb{Z}_3$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere;

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda \odot x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

V, K cismi üzerinde vektör uzayı mıdır?

- 3 elemandan oluşan vektör uzayı var mıdır? Gösterin.
- 1 elemandan oluşan vektör uzayı var mıdır? Gösterin.

4. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & d \\ c & b \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2} : c = d = 0, a, b \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ ve $y = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$

$$x \oplus y = x \cdot y \text{ (matris çarpımı)}$$

olmak üzere V nin K üzerinde vektör uzayı olabilmesi için Skalerle Çarpma İşlemi tanımlayın.

5. $x \oplus y = (x_1 y_1, x_2 y_2, 0)$ ve $\lambda \odot x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, 0)$

işlemlerine göre vektör uzayı belirten V kümesini bulun.

bulduğunuz V den başka kümeler bu işlemlere göre vektör uzayı belirtir mi? Gösterin.

6. $\mathbb{R}^2$ üzerinde vektörel toplama ve K cismi ile birlikte skalerle çarpma işlemleri tanımlayın. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^2$ nin vektör uzayı belirttiğini gösterin.

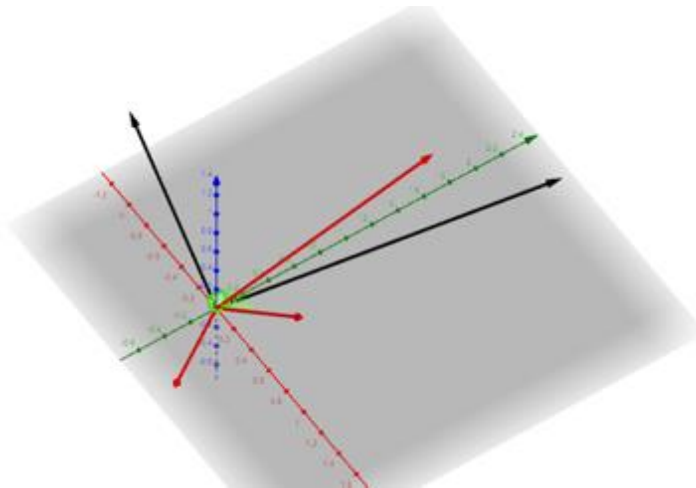
(Birinci, ikinci ve dördüncü soruları araştırmanın pilot çalışması sonrasında pilot çalışma grubundaki öğrenciler, üçüncü, beşinci ve altıncı soruları asıl çalışma sonrasında asıl çalışma grubundaki öğrenciler yanıtlamıştır.)

EK 9. Vektör Uzayı Problemlerini Değerlendirme Rubriği

Eylem	Süreç	Nesne	Intra
1 Kümenin belli elemanlarına vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini uygulayabilir	Kümenin tüm elemanlarına vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini uygulayabilir	Kümenin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre 10 aksiyomu sağladığını gösterebilir.	Alt uzay-lineer bağımsızlık-taban gibi kavramlarla vektör uzayını ilişkilendirebilir
2 Kümenin belli elemanlarına vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini uygulayabilir	Kümenin tüm elemanlarına vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini uygulayabilir	Kümenin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre 10 aksiyomu sağladığını gösterebilir.	
3 Kümeyi ve ikili işlemleri tanımlayıp bazı elemanlarına ikili işlemleri uygulayabilir	Tanımladığı ikili işlemleri kümenin tüm elemanlarına uygulayabilir	Tanımladığı kümenin ikili işlemlere göre 10 aksiyomu sağladığını gösterebilir.	
4 İkinci işlemi tanımlayıp kümenin belli elemanlarına uygulayabilir.	Tanımladığı işlemin kümenin tüm elemanları üzerindeki uygulamasını yapabilir.	Tanımladığı işlemin verilen vektörel toplama işlemi ile birlikte 10 aksiyomu sağladığını gösterebilir.	
5 Kümeyi belirleyip işlemleri bazı elemanlarına uygulayabilir	Verilen işlemleri kümenin tüm elemanlarına uygulayabilir	Belirlediği kümenin verilen ikili işlemlere göre 10 aksiyomu sağladığını gösterebilir	
6 R^2 den vektörler seçip tanımladığı işlemleri uygulayabilir	R^2 nin tüm elemanlarına tanımladığı işlemleri uygulayabilir	R^2 nin tanımladığı işlemlere göre 10 aksiyomu sağladığını gösterebilir.	

EK 10. İç Çarpım Uzayı Problemleri

- 1) İç çarpım nedir? Kendi cümlelerinizle tanımlayınız.
- 2) İç çarpım uzayı nedir? Kendi cümlelerinizle tanımlayınız.
- 3) R^2 üzerinde tanımlanan $\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 5x_2y_2$ fonksiyonu ile R^2 iç çarpım uzayı belirtir mi? Gösterin.
- 4) R^2 vektör uzayı üzerinde iç çarpım tanımlayıp, iç çarpım olduğunu gösterin.
- 5) R^3 vektör uzayı üzerinde tanımlı standart öklit iç çarpımına göre, $(1,2,1)$ vektörünün $(1,0,1)$ vektörü üzerindeki iz düşümünü bulun.
- 6) $[0,1]$ birim aralığı üzerinde tanımlı bütün reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı üzerinde iç çarpım tanımlayıp, iç çarpım olduğunu gösterin.
- 7) Pisagor teoremini iç çarpım kullanarak ispatlayınız.
- 8) x vektörü u ve v vektörlerine dik ise u ve v vektörlerinin gerdiği vektör uzayına da diktir. Gösterin.
- 9) 3. Sorudaki iç çarpıma göre $(1,1)$ ve $(2,1)$ vektörleri arasındaki açıyı hesaplayın.
- 10) 3. Sorudaki iç çarpıma göre $(2,3)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayın.
- 11) R^3 vektör uzayı üzerinde tanımlı standart öklit iç çarpımına göre, $(1,2,1)$ ve $(1,0,1)$ vektörlerinin gerdiği uzayın birim-dik tabanını bulun.
- 12)



Şekilde kırmızı vektörler R^3 uzayını vektörleri, siyah vektörler ve soldaki kırmızı vektör ise birbirlerine dik konumdadır. Sizce bu vektörler arasındaki ilişki iç çarpım ile açıklanabilir mi?

- 13) Gram Schmidt yöntemi sonucunda elde edilen vektörler x ve y ise, ilk başta kullanılan vektörleri x ve y cinsinden yazınız.
- 14) İç çarpım kavramına ilişkin bir kavram haritası çizin.

EK 11. İç Çarpım Uzayı Problemlerini Değerlendirme Rubriği

	Eylem	Süreç	Nesne	Intra	Inter	Trans
1	Rutin tanım yapar	Özelliklerin anlamını açıklayarak tanım yapar.				
2	Belli vektörleri kullanarak fonksiyonun sonucunu bulabilir	Tüm vektörler için fonksiyonun sonucunu bulabilir	Tüm vektörler için aksiyomların gerçekleştiğini gösterebilir.			
3	Fonksiyonu tanımlar ve belli vektörleri kullanarak fonksiyonun sonucunu bulabilir	Tüm vektörler için fonksiyonun sonucunu bulabilir	Tüm vektörler için aksiyomların gerçekleştiğini gösterebilir.			
4	Vektörü hesaplayarak bulabilir.	Geometrik olarak gösterebilir.				
5						Fonksiyonu tanımlayıp iç çarpım olduğunu gösterebilir. (bu aşamada olmasının sebebi rutin olmayan bir fonksiyon tanımlayacaklar)
6						
7	İç çarpım fonksiyonu yazabilir ve belli vektörlere uygulayabilir.	İç çarpım fonksiyonunu tüm vektörlere uygulayabilir.	Fonksiyonun iç çarpım aksiyomlarını sağladığını gösterebilir.	Geometrik temsilini kullanarak teoremi iç çarpım ile ifade edebilir.	Teoremi iç çarpım ile ispatlayabilir.	
8	Belli uzay ve vektörler için koşulun sağlandığını gösterebilir	Uzayda belli özellikleri taşıyan vektör grupları için durumun gerçekleştiğini gösterebilir.	Tüm iç çarpım uzaylarında durumu ifade eden cebirsel ifadeyi yazıp ispatlayabilir			
9	Hesaplamayı yapabilir.					
10	Hesaplamayı yapabilir.					

1 1	Vektörler ile gerilen uzayı bulup iç çarpımı kullanarak tabanı bulabilir.		
1 2	R^3 vektörler olarak yorumlar	te Birbirine dik olan vektörleri iç çarpım ile ilişkilendirerek açıklar.	Gram-schmidt teoremi ile durumu açıklayabilir.
1 3	Vektörlere sayı vererek bulmaya çalışır	Farklı uzaylarda farklı vektörler olabileceğini düşünerek vektörleri genellemeye çalışır	Tüm uzaylarda geçerli olabilecek girdi vektörlerini tanımlayabilir.
1 4	Temel kavramlara yer verebilir	Açı-uzunluk-geometrik çizimler gibi durumlara yer verebilir	Kavramlar arasındaki ilişkileri açıklayarak haritayı oluşturur

EK 12. Lineer Dönüşüm Problemleri

1. Lineer dönüşüm nedir? Kendi cümlelerinizle tanımlayınız.
2. $L: R^2 \rightarrow R^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{bmatrix} \cdot x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün lineer dönüşüm olup olmadığını gösterin.
3. $L: R^3 \rightarrow R^2$ vektör uzayları üzerinde x-y düzlemine göre iz düşüm dönüşümünü tanımlayın ve lineer dönüşüm olup olmadığını gösterin.
4. L lineer dönüşümün tersinin olabilmesi için gerekli koşullar nelerdir?
5. $L: Z_2^2 \rightarrow Z_3^2$ vektör uzayları üzerinde lineer dönüşüm tanımlayın ve lineer olduğunu gösterin. (Z_2^2 uzayı için tanımlı işlemler; $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ve $r \cdot x = (rx_1, rx_2)$,
6. Z_3^2 uzayı için tanımlı işlemler $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ ve $r \cdot x = (rx_1, rx_2, rx_3)$)
 $L_1: R^2 \rightarrow R^2$ yansıma dönüşümü $L(x) = (x_1, -x_2)$
 $L_2: R^2 \rightarrow R^2$ genişleme dönüşümü; $L(x) = (rx_1, rx_2)$ $r > 1$
 Lineer dönüşümleri için:
 a) $L_1 + L_2$ bulun ve lineer dönüşüm müdür gösterin.
 b) $L_1 \circ L_2 = L_3$ bulun ve lineer dönüşüm müdür gösterin.
 c) L_3 ün çekirdek kümesini bulun.
 d) L_3 ün görüntü kümesini bulun.
 e) $\text{Gör}L_3$ ün tabanını yazın.
 f) $T = \{(1,2), (-1,1)\}$ tabanına göre koordinatları $L(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_T$ olan görüntü vektörü için $S = \{(1,1), (1,0)\}$ tabanına göre x_S vektörünü bulun.
 g) L_3 ün öz vektörlerini bulun.
7. Lineer dönüşüm kavramına yönelik kavram haritası çizin.

EK 13. Lineer Dönüşüm Problemlerini Değerlendirme Rubriği

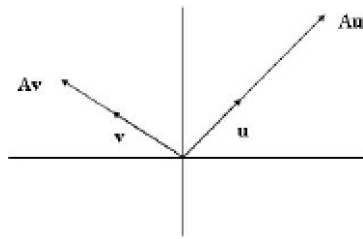
Eylem	Süreç	Nesne	Intra	Inter
1	Rutin tanım yapabilir	İki işlem için verilen doğrusallık özelliğini eş zamanlı ilişkilendirerek tanım yapabilir. Geometrik olarak bu durumu göstererek tanım yapabilir.		
2	Belli vektörlerin verilen dönüşüme göre görüntüsünü bulabilir, belli vektörleri kullanarak vektörel toplama ve skalerle çarpma özelliklerinin sağlandığını gösterir.	Tüm vektörlerin görüntüsünü bulabilir, tüm vektörler için vektörel toplama ve skalerle çarpma özelliklerinin sağlandığını gösterir.		
3	Dönüşümü belirleyip belli vektörler için özellikleri sağladığını gösterebilir	Dönüşümün tüm vektörleri için doğrusallık özelliğinin sağlandığını gösterebilir.		
4	Koşullar verip dönüşümün tersini bulabilir, bazı vektörlerin görüntüsünün tersini bulabilir.	Tüm vektörlerin görüntüsünün tersini bulabilir.	Koşulları gerekçelendirerek açıklayabilir.	
5		Verilen uzaylar üzerinde lineer dönüşüm tanımlayıp doğrusallığı gerçekleyebilir.		
6		Dönüşümlerin toplama ve birleşim dönüşümlerini bulup lineer olduğunu gösterebilir	Çekirdek ve görüntü kümelerini bulabilir	Taban-farklı taban koordinatları-özdeğer hesaplamalarını açıklayabilir.

7	Temel kavramlar ile haritayı oluşturur.	Doğrusallık özelliğine eşzamanlı olarak haritada yer verir.	Dönüşümlerle ilgili işlemler ile ilgili kavramlar, dönüşümün tersi gibi kavramları açıklayarak haritada yer verebilir.	Çekirdek, görüntü kümesi gibi kavramlara yer verebilir.	Taban-boyut-özdeğerler gibi kavramlara yer verebilir.
---	---	---	--	---	---

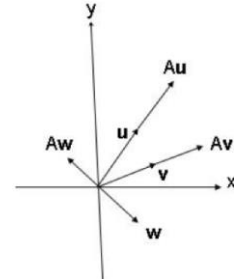


EK 14. Öz Değer-Öz Vektör Problemleri

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ L lineer dönüşümünün matrisi olsun.
 - a) A'nın özdeğerlerini ve özvektörlerini bulun. (Bulduğunuz özdeğerlerin ve özvektörlerin sayısını belirtin)
 - b) Özvektörlerden oluşan B matrisi ile A matrisi arasında, B ile L arasında nasıl bir ilişki vardır?
 - c) Özvektörlere karşılık gelen öz uzaylarını bulun.
 - d) Öz uzayın lineer bağımsız vektör kümesini yazın.
 - e) Öz uzayı geren vektör kümesini bulun.
 - f) Öz uzayın tabanını ve öz uzayın boyutunu bulun.
2. $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ifadesi için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.
 - a) Eşitliğin sağındaki işlem nedir?
 - b) Eşitliğin solundaki işlem nedir?
 - c) 3 bize neyi anlatıyor?
 - d) Yukarıdaki ifadeyi geometrik olarak gösterin.
 - e) Eşitliğin sağındaki ve solundaki ifadeler nasıl birbirine eşit oluyor?
 - f) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve 3 arasındaki ilişki nedir?
 - g) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve A arasındaki ilişki nedir?



Şekil 1



Şekil 2

3.
 - a) Şekil 1'deki vektörler hangi durumu anlatıyor?
 - b) Şekil 2'deki vektörler hangi durumu anlatıyor? Bu durum mümkün mü?
4. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadığını belirtin. Sebebinizi açıklayın.
 - a) A matrisinin n farklı kökü varsa köşegenleştirilebilir.
 - b) A simetrik matris ise köşegenleştirilebilir.
 - c) A tekil matris ise sıfır öz değeridir.
 - d) A matrisi köşegenleştirilebilir ise A^T ve A^n de köşegenleştirilebilir.
5. Öz değerler ve öz vektörleri kendi cümlelerinizle tanımlayın.
6. Öz değerler ve öz vektörler için kavram haritası çizin.
7. Öz değerler ve öz vektörler ile lineer dönüşüm arasında nasıl bir ilişki vardır?
8. Öz değerler ve özvektörler ile vektörü skalerle çarpma işlemi arasında nasıl bir ilişki vardır?

EK 15. Öz Değer-Öz Vektör Problemlerini Değerlendirme Rubriği

Eylem	Süreç	Nesne
1 Öz değer, öz vektörleri, öz uzayı, öz uzayın tabanı, geren kümeyi, lineer bağımsız vektör kümesini bulabilir	Öz değerlerin ve öz vektörlerin sayısını belirterek anlamını bulabilir.	B-A ve B-L arasındaki ilişkiyi açıklayabilir.
2 Eşitliğin sağındaki-solundaki işlemleri, A-3 ve vektörler arasındaki ilişkiyi ikili işlemler ile açıklayabilir.	Eşitliğin geometrik temsilini çizer ve açıklayabilir.	Eşitliğin sağındaki-solundaki işlemler sonucunda vektör edildiğini, bu iki ifadenin nasıl eşit olduğunu, A-3 ve vektörler arasındaki ilişkiyi öz değer-öz vektörlerin tanımını kullanarak açıklayabilir.
3 Şekilleri R^2 de verilmiş vektörler olarak açıklayabilir	A.u, A.v ve A.w vektörlerinin u, v ve w vektörlerinin görüntüsü olduğunu belirtebilir.	Verilen geometrik şekilleri öz değer-öz vektör-lineer dönüşüm-görüntü vektörü kavramlarını kullanarak açıklayabilir, Şekil 2' deki durumu lineer denklem sistemi çözümü ile ilişkilendirerek açıklayabilir.
4 Belli A matrisleri ile verilen durumu açıklayabilir	Tüm A matrisleri için durumun gerçekleştiğini açıklayabilir.	
5 Rutin tanım yapabilir.	Sonsuz sayıda öz vektör olduğunun ve geometrik anlamının farkında olarak tanım yapabilir.	Öz değer ve öz vektörlerin anlamını açıklayabilir.
6 Temel kavramları kullanarak harita oluşturabilir	Geometrik anlamını haritada gösterebilir	Öz değer ve öz vektörlerin anlamına haritada yer verebilir
7		Öz değer ve öz vektörlerin anlamını kullanarak açıklayabilir

EK 16. Görüşme Formu

1-GeoGebra uygulamaları ve HOLOGRAM modelleri destekli lineer cebir öğretiminde yaşadığınız öğrenme süreciniz ile ilgili olumlu düşünceleriniz nelerdir?

2- GeoGebra uygulamaları ve HOLOGRAM modelleri destekli lineer cebir öğretiminde yaşadığınız öğrenme süreciniz ile ilgili olumsuz düşünceleriniz nelerdir?



EK 17. HoloDEU Yazılımının Pilot Çalışmasının Ders Planı

Vektör Uzayı Ders Planı ve Kullanılan 3d Hologram Modelleri

ETKİNLİKLER (ACTIVITIES)

Z_4 cisim midir? İnceleyiniz. Z_4 kaç elemanlıdır?

Z_5 cisim midir? İnceleyiniz. Z_5 kaç elemanlıdır?

Z_5^2 cisim midir? İnceleyiniz. Z_5^2 kaç elemanlıdır?

R^2 cisim midir? İnceleyiniz. R^2 kaç elemanlıdır?

GeoGebra-HoloDEU uygulamaları;

--- R^2 geometri penceresinde;

1. u vektörü çiziniz.
2. u vektörünün bileşenlerini inceleyiniz.
3. v vektörü çiziniz.
4. $u+v$ vektörünü çiziniz.
5. $v+u$ vektörünü çiziniz.
6. w vektörü çiziniz.
7. $u+(v+w)$ vektörünü çiziniz.
8. $(u+v)+w$ vektörünü çiziniz.
9. u vektörünü neyle toplarsak u elde edilir
10. u vektörü ile neyi toplarsak sıfır vektörü elde edilir.
11. $r.u$ vektörü çiz
12. u ile ilişkisi ne
13. $r(u+v)$ çiz
14. $r.u+r.v$ çiz
15. karşılaştır
16. r ve k skalerleri için $(r+k).u$ çiz
17. $r.u+k.u$ çiz
18. $r.(k.u)=(r.k).u$ çiz
19. u vektörünü neyle çarparsak u vektörünü elde ederiz.

--- R^3 geometri penceresinde;

1. u vektörü çiz
2. u vektörünü incele
3. v vektörü çiz
4. $u+v$ vektörünü çiz
5. $v+u$ vektörünü çiz

6. w vektörü çiz
7. $u+(v+w)$ vektörünü çiz
8. $(u+v)+w$ vektörünü çiz
9. u vektörünü neyle toplarsak u elde edilir
10. u vektörü ile neyi toplarsak sıfır vektörü elde edilir.
11. $r.u$ vektörü çiz
12. u ile ilişkisi ne
13. $r(u+v)$ çiz
14. $r.u+r.v$ çiz
15. karşılaştır
16. r ve k skalerleri için $(r+k).u$ çiz
17. $r.u+k.u$ çiz
18. $r.(k.u)=(r.k).u$ çiz
19. u vektörünü neyle çarparsak u vektörünü elde ederiz.

Alıştırmalar (Exercises)

Z_5 vektör uzayı mıdır? İnceleyiniz.

Z_5^2 vektör uzayı mıdır? İnceleyiniz.

C^2 vektör uzayı mıdır? İnceleyiniz.

P_3 vektör uzayı mıdır? İnceleyiniz.

$$K = Z_5 \quad V = \{(x, x) : x \in K\}$$

$$K = Z_5 \quad V = \{(x, 0) : x \in K\}$$

$$K = Z_5 \quad V = \{(x, 2) : x \in K\}$$

$$K = \{0\} \quad V = Z_5^2$$

$$K = Z_5 \quad V = Z_5^2$$

$$K = Z_5 \quad V = Z_2^3$$

$$K = Z_5 \quad V = Z_5^2 \quad x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2) \quad \lambda . x = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$K = Z_5 \quad V = Z_5^2 \quad x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2) \quad \lambda . x = (y_1^{x_1}, y_2^{x_2})$$

$$K = R \quad V = R^3$$

$$K = R \quad V = C$$

$$K = R \quad V = C^n$$

$$K = R \quad V = \{(x, y, 0) : x, y \in R\}$$

$$K = \{-1, 1\} \quad V = K^5$$

$$K = R \quad V = R^2 - \{(0, 0)\} \quad x + y = (x_1 y_1, x_2 y_2) \quad k . x = (x_1^k, x_2^k)$$

$$K = R \quad \text{ve} \quad V = \{x\} \text{ tek vektörden oluşan } V, +: v + v = v \quad \cdot: k . v = v$$

vektör uzayı mıdır, değil ise sağlamayan aksiyomları açıklayın.

$K = \mathbb{R}$ $V = \{(t, -t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ V geometrik olarak ne belirtir, GeoGebra da gösterin.

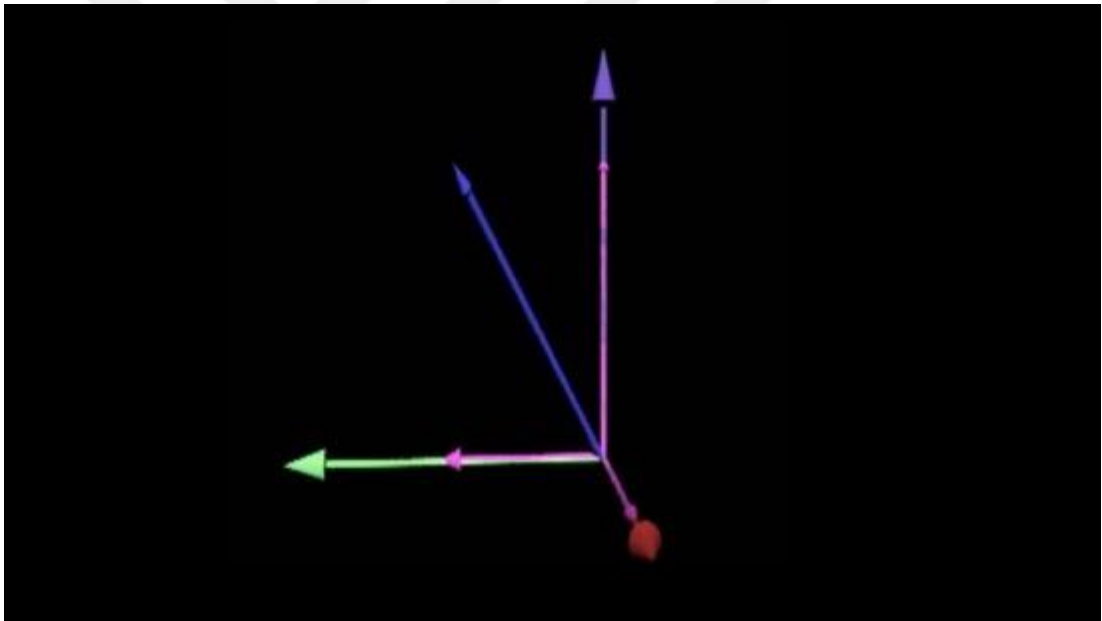
$K = \mathbb{R}$ $V = \{(tx_1, -tx_2, 2tx_3) : x_1, x_2, x_3, t \in \mathbb{R}\}$ V geometrik olarak ne belirtir, GeoGebra da gösterin.

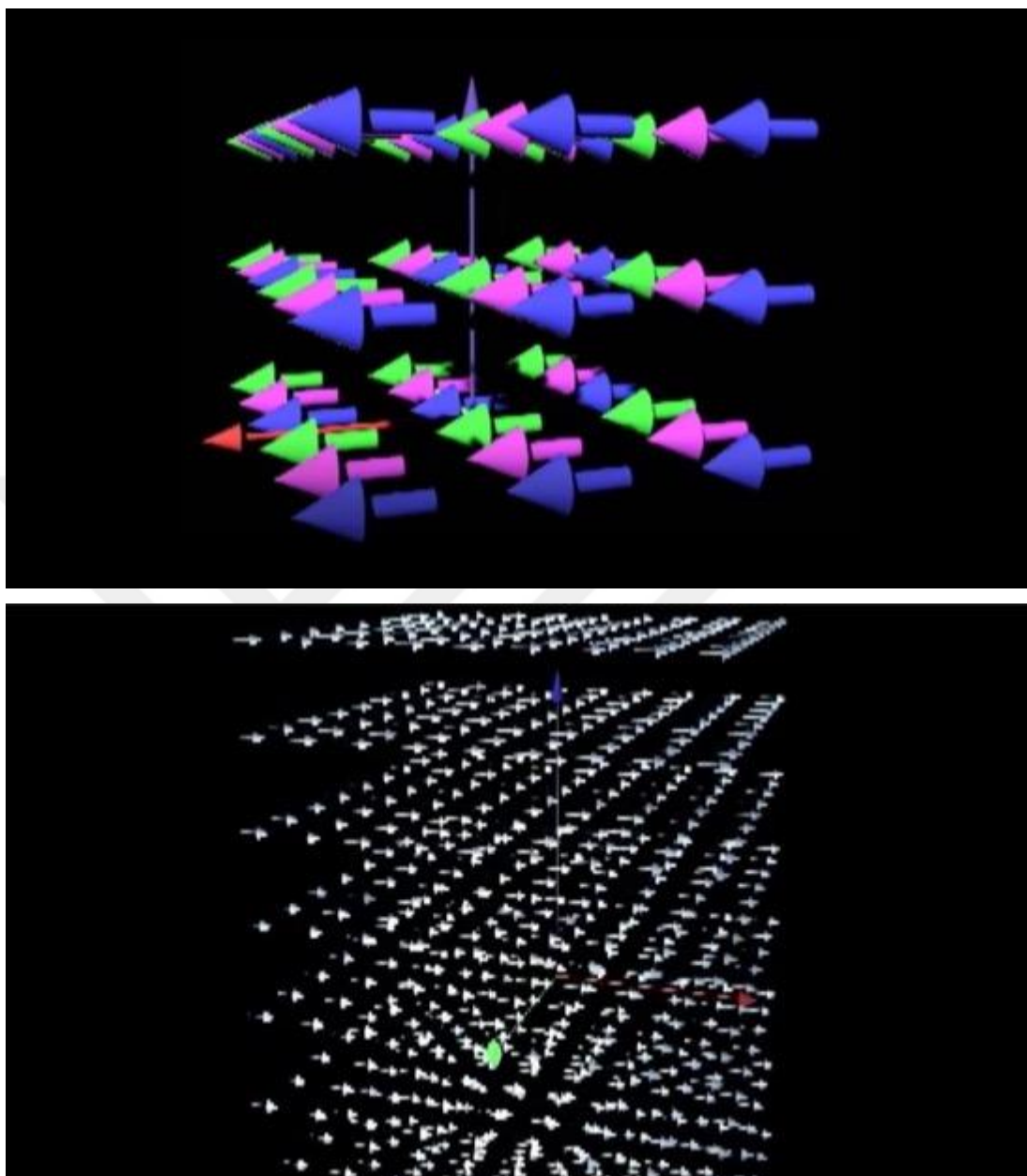
$K = \mathbb{R}$ $V = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ V geometrik olarak ne belirtir, GeoGebra da gösterin.

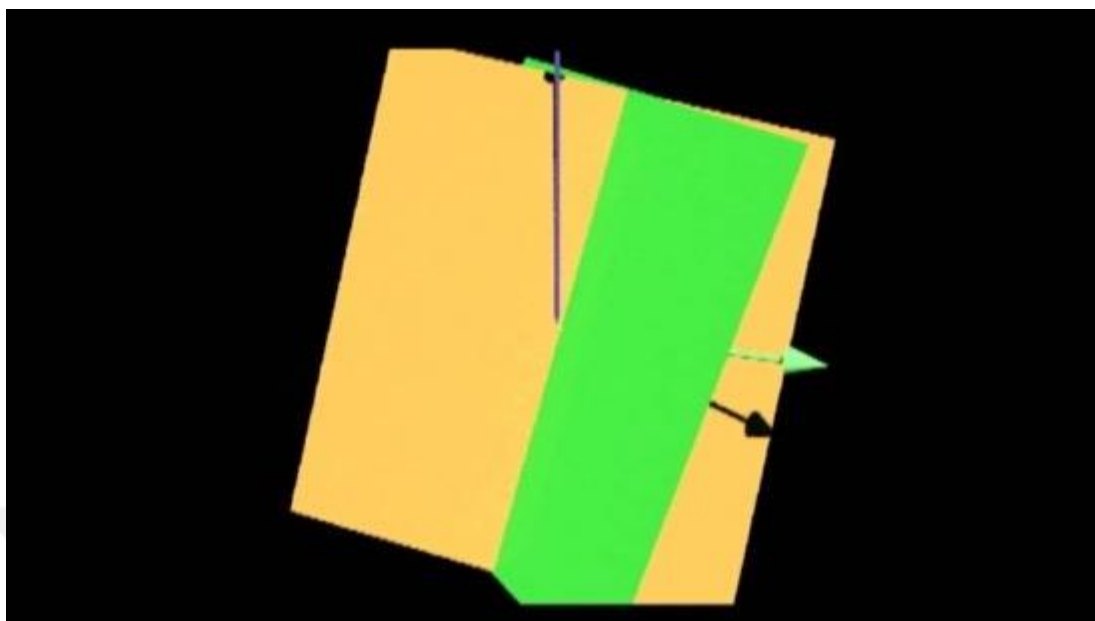
$K = \mathbb{R}$ $V = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

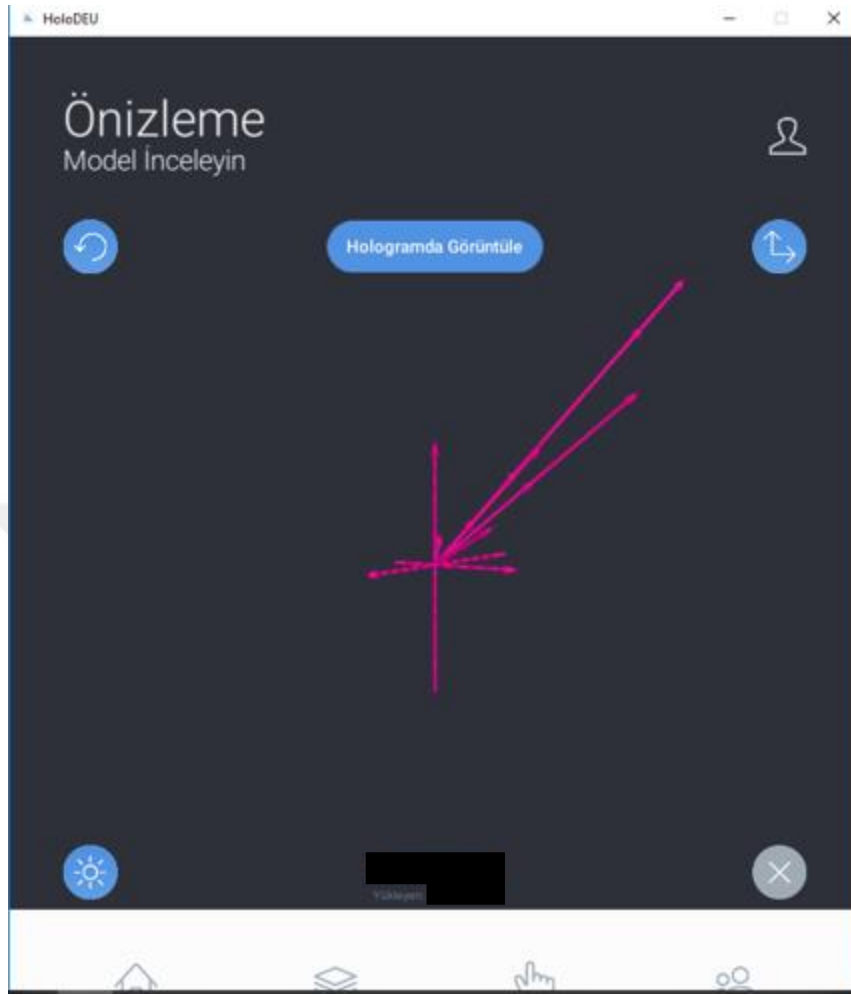
$K = \mathbb{R}$ $V = \{(x_1, x_2) : x_1 \cdot x_2 = 1, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

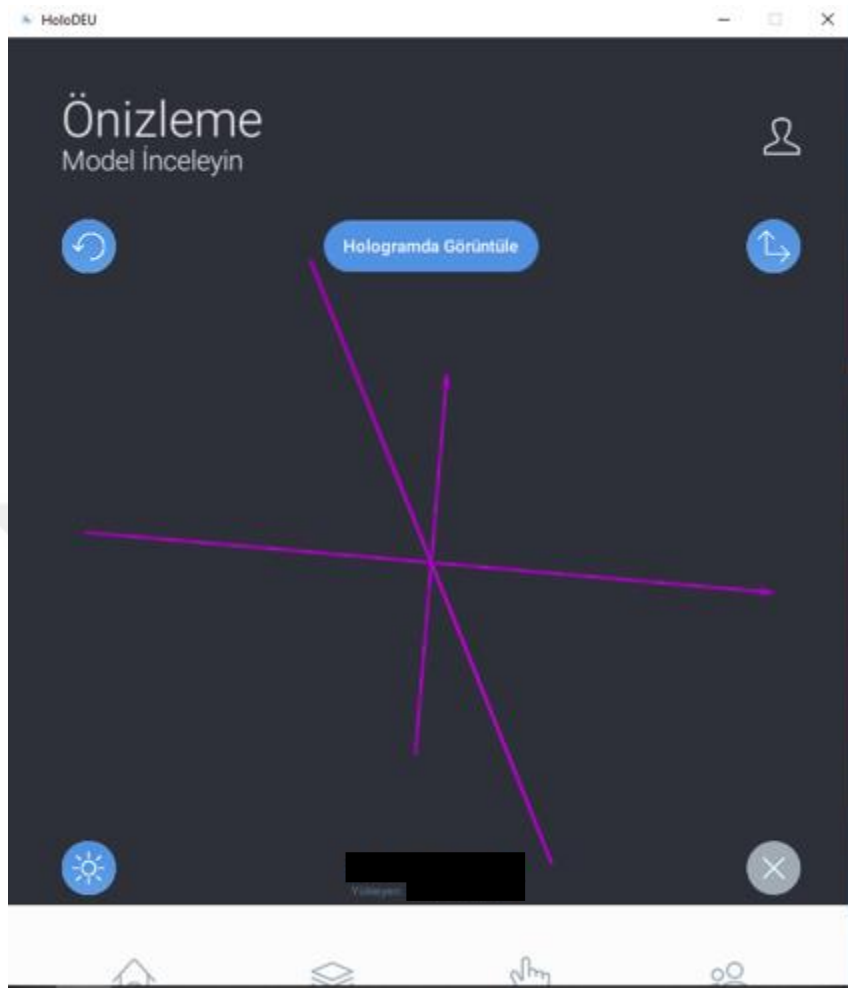
$K = \mathbb{R}$ $V = P_2 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0\}$











**EK 18. Pilot Çalışmada Vektör Uzayı Problemlerindeki Öğrenci Cevaplarının APOS
Teorisine Göre Çözümlemesi**

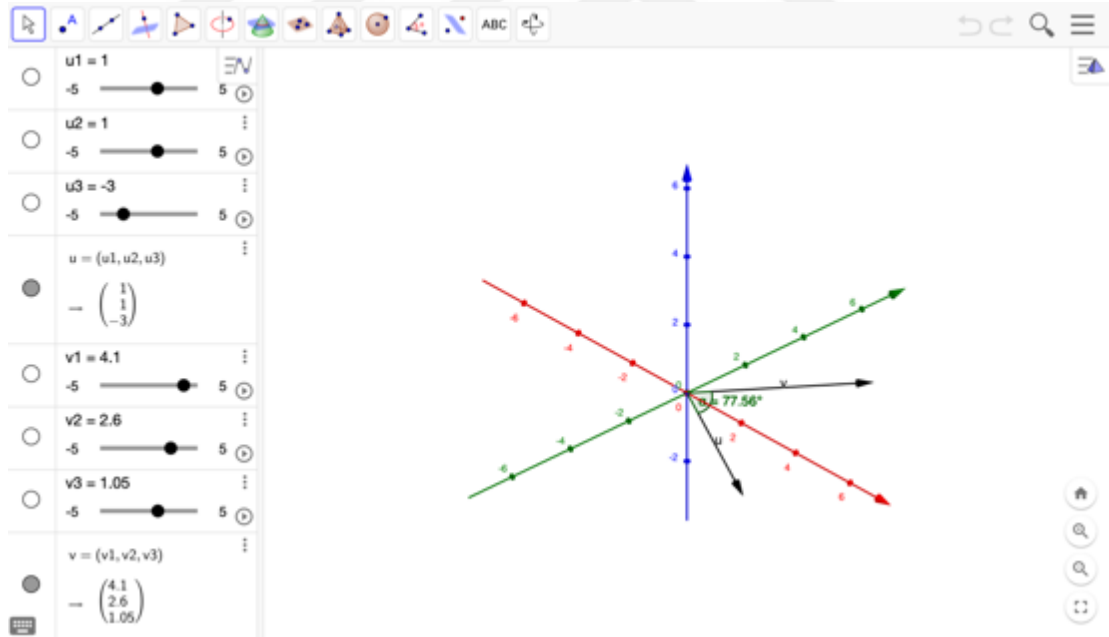
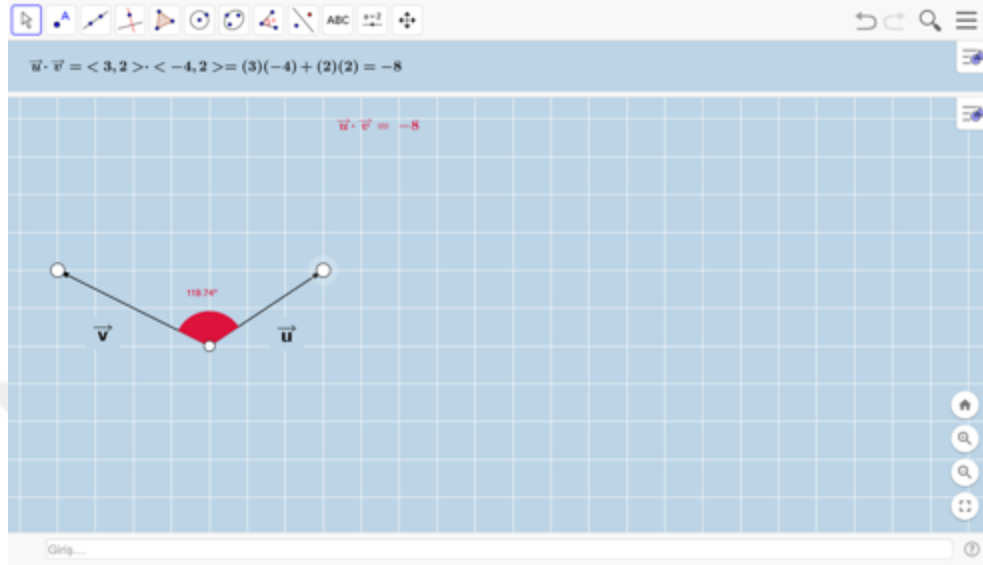
Öğrenci cevapları

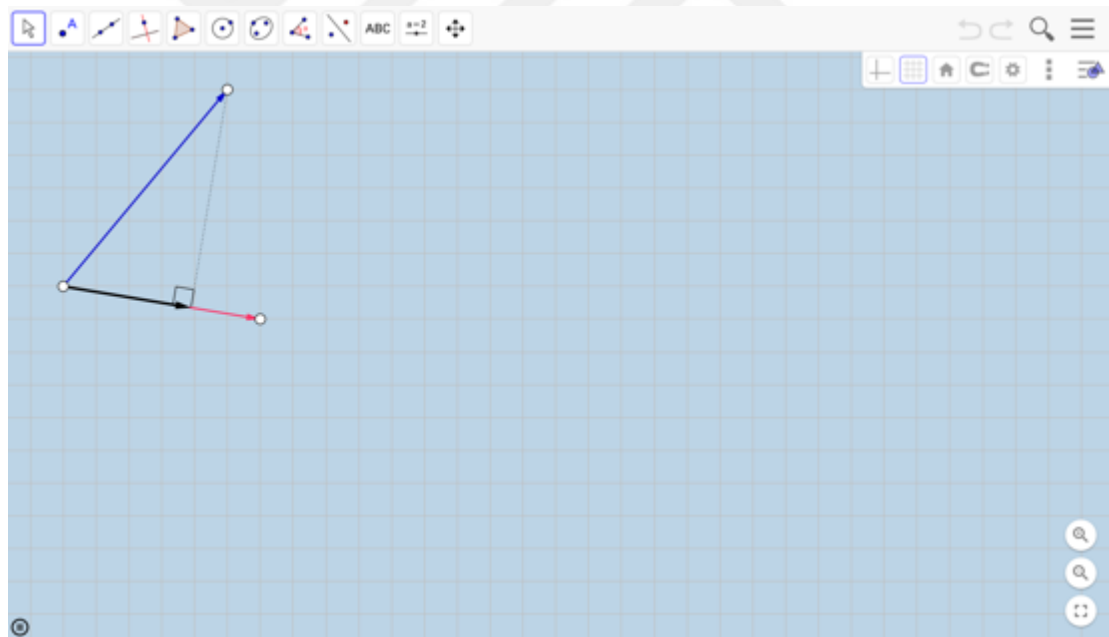
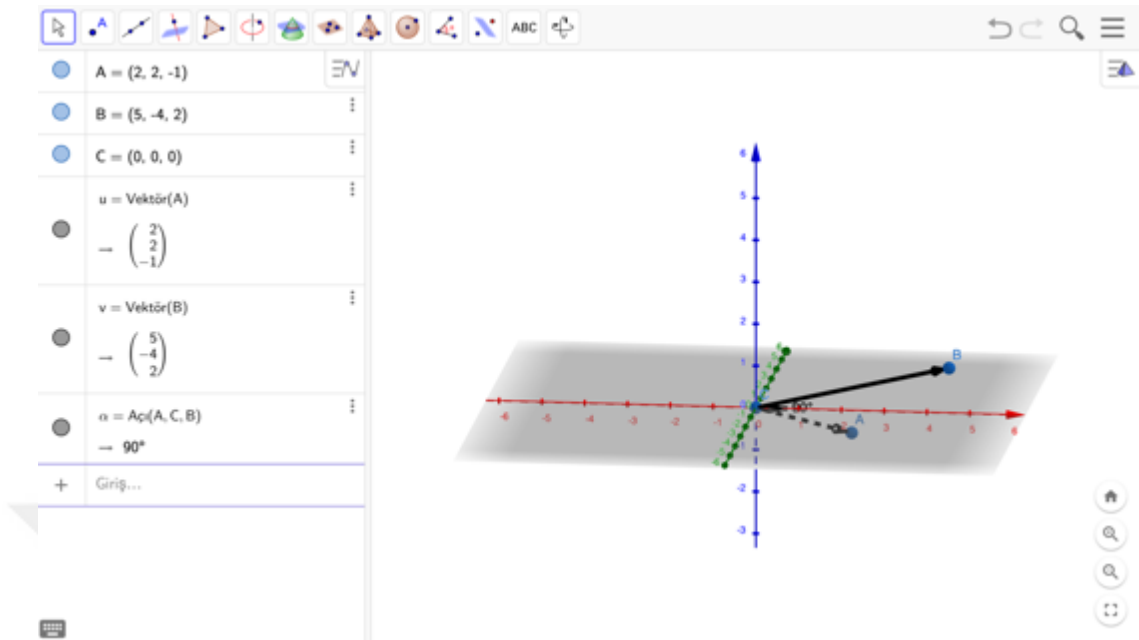
	1	1-a	1-b	1-c	1-d	1-e	2	3
Cevap anahtarı	2	1	2	1	3	3	2	3
Ö1	2	1	2	1	1	1	2	3
Ö2	2	1	2	1	1	1	2	3
Ö3	2	1	2	1	1	1	2	3
Ö4	2	1	2	1	1	3	2	3
Ö5	2	1	2	1	1	1	2	3
Ö6	2	1	2	1	1	2	2	3
Ö7	2	1	2	1	1	3	2	3
Ö8	2	1	2	1	1	3	2	3
Ö9	2	1	2	1	1	3	1	1
Ö10	2	1	2	1	1	3	2	1
Ö11	2	1	2	1	1	1	2	3
Ö12	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö13	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö14	2	1	2	1	1	1	1	1
Ö15	2	1	2	1	1	1	1	1
Ö16	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö17	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö18	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö19	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö20	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö21	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö22	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö23	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö24	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö25	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö26	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö27	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö28	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö29	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö30	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö31	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö32	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö33	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö34	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö35	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö36	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö37	2	1	2	1	1	1	2	2
Ö38	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö39	2	1	2	1	1	3	1	3
Ö40	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö41	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö42	2	1	1	1	1	1	1	1
Ö43	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö44	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö45	2	1	1	1	1	1	2	2
Ö46	2	1	1	1	1	1	2	1

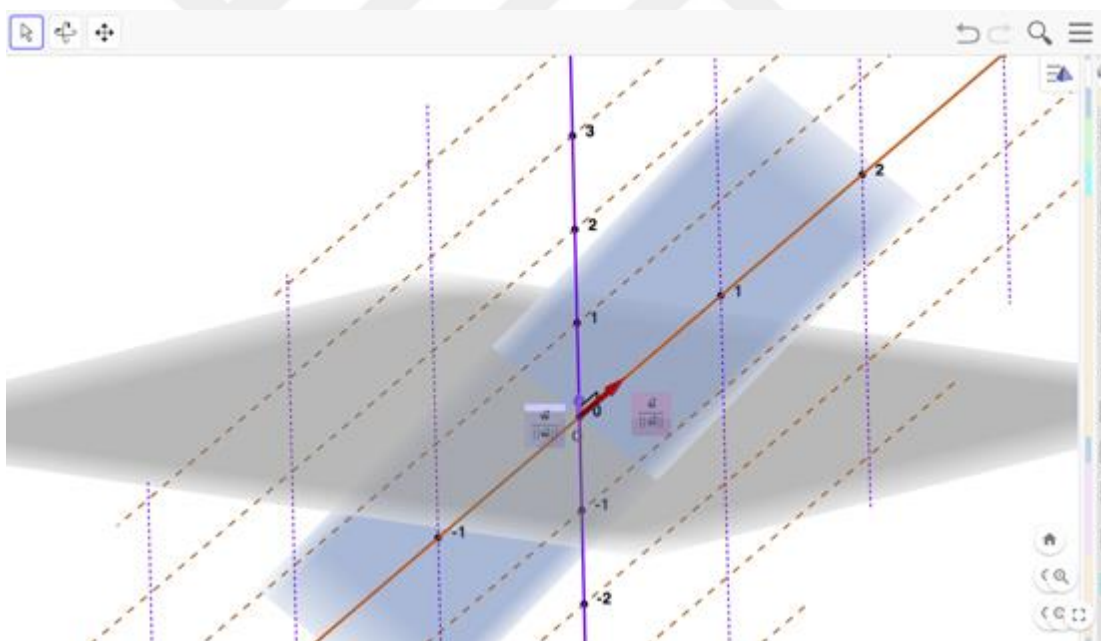
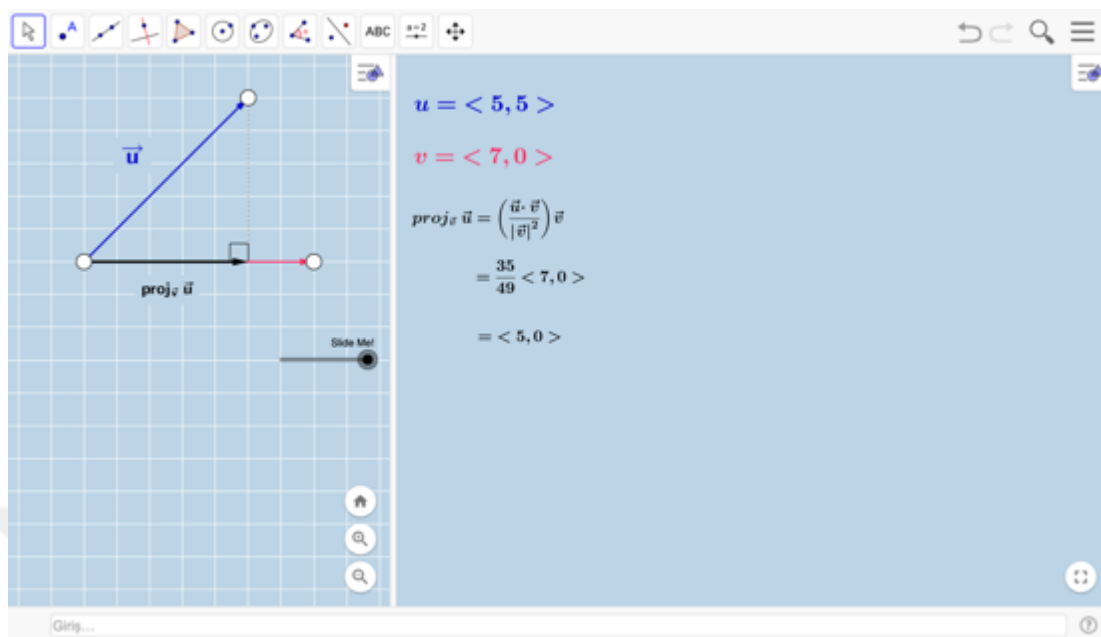
Ö47	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö48	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö49	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö50	1	1	1	1	1	1	2	2
Ö51	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö52	1	1	2	1	1	1	1	1
Ö53	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö54	2	1	2	1	1	1	1	2
Ö55	2	1	2	1	1	1	2	2
Ö56	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö57	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö58	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö59	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö60	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö61	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö62	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö63	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö64	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö65	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö66	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö67	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö68	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö69	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö70	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö71	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö72	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö73	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö74	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö75	2	1	2	1	1	1	1	1
Ö76	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö77	1	1	1	1	1	1	1	1
Ö78	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö79	1	1	2	1	1	1	2	1
Ö80	1	1	1	1	1	1	2	1
Ö81	2	1	1	1	1	1	2	2
Ö82	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö83	2	1	1	1	1	1	2	2
Ö84	2	1	2	1	1	1	2	1
Ö85	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö86	2	1	2	1	1	1	1	1
Ö87	2	1	1	1	1	1	2	1
Ö88	2	1	1	1	1	1	1	1
Ö89	2	1	2	1	1	1	2	2

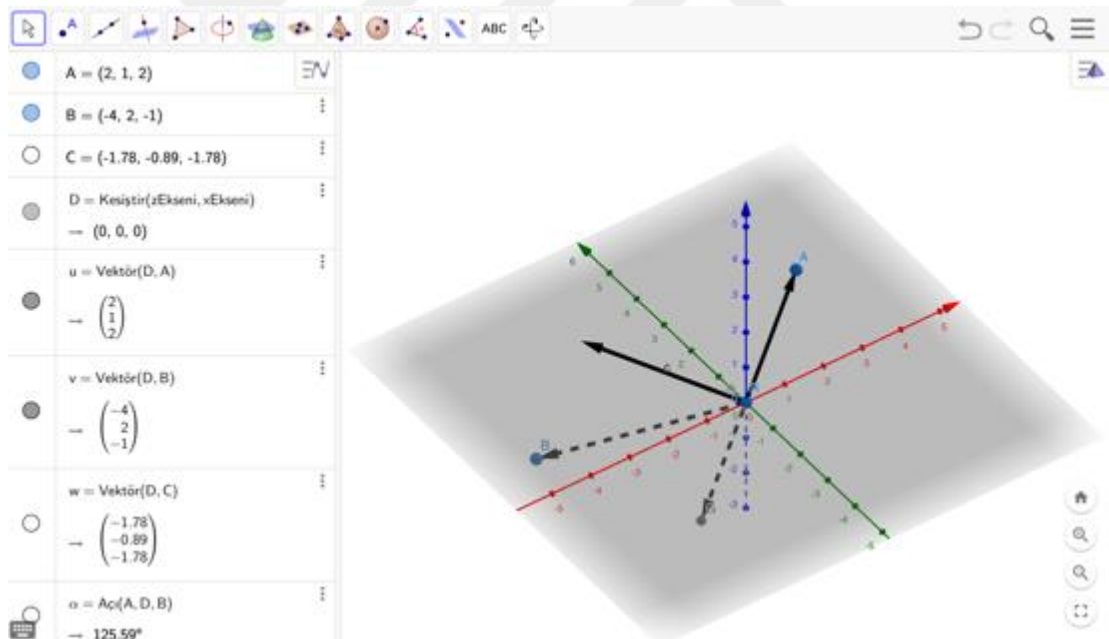
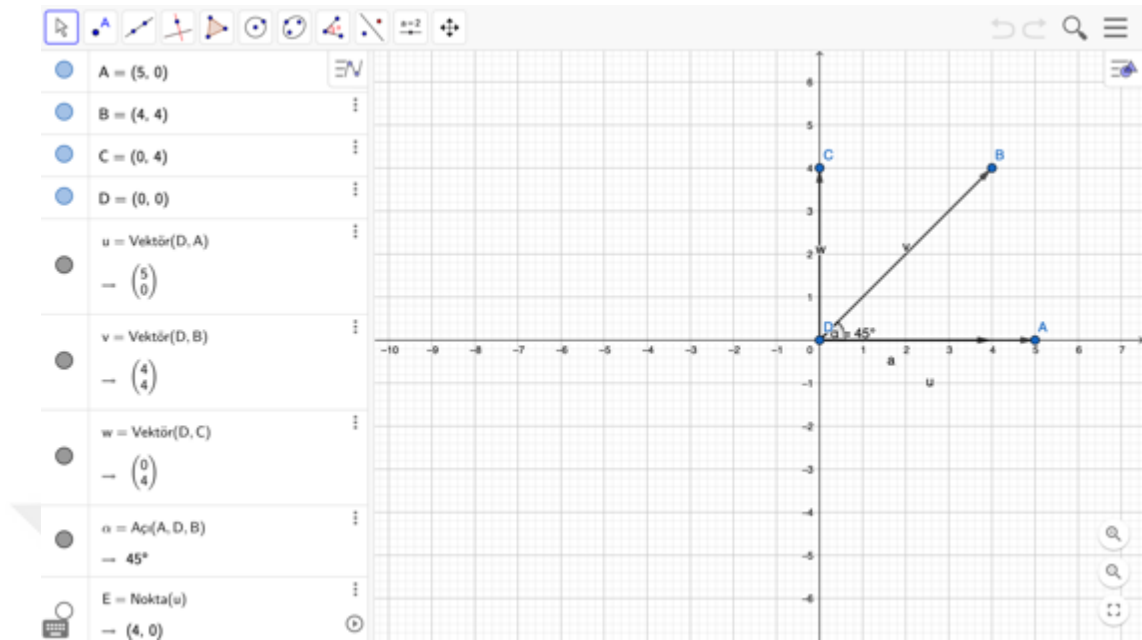
EK 19. İç Çarpım Uzayı Ders Planı

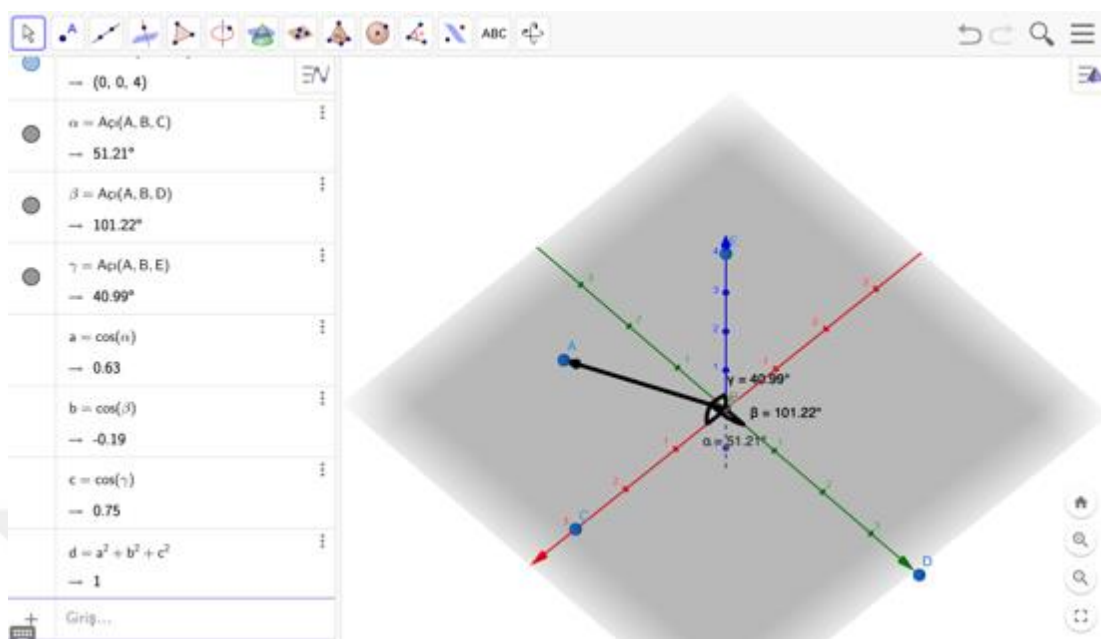
İç Çarpım Uzayı Ders Planı ve Kullanılan 3d Hologram Modelleri

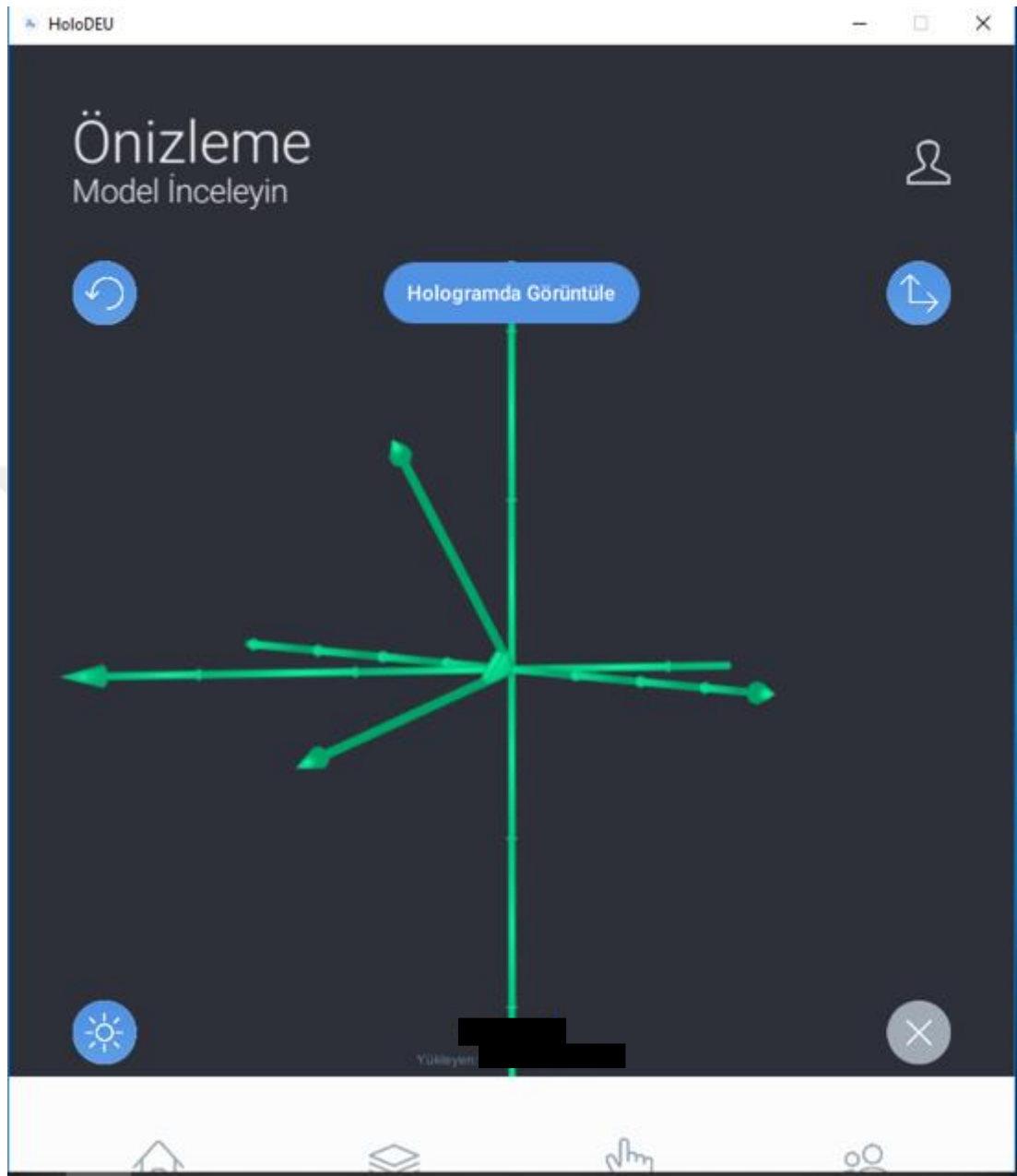


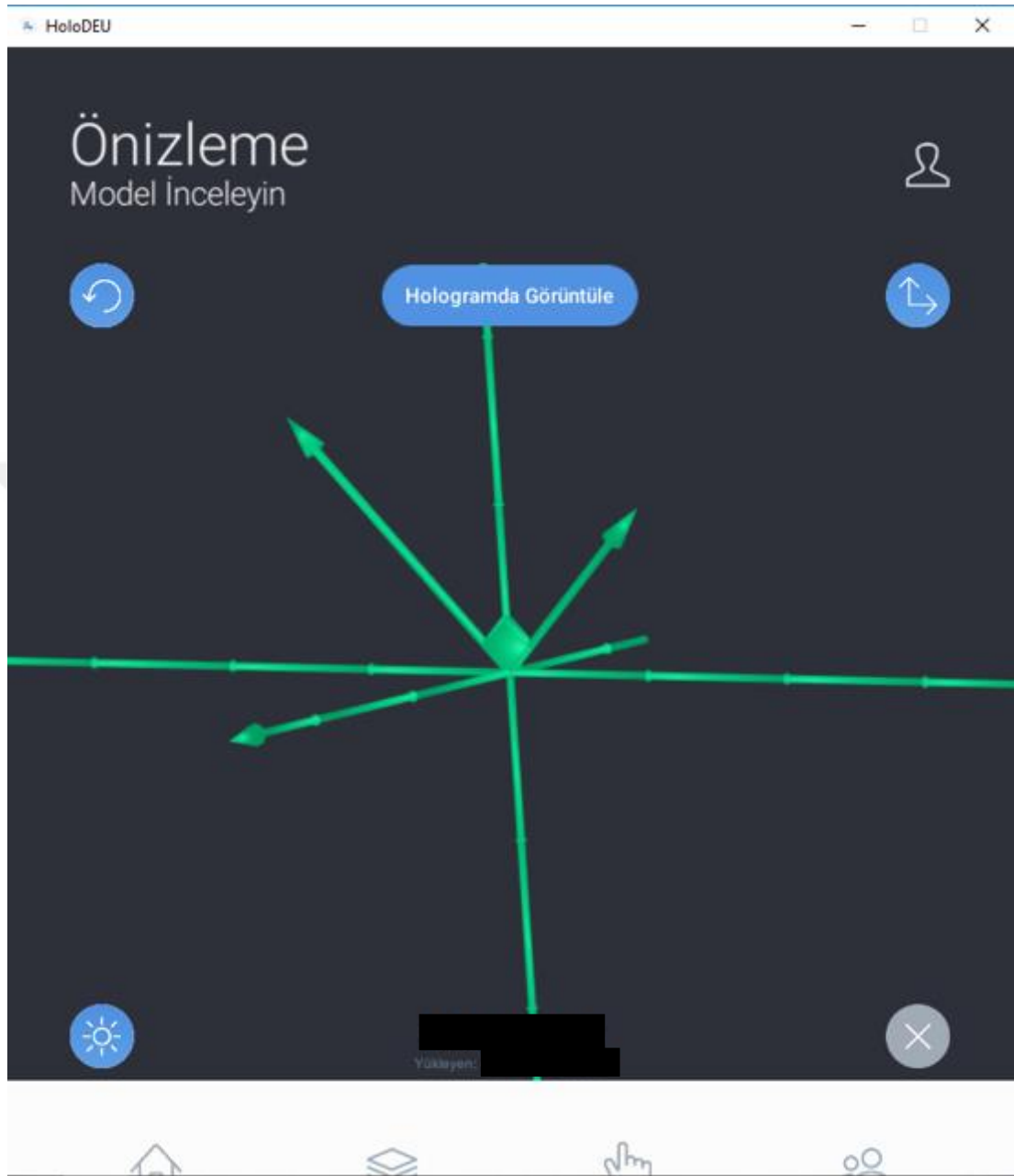






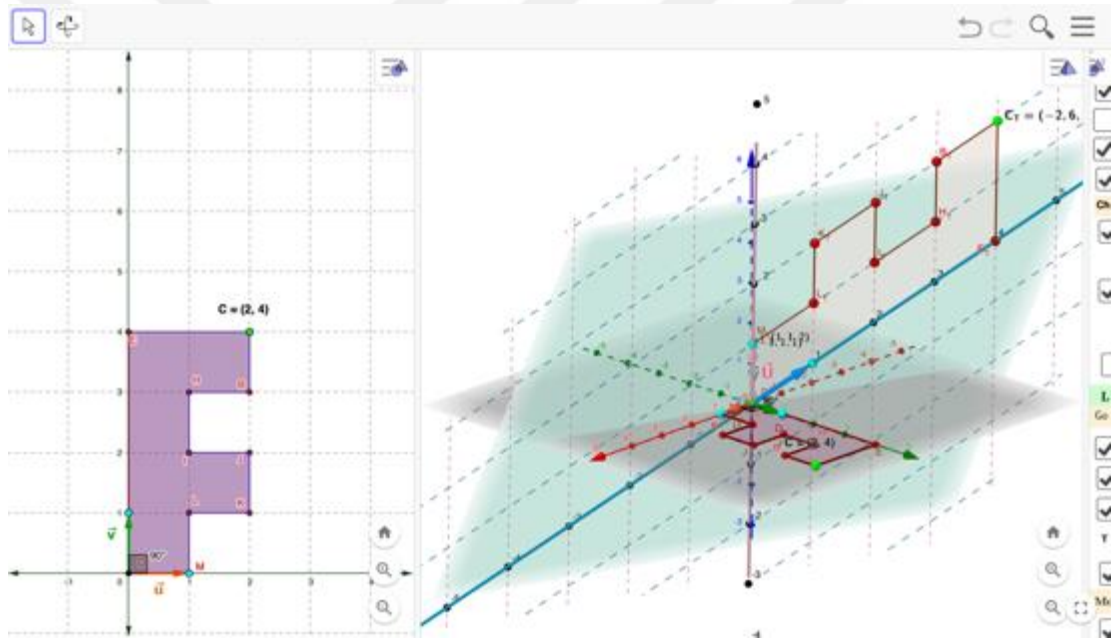


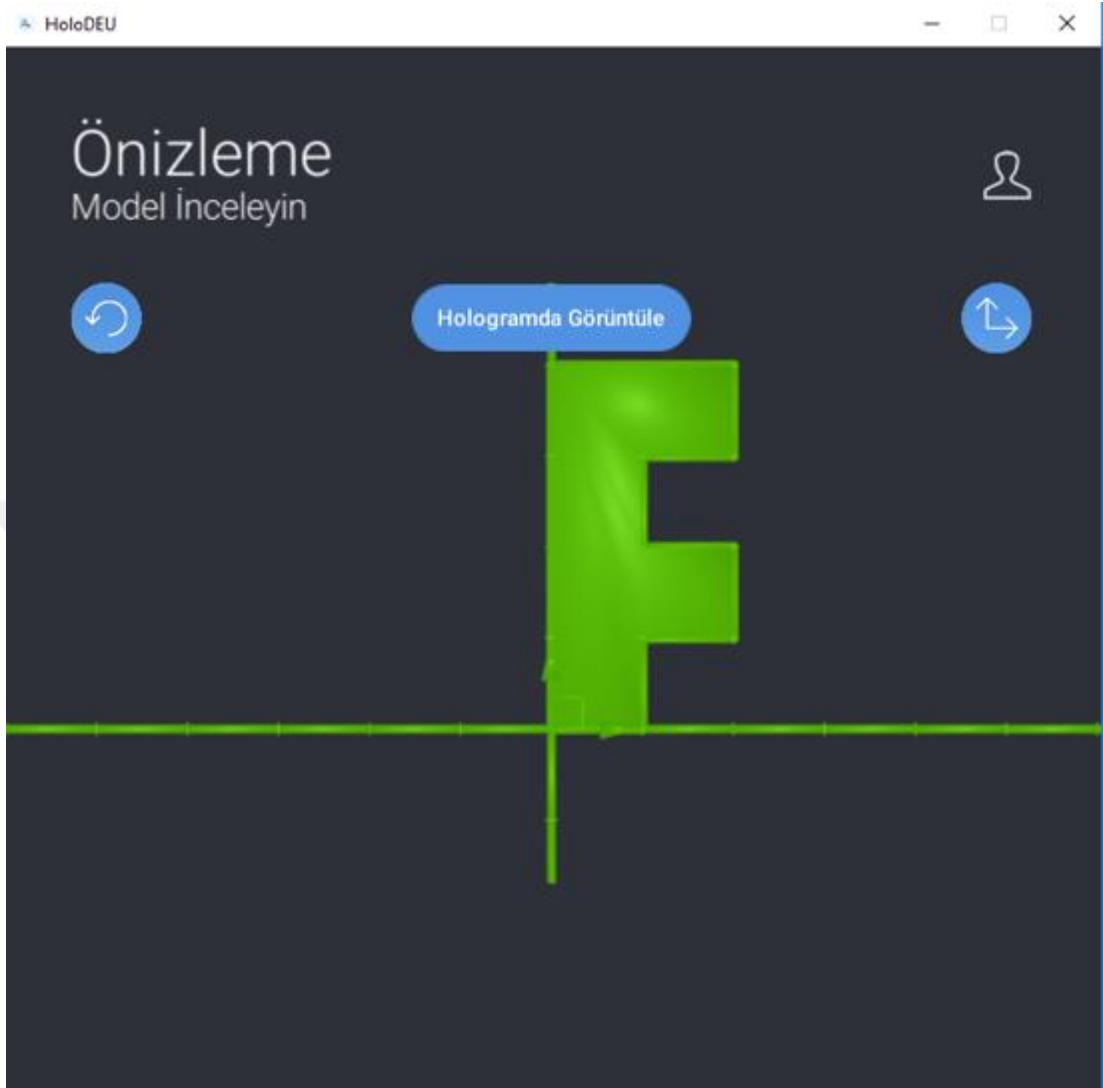


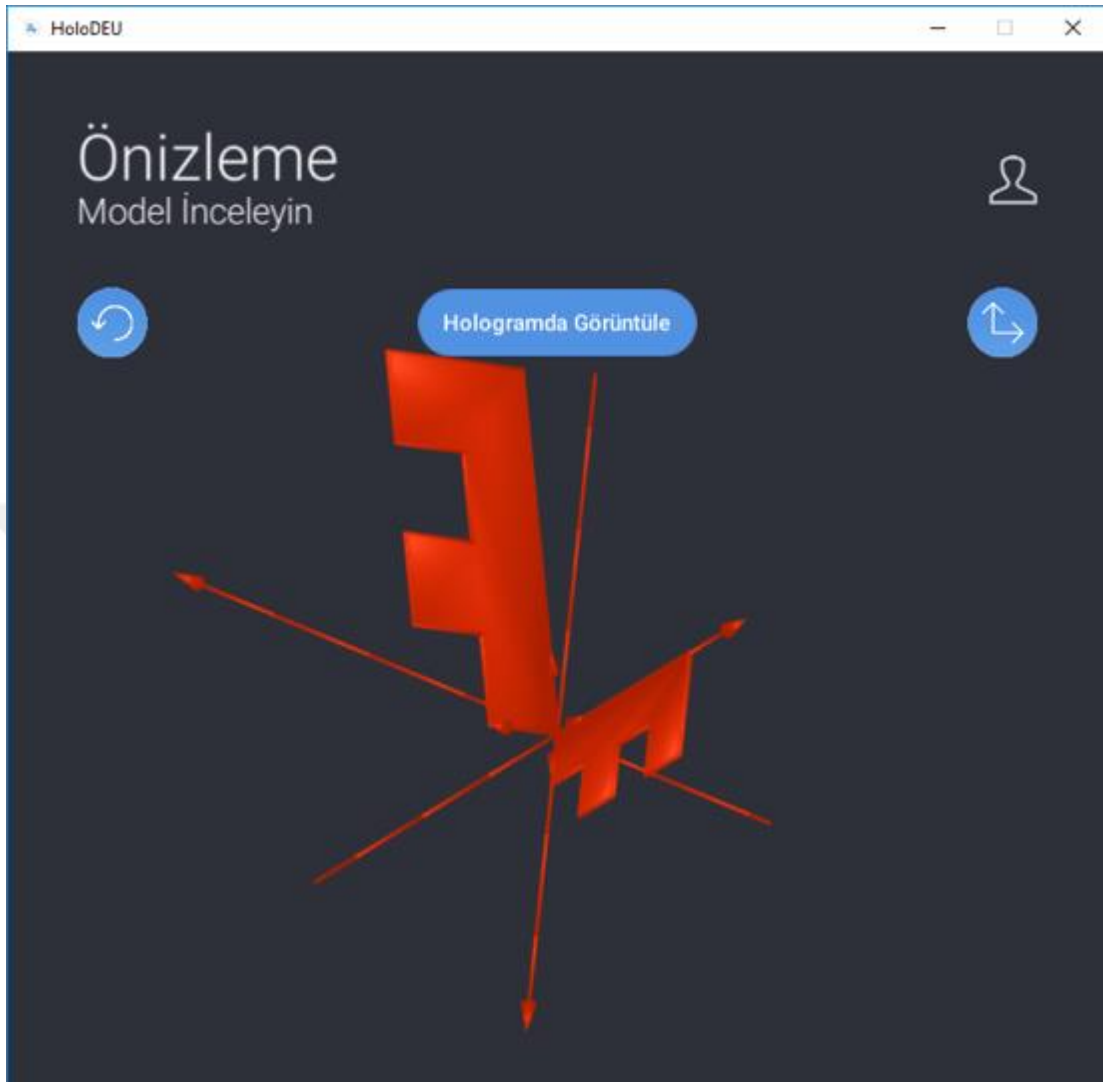


EK 20. Lineer Dönüşüm Ders Planı

Lineer Dönüşümler Ders Planı ve Kullanılan 3d Hologram Modelleri







EK 21. Öz Değer-Öz Vektörler Ders Planı

Özdeğer-Özvektörler Ders Planı ve Kullanılan 3d Hologram Modelleri

