

**T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA
HENNEBERG MİNİMAL YÜZEYİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HAZIRLAYAN
VAHİT ZAMBAK**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. ERHAN GÜLER**

BARTIN-2015

T.C.
BARTIN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Erhan GÜLER

BARTIN-2015

KABUL VE ONAY

Vahit ZAMBAK tarafından hazırlanan “ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HENNEBERG MİNİMAL YÜZEYİ” başlıklı bu çalışma, 07.08.2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Üye : Doç. Dr. Semra SARAÇOĞLU ÇELİK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erhan GÜLER (Danışman)

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../2015 tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Selma ÇELİKİYAY
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Yrd. Doç. Dr. Erhan GÜLER danışmanlığında ve Doç. Dr. Yusuf KAYA eş danışmanlığında hazırlamış olduğum “ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HENNEBERG MINİMAL YÜZEYİ” başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

07.08.2015

Vahit ZAMBAK

ÖNSÖZ

Değerli vaktini bu tezin araştırma konusunun seçimi, yürütülmesi ve düzeltmelerine ayıran arkadaşım ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Erhan GÜLER'e sonsuz teşekkür ederim.

İnsanlığı ve bilimi ile örnek aldığım Prof. Dr. A. Bülent EKİN'e, jüri başkanlığı görevini üstlenen Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya, tezimde jüri üyesi olma nezaketini gösteren, hataların düzeltilmesinde değerli vakitlerini harcayan, yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Semra SARAÇOĞLU ÇELİK ve Yrd. Doç. Dr. Ömer KİŞİ'ye, araştırma görevlisi Samet ERDEN'e, çalışma azmimi “öğrenmenin yaşı yoktur, bilimde hiçbir zaman geç değildir ve zamanın kıymeti anlaşıldığında çok güzel çalışmalar yapılabilir” diyerek artıran Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU ve Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN'e ve bizleri bu günlere getiren değerli hocalarıma çok teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemi sağlayan, emeklerini asla ödeyemeyeceğim kıymetli Annem ve rahmetli Babama, çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, göstermiş olduğu sabır ve sevgiden dolayı sevgili eşim Keriman Hanım ile çocuklarım; kızım Canan ve oğlum Emre'ye sonsuz şükranlarımı sunarım.

Bilim insanı olma adına özlemini duyduğum bu çalışmanın bilime gönül verenlere örnek olması dileklerle ...

Vahit ZAMBAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HENNEBERG MİNİMAL YÜZEYİ

Vahit ZAMBAK

Bartın Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erhan GÜLER

Bartın- 2015, sayfa: ix + 40

1. Bölümde, Henneberg yüzeyine ait tarihçe ve tezde kullanılan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. 2. Bölümde, Henneberg'in minimal yüzeyi ele alınmış olup yüzey, Weierstrass gösterimi kullanılarak u ve v parametreleri cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca Weierstrass'ın integralden bağımsız gösterimi ile Henneberg yüzeyine ait cebirsel fonksiyon elde edilmiştir. x, y, z kartezyen koordinatlarda parametrik denklemi verilen Henneberg yüzeyinin cebirsel denklemi bilgisayar yazılım programları yardımı ile bulunmuş ve yüzeyin derecesi belirlenmiştir. Teğet koordinatlar olarak verilen a, b, c cinsinden yüzeyin cebirsel denklemi ve sınıfı elde edilmiştir. 3. bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Henneberg yüzeyi spacelike ve timelike minimal yüzeyler olarak ele alınmış ve Minkowski geometri özellikleri kullanılarak 2. Bölümdeki işlemler benzer şekilde hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler

Henneberg yüzeyi, spacelike maksimal yüzey, timelike minimal yüzey, ortalama eğrilik, Gauss dönüşümü.

Bilim Kodu

403.02.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

HENNEBERG MINIMAL SURFACE IN THREE DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Vahit ZAMBAK

**Bartın University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics**

Thesis Advisor: Asst. Prof. Erhan GÜLER

Bartın-2015, pp: ix + 40

Some definitions and the history of the Henneberg surface are given in Chapter 1. In Chapter 2, Henneberg surface is considered by means of the parameters u and v using Weierstrass representation. Then integral free form of Weierstrass' and algebraic function of Henneberg surface are obtained. Algebraic equation of Henneberg surface by means of x, y, z cartesian coordinates is revealed and its degree is found using software programmes. In addition, similarly, algebraic equation of Henneberg surface by means of a, b, c inhomogeneous tangential coordinates is revealed and its class (order) is found. Finally, in Chapter 3, Henneberg surface is considered as spacelike maximal and timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space using similar techniques in the previous chapter.

Key Words

Henneberg surface, spacelike maximal surface, timelike minimal surface, mean curvature, Gauss map.

Science Code

403.02.01

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL VE ONAY	ii
BEYANNAME	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
 BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	 1
1.1 Tarihçe	1
1.2 Temel Tanım ve Kavramlar	5
 BÖLÜM 2 ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HENNEBERG YÜZEYİ	 16
2.1 Weierstrass Gösterimi	16
2.2 Henneberg Minimal Yüzeyi	17
2.2.1 İntegralden Bağımsız Gösterim	19
2.2.2 Derece ve Sınıf	20
 BÖLÜM 3 ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HENNEBERG YÜZEYİ	 24
3.1 Spacelike Maksimal Yüzeylerin Weierstrass Gösterimi	24
3.2 Spacelike Maksimal Henneberg Yüzeyi	24
3.2.1 Spacelike Maksimal Yüzeylerde İntegralden Bağımsız Gösterim	25
3.2.2 Spacelike Maksimal Yüzeylerde Derece ve Sınıf	25
3.3 Timelike Minimal Yüzeylerin Weierstrass Benzeri Gösterimi	30
3.4 Timelike Minimal Henneberg Yüzeyi	31
3.4.1 Timelike Minimal Yüzeylerde İntegralden Bağımsız Gösterim	31
3.4.2 Timelike Minimal Yüzeylerde Derece ve Sınıf	33
 KAYNAKLAR	 36
ÖZGEÇMİŞ	39

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
No	No
1. Henneberg minimal yüzeyi	3
2. Henneberg minimal yüzeyi ve Neil parabolleri	4
3. Öklidyen kartezyen koordinatlarda Henneberg cebirsel yüzeyi	22
4. Öklidyen teğet koordinatlarda Henneberg cebirsel yüzeyi	23
5. Minkowski kartezyen koordinatlarda spacelike maksimal Henneberg cebirsel yüzeyi	28
6. Minkowski teğet koordinatlarda spacelike maksimal Henneberg cebirsel yüzeyi ..	30
7. Minkowski kartezyen koordinatlarda timelike minimal Henneberg cebirsel yüzeyi	34
8. Minkowski teğet koordinatlarda timelike minimal Henneberg cebirsel yüzeyi	35

SİMGELER DİZİNİ

E, F, G	:	Birinci Temel Form Bileşenleri
L, M, N	:	İkinci Temel Form Bileşenleri
e	:	Gauss Dönüşümü
K	:	Gauss Eğriliği
H	:	Ortalama Eğrilik
$\mathbb{E}^3$	:	Üç Boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	:	3-Boyutlu Minkowski Uzayı
$\mathcal{H}(u, v)$	:	Henneberg Yüzeyi
$Q(x, y, z) = 0$	:	Kartezyen Koordinatlarda Yüzeyin Kapalı Formu
$\hat{Q}(a, b, c) = 0$	:	Teğet Koordinatlarda Yüzeyin Kapalı Formu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Tarihçe

Minimal yüzeyler teorisi, 1740 yılında İsveçli Matematikçi Leonhard Euler (1707–1783)’in çalışmaları ile başlamış ve 1760’da Fransız Matematikçi Joseph Louis Lagrange (1736–1813)’ın çalışmaları ile hız kazanmıştır. Bilinen ilk minimal yüzey düzlemdir. Euler, 1740’da katenoidin minimal bir yüzey olduğunu göstermiştir. Orijinal adı ‘allyside’ olan katenoidi, Belçikalı Fizikçi Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801–1883), katenari (catenary) eğrisinden esinlenerek katenoid (catenoid) olarak yeniden adlandırmıştır. 1776’da Fransız Matematikçi Jean Baptiste Meusnier (1754–1793) helisoidin bir minimal yüzey olduğunu göstermiştir.

Öklid geometri içerisinde yer alan yüzey teoride kayda değer birçok çalışma yer almaktadır (Bour, 1862; Chen, 1973, 1996; Do Carmo, 1976; Güler, 2005, 2012; Güler vd. 2014; Güler ve Yaylı, 2015; Güler vd. 2010; Hacısalihoğlu, 1972, 1982, 1994; Henneberg, 1875, 1876, 1878; O’Neill, 1966; Weierstrass, 1866, 1885).

Alman Matematikçi Ernst Lebrecht Henneberg (1850-1922), doktora tezinde minimal yüzeyler için Weierstrass tarafından elde edilmiş olan Weierstrass gösterimini kullanarak (r, q) kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\mathcal{H}(r, q) = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} [(r^2 + 3)\sin(3q) + 3\sin(q)] \\ -\frac{r}{2} [(r^2 + 3)\cos(3q) - 3\cos(q)] \\ \frac{3}{2}(r^2 + 2)\cos(2q) \end{pmatrix} \quad (1)$$

yüzeyini elde etmiştir (Henneberg, 1875, 1876).

İsveçli Matematikçi Emanuel Gabriel Björling (1808–1872) ’in minimal yüzeyler için verdiği

$$\mathbf{x}(\zeta) = \left(\mathcal{R}e \, \mathbf{x}(\zeta), \, Im \int \sqrt{\mathbf{x}'^2(\zeta) + \mathbf{z}'^2(\zeta)} \, d\zeta, \, \mathcal{R}e \, \mathbf{z}(\zeta) \right) \quad (2)$$

formülünü kullanarak, $\zeta = \alpha + i\beta$ olmak üzere, Henneberg minimal yüzeyi (Şekil 1)

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2 \sinh(\alpha) \cos(\beta) - \frac{2}{3} \sinh(3\alpha) \cos(3\beta) \\ 2 \sinh(\alpha) \sin(\beta) + \frac{2}{3} \sinh(3\alpha) \sin(3\beta) \\ 2 \cosh(2\alpha) \cos(2\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \\ z(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \quad (3)$$

elde edilir.

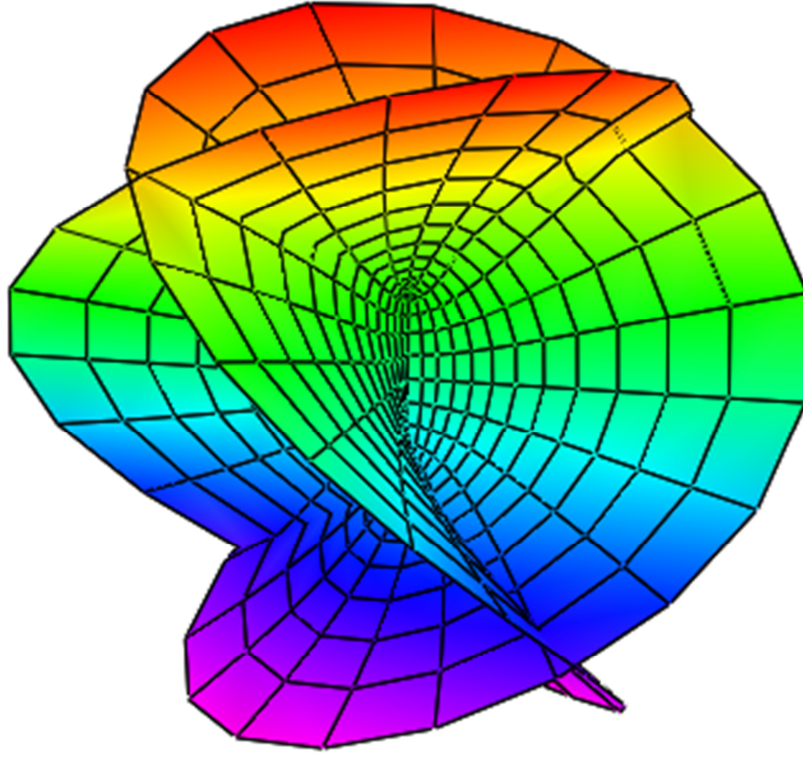
Henneberg minimal yüzeyi, $y = 0$ düzleminde bir geodezik olan ve $(z - 2)^3 = 9x^2$ denklemi ile belirli Neil parabolünü içermektedir (Şekil 2, üst düzlem parçası içinde). Parabol, parametrik olarak

$$\left(-\frac{8}{3} \sinh^3(\alpha), \, 0, \, 2 \cosh(2\alpha) \right)$$

denklemi ile belirlidir. (3) eşitliğinde $\beta = \pi/2$ için

$$\left(0, \, -\frac{8}{3} \sinh^3(\alpha), \, -2 \cosh(2\alpha) \right)$$

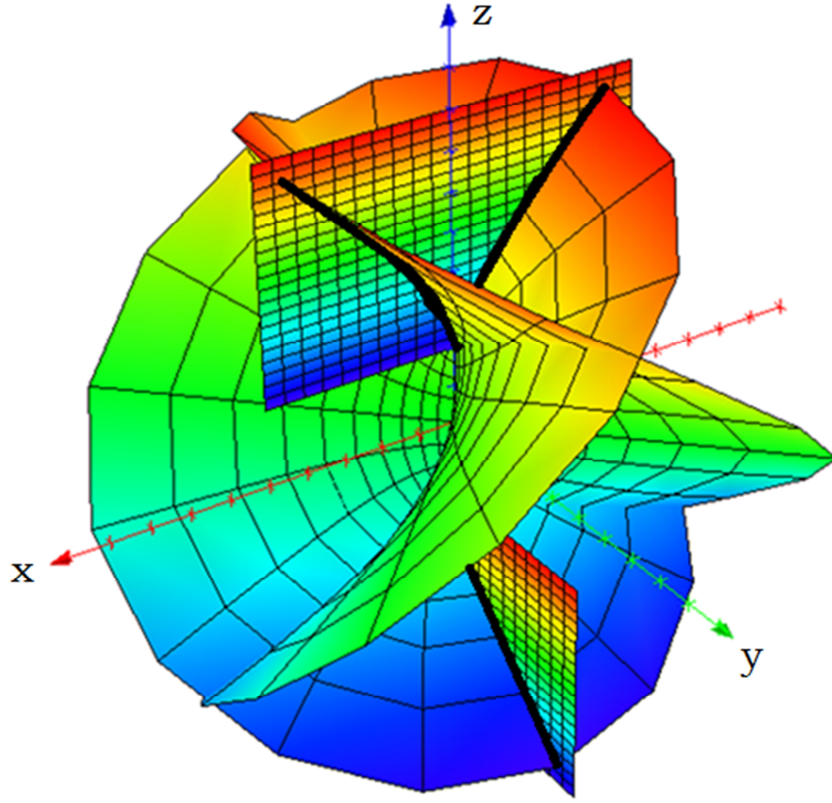
bulunur. Yüzeyin, $(z + 2)^3 = 9y^2$ denklemi ile belirli ve $x = 0$ düzleminde (Şekil 2, alt düzlem parçası içinde) bir geodezik olan bir başka Neil parabolünü de içerdiği görülmektedir.



Şekil 1: Henneberg minimal yüzeyi.

Öte yandan, yarı-Riemann geometrisindeki 3-boyutlu Minkowski uzayı, 3-boyutlu Öklid uzayına göre daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Örneğin bu uzaydaki dönme eksenleri spacelike, timelike ve lightlike olarak adlandırılır. Yarı-Riemann geometrideki yüzeyler ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır (Güler, 2005, 2007, 2008, 2010; Güler ve Hacısalihoğlu, 2011; Güler ve Yaylı, 2015; Kobayashi, 1983; Magid, 1991, O'Neill, 1983).

Tezin 2. bölümünde, 3-boyutlu Öklid uzayında Henneberg minimal yüzeyi ele alınmış, Weierstrass gösterimi kullanılarak u ve v parametreleri cinsinden yüzey elde edilmiştir. Ayrıca Weierstrass'ın integralden bağımsız gösterimi kullanılarak Henneberg yüzeyine ait cebirsel fonksiyon elde edilmiştir. x, y, z kartezyen koordinatlarda parametrik olarak denklemi verilen Henneberg yüzeyinin cebirsel denklemi bulunmuş ve yüzeyin derecesi belirlenmiştir. Teğet koordinatlar olan a, b, c cinsinden yüzeyin cebirsel denklemi ve sınıfı elde edilmiştir.



Şekil 2: Henneberg minimal yüzeyi ve Neil parabollemi.

3. Bölüm ise tamamen orijinal sonuçlardan oluşmaktadır. Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike maksimal Henneberg yüzeyi ve timelike minimal Henneberg yüzeyi u ve v parametreleri cinsinden Weierstrass benzeri gösterimler kullanılarak elde edilmiştir. Weierstrass'ın integralden bağımsız gösterimleri ile Henneberg yüzeyine ait cebirsel fonksiyonlar elde edilmiştir. x, y, z Kartezyen koordinatlarda parametrik olarak denklemleri verilen spacelike maksimal Henneberg ve timelike minimal Henneberg yüzeylerinin cebirsel denklemleri bulunmuş ve yüzeylerin dereceleri belirlenmiştir. Teğet koordinatları olan a, b, c cinsinden yüzeylerin cebirsel denklemleri ve sınıfları elde edilmiştir.

1.2 Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda verilecek temel tanım, teorem, vb. için aşağıdaki kaynaklara bakılabilir: Akutagawa ve Nishikawa, 1990; Beem ve Ehrlich, 1981; Chen, 1973, 1996; Do Carmo, 1976; Hacısalihoğlu, 1972, 1982, 1994; Kobayashi ve Nomizu, 1963; O'Neill, 1966, 1983.

1.2.1 Tanım (Skalar Çarpım Uzayı)

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g: V \times V \longrightarrow V$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir *skalar çarpım*, bu durumda V vektör uzayına da bir *skalar çarpım uzayı* denir.

1.2.2 Tanım (Simetrik Bilineer Formun İndeksi)

V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımının *indeksi* denir. g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

1.2.3 Tanım (Lorentz Uzayı)

V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir *Lorentz uzayı* denir.

1.2.4 Tanım (Spacelike, Timelike, Lightlike (Null) Vektör)

V bir Lorentz uzayı olsun. $\forall v \in V$ için

$$\begin{aligned} g(v, v) &> 0 \text{ veya } v = 0 \text{ ise } v \text{ 'ye } \textit{spacelike} \text{ vektör,} \\ g(v, v) &< 0 \text{ ise } v \text{ 'ye } \textit{timelike} \text{ vektör,} \\ v \neq 0 \text{ iken } g(v, v) &= 0 \text{ ise } v \text{ 'ye } \textit{lightlike (null)} \text{ vektör} \end{aligned}$$

denir.

1.2.5 Tanım (Bir Vektörün Normu)

V skalar çarpımlı bir uzay ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün *normu* denir. Normu 1 olan vektöre de *birim vektör* denir.

1.2.6 Tanım (Spacelike, Timelike, Lightlike Alt Uzay)

V bir Lorentz uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

- $g|_W$ pozitif tanımlı ise W ya *spacelike altuzay*,
- $g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya *timelike altuzay*,
- $g|_W$ dejenere ise W ya *lightlike altuzay*

denir.

1.2.1 Teorem V bir Lorentz uzayı, V nin bir altuzayı W ve $\text{boy}V \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler:

- i. W timelike altuzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
- ii. W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.
- iii. W uzayı bir tane timelike vektör içerir.

1.2.7 Tanım (Metrik Tensör)

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden g tensör alanına bir *metrik tensör* denir. Başka bir deyişle g, M manifoldunun her p noktasına $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır.

1.2.8 Tanım (Yarı-Öklidyen Uzay)

$\mathbb{R}^n$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} w_i v_i - \sum_{i=n-v+1}^n w_i v_i$$

eşitliğiyle verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya *yarı-Öklidyen uzay* denir ve $\mathbb{E}_v^n$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, v_i ve w_i ler sırasıyla, v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenleridir.

1.2.9 Tanım (Minkowski Uzayı)

$\mathbb{E}_v^n$, yarı-Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{E}_1^n$ yarı-Öklidyen uzayına *Minkowski n -uzayı* denir.

1.2.10 Tanım (Riemann Manifoldu)

M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyona M üzerinde bir *iç çarpım*, *metrik tensör*, *diferensiyellenebilir metrik* veya *Riemann metriği* denir. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de bir *Riemann manifoldu* denir.

1.2.11 Tanım (Yarı-Riemann Manifoldu)

M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olmak üzere

i.) simetrik

$$\forall X, Y \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = g(Y, X)$$

ii.) 2-lineer

$$\forall X, Y \in \chi(M), \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z)$$

$$g(X, aY + bZ) = ag(X, Y) + bg(X, Z)$$

iii.) non-degenere

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$$

özeliklerini sağlayan g tensörüne bir *yarı-Riemann metriği* ve (M, g) ikilisine de *yarı-Riemann manifoldu* denir.

Bundan sonraki gösterimlerde (M, g) yarı-Riemann manifoldunu sadece M ile göstereceğiz.

1.2.12 Tanım (Lorentz Manifoldu)

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir *Lorentz manifoldu* denir. Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$g_p(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i|_p w_i|_p - v_n|_p w_n|_p, \quad \forall p \in M \text{ ve } \forall v_p, w_p \in T_p M.$$

1.2.13 Tanım (Spacelike, Timelike ve Null Eğri)

M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$g(T, T) > 0 \text{ ise } \alpha \text{ eğrisine } \textit{spacelike} \text{ eğri,}$$

$$g(T, T) < 0 \text{ ise } \alpha \text{ eğrisine } \textit{timelike} \text{ eğri,}$$

$$g(T, T) = 0 \text{ ve } T \neq 0 \text{ ise } \alpha \text{ eğrisine } \textit{null} \text{ eğri}$$

denir. Eğrinin bir özel hali olan doğru gözönüne alınsın. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur.

1.2.14 Tanım (İmmersiyon (Daldırma))

M ve $\overline{M}$ sırasıyla, n ve $(n + d)$ -boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere $x: M \longrightarrow \overline{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için

$$dx_p: T_p M \longrightarrow T_{x(p)} \overline{M}$$

türev dönüşümü bire bir ise x fonksiyonuna bir *immersiyon (daldırma)* denir.

1.2.15 Tanım (İzometrik İmmersiyon)

M ve $\overline{M}$, sırasıyla, n ve $(n + d)$ -boyutlu birer C^∞ manifoldlar ve $x: M \longrightarrow \overline{M}$ dönüşümü bir immersiyon olsun. $\overline{M}$ manifoldu bir Riemann yapıya sahip ise x yardımıyla $\overline{M}$ den indirgenen metrik için, $\forall p \in M$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle = \langle dx_p(X), dx_p(Y) \rangle_{x(p)} \quad \forall X, Y \in T_p M$$

eşitliği sağlandığında x e bir *izometrik immersiyon* denir.

1.2.16 Tanım (Yarı-Riemann Altmanifoldu)

M_n^m , m -boyutlu ve v indeksli bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}_q^n$ n -boyutlu ve q indeksli bir diğer yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$j: M_n^m \rightarrow \overline{M}_q^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise ($rank j = m$) M_n^m manifolduna $\overline{M}_q^n$ nun bir *yarı-Riemann altmanifoldu* denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensör g ile gösterilecektir

1.2.17 Tanım (İndirgenmiş Konneksiyon)

$\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

in $\overline{M}$ ye indirgenmiş olan

$$\overline{D}: \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \longrightarrow \chi(\overline{M})$$

fonksiyonuna M den $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine *indirgenmiş konneksiyon* denir. Buradaki $\chi(\overline{M})$, $\overline{M}$ nin her bir p noktasına $T_p \overline{M}$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\mathfrak{I}(\overline{M})$ -modülünü göstermektedir.

1.2.1 Lemma $\overline{M}$, M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} II: \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\longrightarrow \chi(\overline{M})^\perp \\ (V, M) &\longrightarrow \Pi(V, M) = \text{nor} D_V W \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathfrak{I}(\overline{M})$ -bilineer ve simetriktir. Burada II ye $\overline{M}$ nin *ikinci temel form tensörü* denir.

1.2.18 Tanım (Yarı-Riemann Hiperyüzeyi)

n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldunun $(n - 1)$ -boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin bir *yarı-Riemann hiperyüzeyi* denir.

1.2.19 Tanım (Şekil Operatörü)

M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. $\forall V, M \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı S 'ye, $\overline{M}$ 'nin N 'den elde edilen *şekil operatörü* denir. Diğer bir deyişle, S şekil operatörü, N birim normal vektör alanı olmak üzere $\overline{M}$, nin her p noktasında

$$S: T_P(\overline{M}) \longrightarrow T_P(\overline{M})$$

$$X_P \longrightarrow S(X_P) = -D_{X_P}N$$

bir lineer operatördür.

1.2.2 Teorem M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $S, \overline{M}$ nin birim normali olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(\overline{M})$ için

$$S(V) = -D_V N$$

olur ve ayrıca S şekil operatörü self-adjointtir. M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin N birim normalinden elde edilen şekil operatörü S olmak üzere, $\forall V, W \in \chi(\overline{M})$ için

$$II(V, W) = \varepsilon g(S(V), W)N$$

olur. Burada $\varepsilon = g(N, N)$ olarak belirlidir. Yarı-Riemann hiperyüzeyleri için *Gauss denklemi*, $\forall V, W \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere

$$D_V W = \overline{D}_V W + \varepsilon g(S(V), W)N$$

biçiminde verilir.

1.2.20 Tanım (Skalar Çarpım)

$\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere bu iki vektörün *skalar çarpımı*

$$\langle , \rangle_L: \mathbb{E}_1^3 \times \mathbb{E}_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $v = w$ ise

$$\|\vec{v}\|_L = |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{v}\|_L$ reel sayısına, v vektörünün Lorentz anlamında *normu* denir. Normu 1 olan vektöre de Lorentz anlamında *birim vektör* denir.

1.2.21 Tanım (Vektörel Çarpım)

$\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin *vektörel çarpımı* (*dış çarpımı*) denir. $\vec{v} \times \vec{w}$ veya $\vec{v} \wedge \vec{w}$ şeklinde gösterilir.

1.2.22 Tanım (Semi(Yarı)-Ortogonal Matris)

$\mathbb{E}_1^3$, Minkowski 3-uzayında $A^t \varepsilon A = \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine *semi-ortogonal matris* denir. Burada $\det A = 1$ olup

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisine *işaret matrisi* denir.

1.2.23 Tanım (I. Temel Form)

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu Minkowski uzayı ve $\overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen, $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\longrightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

ile belirli olan $\varphi(U)$ yüzeyi göz önüne alınsın. Lineer bağımsız $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ cümlesi, yüzeyin vektör alanlarının bir bazıdır. Yüzeyin birim normali

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

ile belirlidir. Yüzeyin I . temel formunu, yani metriğini hesaplamadan önce bazı eşitlikler verilecektir.

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

olup

$$\langle N, N \rangle = \left\langle \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}, \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \right\rangle,$$

E, F, G ve

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle \\ &= -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2 \end{aligned}$$

Lagrange özdeşliği'nden

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= (\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)^2 - \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\ \langle N, N \rangle &= F^2 - EG \end{aligned}$$

elde edilir. Yüzeyin I . temel formunu hesaplamak için, φ nin *tam diferensiyeli*

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

ile belirlidir. Buradan

$$\begin{aligned} I &= (ds)^2 = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{(du)^2}{(dv)^2} = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G$$

ve

$$\lambda = \frac{du}{dv}, I' = \frac{(du)^2}{(dv)^2}$$

olmak üzere

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$$

elde edilir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile, $I = (dv)^2 I'$ olduğundan, I' yü incelemek aynıdır.

1.2.24 Tanım (Non-Dejenere Yüzey)

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\forall p \in \overline{M}$ ve $\forall v_p, w_p \in T_p \overline{M}$ için $\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$ önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir *non-dejenere yüzey* denir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

ile belirlidir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0 \text{ veya } EG - F^2 \neq 0$$

olmasıdır.

1.2.25 Tanım (Spacelike Yüzey)

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{E}_1^3$ de bir *spacelike yüzey* denir.

1.2.26 Tanım (Timelike Yüzey)

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{E}_1^3$ de bir *timelike yüzey* denir.

1.2.27 Tanım (Gauss Eğriliği)

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p$$

ifadesine, $\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki *Gauss eğriliği* ve $K: \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin *Gauss eğrilik fonksiyonu* denir. Burada, $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ ile belirlidir. N , $\overline{M}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\overline{M}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = -1$ olur. Bu durumda $K = -\det S$ ile belirlidir. $\overline{M}$ yüzeyi timelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = 1$ olur. Bu durumda $K = \det S$ ile belirlidir.

1.2.28 Tanım (Ortalama Eğrilik)

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$H(p) = 2^{-1} \varepsilon \operatorname{tr} S_p$$

ifadesine, $\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki *ortalama eğriliği* ve $H: \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ olur. N , $\overline{M}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\overline{M}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = -1$ olur. Bu durumda $H = -2^{-1} \cdot \operatorname{tr} S$ ile belirlidir. $\overline{M}$ yüzeyi timelike ise $\varepsilon = \langle N, N \rangle = 1$ olur. Bu durumda $H = 2^{-1} \cdot \operatorname{tr} S$ ile belirlidir. $H = 0$, yani $EN + GL - 2FM = 0$ ve yüzey spacelike (timelike) ise bu yüzeye *spacelike maksimal (timelike minimal) yüzey* denir.

BÖLÜM 2

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HENNEBERG YÜZEYİ

Tez boyunca bir $\vec{x}$ vektörü ile $\vec{x}^t$ transpozu özdeş alınmıştır.

2.1 Weierstrass Gösterimi

2.1.1 Tanım (Minimal (İzotropik) Eğri)

Bir $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlı olan ve

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$$

çarpımını sağlayan bir kompleks analitik $\alpha(z) = (\alpha_1(z), \alpha_2(z), \alpha_3(z))$ eğrisine $\mathbb{C}^3$ uzayında *minimal (izotropik) eğri* denir. Eğer $\forall z \in \mathcal{U}; \langle \alpha', \bar{\alpha}' \rangle = 0$ oluyorsa α eğrisine *regüler minimal eğri* denir (Gray vd., 2006).

2.1.1 Teorem (Weierstrass Gösterim Teoremi) Basit bağlantılı bir açık $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlı, sıfırdan farklı kompleks diferansiyellenebilir fonksiyonlar f ve g olsun. Buradan

$$\mathbf{x}(z) = \text{Re} \int \begin{pmatrix} (1 - g^2) \\ i(1 + g^2) \\ 2g \end{pmatrix} f dz \quad (4)$$

daldırması sıfır ortalama eğrilikli bir konformal minimal yüzey belirtir. Tersine, herhangi bir konformal minimal yüzey yukarıdaki şekilde belirlidir (Weierstrass, 1866).

2.1.2 Tanım (Weierstrass Data)

Weierstrass gösterimi üzerindeki kompleks diferansiyellenebilir f ve g fonksiyonları için (f, g) ikilisine *Weierstrass data* adı verilir.

$(f, g) = (1 - z^{-4}, z)$ olarak alındığında $\langle h', h' \rangle = 0$ iç çarpımını sağlayan Henneberg eğrisi

$$h(z) = \left(-\frac{1}{3} \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + z - \frac{1}{z}, i \left(\frac{1}{3} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + z + \frac{1}{z} \right), z^2 + \frac{1}{z^2} \right), \quad (5)$$

$\mathbb{C}^3$ uzayında bir minimal eğridir. Burada $z \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$ ile belirlidir.

2.2 Henneberg Minimal Yüzeyi

$\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında (4) Weierstrass gösterimi yardımıyla elde edilen Henneberg'in minimal yüzeyi

$$\mathcal{R}e \int h'(z) dz \quad (6)$$

ile belirlidir. Burada $z \in \mathbb{C}$, $z = u + iv = re^{i\theta}$ olarak verilmektedir.

Böylece, $\mathbb{E}^3$ uzayında Henneberg yüzeyi

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{R}e \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + z - \frac{1}{z}, \\ i \left(\frac{1}{3} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + z + \frac{1}{z} \right), \\ z^2 + \frac{1}{z^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

olur.

Björling gösteriminden farklı olarak Henneberg'in minimal yüzeyi Weierstrass gösterimi kullanılarak (u, v) parametreleri cinsinden aşağıdaki teoremden verilmektedir.

2.2.1 Teorem $\mathbb{E}^3$ uzayında, Weierstrass gösterimindeki Weierstrass data olarak $(f, g) = (1 - z^{-4}, z)$ ve $z = u + iv$ alınırsa Henneberg yüzeyi

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{pmatrix} u + uv^2 - \frac{u^3}{3} - \frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{uv^2}{(u^2 + v^2)^3} + \frac{u^3}{3(u^2 + v^2)^3} \\ u - u^2v + \frac{v^3}{3} + \frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{u^2v}{(u^2 + v^2)^3} - \frac{v^3}{3(u^2 + v^2)^3} \\ u^2 - v^2 + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

bir minimal yüzeydir.

İspat. Henneberg'in $\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları hesaplandığında

$$E = \lambda^{-4}(\lambda + 1)^2[(\lambda + 1)^2 - 4u^2][u^2 + (v + 1)^2][u^2 + (v - 1)^2] = G,$$

$$F = 0$$

bulunur. Burada $\lambda = u^2 + v^2$ ile belirlidir. Yüzeyin Gauss dönüşümü hesaplanırsa

$$e = \left(\frac{2u}{\lambda + 1}, \frac{2v}{\lambda + 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

olur. Yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları ise

$$L = -2\lambda^{-4}[\lambda^4 - (\lambda^2 - 8u^2v^2)] = -N, \quad M = 8\lambda^{-4}(u^2 - v^2)uv$$

bulunur. Buradan

$$\det II = -4\lambda^{-4}[(\lambda + 1)^2 - 4u^2][u^2 + (v + 1)^2][u^2 + (v - 1)^2]$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$H = 0,$$

$$K = -\frac{4\lambda^4}{(\lambda+1)^4[(\lambda+1)^2-4u^2][u^2+(v+1)^2][u^2+(v-1)^2]}$$

bulunur.

2.2.1 İntegralden Bağımsız Gösterim

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında minimal yüzeyler için verilen Weierstrass gösteriminin integralden bağımsız gösterimi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R}e \begin{pmatrix} (1-\omega^2)\phi''(\omega) + 2\omega\phi'(\omega) - 2\phi(\omega) \\ i(1+\omega^2)\phi''(\omega) - 2\omega\phi'(\omega) + 2\phi(\omega) \\ 2[\omega\phi''(\omega) - \phi'(\omega)] \end{pmatrix} = \mathcal{R}e \begin{pmatrix} f_1(\omega) \\ f_2(\omega) \\ f_3(\omega) \end{pmatrix} \quad (9)$$

ile belirlidir. Burada $\omega \in \mathbb{C}$ olup $\phi(\omega)$ cebirsel fonksiyonu ve $f_i(\omega)$ fonksiyonları

$$\phi(\omega) = \frac{1}{4}(\omega^2 - 1)f_1(\omega) - \frac{i}{4}(\omega^2 + 1)f_2(\omega) - \frac{1}{2}\omega f_3(\omega) \quad (10)$$

bağıntısı ile elde edilmektedir (Weierstrass 1885, 1903).

İntegralden bağımsız gösterimi kullanarak Henneberg minimal yüzeyinin cebirsel fonksiyonu

$$\phi(\omega) = \frac{\omega^4 + 1}{6\omega} \quad (11)$$

olur.

2.2.2 Derece ve Sınıf

Bu kısımda, Maple yazılım programı desteği ve Groebner elimine algoritmasını kullanarak $\mathcal{H}(u, v)$ Henneberg minimal yüzeyinin cebirsel denklemi, derecesi ve sınıfı elde edilecektir.

Bir $Q(x, y, z) = 0$ kapalı polinom denkleminin köklerinin kümesi bir cebirsel yüzey belirtir. $n = \deg(f)$ olmak üzere bir $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ cebirsel yüzeyinin *derecesi (mertebesi)* n ile belirlidir. Bir $\mathbf{x}(u, v)$ yüzeyi üzerindeki (u, v) noktasındaki teğet düzlem denklemi

$$Xx + Yy + Zz + P = 0 \quad (12)$$

biçimindedir. Buradaki X, Y, Z , yüzeyin

$$e = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (13)$$

Gauss dönüşümünün bileşenleri olup $P = P(u, v)$ ile belirlidir. Homojen olmayan teğet koordinatlar

$$a = X/P, b = Y/P, c = Z/P \quad (14)$$

olarak alındığında $\mathbf{x}(u, v)$ yüzeyinin $\hat{Q}(a, b, c) = 0$ kapalı denklemi elde edilir. Bu denklemin en büyük derecesi $\mathbf{x}(u, v)$ yüzeyinin *sınıfını* vermektedir.

Henneberg doktora tezinde, 1. bölümde verilmiş olan $\mathcal{H}(r, q)$ minimal yüzeyinin derecesini hatalı olarak $\deg(\mathcal{H}(r, q)) = 17$ bulmuştur. Ayrıca sınıfının $\text{snf}(\mathcal{H}(r, q)) = 5$ olduğunu göstermiştir. Böylece $\mathcal{H}(r, q)$ yüzeyi bir cebirsel minimal yüzeydir (Henneberg, 1875, 1876).

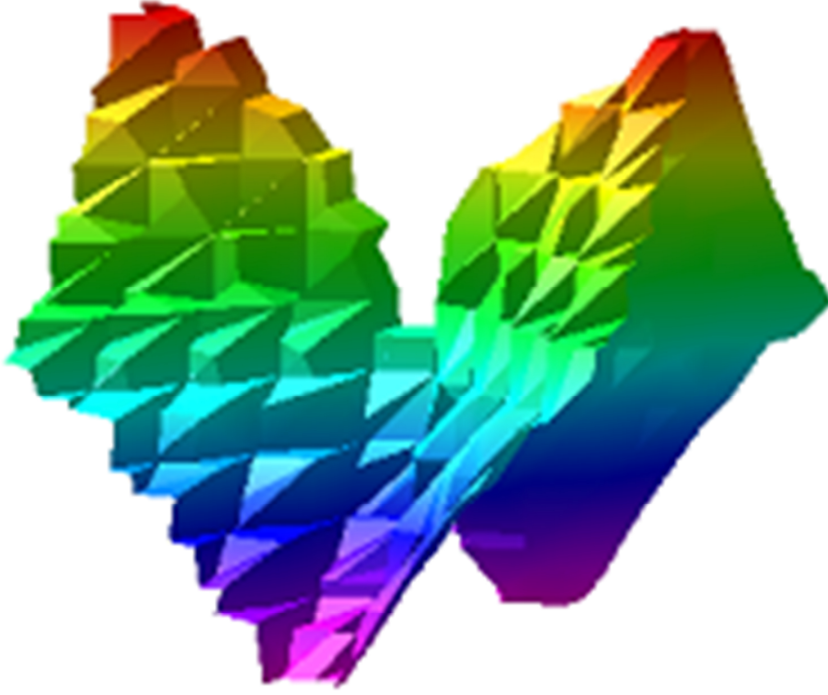
$\mathcal{H}(u, v)$ Henneberg yüzeyinin, x, y, z , kartezyen koordinatlar cinsinden kapalı denklemi:

$$\begin{aligned}
Q(x, y, z) = & 64x^6z^9 + 192x^4y^2z^9 + 192x^2y^4z^9 + 64y^6z^9 - 432x^8z^6 - 864x^6y^2z^6 \\
& - 768x^4z^{10} + 864x^2y^6z^6 + 432yz^6 + 768yz^{10} - 1215x^{10}z^3 \\
& - 9963x^8yz^3 - 3888x^8z^5 - 23814x^6y^4z^3 - 15552x^6y^2z^5 + 4320x^6z^7 \\
& - 23814x^4y^6z^3 - 23328x^4y^4z^5 - 7776x^4y^2z^7 - 768x^4z^9 \\
& - 9963x^2y^8z^3 - 15552x^2y^6z^5 - 7776x^2y^4z^7 + 4608x^2y^2z^9 \\
& + 2304x^2z^{11} - 1215y^{10}z^3 - 3888y^8z^5 + 4320y^6z^7 - 768y^4z^9 \\
& + 2304y^2z^{11} - 729x^{12} - 4374x^{10}z^2 + 2187x^8y^4 - 13122x^8y^2z^2 \\
& + 7776x^8z^4 - 8748x^6y^4z^2 + 62208x^6y^2z^4 + 52032x^6z^6 - 2187x^4y^8 \\
& + 8748x^4y^6z^2 + 10560x^4y^2z^6 - 5376x^4z^8 + 13122x^2y^8z^2 \\
& - 62208x^2y^6z^4 - 10560x^2y^4z^6 + 4608x^2z^{10} + 729y^{12} + 4374y^{10}z^2 \\
& - 7776y^8z^4 - 52032y^6z^6 + 5376y^4z^8 - 4608y^2z^{10} + 8748x^{10}z \\
& - 26244x^8y^2z + 69120x^8z^3 + 17496x^6y^4z + 89856x^6z^5 \\
& + 17496x^4y^6z - 511488x^4y^4z^3 - 573696x^4y^2z^5 - 162816x^4z^7 \\
& - 26244x^2y^8z - 573696x^2y^4z^5 - 276480x^2y^2z^7 - 27648x^2z^9 \\
& + 8748y^{10}z + 69120y^8z^3 + 89856y^6z^5 - 162816y^4z^7 - 27648y^2z^9 \\
& + 9720x^{10} - 79704x^8y^2 + 31104x^8z^2 + 190512x^6y^4 \\
& - 248832x^6y^2z^2 - 179712x^6z^4 - 190512x^4y^6 - 1147392x^4y^2z^4 \\
& - 595968x^4z^6 + 79704x^2y^8 + 248832x^2y^6z^2 + 1147392x^2y^4z^4 \\
& - 55296x^2z^8 - 9720y^{10} - 31104y^8z^2 + 179712y^6z^4 + 595968y^4z^6 \\
& + 55296y^2z^8 - 62208x^8z + 248832x^6y^2z - 416256x^6z^3 \\
& - 373248x^4y^4z + 84480x^4y^2z^3 - 651264x^4z^5 + 248832x^2y^6z \\
& + 84480x^2y^4z^3 + 1105920x^2y^2z^5 + 110592x^2z^7 - 62208y^8z \\
& - 416256y^6z^3 - 651264y^4z^5 + 110592y^2z^7 - 27648x^8 + 55296x^6y^2 \\
& - 138240x^6z^2 - 248832x^4y^2z^2 - 86016x^4z^4 - 55296x^2y^6 \\
& + 248832x^2y^4z^2 + 221184x^2z^6 + 27648y^8 + 138240y^6z^2 \\
& + 86016y^4z^4 - 221184y^2z^6 - 49152x^4z^3 - 294912x^2y^2z^3 \\
& - 147456x^2z^5 - 49152y^4z^3 - 147456y^2z^5 - 32768x^6 + 98304x^4y^2 \\
& - 196608x^4z^2 - 98304x^2y^4 - 294912x^2z^4 + 32768y^6 + 196608y^4z^2 \\
& + 294912y^2z^4
\end{aligned}$$

olur. Buradan $der(\mathcal{H}(u, v)) = 15$ olduğu görülmektedir. Böylece $Q(x, y, z) = 0$ kapalı denklemi, Henneberg minimal yüzeyi $\mathcal{H}(u, v)$ için bir cebirsel minimal yüzey belirtir (Şekil 3).

$\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin sınıfını hesaplamak için $Xx + Yy + Zz + P = 0$ teğet düzlem denklemini kullanarak

$$P(u, v) = \frac{\rho(u, v)}{3(u^2 + v^2 + 1)(u^2 + v^2)^2}$$



Şekil 3: Öklidyen kartezyen koordinatlarda Henneberg cebirsel yüzeyi.

fonksiyonu ve

$$a = \frac{6u\lambda^2}{\rho(u,v)}, \quad b = \frac{6v\lambda^2}{\rho(u,v)}, \quad c = \frac{3(\lambda-1)\lambda^2}{\rho(u,v)}$$

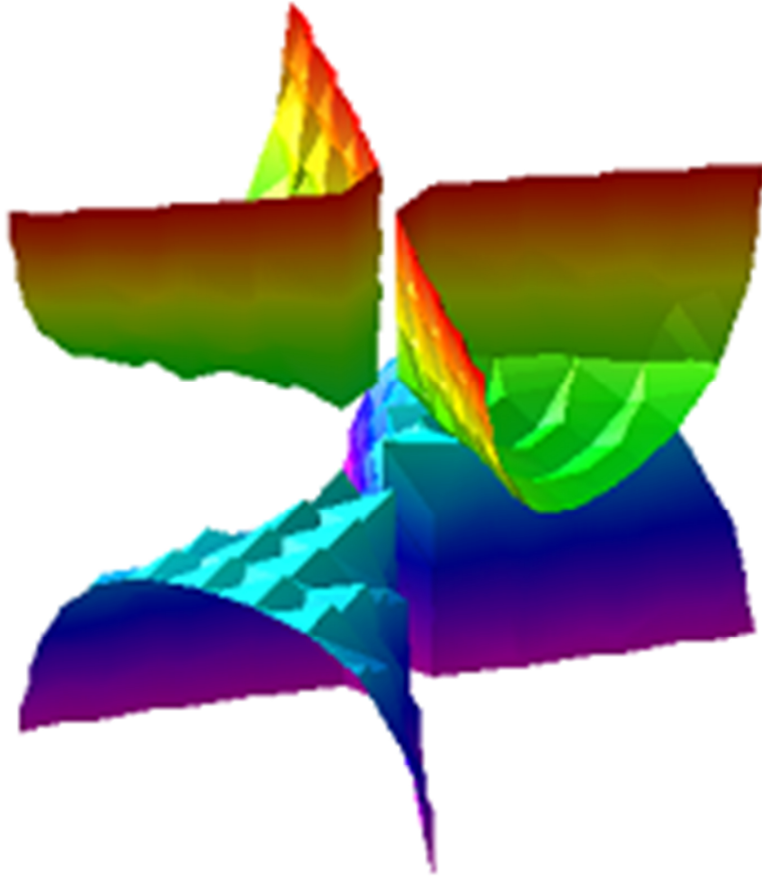
elde edilir. Buradaki $\lambda = u^2 + v^2$ ve

$$\rho(u,v) = -(\lambda-1)(u-v)(u+v)(\lambda^2 + 4\lambda + 1)$$

ile belirlidir. Böylece $\mathcal{H}(u,v)$ Henneberg yüzeyinin a, b, c teğet koordinatlardaki kapalı denklemi

$$\hat{Q}(a,b,c) = -6a^4c - 4a^2c^3 + 6b^4c + 4b^2c^3 - 3a^4 - 6a^2b^2 - 3b^4$$

olur. Bu yüzey (Şekil 4) için sınıfın $snf(\mathcal{H}(u,v)) = 5$ olduğu görülmektedir.



Şekil 4: Öklidyen teğet koordinatlarda Henneberg cebirsel yüzeyi.

BÖLÜM 3

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA HENNEBERG YÜZEYİ

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayındaki metrik işaretleri $(+, +, -)$ alınmış olup Henneberg'in spacelike maksimal ve timelike minimal yüzeyleri elde edilecektir.

3.1 Spacelike Maksimal Yüzeylerin Weierstrass Gösterimi

Spacelike minimal (maksimal) yüzeyler için Weierstrass gösterimi Kobayashi tarafından elde edilmiştir.

3.1.1 Teorem Basit bağlantılı bir açık $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlı, sıfırdan farklı kompleks diferansiyellenebilir fonksiyonlar f ve g olsun. Buradan

$$\mathbf{x}(z) = \operatorname{Re} \int \begin{pmatrix} (1 + g^2) \\ i(1 - g^2) \\ 2g \end{pmatrix} f dz \quad (15)$$

daldırması sıfır ortalama eğrilikli bir konformal maksimal yüzey belirtir. Tersine, herhangi bir konformal maksimal yüzey yukarıdaki şekilde belirlidir (Kobayashi, 1983).

3.2 Spacelike Maksimal Henneberg Yüzeyi

Henneberg'in $\mathcal{H}(u, v)$ spacelike maksimal yüzeyinin Weierstrass datası $(f, g) = (1 - z^{-4}, z)$ olarak alınırsa yüzeyin parametrik denklemi

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{pmatrix} u - uv^2 + \frac{u^3}{3} + \frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{uv^2}{(u^2 + v^2)^3} + \frac{u^3}{3(u^2 + v^2)^3} \\ -v + u^2v - \frac{v^3}{3} - \frac{v}{u^2 + v^2} + \frac{u^2v}{(u^2 + v^2)^3} - \frac{v^3}{3(u^2 + v^2)^3} \\ u^2 - v^2 + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

olur. Bu yüzeyin Gauss dönüşümü hesaplandığında, $\lambda = u^2 + v^2$ olmak üzere,

$$e = \left(\frac{2u}{\lambda - 1}, \frac{2v}{\lambda - 1}, \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \right)$$

bulunur.

3.2.1 Spacelike Maksimal Yüzeylerde İntegralden Bağımsız Gösterim

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında, Weierstrass gösterimini kullanarak bir spacelike maksimal yüzeyin integralden bağımsız gösterimi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R}e \begin{pmatrix} (1 + \omega^2)\Psi''(\omega) - 2\omega\Psi'(\omega) + 2\Psi(\omega) \\ i(1 - \omega^2)\Psi''(\omega) + 2i\omega\Psi'(\omega) - 2i\Psi(\omega) \\ 2[\omega\Psi''(\omega) - 2\Psi'(\omega)] \end{pmatrix} = \mathcal{R}e \begin{pmatrix} f_1(\omega) \\ f_2(\omega) \\ f_3(\omega) \end{pmatrix} \quad (17)$$

şeklindedir. Burada $\omega \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Psi(\omega)$ cebirsel fonksiyonu ve $f_i(\omega)$ fonksiyonları arasındaki bağıntı

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{4}(\omega^2 + 1)f_1(\omega) - \frac{i}{4}(\omega^2 - 1)f_2(\omega) - \frac{1}{2}\omega f_3(\omega) \quad (18)$$

ile belirlidir. Henneberg'in spacelike maksimal yüzeyinin cebirsel ifadesi hesaplanırsa

$$\Psi(\omega) = \frac{\omega^4 + 1}{6\omega} \quad (19)$$

bulunur (Güler, 2014; Güler ve Zambak, 2015).

3.2.2 Spacelike Maksimal Yüzeylerde Derece ve Sınıf

Bu kısımda; $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki spacelike maksimal Henneberg $\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin cebirsel denklemi, derecesi ve sınıfı elde edilecektir.

Bir $\mathbf{x}(u, v)$ yüzeyi üzerinde bulunan herhangi bir (u, v) noktasındaki teğet düzlem denklemi

$$Xx + Yy - Zz + P = 0 \quad (20)$$

biçimindedir. Buradaki X, Y, Z , yüzeyin

$$e = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (21)$$

Gauss dönüşümünün bileşenleri olup $P = P(u, v)$ ile belirlidir. Homojen olmayan teğet koordinatlar

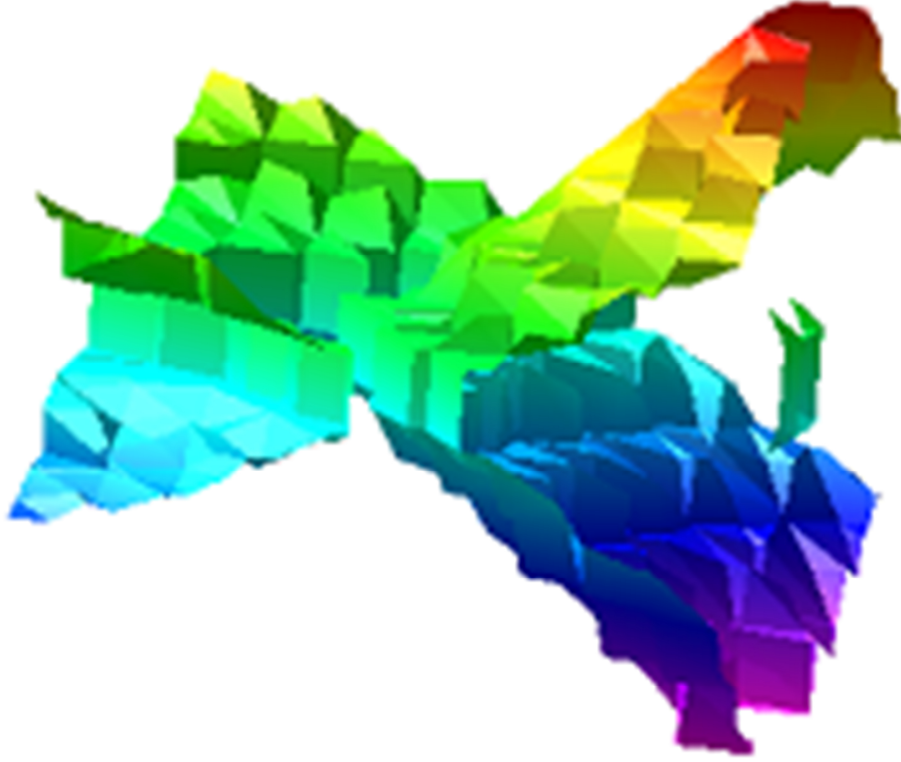
$$a = X/P, \quad b = Y/P, \quad c = Z/P \quad (22)$$

olarak alındığında $\mathbf{x}(u, v)$ yüzeyinin $\hat{Q}(a, b, c) = 0$ kapalı denklemi elde edilir. Bu denklemin en büyük derecesi $\mathbf{x}(u, v)$ yüzeyinin *sınıfını* vermektedir.

Henneberg'in $\mathcal{H}(u, v)$ spacelike maksimal yüzeyinin kapalı denklemi:

$$\begin{aligned}
Q(x, y, z) = & 64x^6z^9 + 192x^4y^2z^9 + 192x^2y^4z^9 + 64y^6z^9 - 432x^8z^6 - 864x^6y^2z^6 \\
& - 768x^4z^{10} + 864x^2y^6z^6 + 432y^8z^6 + 768y^4z^{10} - 1215x^{10}z^3 \\
& - 9963x^8y^2z^3 + 3888x^8z^5 - 23814x^6y^4z^3 + 15552x^6y^2z^5 \\
& + 4320x^6z^7 - 23814x^4y^6z^3 + 23328x^4y^4z^5 - 7776x^4y^2z^7 + 768x^4z^9 \\
& - 9963x^2y^8z^3 + 15552x^2y^6z^5 - 7776x^2y^4z^7 - 4608x^2y^2z^9 \\
& + 2304x^2z^{11} - 1215y^{10}z^3 + 3888y^8z^5 + 4320y^6z^7 + 768y^4z^9 \\
& + 2304y^2z^{11} - 729x^{12} + 4374x^{10}z^2 + 2187x^8y^4 + 13122x^8y^2z^2 \\
& + 7776x^8z^4 + 8748x^6y^4z^2 + 62208x^6y^2z^4 - 52032x^6z^6 - 2187x^4y^8 \\
& - 8748x^4y^6z^2 - 10560x^4y^2z^6 - 5376x^4z^8 - 13122x^2y^8z^2 \\
& - 62208x^2y^6z^4 + 10560x^2y^4z^6 - 4608x^2z^{10} + 729y^{12} - 4374y^{10}z^2 \\
& - 7776y^8z^4 + 52032y^6z^6 + 5376y^4z^8 + 4608y^2z^{10} + 8748x^{10}z \\
& - 26244x^8y^2z - 69120x^8z^3 + 17496x^6y^4z + 89856x^6z^5 \\
& + 17496x^4y^6z + 511488x^4y^4z^3 - 573696x^4y^2z^5 + 162816x^4z^7 \\
& - 26244x^2y^8z - 573696x^2y^4z^5 + 276480x^2y^2z^7 - 27648x^2z^9 \\
& + 8748y^{10}z - 69120y^8z^3 + 89856y^6z^5 + 162816y^4z^7 - 27648y^2z^9 \\
& - 9720x^{10} + 79704x^8y^2 + 31104x^8z^2 - 190512x^6y^4 \\
& - 248832x^6y^2z^2 + 179712x^6z^4 + 190512x^4y^6 + 1147392x^4y^2z^4 \\
& - 595968x^4z^6 - 79704x^2y^8 + 248832x^2y^6z^2 - 1147392x^2y^4z^4 \\
& + 55296x^2z^8 + 9720y^{10} - 31104y^8z^2 - 179712y^6z^4 + 595968y^4z^6 \\
& - 55296y^2z^8 + 62208x^8z - 248832x^6y^2z - 416256x^6z^3 \\
& + 373248x^4y^4z + 84480x^4y^2z^3 + 651264x^4z^5 - 248832x^2y^6z \\
& + 84480x^2y^4z^3 - 1105920x^2y^2z^5 + 62208y^8z + 110592x^2z^7 \\
& - 416256y^6z^3 + 651264y^4z^5 + 110592y^2z^7 + 248832x^4y^2z^2 \\
& - 27648x^8 + 55296x^6y^2 + 138240x^6z^2 - 86016x^4z^4 \\
& - 248832x^2y^4z^2 - 55296x^2y^6 - 221184x^2z^6 + 27648y^8 \\
& - 138240y^6z^2 + 86016y^4z^4 - 32768y^6 + 221184y^2z^6 + 49152x^4z^3 \\
& + 294912x^2y^2z^3 - 147456x^2z^5 + 49152y^4z^3 - 147456y^2z^5 \\
& + 32768x^6 - 98304x^4y^2 - 196608x^4z^2 + 98304x^2y^4 + 294912x^2z^4 \\
& + 196608y^4z^2 - 294912y^2z
\end{aligned}$$

olur. $der(\mathcal{H}(u, v)) = 15$ olduğu görülmektedir. Böylece $Q(x, y, z) = 0$ denklemi $\mathcal{H}(u, v)$ spacelike maksimal yüzeyi için bir cebirsel yüzey belirtir (Şekil 5).



Şekil 5: Minkowski kartezyen koordinatlarda spacelike maksimal Henneberg cebirsel yüzeyi.

$\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin sınıfını bulmak için teğet düzlem denklemini kullanarak

$$P(u, v) = \frac{\alpha(u, v)}{3(\lambda - 1)\lambda^2}$$

fonksiyonu ve

$$a = \frac{6u\lambda^2}{\alpha(u, v)}, \quad b = \frac{6v\lambda^2}{\alpha(u, v)}, \quad c = \frac{3(\lambda + 1)\lambda^2}{\alpha(u, v)}$$

koordinatları elde edilir. Buradaki $\lambda = u^2 + v^2$ ve

$$\alpha(u, v) = (\lambda + 1)(u - v)(u + v)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

ile belirlidir. Henneberg'in $\mathcal{H}(u, v)$ spacelike maksimal yüzeyinin a, b, c koordinatlardaki kapalı denklemi hesaplandığında

$$\hat{Q}(a, b, c) = -6a^4c + 4a^2c^3 + 6b^4c - 4b^2c^3 - 3a^4 - 6a^2b^2 - 3b^4$$

olur (Şekil 6). Böylece cebirsel spacelike maksimal Henneberg $\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyi için $snf(\mathcal{H}(u, v)) = 5$ olduğu görülmektedir.



Şekil 6: Minkowski teğet koordinatlarda spacelike maksimal Henneberg cebirsel yüzeyi.

3.3 Timelike Minimal Yüzeylerin Weierstrass Benzeri Gösterimi

M. Magid, $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki timelike minimal yüzeyler için aşağıdaki Weierstrass benzeri gösterim teoremini vermiştir.

3.3.1 Teorem $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki $(f_1(u), g_1(u))$ ve $(f_2(v), g_2(v))$ fonksiyonları sırasıyla u ve v reel değişkenlerine bağlı; basit bağlantılı bir $\mathcal{U}$ açık kümesinde tanımlı olsun. Buradan bir timelike minimal yüzeyin Weierstrass benzeri gösterimi

$$\mathbf{x}(u, v) = \int \begin{pmatrix} 2g_1f_1 \\ (1 - g_1^2)f_1 \\ -(1 + g_1^2)f_1 \end{pmatrix} du + \int \begin{pmatrix} 2g_2f_2 \\ (1 - g_2^2)f_2 \\ (1 + g_2^2)f_2 \end{pmatrix} dv \quad (23)$$

olur (Magid, 1991).

3.4 Timelike Minimal Henneberg Yüzeyi

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike minimal yüzeyler için Weierstrass benzeri gösterimde

$$(f_1(u), g_1(u)) = (1 - u^{-4}, u), \quad (f_2(v), g_2(v)) = (1 - v^{-4}, v)$$

olarak alınırsa Henneberg'in timelike minimal $\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \\ \frac{1}{3} \left(-u^3 - v^3 + \frac{1}{u^3} + \frac{1}{v^3} \right) + u + v - \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \\ \frac{1}{3} \left(-u^3 + v^3 - \frac{1}{u^3} + \frac{1}{v^3} \right) - u + v - \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (24)$$

olur. Ayrıca, bu yüzeyin Gauss dönüşümü

$$e = \left(\frac{uv - 1}{1 + uv}, \frac{u + v}{1 + uv}, \frac{-u + v}{1 + uv} \right)$$

bulunur.

3.4.1 Timelike Minimal Yüzeylerde İntegralden Bağımsız Gösterim

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında timelike minimal yüzeyler için integralden bağımsız Weierstrass benzeri gösterim

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\zeta''(u) - 2\zeta'(u) \\ (1 - u^2)\zeta''(u) + 2u\zeta'(u) - 2\zeta(u) \\ -(1 + u^2)\zeta''(u) + 2u\zeta'(u) - 2\zeta(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2v\xi''(v) - 2\xi'(v) \\ (1 - v^2)\xi''(v) + 2v\xi'(v) - 2\xi(v) \\ -(1 + v^2)\xi''(v) - 2v\xi'(v) + 2\xi(v) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} h_1(u) + k_1(v) \\ h_2(u) + k_2(v) \\ h_3(u) + k_3(v) \end{pmatrix} \quad (25)$$

biçimindedir. Burada, $u, v \in \mathbb{R}$ için $\zeta(u)$, $\xi(v)$ cebirsel fonksiyonları ve $h_i(u) + k_i(v)$ fonksiyonları arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) = & -\frac{1}{2}uh_1(u) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)h_2(u) - \frac{1}{4}(u^2 + 1)h_3(u) \\ & -\frac{1}{2}vk_1(v) + \frac{1}{4}(v^2 - 1)k_2(v) + \frac{1}{4}(v^2 + 1)k_3(v)\end{aligned}\quad (26)$$

olarak bulunur.

Timelike minimal yüzeyler için integralden bağımsız Weierstrass benzeri gösterim kullanılarak Henneberg'in timelike minimal yüzeyinin cebirsel ifadesi hesaplanırsa

$$\Phi(u, v) = \frac{v(u^4 + 1) + u(u^4 + 1)}{6uv}\quad (27)$$

elde edilir (Güler, 2014; Güler ve Zambak, 2015).

3.4.2 Timelike Minimal Yüzeylerde Derece ve Sınıf

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında Henneberg timelike minimal yüzeyinin kapalı denklemi

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & -16x^9y^6 + 48x^9y^4z^2 - 48x^9y^2z^4 + 16x^9z^6 + 384x^{10}y^4 - 384x^{10}z^4 \\ & + 216x^6y^8 - 432x^6y^6z^2 + 432x^6y^2z^6 - 216x^6z^8 - 2304x^{11}y^2 \\ & + 2304x^{11}z^2 + 768x^9y^4 + 4608x^9y^2z^2 + 768x^9z^4 - 4320x^7y^6 \\ & - 7776x^7y^4z^2 + 7776x^7y^2z^4 + 4320x^7z^6 + 3888x^5y^8 - 15552x^5y^6z^2 \\ & + 23328x^5y^4z^4 - 15552x^5y^2z^6 + 3888x^5z^8 + 1215x^3y^{10} \\ & - 9963x^3y^8z^2 + 23814x^3y^6z^4 - 23814x^3y^4z^6 + 9963x^3y^2z^8 \\ & - 1215x^3z^{10} - 9216x^{10}y^2 - 9216x^{10}z^2 + 10752x^8y^4 - 10752x^8z^4 \\ & - 104064x^6y^6 + 21120x^6y^4z^2 + 21120x^6y^2z^4 - 104064x^6z^6 \\ & - 15552x^4y^8 + 124416x^4y^6z^2 - 124416x^4y^2z^6 + 15552x^4z^8 \\ & + 8748x^2y^{10} - 26244x^2y^8z^2 + 17496x^2y^6z^4 + 17496x^2y^4z^6 \\ & - 26244x^2y^2z^8 + 8748x^2z^{10} + 1458y^{12} - 4374y^8z^4 + 4374y^4z^8 \\ & - 1458z^{12} + 110592x^9y^2 - 110592x^9z^2 + 651264x^7y^4 \\ & - 1105920x^7y^2z^2 + 651264x^7z^4 - 359424x^5y^6 - 2294784x^5y^4z^2 \\ & + 2294784x^5y^2z^4 + 359424x^5z^6 - 276480x^3y^8 + 2045952x^3y^4z^4 \\ & - 276480x^3z^8 - 34992xy^{10} - 104976xy^8z^2 - 69984xy^6z^4 \\ & + 69984xy^4z^6 + 104976xy^2z^8 + 34992xz^{10} + 442368x^8y^2 \\ & + 442368x^8z^2 + 4767744x^6y^4 - 4767744xz^4 + 1437696x^4y^6 \\ & - 9179136x^4y^4z^2 - 9179136x^4y^2z^4 + 1437696x^4z^6 - 248832x^2y^8 \\ & - 1990656xy^6z^2 + 1990656x^2y^2z^6 + 248832x^2z^8 - 77760y^{10} \\ & - 637632y^8z^2 - 1524096y^6z^4 - 1524096y^4z^6 - 637632y^2z^8 \\ & - 77760z^{10} - 1769472x^7y^2 + 1769472x^7z^2 + 10420224x^5y^4 \\ & + 17694720x^5y^2z^2 + 10420224x^5z^4 + 6660096x^3y^6 \\ & + 1351680x^3y^4z^2 - 1351680x^3y^2z^4 - 6660096x^3z^6 + 995328xy^8 \\ & + 3981312xy^6z^2 + 5971968xy^4z^4 + 3981312xy^2z^6 + 995328xz^8 \\ & - 7077888x^6y^2 - 7077888x^6z^2 + 2752512x^4y^4 - 2752512x^4z^4 \\ & + 4423680x^2y^6 - 7962624x^2y^4z^2 - 7962624x^2y^2z^4 + 4423680x^2z^6 \\ & + 884736y^8 + 1769472y^6z^2 - 1769472y^2z^6 - 884736z^8 \\ & + 9437184x^5y^2 - 9437184x^5z^2 + 3145728x^3y^4 - 18874368x^3y^2z^2 \\ & + 3145728x^3z^4 + 37748736x^4y^2 + 37748736x^4z^2 + 25165824x^2y^4 \\ & - 25165824x^2z^4 + 4194304y^6 + 12582912y^4z^2 + 12582912y^2z^4 \\ & + 4194304z^6 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $der(\mathcal{H}(u, v)) = 15$ olur. Böylece $Q(x, y, z) = 0$, timelike minimal Henneberg $\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyi için bir cebirsel yüzey belirtir (Şekil 7).



Şekil 7: Minkowski kartezyen koordinatlarda timelike minimal Henneberg cebirsel yüzeyi.

$\mathcal{H}(u, v)$ yüzeyinin sınıfını hesaplamak için teğet düzlem denklemini kullanarak

$$P(u, v) = \frac{\hat{\alpha}(u, v)}{3(uv + 1)u^2v^2}$$

fonksiyonu ve

$$a = \frac{3u^2v^2(uv - 1)}{\hat{\alpha}(u, v)}, \quad b = \frac{3(u + v)u^2v^2}{\hat{\alpha}(u, v)}, \quad c = \frac{3(v - u)u^2v^2}{\hat{\alpha}(u, v)}$$

elde edilir. Buradaki $\hat{\alpha}(u, v) = -(uv - 1)(u^2v^2 + 4uv + 1)(u^2 + v^2)$ olup Henneberg-'in $\mathcal{H}(u, v)$ timelike minimal yüzeyinin a, b, c koordinatlardaki kapalı denklemi

$$\hat{Q}(a, b, c) = -8a^3b^2 - 8a^3c^2 - 12ab^4 + 12ac^4 - 3b^4 + 6b^2c^2 - 3c^4$$

olur (Şekil 8). Böylece cebirsel timelike minimal Henneberg yüzeyin sınıfının $\text{snf}(\mathcal{H}(u, v)) = 5$ olduğu görülür.



Şekil 8: Minkowski teğet koordinatlarda timelike minimal Henneberg cebirsel yüzeyi.

KAYNAKLAR

- Akutagawa, K. ve Nishikawa, S. (1990). The Gauss map spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. *Tohoku Mathematical Journal*, 42: 67-82.
- Beem, J. K. ve Ehrlich, P.E. (1981). *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker Inc., New York, 440 pp.
- Bour, E. (1862). Théorie de la déformation des surfaces. *Journal de l'École Polytechnique*, 22 (39): 1-148.
- Chen, B.Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*. Marcel Dekker Inc., New York, 310 pp.
- Chen, B.Y. (1996). Report on Submanifolds of finite type. *Soochow Journal of Mathematics*, 22: 117-337.
- Do Carmo, M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs., New Jersey, 503 pp.
- Gray A., Salamon S. ve Abbena E. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Third ed. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 984 pp.
- Güler, E. (2005). 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Helisoidal Ve Dönel Yüzeyler. Yüksek Lisans tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 103 s.
- Güler, E. (2007). Bour's theorem and lightlike profile curve. *Yokohama Mathematical Journal*, 54 (1): 55-77.
- Güler, E. (2008). Bour's theorem on timelike helicoidal surfaces with (L,L)-type in Minkowski 3-space. *Beykent University Journal of Science and Technology*, 2 (1): 82-94.
- Güler, E. (2010). 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Light-like Üreteç Eğrili Time-like Helisoidal Ve Dönel Yüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 143 s.
- Güler, E. (2012). A new kind of helicoidal surface of value m. *International Electronic Journal of Geometry*, 7 (1): 154-162.
- Güler E. (2013). Bour's spacelike maximal and timelike minimal surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space. *Ukrainian Mathematical Journal* (incelemede).
- Güler, E. (2014). Class, degree and integral free forms for the family of Bour's minimal surfaces. *Discrete and Continuous Dynamical System-A* (incelemede).
- Güler, E. ve Hacısalihoğlu, H.H. (2011). Timelike rotational surfaces with lightlike profile curve. *Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara. Séries A1: Mathematics and Statistics*, 60 (1): 27-47.

- Güler, E., Konnai, S. ve Yasumoto, K. (2014). Bour surface companions in non-Euclidean space forms. *Mathematical Reports* (incelemede).
- Güler, E. ve Saraçoğlu Çelik, S. (2015). Polynomial zmc surfaces in Minkowski 3-space. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences* (incelemede).
- Güler, E. ve Yaylı Y. (2015). Generalized Bour's theorem. *Kuwait Journal of Science*, 42 (1): 79-90.
- Güler E. ve Yaylı Y. (2015). Generalized Bour theorem in Minkowski 3-space. *Ukrainian Mathematical Journal* (incelemede).
- Güler, E., Yaylı, Y. ve Hacısalihoğlu, H.H. (2010). Bour's theorem on Gauss map in 3-Euclidean space. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39 (4): 515-525.
- Güler E., Yaylı Y., Saraçoğlu Çelik S. ve Hacısalihoğlu H.H. (2015). Algebraic surfaces of the Laplace-Beltrami operators of the TF-type surfaces. *Turkish Journal of Mathematics* (incelemede).
- Güler, E. ve Zambak, V. (2015). Algebraic surfaces of Henneberg in Minkowski 3-space. *Ukrainian Mathematical Journal* (incelemede).
- Hacısalihoğlu, H.H., (1972). *2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 453 s.
- Hacısalihoğlu, H.H. (1982). *Diferensiyel Geometri I*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 272 s.
- Hacısalihoğlu, H.H. (1994). *Diferensiyel Geometri II*. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 340 s.
- Henneberg, L. (1875). Über Salche Minimalfläche, welche eine vorgeschriebene ebene curve sur geodätischen line haben. Doctoral Dissertation, Eidgenössisches Polytechikum, Zürich, 68 pp.
- Henneberg, L. (1876). Über Diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Paralee zur ebenen geodätischen line hat. *Vierteljschr Natuforsch, Ges Zürich*, 21: 66-70.
- Henneberg, L. (1878). Bestimmung der neidrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 9: 54-57.
- Kobayashi, O. (1983). Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 . *Tokyo Journal of Mathematics*, 6 (2): 297-309.
- Kobayashi, S. ve Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*. Wiley Classics Library, 344 pp.
- Magid, M. (1991). Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map. *Hokkaido Mathematical Journal*, 20 (3): 447-464.

- O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York, London, 411 pp.
- O'Neill B. (1983). *Semi Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, London, 468 pp.
- Weierstrass, K. (1866). Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 612-625.
- Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, pp. 633-639 and pp. 789-805. ((1903). An expanded version of this paper with ten additional pages appeared in Weierstrass' "*Mathematische Werke*", Vol. 3, Mayer and Müller, Berlin, pp. 1-37).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Vahit ZAMBAK
Doğum Yeri ve Tarihi : Tirebolu 15/08/1973

Eğitim Durumu

Lisans : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (1993-1994)
Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (1994-1997)

Yüksek Lisans : Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü (2014-2015)

Bildiği Yabancı Diller : Fransızca, İngilizce

Bilimsel Yayınlar : Güler, E. ve Zambak, V. (2015). Algebraic surfaces of
Henneberg in Minkowski 3-space. *Ukrainian Mathematical
Journal* (incelemede).

Bilimsel Faaliyetler :

- (1) XI Geometri Sempozyumu,
Ordu Üniversitesi, Ordu (2013), (bildirisiz katılım).
- (2) XII Geometri Sempozyumu,
Şeyh Edebali Üniversitesi, Bilecik
(2014), (bildirisiz katılım).
- (3) 10. Ankara Matematik Günleri,
Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara
(2015), (bildirisiz katılım).
- (4) XIII Geometri Sempozyumu,
Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul
(2015), (bildirisiz katılım).
- (5) International Conference on Pure and
Applied Mathematics, (ICPAM 2015),
Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van
(2015), (bildirili katılım).

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Tirebolu Çok Programlı Lisesi (1998-1999),
Van Cumhuriyet Lisesi (yedek subay- öğretmen), (1999-2000),
Tirebolu Çok Programlı Lisesi (2000-2003),
Giresun Atatürk Lisesi, (2003-2011)
Giresun Atatürk Anadolu Lisesi (2011-...)

İletişim

E-Posta Adresi : vhtzmbk@gmail.com

Tarih : 07/08/2015