

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ VE MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR OLMAYAN REGLE
YÜZEYLERİN STRİKSİYON ÇİZGİLERİ ÜZERİNE

Songül ÇAKAR

MAYIS 2019

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR OLMAYAN REGLE
YÜZEYLERİN STRİKSİYON ÇİZGİLERİ ÜZERİNE

Hazırlayan
Songül ÇAKAR

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK

Jüri Üyeleri
Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR
Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK
Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI

MAYIS 2019

ONAY

Songül ÇAKAR tarafından hazırlanan “**Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Açılabilir Olmayan Regle Yüzeylerin Striksiyon Çizgileri Üzerine**” adlı tez çalışması 24/05/2019 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bitlis Eren Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR

(Başkan)

Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK

(Danışman)

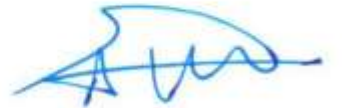
Dr. Öğr. Üyesi Hatice KUŞAK SAMANCI

(Üye)

İmza



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 22/07/2019 gün ve 16/01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Doç. Dr. Fatih Ahmet ÇELİK
Enstitü Müdür V.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Açılabilir Olmayan Regle Yüzeylerin Striksiyon Çizgileri Üzerine**” adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 30/05/2019



Songül ÇAKAR

ÖZET

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR OLMAYAN REGLE YÜZEYLERİN STRİKSİYON ÇİZGİLERİ ÜZERİNE

Songül ÇAKAR

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK

Mayıs 2019, 37 sayfa

Bu tez çalışmasında öncelikle Lorentz-Minkowski uzayın tarihçesi ve bu uzayla alakalı bazı çalışmalar belirtilmiştir. Bazı özel eğrilerin tanımları, regle yüzeyler ve regle yüzeylerin bazı özellikleri verilmiştir. Son bölümde, üç boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike açılabilir olmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgileri ele alınmıştır. Özel bir durumda eğrilik ve burulma fonksiyonları hesap edilmiştir. Elde edilen eğrilikler vasıtasıyla bazı özel eğriler arasında bağıntılar kurulmuştur. Böylece, bazı özel hallerde striksiyon çizgisi bazı özel eğriler olarak karşılık bulmuştur.

Anahtar Kelimeler: 3-Boyutlu Minkowski Uzay, Açılabilir Olmayan Regle Yüzeyler, Striksiyon Çizgisi, Bazı Özel Eğriler

ABSTRACT

ON LINES OF STRICTION OF NON-DEVELOPABLE RULED SURFACES IN THREE DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Songül ÇAKAR

Master Thesis

Bitlis Eren University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

May 2019, 37 pages

In this thesis, history of Lorentz-Minkowski space and some of the studies related to this space have been indicated. Definitions of some special curves, the ruled surfaces and some properties of ruled surfaces have been given. In the last section, non-developable spacelike and timelike ruled surfaces were handled in three dimensional Minkowski space. The curvature and torsion functions were calculated in a special case. The relationships between some special curves via the obtained curvatures were established. Thus, the line of striction has been found to correspond as some special curves in some particular cases.

Keywords: 3-Dimensional Minkowski Space, Non-developable Ruled Surfaces, Line of Striction, Some Special Curves

TEŞEKKÜR

Tezimin konusunu belirlememde, tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve yapıcı eleştirileriyle destek olan, kendime olan inancımı sorguladığım vakitlerde bile bana olan inancını bir an dahi yitirmeyen, bu sayede tezimin varlığının meydana gelmesinde etkisi yadsınamayacak kadar büyük olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK’a şükranlarımı sunarım.

Tezimin başlangıcından bitimine kadar benden yardımlarını esirgemeyen, gülen yüzüyle her zaman yanımda olan, özellikle stresli geçen dönemlerimde gösterdiği sabırdan dolayı eşim Ali ÇAKAR’ a teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	3
2.1. 3-Boyutlu Lorentz Minkowski Uzayı.....	3
2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bazı Yüzeyler.....	6
2.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler.....	8
2.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler.....	9
2.4.1. Açılabilir Spacelike Regle Yüzeyler.....	9
2.4.2. Açılabilir Timelike Regle Yüzeyler.....	10
2.5. 3-Boyutlu Minkowski Uzayı R_1^3 de Bazı Özel Eğriler.....	13
3. BULGULAR.....	16
3.1. Minkowski 3-Uzayda Açılabilir Olmayan Timelike Regle Yüzeylerin Striksiyon Çizgisi.....	16
3.1.1. Dayanak Eğrisi Timelike ve Doğrultmanı Spacelike Olan Açılabilir Olmayan Timelike Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi.....	16
3.1.2. Dayanak Eğrisi Timelike ve Doğrultmanı Timelike Olan Açılabilir Olmayan Timelike Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi.....	24
3.2. Dayanak Eğrisi ve Doğrultmanı Spacelike Olan Açılabilir Olmayan Spacelike Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi.....	28
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
4.1. Sonuçlar.....	33
4.2. Öneriler.....	33

5. KAYNAKLAR.....	34
ÖZGEÇMİŞ.....	37



SİMGELER DİZİNİ

V	Reel vektör uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
g	V üzerindeki skaler çarpım
$\mathbb{R}^n$	n -Boyutlu standart reel vektör uzayı
ν	V nin indeksi
$\mathbb{R}_\nu^n$	Yarı Öklid Uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	3-Boyutlu Minkowski Uzay
M	Diferensiyellenebilir bir manifold
α	$\mathbb{R}_1^3$ de regüler bir eğri
$\{T, X, N\}$	M için ortonormal çatı alanı
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
$X(u, v)$	$\mathbb{R}_1^3$ de timelike ya da spacelike açılabilir olmayan regle yüzey
$a(u)$	$X(u, v)$ nin striksiyon çizgisi
$b(u)$	Yay parametresi ile verilmiş birim küresel eğri
$\{\alpha, x, y\}$	$b(u)$ nun birim küresel Frenet çatısı
λ, μ, k_g	$X(u, v)$ nin yapı fonksiyonları

1. GİRİŞ

Adını Alman matematikçi Hermann Minkowski den alan Minkowski uzay yada Minkowski uzay-zaman; en uygun şekilde formüle edilmiş olan Einstein in özel izafiyet teorisinin matematiksel yapısıdır. Ünlü matematikçi Minkowski, 1907 yılında özel izafiyet teorisinden faydalanarak uzayın üç boyutu ile zaman boyutunu birleştirerek dört boyutlu uzay-zaman olabileceğinin farkına varmıştır. Teorik fizikte Minkowski uzay Öklid uzayından farklıdır. Öklid uzayında sadece spacelike boyutlar varken, Minkowski uzayda timelike boyuttur. Bu nedenle bir Öklid uzayının simetri grubu bir Öklidyen grup iken, Minkowski uzay için bu grup Poincare gruptur.

Eğrilerin diferansiyel geometrisi geometriciler tarafından sıklıkla ele alınmaktadır. Özellikle eğrinin eğriliği ve burulması ile bir eğriyi karakterize etmek oldukça önemlidir. Bir regüler eğrinin teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa eğri genel helis veya sabit eğimli eğri olarak adlandırılır. Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\kappa}$$

oranının sabit olması sonucu 1802 yılında M. A. Lancret tarafından ifade edilmiş ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ispat edilmiştir. Eğer bu oranda hem eğrilik hem de burulma sıfırdan farklı ve sabit iseler eğriye dairesel helis denir [1]. Diğer taraftan, birim hızlı bir eğrinin asli normali sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa eğri slant helis olarak isimlendirilir [2]. Izumiya ve Takeuchi Öklid uayında bir eğrinin slant helis olma şartını

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

olarak belirlemişlerdir [3]. Diferansiyel geometride önemli diğer bir eğri 1850 yılında J. Bertrand tarafından bulunan Bertrand eğrileridir. Kısaca, bu eğrinin her noktasındaki asli normal vektörü Bertrand çifti denilen diğer bir eğrinin de asli normal vektörü olur [4]. A. Mannheim tarafından ilk olarak 1878 yılında ortaya atılmış olan Mannheim eğrileri de Bertrand eğrilerine benzer bir özelliktedir. Burada da eğrinin normali diğer eğrinin binormali ile lineer bağımlıdır [5].

Yüzeylerin diferansiyel geometrisinde regle yüzeyler önemli bir yere sahiptir. Özellikle Gauss eğriliği sıfır olduğunda açılabilir regle yüzeyler olarak isimlendirdiğimiz veya sıfırdan farklı olduğunda açılabilir olmayan regle yüzeyler olarak tanımladığımız yüzeyler bir çok çalışmaya konu olmuştur.

Öklid geometrisi 18. yüzyıla kadar mutlak hakimiyetini sürdürürken, o dönemlerde bazı bilim adamları tarafından Öklid dışı geometrilerin de var olabileceği fikri ortaya atılmıştır. İşte bu geometrilere olan Lorentz-Minkowski geometri geçmişten günümüze kadar oldukça fazla çalışılan alanlardan birisi olmuştur. 1995 yılında Walrave, Minkowski uzayda eğriler ve yüzeyler isimli doktora tezi ile oldukça kapsamlı bir çalışma yapmıştır [6]. Özellikle son dönemde Lopez, M. P. do Carmo'nun eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi isimli eserinden esinlenerek Lorentz-Minkowski uzayda eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi çalışması ile önemli bir katkı yapmıştır [7]. Ayrıca, bu alanda sıkıntı çekilen Türkçe kaynak sıkıntısı bir nebze olsun Uğurlu ve Çalışkan tarafından giderilmiştir [8].

1951 yılında 3-boyutlu Öklid uzayda kapalı bir regle yüzeyin eğim ve eğim açısı kavramlarını Müller tanıttı [9]. Daha sonra Liu ve Yuan kapalı regle yüzeylerin eğim kavramını Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında herhangi açılabilir olmayan regle yüzeyin eğim fonksiyonuna genelleştirdiler ve bazı uygulamalar verdiler [10]. Liu vd. [11], ilk defa Öklidyen 3-uzayda açılabilir olmayan regle yüzeyin yapı fonksiyonları olarak isimlendirilen üç invariantını tanımladılar. Üstelik Müller in kapalı regle yüzeyler için verdiği eğim açısı kavramını, herhangi bir açılabilir olmayan regle yüzey için kinematiksel anlamına göre genelleştirdiler. Yani regle yüzeylerin yapı fonksiyonları, eğim fonksiyonu ve eğim açısı fonksiyonu arasındaki bağıntıları verdiler. Yu ve Liu yine bu invariantları kullanarak 3-boyutlu Öklid uzayında açılabilir olmayan regle yüzeyin striksiyon çizgisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ile yapı fonksiyonları arasında bağıntılar kurmuştur. Ayrıca açılabilir olmayan regle yüzeyler için kinematiksel karakterizasyonları ve invariantları tanımlamışlardır [12]. Son zamanlarda, Güler ve Kasap timelike ve spacelike açılabilir olmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgilerinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ile yapı fonksiyonları arasında ilişkiler kurdular. Ayrıca, yapı fonksiyonlarını kullanarak açılabilir olmayan timelike ve spacelike regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerini hesapladılar [13].

Kaya [14], Öklid 3-uzayında regle yüzeylerin paralel yüzeylerini inceleyerek, özel durumlarda striksiyon çizgisi dayanak eğrisi olan açılabilir olmayan regle yüzeyleri yine bu yapı fonksiyonları vasıtasıyla incelemiştir. Çakmak [15], Öklid 3-uzayında açılabilir olmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgilerinin özel durumlarda özel eğrilerle olan ilişkisini incelemiştir.

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu Minkowski uzayda spacelike ve timelike açılabilir olmayan regle yüzeylerin striksiyon çizgisi ele alınmıştır. Bu eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları kullanılarak, hem spacelike hem de timelike durumda helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğri olma durumları incelenmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışma alanımıza kaynaklık eden Minkowski uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulacaktır. Daha sonra, helis, slant helis, Bertand ve Mannheim eğri tanımları yapılacaktır. Ayrıca, bulgular kısmında inceleyeceğimiz regle yüzey üzerindeki striksiyon çizgisi verilecek olup; bu eğri için hesaplamalarda kullanacağımız eğrilik ve burulma fonksiyonları ifade edilecektir.

2.1. 3-Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skaler çarpım uzayı denir [16].

Tanım 2.1.2. V bir skaler çarpım uzayı, W da üzerindeki skaler çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skaler çarpımının indeksi denir.

g skaler çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ olur. Ayrıca V skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır [16].

Tanım 2.1.3. (Lorentz Uzayı)

V bir skaler çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına Lorentz uzayı denir [16].

Tanım 2.1.4. (Spacelike vektör, timelike vektör, null vektör)

V Lorentz uzayını göstermek üzere, $v \in V$ için;

- i. Eğer $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör denir.
- ii. Eğer $g(v, v) < 0$ ise v ye timelike vektör denir.
- iii. Eğer $v \neq 0$ olmak üzere $g(v, v) = 0$ ise v ye null ya da lightlike vektör denir [16].

Tanım 2.1.5. Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0,2)$ tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir [16].

Tanım 2.1.6. n -boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ve $l_p, m_p \in T_p \mathbb{R}^n$ için

$$\langle l_p, m_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-\nu} l_i m_i - \sum_{i=n-\nu+1}^n l_i m_i$$

eşitliğiyle verilen ν indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}^k_\nu$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.1.7. n -boyutlu, ν -indeksli $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklid uzayının boyutunu 3 ve indeksini 1 alalım.

O halde $\mathbb{R}^3$ üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $l_p, m_p \in T_p \mathbb{R}^3$ için

$$\langle l_p, m_p \rangle = l_1 m_1 + l_2 m_2 - l_3 m_3$$

eşitliği ile verilen 1 indeksli metrik tensör ile birlikte elde edilen uzaya üç boyutlu Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.1.8. (Vektörel Çarpım)

$\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında iki vektör $m = (m_1, m_2, m_3)$ ve $n = (n_1, n_2, n_3)$ olmak üzere, m ve n vektörlerinin vektörel çarpımı

$$(m_3 n_2 - m_2 n_3, m_1 n_3 - m_3 n_1, m_1 n_2 - m_2 n_1)$$

olarak tanımlanır ve $m \times n$ ya da $m \wedge n$ ile gösterilebilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olsun.

$$m \wedge n = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

ya da

$$m \wedge n = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Bu hasaplamada; $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ dir ve saat yönünün tersi pozitif yön olarak seçilmiştir.

Eğer saat yönünün tersi negatif yön olarak seçim yapılırsa;

$$m \wedge n = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur [17, 18].

Teorem 2.1.9. 3-boyutlu Minkowski uzay $\square_1^3$ de üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $m = (m_1, m_2, m_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ olsunlar. Bu durumda;

- i. $\langle u \wedge m, n \rangle = -\det(u, m, n)$
- ii. $(u \wedge m) \wedge n = -\langle u, n \rangle m + \langle m, n \rangle u$
- iii. $\langle u \wedge m, u \rangle = 0$ ve $\langle u \wedge m, m \rangle = 0$
- iv. $\langle u \wedge m, u \wedge m \rangle = -\langle u, u \rangle \langle u, m \rangle + (\langle u, m \rangle)^2$

[17, 18].

Teorem 2.1.10. $\square_1^3$; 3-boyutlu Minkowski uzay ve bu uzayda iki vektör u ve m olsun.

- i. u ve m spacelike vektör ise $u \wedge m$ bir timelike vektördür.
- ii. u spacelike ve m timelike vektör ise $u \wedge m$ spacelike vektördür.
- iii. u spacelike ve m null vektör olsun. $\langle u, m \rangle = 0$ ise $u \wedge m$ null vektör, eğer $\langle u, m \rangle \neq 0$ ise $u \wedge m$ spacelike vektördür.
- iv. u ve m null vektör ise $u \wedge m$ spacelike vektördür.
- v. u timelike ve m null vektör ise $u \wedge m$ spacelike vektördür.
- vi. u ve m timelike vektör ise $u \wedge m$ spacelike vektördür.

[17, 18].

Tanım 2.1.11. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}^3_1$ de bir eğri olsun. I parametre aralığı olmak üzere $t \in I$ için $\alpha'(t)$ spacelike vektör ise α ya spacelike, $\alpha'(t)$ timelike vektör ise α ya timelike, $\alpha'(t)$ null vektör ise α ya null ya da lightlike eğri adı verilir [16].

2.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bazı Yüzeyler

M yarı Rieman manifoldu olarak 3-boyutlu $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayını ve $\overline{M}$ yarı Riemann hiper yüzeyi olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3_1 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

$\varphi(U)$ yu ele alalım. $\left\{ \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\}$ lineer bağımsız olarak seçilmek üzere, $\left\{ \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right), \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\}$ yüzeyin vektör alanlarının bir bazı olur. Burada $\varphi_u = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$, $\varphi_v = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$ olarak gösterilirse, yüzeyin normali $N = \varphi_u \wedge \varphi_v$ olur. Teorem 2.1.9 dan $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ ve $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$ olduğu görülebilir. Yüzeyin I. temel formu

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \\ \langle N, N \rangle &= \langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle \end{aligned}$$

olmak üzere ve

$$\langle N, N \rangle = (\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle)^2 - \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

ifadesinden,

$$\langle N, N \rangle = F^2 - EG$$

olarak elde edilir. O halde yüzeyin I. temel formu, φ 'nin tam diferansiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

olmak üzere,

$$I = (ds)^2 = \langle d\varphi, d\varphi \rangle = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G$$

olur. $\lambda = \frac{du}{dv}$ ve $I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$ için

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$$

bulunur [18, 19].

Tanım 2.2.1. (Nondejenere Yüzey)

3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de $\overline{M}$ bir yüzey olmak üzere, her $p \in \overline{M}$ ve her $\omega_p \in T_p \overline{M}$ için $v_p \in T_p \overline{M}$ olmak üzere $\langle v_p, \omega_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$ önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir nondejenere yüzey denir.

$\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır. Yani, $\overline{M}$ yüzeyinin nondejenere yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır [18, 19].

Tanım 2.2.2. (Spacelike Yüzey)

$\mathbb{R}_1^3$ de bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir [18, 19].

Teorem 2.2.3. 3-boyutlu Minkowski uzayda (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, diğer bir deyişle;

$$\langle N, N \rangle < 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.4. (Timelike Yüzey)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye timelike yüzey denir [18, 19].

Teorem 2.2.5. 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani diğer bir deyişle

$$\langle N, N \rangle > 0$$

olmasıdır [18, 19].

2.3. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 2.3.1. (Regle Yüzey)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında verilen bir l doğrusu, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirildiğinde bir yüzey elde ediliyorsa, elde edilen yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzey adı verilir. l ye regle yüzeyin anadoğrusu, α eğrisine de regle yüzeyin dayanak eğrisi denir [18].

Tanım 2.3.2. (Açılabilir Regle Yüzey)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir [18].

Tanım 2.3.3. (Striksiyon Noktası)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına striksiyon (boğaz veya merkez) noktası denir [18].

Tanım 2.3.4. (Striksiyon Çizgisi)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin striksiyon (boğaz veya merkez) çizgisi (eğrisi) adı verilir [18].

2.4. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler

2.4.1. Açılabilir Spacelike Regle Yüzeyler

Burada, üç boyutlu Minkowski Uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de regle yüzeyin dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları da spacelike birer doğru olan bir M spacelike regle yüzeyine ait tanım ve teoremler verilecektir.

M spacelike regle yüzeyinde $\{T, X, N\}$; M için ortonormal bir çatı alanı ve a, c fonksiyonları için verilen aralıkta v bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned}\varphi_v : I \times \{v\} &\rightarrow M \\ (t, v) &\rightarrow \varphi_v(t, v) = \alpha(t) + vX(t)\end{aligned}$$

bir eğri belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 - av)T + cvN$$

dir. $\langle N, N \rangle < 0$ ve $\langle A, A \rangle = -\langle N, N \rangle$ olduğundan A spacelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v spacelike bir eğridir ve

$$\langle X, A \rangle = (1 - av)\langle X, T \rangle + cv\langle X, N \rangle = 0$$

olarak hesaplanır.

Bir ana doğru boyunca, M spacelike regle yüzeyinin teğet düzlemlerinin çakışık olduğu her zaman doğru değildir. Ancak bu düzlemlerin daima sabit olması c fonksiyonu ile yakından ilgilidir. O halde aşağıdaki teoremler verilebilir [18].

Teorem 2.4.1.1. M spacelike bir regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.4.1.2. Spacelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.4.1.3. Açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır [18].

Teorem 2.4.1.4. Bir M spacelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [18].

Teorem 2.4.1.5. Spacelike bir regle yüzey M olsun. M 'nin anadoğruları M üzerinde asimptotik ve jeodezik çizgilerdir [18].

Teorem 2.4.1.6. M spacelike bir regle yüzey olsun. M 'nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere her $p \in M$ için $K(p) \geq 0$ dır [18].

Teorem 2.4.1.7. M spacelike bir regle yüzey olsun. M 'nin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı T , anadoğrusunun birim teğet vektör alanı (doğrultman vektörü) X ve yüzeyin birim normal vektör alanı N olmak üzere;

$$T \wedge X = N$$

$$T \wedge N = X$$

$$X \wedge N = -T$$

olur [18].

Teorem 2.4.1.8. Açılabilir olmayan spacelike bir M regle yüzeyinin Gauss eğriliği bir anadoğru üzerinde boğaz noktasında minimum değerini alır [18].

2.4.2. Açılabilir Timelike Regle Yüzeyler

Bu bölümde, ilk olarak 3-boyutlu Minkowski uzay $\mathbb{R}_1^3$ de dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğruları timelike doğrular olan timelike regle yüzeyler ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

M timelike regle yüzeyinde $\{T, X, N\}$, M için ortonormal bir çatı alanı ve $\forall v \in \mathbb{R}$ için,

$$\varphi_v : I \times \{v\} \rightarrow M$$

bir eğri belirtir. a, c fonksiyonları için bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 + av)T + cvN$$

dir. $\langle A, A \rangle > 0$ olduğundan A spacelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v spacelike bir eğridir ve

$$\langle X, A \rangle = (1 + av)\langle X, T \rangle + cv\langle X, N \rangle = 0$$

olur.

Bir ana doğru boyunca, M timelike regle yüzeyinin teğet düzlemleri her zaman çakışık olmaz. Ancak, bu düzlemlerin daima sabit olması, c fonksiyonu ile yakından ilgilidir. O halde aşağıdaki teoremler verilebilir [18].

Teorem 2.4.2.1. M timelike bir regle yüzey için bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerin aynı olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.4.2.2. Timelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.4.2.3. Açılabilir olmayan timelike bir regle yüzeyin boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır [18].

Teorem 2.4.2.4 Bir M timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [18].

Teorem 2.4.2.5. M timelike bir regle yüzey olsun. M nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olmak üzere her $p \in M$ için $K(p) \geq 0$ dır [18].

Teorem 2.4.2.6. M timelike bir regle yüzey olsun. M nin bir dayanak eğrisinin birim vektör alanı T , anadoğrularının birim teğet vektör alanı X ve yüzeyin birim normal alanı N olmak üzere,

$$T \wedge X = N$$

$$T \wedge N = X$$

$$X \wedge N = T$$

biçimindedir [18].

Teorem 2.4.2.7. M timelike yüzey olsun. M nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart M nin Gauss K eğrilik fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olmasıdır [18].

Şimdi, 3-boyutlu Minkowski uzayı $\square_1^3$ de dayanak eğrisi timelike bir eğri, anadoğruları spacelike doğrular olan timelike regle yüzeyler ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

M timelike regle yüzeyinde $\{T, X, N\}$, M için ortonormal bir çatı alanı, tanımlı ve verilen tanım aralığında sabit v değeri için,

$$\begin{aligned}\varphi_v : I \times \{v\} &\rightarrow M \\ (t, v) &\rightarrow \varphi_v(t, v) = \alpha(t) + vX(t)\end{aligned}$$

bir eğri belirtir. a, c fonksiyonları için bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (1 + av)T + cvN$$

dir. $\langle A, A \rangle = -\langle N, N \rangle$ olduğundan A timelike bir vektör alanıdır. Bu durumda φ_v timelike bir eğridir ve

$$\langle X, A \rangle = (1 + av)\langle X, T \rangle + cv\langle X, N \rangle = 0$$

olur [18].

Yine yukarıdaki teoremlere benzer şekilde aşağıdaki teoremler yazılabilir:

Teorem 2.4.2.8. M timelike bir regle yüzey olsun. Bir anadoğru boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.4.2.9. Timelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır [18].

Teorem 2.4.2.10. Bir M timelike regle yüzeyinin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı T anadoğrularının birim teğet vektör alanı X ve yüzeyin normal birim vektör alanı N olmak üzere

$$T \wedge X = N$$

$$T \wedge N = -X$$

$$X \wedge N = -T$$

olur [18].

Teorem 2.4.2.11. Açılabilir olmayan timelike bir M regle yüzeyinin Gauss eğriliği bir anadoğru üzerinde boğaz noktasında minimum değerini alır [18].

2.5. 3-Boyutlu Minkowski Uzayı R_1^3 de Bazı Özel Eğriler

Bu bölümde, $\square_1^3$ de helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğri tanımları verilecek ve tezimiz için gerekli teoremler üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.5.1. α , $\square_1^3$ de regüler bir spacelike eğri olsun. Bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla,

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$
$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

olarak hesaplanır [7, 20].

Tanım 2.5.2. α , $\square_1^3$ de regüler bir timelike eğri olsun. Bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla,

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$
$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

olarak hesaplanır [7, 20].

Tanım 2.5.3. (Helis) α , $\square_1^3$ de regüler bir eğri olsun. $v \neq 0$ sabit vektörü için $\langle T(s), v \rangle$ sabit bir fonksiyon ise α ya helis denir [7].

Teorem 2.5.4. α , $\square_1^3$ de spacelike veya timelike bir eğri olsun. α eğrisi helis ise $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir [7].

Teorem 2.5.5. α , $\square_1^3$ de spacelike veya timelike bir eğri olsun. α eğrisi için $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit ise eğri helistir [7].

Tanım 2.5.6. (Slant helis) α eğrisi $\square_1^3$ de birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B\}$, α nın Frenet çatısı olsun. $\langle N(s), U \rangle$ fonksiyonu sabit olmak üzere $\square_1^3$ de sıfırdan farklı sabit bir U vektör alanı varsa eğriye slant helis eğrisi adı verilir [21].

Teorem 2.5.7. α eğrisi $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir timelike eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart $\tau^2 - \kappa^2$ sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

ya da

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonlarının sabit olmasıdır [21].

Teorem 2.5.8. α eğrisi $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir spacelike eğri olsun.

a) Eğer α nın normal vektörü spacelike ise, o zaman α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart $\tau^2 - \kappa^2$ sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

ya da

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonlarının sabit olmasıdır [21].

b) Eğer α nın normal vektörü timelike ise, o zaman α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [21].

Tanım 2.5.9. (Bertrand eğri çifti)

Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\alpha^*(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki birinci normalini ve α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birinci normalini kapsıyorsa α^* eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturur [4].

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3_1$ ve $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3_1$ olmak üzere, $\mathbb{R}^3_1$ de Bertrand eğrisinin tanımı Öklid uzayında ki tanım ile aynıdır [7].

Teorem 2.5.10. $\alpha ; \mathbb{R}^3_1$ de spacelike veya timelike bir eğri olsun. α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ eşitliğini sağlayacak şekilde sıfırdan farklı A, B reel sabitlerinin olmasıdır [22].

Tanım 2.5.11. (Mannheim Eğri Çifti)

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3_1$ ve $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3_1$ diferensiyellenebilir iki eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve α^* eğrisinin $\alpha^*(s^*)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T^*(s^*), N^*(s^*), B^*(s^*)\}$ olsun. α eğrisinin aslinormal vektörü ile α^* eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise, α eğrisine Mannheim eğrisi ve α^* eğrisine Mannheim partner eğrisi denir ve (α, α^*) ile gösterilir [23].

Teorem 2.5.12. $\mathbb{R}^3_1$ deki timelike Mannheim eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir [24].

Teorem 2.5.13. $\mathbb{R}^3_1$ deki timelike bir eğrinin, timelike Mannheim eğri olması için gerek ve yeter şart eğrinin κ eğriliği ve τ burulması arasında c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$c(\kappa^2 - \tau^2) = \kappa$$

bağıntısının olmasıdır [24].

3. BULGULAR

$\mathbb{R}_1^3$ de spacelike bir regle yüzey; dayanak eğrisi spacelike ve ana doğrusu spacelike bir doğru alınarak elde edilebilir. Diğer yandan, $\mathbb{R}_1^3$ de timelike regle yüzeyleri farklı şekillerde elde etmek mümkündür. Dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve ana doğruları timelike alınarak timelike regle yüzey elde edilebilir veya dayanak eğrisi timelike bir eğri ve ana doğruları spacelike doğrular alınarak yine timelike regle yüzeyler oluşturulabilir [18].

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayda yukarıda bahsedilen yüzeyler için açılabilir olmayan regle yüzeyler ele alınarak, bu yüzeylerdeki striksiyon çizgilerinin sırasıyla; helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğrisi olma durumları incelenecektir.

3.1. Minkowski 3-Uzayda Açılabilir Olmayan Timelike Regle Yüzeylerin Striksiyon Çizgisi

$X(u, v) = a(u) + vb(u)$ Minkowski 3-uzayında $\langle b(u), b(u) \rangle = \pm 1$ ve $|\langle b'(u), b'(u) \rangle| = 1$ olmak üzere açılabilir olmayan bir timelike regle yüzey olsun. Burada u ; de Sitter uzayında S_1^2 de $(\langle b(u), b(u) \rangle = 1)$ ya da hiperbolik uzayda H^2 de $(\langle b(u), b(u) \rangle = -1)$ $b(u)$ eğrisinin yay uzunluk parametresidir [13]. Tez boyunca $a(u)$ nun $X(u, v)$ timelike regle yüzeyinin striksiyon çizgisi olduğu kabul edilecektir. Yani; $\langle a'(u), b'(u) \rangle = 0$ olduğu kabul edilecektir. Diğer taraftan, spacelike ya da timelike olan $a(u)$ eğrisi için $X(u, v)$ regle yüzeyinin eğimi

$$\delta(u_0) = -\langle a'(u_0), b(u_0) \rangle$$

olarak tanımlanır [10].

Bu bölümde açılabilir olmayan timelike regle yüzey iki şekilde ele alınacaktır. Öncelikle dayanak eğrisi timelike ve doğrultmanı spacelike olan regle yüzey üzerindeki striksiyon çizgisi incelenecektir.

3.1.1. Dayanak Eğrisi Timelike ve Doğrultmanı Spacelike Olan Açılabilir Olmayan Timelike Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi

$X(u, v) = a(u) + vb(u)$ spacelike doğrultulu açılabilir olmayan bir timelike regle yüzey olsun ve $a(u)$; $X(u, v)$ nin dayanak eğrisi ve aynı zamanda striksiyon çizgisi olsun. Burada $u; b(u)$ nun yay uzunluk parametresi olmak üzere $b(u)$ nun birim küresel Frenet çatısı;

$$x'(u) = \alpha(u)$$

$$\alpha'(u) = \varepsilon x(u) - k_g(u) y(u)$$

$$y'(u) = -k_g(u) \alpha(u)$$

olmak üzere, $\{\alpha, x, y\}$ üçlüsü ile verilebilir. Burada,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \alpha(u) \text{ timelike vektör} \\ -1, & \alpha(u) \text{ spacelike vektör} \end{cases}$$

olarak tanımlanır [13]. Ayrıca $a'(u) = \lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$ olarak ele alındığında ve $k_g(u)$ da $b(u)$ nun küresel eğrilik fonksiyonunu göstermek üzere, $X(u, v)$ regle yüzeyi; $\{\lambda(u), \mu(u), k_g(u)\}$ üçlüsü ile verilir. Buradaki λ, μ, k_g fonksiyonlarına $X(u, v)$ nin yapı fonksiyonları adı verilir [10,11].

O halde ε na bağlı olarak iki durum söz konusudur.

1.Durum: $\alpha(u)$ timelike olsun. Bu durumda striksiyon çizgisinin κ eğrilik ve τ burulma fonksiyonları $\frac{\lambda}{\mu}$ oranı sabit olmak üzere sırasıyla,

$$\kappa = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

ve

$$\tau = \frac{(\lambda + \mu k_g)((\lambda \mu'' - \lambda'' \mu) + (\lambda + \mu k_g)(\lambda k_g - \mu)) + (2\lambda' + \mu k_g' + 2\mu' k_g)(\lambda' \mu - \lambda \mu')}{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda + \mu k_g)^2 + (\mu \lambda' - \lambda \mu')}$$

bulunur. Yine $\frac{\lambda}{\mu}$ oranı sabit alınırsa,

$$\tau = \frac{\lambda k_g - \mu}{\lambda^2 + \mu^2}$$

olarak hesaplanır. Böylece aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz:

Teorem 3.1.1.1. Yukarıdaki notasyonlar altında $a(u)$ striksiyon çizgisinin helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\frac{\lambda}{\mu}$ oranı sabit, $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq \frac{\lambda}{\mu}$ olmak üzere küresel eğrilik fonksiyonunun,

$$k_g = \frac{\mu + c\lambda}{\lambda - c\mu}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Bilindiği gibi bir eğrinin helis eğrisi olması için $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması gerekir. O halde,

$\frac{\lambda}{\mu}$ sabit olarak ele alınıp, κ ve τ nun değerleri $\frac{\tau}{\kappa}$ oranında yerine yazılırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{(\lambda + \mu k_g)^2 (\lambda k_g - \mu) (\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 + \mu^2) (\lambda + \mu k_g)^2 (\lambda + \mu k_g)}$$

elde edilir. $c \in \mathbb{R}$ için,

$$c = \frac{\lambda k_g - \mu}{\lambda + \mu k_g}$$

$$\lambda k_g - \mu = c\lambda + c\mu k_g$$

$$k_g(\lambda - c\mu) = c\lambda + \mu$$

$$k_g = \frac{\mu + c\lambda}{\lambda - c\mu}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.1.2. Yukarıdaki notasyonlar altında yay parametresi ile verilen $a(u)$ striksiyon çizgisinin slant helis olması için $c \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere, küresel eğrilik fonksiyonunun,

$$k_g' = \frac{c(1 - k_g^2 - 4\lambda\mu k_g)^{\frac{3}{2}}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Teorem 2.5.7. de verilen ifadeden faydalanırsak, birinci duruma göre κ ve τ nun değerleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{(\lambda'k_g + \lambda k_g' - \mu')(\lambda + \mu k_g) - (\lambda' + \mu'k_g + \mu k_g')(\lambda k_g - \mu)}{(\lambda + \mu k_g)^2}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda + \mu k_g)^2}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \frac{\frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}}{\left[\frac{(\lambda^2 - \mu^2)(k_g^2 - 1) - 4\lambda\mu k_g}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{3}{2}}} \frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda + \mu k_g)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifadenin sabit olması gerekeceğinden c bir sabit olarak seçilirse

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\left[(\lambda^2 - \mu^2)(k_g^2 - 1) - 4\lambda\mu k_g \right]^{\frac{3}{2}}} \frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda + \mu k_g)^2} = c$$

elde edilir. Buradan striksiyon çizgisi yay parametresi ile verildiği için gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$k_g' = \frac{c(1 - k_g^2 - 4\lambda\mu k_g)^{\frac{3}{2}}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak istenen sonuç bulunur.

Teorem 3.1.1.3. Yukarıdaki notasyonlar altında eğer yapı fonksiyonlarının

$$\frac{\lambda + \mu k_g}{1 + k_g^2}$$

ve

$$\frac{-\mu + \lambda k_g}{1 + k_g^2}$$

biçimindeki oranları sabitse striksiyon çizgisi Bertrand eğrisi olur.

İspat: A ve B sabitleri için $A\kappa + B\tau = 1$ ise eğrinin Bertrand eğrisi olduğunu biliyoruz. Bu durumda striksiyon çizgisinin yukarıdaki eğrilik $\kappa = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$ ve burulma $\tau = \frac{\lambda k_g - \mu}{\lambda^2 + \mu^2}$ değerleri yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$A\lambda + A\mu k_g + B\lambda k_g - B\mu = \lambda^2 + \mu^2$$

$$\lambda(A + Bk_g) + \mu(Ak_g - B) = \lambda^2 + \mu^2$$

olur. $Ak_g - B = \mu$ ve $A + Bk_g = \lambda$ olarak seçilirse,

$$A = \lambda - Bk_g,$$

$$(\lambda - Bk_g)k_g - B = \mu$$

$$\lambda k_g - Bk_g^2 - B = \mu$$

$$\lambda k_g - \mu = B(1 + k_g^2)$$

$$B = \frac{\lambda k_g - \mu}{1 + k_g^2}$$

bulunur ve

$$Ak_g = \mu + B$$

$$Ak_g = \frac{\mu + \mu k_g^2 + \lambda k_g - \mu}{1 + k_g^2}$$

$$A = \frac{\lambda + \mu k_g}{1 + k_g^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1.4. Striksiyon çizgisinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$c = \frac{(\lambda + \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(1 - k_g^2) + 4\lambda\mu k_g}$$

oranının sabit olmasıdır.

İspat: Teorem 2.5.13 den biliyoruz ki, eğrinin Mannheim eğri olması için gerek ve yeter şart κ ve τ eğrilik ve burulma fonksiyonları ve $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ olmak üzere;

$$c(\kappa^2 - \tau^2) = \kappa$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. O halde değerler yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$c \left[\frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} - \frac{(\lambda k_g - \mu)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \right] = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$c \left[\lambda^2(1 - k_g^2) - \mu^2(1 - k_g^2) + 4\lambda\mu k_g \right] = (\lambda + \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)$$

elde edilir ve buradan

$$c = \frac{(\lambda + \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(1 - k_g^2) + 4\lambda\mu k_g}$$

bulunur.

2.Durum: $\alpha(u)$ spacelike olsun. Böylece, $b(u)$ nun birim küresel Frenet çatısı,

$$x'(u) = \alpha(u)$$

$$\alpha'(u) = -x(u) - k_g y(u)$$

$$y'(u) = -k_g(u)\alpha(u)$$

olur [13]. $\frac{\lambda}{\mu}$ oranı sabit alındığı takdirde

$$\kappa = \frac{\mu k_g - \lambda}{\lambda^2 + \mu^2},$$

$$\tau = \frac{(\lambda - \mu k_g)(-\lambda^2 k_g + \lambda \mu k_g^2 + \lambda \mu - \mu^2 k_g)}{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda - \mu k_g)^2}$$

$$\tau = \frac{(\lambda - \mu k_g)(\mu - \lambda k_g)}{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda - \mu k_g)}$$

$$\tau = \frac{\mu - \lambda k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz:

Teorem 3.1.1.5. Yukarıdaki notasyonlar altında $a(u)$ striksiyon çizgisinin helis eğrisi olması için

gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq -\frac{\lambda}{\mu}$ olmak üzere, küresel eğrilik fonksiyonunun

$$k_g = \frac{\mu - c\lambda}{\lambda + c\mu}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Bir eğrinin helis eğrisi olması için $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olması gerekir. O halde $\frac{\lambda}{\mu}$ sabit ve κ

ve τ nun değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\mu - \lambda k_g}{\lambda^2 + \mu^2} \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda - \mu k_g} = c$$

bulunur. Burada $c \in \mathbb{R}$ dir. Böylece,

$$\mu - \lambda k_g = c\lambda - c\mu k_g$$

$$\mu - c\lambda = k_g(\lambda + c\mu)$$

$$k_g = \frac{\mu - c\lambda}{\lambda + c\mu}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.1.1.6. Yay parametresi ile verilen striksiyon çizgisinin slant helis olması için $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, küresel eğrilik fonksiyonunun

$$k_g' = \frac{c(1-k_g^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 + \mu^2}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Teorem 2.5.7. den öncelikle $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ oranı

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{(\mu' - \lambda'k_g - \lambda k_g')(\lambda - \mu k_g) - (\mu - \lambda k_g)(\lambda' - \mu'k_g - \mu k_g')}{(\lambda - \mu k_g)^2}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{k_g'}{(\lambda - \mu k_g)^2}$$

biçiminde hesaplanır. Böylece bir c sabiti için;

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{\frac{(\lambda - \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}}{\left(\frac{1 - k_g^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{k_g'}{(\lambda - \mu k_g)^2}$$

$$\frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 - k_g^2)^{\frac{3}{2}}} = c$$

bulunur ve buradan

$$k_g' = \frac{c(1-k_g^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 + \mu^2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.1.7. Farzedelim ki yukarıdaki notasyonlar altında yapı fonksiyonlarının $k_g^2 \neq 1$ olmak üzere

$$\frac{\mu + \lambda k_g}{1 - k_g^2}$$

ve

$$\frac{\lambda + \mu k_g}{1 - k_g^2}$$

biçimindeki oranları sabit olsun. Bu durumda, striksiyon çizgisi bir Bertrand eğrisidir.

İspat: $A\kappa + B\tau = 1$ ise eğrinin bir Bertrand eğrisi olduğunu biliyoruz. O halde eğrilikler yerlerine yazılırsa,

$$A\lambda - A\mu k_g + B\mu - B\lambda k_g = \lambda^2 + \mu^2$$

$$\lambda(A - Bk_g) + \mu(B - Ak_g) = \lambda^2 + \mu^2$$

$$A - Bk_g = \lambda$$

$$A = \lambda + Bk_g$$

$$B - Ak_g = \mu$$

olarak seçilirse,

$$B - k_g(\lambda + Bk_g) = \mu$$

$$B - \lambda k_g - Bk_g^2 = \mu$$

$$B = \frac{\mu + \lambda k_g}{1 - k_g^2}$$

sabiti elde edilir. Diğer taraftan,

$$A = \lambda + Bk_g$$

$$A = \lambda + \frac{\mu + \lambda k_g}{1 - k_g^2} k_g$$

$$A = \frac{\lambda + \mu k_g}{1 - k_g^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1.8. Striksiyon çizgisinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart c sıfırdan farklı bir sabit ve $\lambda^2 \neq \mu^2$, $k_g^2 \neq 1$ olmak üzere;

$$c = \frac{(\lambda - \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(1 - k_g^2)}$$

ifadesinin sabit olmasıdır.

İspat: Bilindiği gibi timelike bir eğrinin timelike Mannheim eğrisi olması için $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0$ olmak üzere $c(\kappa^2 - \tau^2) = \kappa$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada κ ve τ sırasıyla eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır. O halde,

$$\begin{aligned} c \left[\frac{(\lambda - \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} - \frac{(\mu - \lambda k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \right] &= \frac{\lambda - \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2} \\ c \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2 k_g^2 - 2\lambda\mu k_g - \mu^2 + 2\lambda\mu k_g - \lambda^2 k_g^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right) &= \lambda - \mu k_g \\ c &= \frac{(\lambda - \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(1 - k_g^2)} \end{aligned}$$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

3.1.2. Dayanak Eğrisi Timelike ve Doğrultmanı Timelike Olan Açılabilir Olmayan Timelike Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi

$X(u, v) = a(u) + vb(u)$; $\langle b(u), b(u) \rangle = -1$ olmak üzere açılabilir olmayan bir timelike regle yüzey olsun. $b(u)$ birim küresel eğrisinin küresel Frenet formülleri $x(u) = b(u)$, $x'(u) = \alpha(u)$ ve $y(u) = \alpha(u) \wedge x(u)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x'(u) &= \alpha(u) \\ \alpha'(u) &= -x(u) - k_g(u)y(u) \\ y'(u) &= -k_g(u)\alpha(u) \end{aligned}$$

biçimindedir [13]. $\alpha'(u) = -\lambda(u)x(u) + \mu(u)y(u)$ olmak üzere, $a(u)$; $X(u, v)$ nin sitriksiyon çizgisi olsun. $\frac{\lambda}{\mu}$ sabit olmak koşuluyla $a(u)$ nun eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{(\lambda + \mu k_g)^2(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \kappa &= \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}, \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{\mu + \lambda k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

olur. Bu eğrilikler kullanılarak aşağıdaki teoremler ifade edilebilir:

Teorem 3.1.2.1. Yukarıdaki notasyonlar altında striksiyon çizgisinin helis eğrisi olması için gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq \frac{\lambda}{\mu}$ olmak üzere k_g eğrilik fonksiyonunun,

$$k_g = \frac{c\lambda - \mu}{\lambda - c\mu}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Diğer ispatlara benzer biçimde burada da $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı bir $c \in \mathbb{R}$ sabitine eşitlenirse,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\mu + \lambda k_g}{\lambda + \mu k_g} = c$$

olur. Buradan kolaylıkla

$$\mu + \lambda k_g = c\lambda + c\mu k_g$$

$$\lambda k_g - c\mu k_g = c\lambda - \mu$$

$$k_g = \frac{c\lambda - \mu}{\lambda - c\mu}$$

bulunmuş olur.

Teorem 3.1.2.2. Yay parametresi ile verilen striksiyon çizgisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, k_g eğrilik fonksiyonunun

$$k_g' = -\frac{c(1-k_g^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 + \mu^2}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Teorem 2.5.7 gereği $\tau^2 - \kappa^2 \neq 0$ olmak üzere, $\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$ ifadesinin sabit olması

striksiyon çizgisinin slant helis olduğunu gösterir. Buna göre,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \frac{(\mu' + \lambda' k_g + \lambda k_g')(\lambda + \mu k_g) - (\mu + \lambda k_g)(\lambda' + \mu' k_g + \mu k_g')}{(\lambda + \mu k_g)^2}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = -\frac{k_g'}{(\lambda + \mu k_g)^2}$$

bulunur. Buradan;

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{\frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}}{\left(\frac{1 - k_g^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{-k_g'}{(\lambda + \mu k_g)^2}\right)$$

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = -\frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^3}{(1 - k_g^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{k_g'}{(\lambda + \mu k_g)^2}$$

bir c sabitine eşitlersek;

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = -\frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 - k_g^2)^{\frac{3}{2}}} = c$$

$$k_g' = -\frac{c(1 - k_g^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^2 + \mu^2}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.2.3. Farzedelim ki; λ, μ, k_g ; timelike regle yüzeyin yapı fonksiyonları ve $k_g^2 \neq 1$ olmak üzere,

$$\frac{\lambda - \mu k_g}{1 - k_g^2}$$

ve

$$\frac{\mu - \lambda k_g}{1 - k_g^2}$$

oranları sabit olsun. Bu durumda, regle yüzeyin striksiyon çizgisi bir Bertrand eğrisidir.

İspat: $A, B \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A\kappa + B\tau = 1$ ise eğrinin Bertrand eğrisi olduğunu biliyoruz. O halde κ ve τ değerleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$A(\lambda + \mu k_g) + B(\mu + \lambda k_g) = \lambda^2 + \mu^2$$

$$A\lambda + A\mu k_g + B\mu + B\lambda k_g = \lambda^2 + \mu^2$$

$$\lambda(A + Bk_g) + \mu(Ak_g + B) = \lambda^2 + \mu^2$$

olur. $\lambda = A + Bk_g$ ve $\mu = B + Ak_g$ olarak seçilip düzenlenirse,

$$B + k_g(\lambda - Bk_g) = \mu$$

$$B + \lambda k_g - Bk_g^2 = \mu$$

$$B(1 - k_g^2) = \mu - \lambda k_g$$

$$B = \frac{\mu - \lambda k_g}{1 - k_g^2}$$

ve

$$A = \lambda - k_g \frac{\mu - \lambda k_g}{1 - k_g^2}$$

$$A = \frac{\lambda - \lambda k_g^2 - \mu k_g + \lambda k_g^2}{1 - k_g^2}$$

$$A = \frac{\lambda - \mu k_g}{1 - k_g^2}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.2.4. Striksiyon çizgisinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart c sıfırdan farklı bir sabit ve $\lambda^2 \neq \mu^2$, $k_g^2 \neq 1$ olmak üzere,

$$c = \frac{(\lambda + \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(1 - k_g^2)}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Timelike bir eğrinin timelike Mannheim eğri olması için $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0$ olmak üzere, $c(\kappa^2 - \tau^2) = \kappa$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Burada κ ve τ sırasıyla eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır. O halde,

$$c \left[\frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} - \frac{(\mu + \lambda k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \right] = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$c \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2 k_g^2 + 2\lambda\mu k_g - \mu^2 - 2\lambda\mu k_g - \lambda^2 k_g^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right) = \lambda + \mu k_g$$

eşitliklerinden kolaylıkla

$$c = \frac{(\lambda + \mu k_g)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(1 - k_g^2)}$$

elde edilir.

3.2. Dayanak Eğrisi ve Doğrultmanı Spacelike Olan Açılabilir Olmayan Spacelike Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi

$X(u, v) = a(u) + vb(u)$ açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. $x(u) = b(u)$, $x'(u) = \alpha(u)$ ve $y(u) = \alpha(u) \wedge x(u)$ olmak üzere $b(u)$ küresel eğrisinin küresel Frenet formülleri

$$x'(u) = \alpha(u)$$

$$\alpha'(u) = \varepsilon x(u) - k_g(u)y(u)$$

$$y'(u) = -k_g(u)\alpha(u)$$

dir. Burada,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & y(u) \text{ spacelike vektör} \\ -1, & y(u) \text{ timelike vektör} \end{cases}$$

Olur [13]. Striksiyon çizgisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları yukarıdaki şartlar altında ve $\frac{\lambda}{\mu}$ sabit alınmak üzere eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla,

$$\kappa = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

ve

$$\tau = \frac{\lambda k_g - \mu}{\lambda^2 + \mu^2}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.1. Striksiyon çizgisinin yukarıdaki tanımlar altında helis eğrisi olması için gerek ve

yeter şart $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq \frac{\lambda}{\mu}$ olmak üzere,

$$k_g = \frac{\mu + c\lambda}{\lambda - c\mu}$$

olmasıdır.

İspat: Bilindiği gibi $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olursa eğri helis olur. Bu durumda bir $c \in \mathbb{R}$ için,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda k_g - \mu}{\lambda + \mu k_g} = c$$

$$k_g(\lambda - c\mu) = c\lambda + \mu$$

$$k_g = \frac{\mu + c\lambda}{\lambda - c\mu}$$

olur.

Teorem 3.2.2. Yukarıdaki tanımlamalar altında yay parametresi ile verilen striksiyon çizgisinin slant helis olması için normalin spacelike olması durumunda $c \in \mathbb{R}$ için

$$k_g' = \frac{c(1 - k_g^2 - 4\lambda\mu k_g)^{\frac{3}{2}}}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$$

olur. Burada y timelike olarak seçilmiştir. Eğer y spacelike olarak seçilirse;

$$k_g' = c \left[(\lambda^2 - \mu^2)(k_g^2 - 1) - 4\lambda\mu k_g \right]^{\frac{3}{2}}$$

dir.

İspat: Teorem 2.5.8'den biliyoruz ki eğrinin normali spacelike ise $c \in \mathbb{R}$ ve $\tau^2 - \kappa^2$ sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = c$$

ifadesinin sabit olması gerekir. O halde,

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^3}{\left[(\lambda^2 - \mu^2)(k_g^2 - 1) - 4\lambda\mu k_g \right]^{\frac{3}{2}}} \frac{k_g'(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda + \mu k_g)^2} = c$$

olur. Eğer y timelike ise

$$k_g' = \frac{c(1 - k_g^2 - 4\lambda\mu k_g)^{\frac{3}{2}}}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}$$

olur ve y spacelike ise

$$k_g' = c \left[(\lambda^2 - \mu^2)(k_g^2 - 1) - 4\lambda\mu k_g \right]^{\frac{3}{2}}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.3. Yay parametresi ile verilen striksiyon çizgisinin slant helis olması için normalin timelike olması durumunda $c \in \mathbb{R}$ için

$$k_g' = c \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}$$

olur. Burada y timelike olarak ele alınmıştır. Eğer y spacelike ise

$$k_g' = c(1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}$$

veya

$$k_g^2 = \frac{(cu + d)^2}{1 - (cu + d)^2}$$

olur.

İspat: Normal timelike ise $a(u)$ spacelike striksiyon çizgisinin yay parametresine göre slant helis olması için

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

ifadesinin sabit olması gerektiğini Teorem 2.5.8 den biliyoruz. Buna göre $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \frac{(\lambda + \mu k_g)^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^3}{(\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{3}{2}} (1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{k_g' (\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda + \mu k_g)^2} \\ \frac{k_g' \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{(1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}} &= c \end{aligned}$$

bulunur. Eğer y timelike ise

$$k_g' = c \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}$$

y spacelike ise,

$$k_g' = c(1 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}$$

olur. Bu diferansiyel denklem çözülürse, $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$k_g^2 = \frac{(cu+d)^2}{1-(cu+d)^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4. Dayanak eğrisi ve doğrultmanı spacelike olan açılabilir olmayan spacelike regle yüzeyin yapı fonksiyonlarına göre

$$\frac{\lambda + \mu k_g}{1 + k_g^2}$$

ve

$$\frac{\lambda k_g - \mu}{1 + k_g^2}$$

ifadelerinin sabit olması durumunda regle yüzeyin striksiyon çizgisi Bertrand eğrisi olur.

İspat: $A, B \in \mathbb{R}$ için $A\kappa + B\tau = 1$ ise eğrinin Bertrand eğrisi olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\tau = \frac{\lambda k_g - \mu}{\lambda^2 + \mu^2},$$

$$\kappa = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

değerleri yerlerine yazılırsa,

$$A\lambda + A\mu k_g + B\lambda k_g - B\mu = \lambda^2 + \mu^2$$

ve

$$\mu = Ak_g - B$$

$$\lambda = A + Bk_g$$

olarak seçilirse,

$$\lambda(A + Bk_g) + \mu(Ak_g - B) = \lambda^2 + \mu^2$$

$$A = \lambda - Bk_g,$$

$$(\lambda - Bk_g)k_g - B = \mu$$

$$\lambda k_g - Bk_g^2 - B = \mu$$

$$\lambda k_g - \mu = B(1 + k_g^2)$$

$$B = \frac{\lambda k_g - \mu}{1 + k_g^2}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$Ak_g = \mu + B$$

$$Ak_g = \frac{\mu + \mu k_g^2 + \lambda k_g - \mu}{1 + k_g^2}$$

$$A = \frac{\lambda + \mu k_g}{1 + k_g^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. Yukarıdaki notasyonlar altında spacelike striksiyon çizgisinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda + \mu k_g)}{(\mu^2 - \lambda^2)(1 - k_g^2) - 4\lambda\mu k_g}$$

ifadesinin sabit olmasıdır.

İspat: Spacelike bir eğrinin Mannheim eğri olması için c sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere,

$$c(\tau^2 - \kappa^2) = \kappa$$

denklemini sağlaması gerekir. Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır. O halde;

$$c \left[\left(\frac{(\lambda k_g - \mu)}{(\lambda^2 + \mu^2)} \right)^2 - \left(\frac{(\lambda + \mu k_g)}{(\lambda^2 + \mu^2)} \right)^2 \right] = \frac{\lambda + \mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$c \left[\frac{\lambda^2 k_g^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu k_g - \lambda^2 - \mu^2 k_g^2 - 2\lambda\mu k_g}{\lambda^2 + \mu^2} \right] = \lambda + \mu k_g$$

$$c \left[\mu^2(1 - k_g^2) - \lambda^2(1 - k_g^2) - 4\lambda\mu k_g \right] = (\lambda^2 + \mu^2)(\lambda + \mu k_g)$$

$$c \left[(\mu^2 - \lambda^2)(1 - k_g^2) - 4\lambda\mu k_g \right] = (\lambda^2 + \mu^2)(\lambda + \mu k_g)$$

$$c = \frac{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda + \mu k_g)}{(\mu^2 - \lambda^2)(1 - k_g^2) - 4\lambda\mu k_g}$$

olarak elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının genel bir değerlendirmesi yapılarak, çalışmanın katkıları ve ilerki çalışmalar için birtakım öneriler verilmiştir.

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan spacelike ve timelike regle yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzey tipleri için yüzeylerin dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olarak ve doğrultmada yay parametrelili birim küresel eğri olarak seçilmiştir. Yapı fonksiyonları ile ifade edilen striksiyon çizgisinin ayrı ayrı durumlar için eğrilik ve burulma fonksiyonları hesaplanmıştır. Elde edilen bu eğrilikler kullanılarak bazı özel eğriler arasında bağıntılar kurulmuştur. Yani bu striksiyon çizgisinin hangi şart altında helis, slant helis, Bertrand veya Mannheim eğri olma şartları elde edilmiştir.

Bu durum,

$$\frac{\lambda}{\mu}$$

ifadesi sabit alınarak κ eğrilik fonksiyonu ve τ burulma fonksiyonu daha sade olarak hesaplanmıştır. Böylece, daha sade ve anlamlı bir durum olarak ele alınan bu eğrilikler vasıtasıyla yukarıda bahsi geçen özel eğrilerin eğrilik ve burulma fonksiyonları arasındaki ilişkiden yararlanarak, striksiyon çizgisi için $X(u, v)$ nin yapı fonksiyonları temelinde bağıntılar elde edilmiştir.

4.2. Öneriler

Bu tezde, ele aldığımız helis, slant helis, Bertrand ve Mannheim eğri gibi özel eğrilere ilaveten involüt-evolüt eğrileri gibi diğer bazı özel eğriler temelinde de striksiyon çizgisi incelenebilir.

Ayrıca, burada elde edilen sonuçlar; yarı Galile, Galile uzayı gibi başka uzay tiplerinde yeniden incelenip farklı teoremler ve sonuçlar elde edilebilir.

5. KAYNAKLAR

- [1] Millman RS, Parker GD, 1977. Elements of differential geometry. Englewood Cliffs, Prentice-Hall. New Jersey.
- [2] Ali AT, Turgut M, 2009. Some characterizations of slant helices in the Euclidean space E^n . arXiv:0904.1187v1.
- [3] Izumiya S, Takeuchi N, 2004. New special curves and developable surfaces. Turkish Journal of Mathematics, 28 (2): 153–164.
- [4] Sabuncuoğlu A, 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım. Ankara.
- [5] Coşkun Ö, 2010. 3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim Eğri Çiftleri. Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- [6] Walrave J, 1995. Curves and surfaces in Minkowski space. Thesis (Ph.D.), Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- [7] Lopez R, 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. International Electronic Journal of Geometry, 7 (1): 44–107.
- [8] Uğurlu HH, Çalışkan A, 2012. Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi. Celal Bayar Üniversitesi Yayınları. Manisa.
- [9] Müller HR, 1951. Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Monatshefte für Mathematik, 55 (3): 206–214.
- [10] Liu H, Yuan Y, 2012. Pitch functions of ruled surfaces and B-scrolls in Minkowski 3-space. Journal of Geometry and Physics, 62 (1): 47–52.
- [11] Liu H, Yu Y, Jung SD, 2014. Invariants of non-developable ruled surfaces in Euclidean 3-space. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 55 (1): 189–199.

- [12] Yu Y, Liu H, Jung SD, 2014. Structure and Characterization of Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space. *Applied Mathematics and Computation*, 233: 252–259
- [13] Güler F, Kasap E, 2016. Structure and characterization of ruled surfaces in Minkowski 3-space. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 14 (2): 155–164.
- [14] Kaya S, 2017. Bazı Özel Regle Yüzeyler ve Bu Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri. Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bitlis.
- [15] Çakmak A, 2018. Striction Lines of Non-developable Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space. *Iğdır Univ. J. Inst. Sci. & Tech.*, 8(1): 219–227.
- [16] O’neill B, 1983. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press. Newyork.
- [17] Akutagawa K, Nishikawa S, 1990. The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. *Tohoku Mathematical Journal*, 42 (1): 67–82.
- [18] Turgut A, 1995. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [19] Beem JK, Ehrlich PE, 1981. *Global Lorentzian geometry*. Pure and Applied Math. 202, Marcel Dekker. New York.
- [20] Altunkaya B, Kula L, 2018. Characterization of slant and spherical helices due to pseudo-Sabban frame. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 1 (1): 49–56.
- [21] Ali AT, Lopez R, 2011. Slant Helices in Minkowski Space E_1^3 . *Journal of the Korean Mathematical Society*, 48 (1): 159–167.
- [22] Babaarslan M, Yaylı Y, 2015. On space-like constant slope surfaces and Bertrand curves in Minkowski 3-space. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, 1: ahead-of-print.

- [23] Demet S, 2012. Timelike-Spacelike Mannheim Eğri Çiftlerinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrilikleri ve Tabii Liftleri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.
- [24] Azak AZ, 2009. Üç Boyutlu Lorentz Uzayı L^3 de Timelike Mannheim Eğri Çifti Üzerine. Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Dergisi, 11 (2): 35–45.



ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Adana’da doğdum. İlköğretimi ve ortaokulu Hürriyet İlköğretim Okulu’nda ve liseyi Tepebağ Lisesi’nde tamamladım. 2010 yılında kazandığım Bitlis Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2014 yılında mezun oldum. 2015’de Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisansa başladım. Mayıs 2019’da yüksek lisansımı tamamladım. Yabancı dilim İngilizce’dir.

Songül ÇAKAR

