

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ SLANT HELİSLER
ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEVLÜT CANBİRDİ

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. OSMAN ZEKİ OKUYUCU

BİLECİK, 2022

10483661

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ SLANT HELİSLER
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEVLÜT CANBİRDİ

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. OSMAN ZEKİ OKUYUCU

BİLECİK, 2022

10483661

BEYAN

“Üç Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Slant Helisler Üzerine” konusunda çalıştığım Yüksek Lisans bitirme tezimin hazırlık aşaması ve yazımı sırasında bilimsel ahlak ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi’nde veya başka bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.			
DESTEK ALINMIŞTIR	X	DESTEK ALINMAMIŞTIR	
Destek alındı ise;			
Destekleyen kurum;			
Desteğin Türü		Proje Numarası	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)			
2- TÜBİTAK		2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı 2020/1	
Diğer;			
ETİK KURUL onayı var ise;			
ETİK KURUL karar tarih/sayı:		/.....	

Mevlüt Canbirdi

Tarih

.....

İmza

.....

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlık aşamasından tamamlama aşamasına kadar ve yüksek lisans öğrenimim boyunca; değerli bilimsel katkılarını hiçbir zaman esirgemeyen, mümkün olan her fırsatta bilgi ve birikimiyle bana destekte bulunan, çok kıymetli ve değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Osman Zeki OKUYUCU'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca **“2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı 2020/1”** kapsamında sağladığı burs desteğinden dolayı **TÜBİTAK BİDEB'e** teşekkür ederim.

Ayrıca bu süreçte gereken sabrı gösteren başta eşim Ferda ve çocuklarım Ender ile Eslem'e sevgilerimi sunarım.

Mevlüt Canbirdi

2022

ÖZET

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÇATILANDIRILMIŞ SLANT HELİSLER ÜZERİNE

Bu çalışma dört bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm eğriler ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde eğrilerin küresel göstergelerine ve helisel eğrilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde çatılandırılmış eğriler ile çatılandırılmış helisler hakkında bilgilere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise çatılandırılmış slant helisler tanımlanmış ve çatılandırılmış slant helislerin küresel göstergelerinden bahsedilmiştir. Ayrıca çatılandırılmış slant helisler ile küresel göstergeleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. En son kısımda ise çatılandırılmış eğriye bir örnek verilerek bu eğrinin çatılandırılmış slant helis olduğu gösterilmiş ve küresel göstergeleri şekillendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Slant Helis, Çatılandırılmış Eğri, Çatılandırılmış Slant Helis, Çatılandırılmış Slant Helislerin Küresel Göstergeleri.

ABSTRACT

ON FRAMED SLANT HELICES IN THREE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

This study consists of four parts. The first part is devoted to the introduction. The second section is devoted to the basic concepts of curves. In this section, spherical indicatrices of curves and helical curves are given. In the third section, information about framed curves and framed helices is given. In the fourth chapter, framed slant helices are defined and the spherical indicatrices of framed slant helices are emphasized. In addition, the relations between the framed slant helices and their spherical indicatrices are given. In the last part, a framed curve is given and it is shown that this curve is a framed slant helix and its spherical indicatrices are shaped.

Keywords: Slant Helix, Framed Curve, Framed Slant Helix, Spherical Indicatrices of Framed Slant Helices.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayı.....	3
2.2. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi.....	4
2.2.1. Eğriler İle İlgili Temel Kavramlar.....	4
2.2.2. Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri.....	6
2.2.3. Helis Eğrileri.....	10
3. $\mathbb{R}^3$ DE ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLER VE ÇATILANDIRILMIŞ HELİSLER.....	11
3.1. Çatılandırılmış Eğri.....	11
3.2. Çatılandırılmış Helis.....	13
4. $\mathbb{R}^3$ DE ÇATILANDIRILMIŞ SLANT HELİS VE KÜRESEL GÖSTERGELERİ.....	16
4.1. Çatılandırılmış Slant Helis.....	16
4.2. Çatılandırılmış Slant Helislerin Küresel Göstergeleri.....	20
4.2.1. Çatılandırılmış Slant Helislerin ν –Göstergeleri.....	20
4.2.2. Çatılandırılmış Slant Helislerin $\overline{\mu}_1$ –Göstergeleri.....	24
4.2.3. Çatılandırılmış Slant Helislerin $\overline{\mu}_2$ –Göstergeleri.....	27
4.2.4. Çatılandırılmış Helislerin Küresel Göstergeleri İle İlgili Örnek.....	32
KAYNAKÇA.....	41

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. α Eğrisinin Teğetler Göstergesi.....	7
Şekil 2.2. α Eğrisinin Normaller Göstergesi.....	8
Şekil 2.3. α Eğrisinin Binormaller Göstergesi.....	9
Şekil 4.1. γ Çatılandırılmış Slant Helis.....	32
Şekil 4.2. γ Çatılandırılmış Slant Helisin ν –Göstergesi.....	35
Şekil 4.3. γ Çatılandırılmış Slant Helisin $\overline{\mu}_1$ –Göstergesi.....	37
Şekil 4.4. γ Çatılandırılmış Slant Helisin $\overline{\mu}_2$ –Göstergesi.....	38

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Uzay
$\mathbb{R}^3$	: Üç Boyutlu Öklid Uzayı
V	: Vektör Uzayı
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım
$\ \ $	: Norm
$\times$	: Vektörel Çarpım
I	: Öklid Uzayında Açık Aralık
$\{T, N, B\}$	: α Eğrisinin Frenet Çatısı
κ, τ	: α Frenet Eğrisinin Eğrilik ve Burulması
S^2	: Küre
γ	: Çatılandırılmış Eğri
$\{v, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}\}$	: γ Çatılandırılmış Eğrisinin Uyarlanmış Çatısı
p, q	: γ Çatılandırılmış Eğrisinin Eğrilik ve Burulması
H	: Harmonik Eğrilik

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi geçmişten günümüze kadar diferansiyel geometrinin en önemli ve en çok merak edilen çalışma alanlarından birisi olmuştur. Carl Friedrich Gauss ile Gaspard Monge eğriler ve yüzeyler ile ilgili çok önemli çalışmalar yapmışlardır. Bu yönüyle diferansiyel geometrinin kurucuları sayılabilirler. Birçok araştırmacı bugüne kadar eğrileri farklı uzaylarda inceleyip eğrilerin karakterizasyonunu verdiler.

Öklid uzayında regüler eğriler ve bu eğrilerin birim küre üzerindeki görüntüleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bunun için de Frenet-Serret formüllerinden yararlanılmıştır. Regüler bir eğrinin herhangi bir noktasındaki teğet, normal ve binormal vektörlerinden yararlanılarak eğrinin eğriliği κ ve burulması τ hesaplanabilmektedir. Bunun sonucu olarak da eğrinin karakterizasyonu hakkında fikir yürütülmüştür.

1802 yılında M. A. Lancret tarafından genel helisin karakterizasyonu verildi ve 1845 yılında ilk olarak B. de Saint Venant tarafından kanıtlandı.

Buna göre;

- i) $\kappa = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir doğrudur.
- ii) $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir düzlemsel eğridir.
- iii) $\kappa = \text{sabit} > 0$ ve $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir çemberdir.
- iv) $\kappa = \text{sabit} > 0$ ve $\tau = \text{sabit} \Leftrightarrow \alpha$ bir dairesel helistir.
- v) $\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$ bir genel helistir (O'Neill, 2006: 77).

Yukarıda i) , ii) , ve iii) de belirtilen eğriler birer dejenere helistir.

2004 yılında Shyuichi Izumiya ve Nobuko Takeuchi tarafından ilk kez slant helisler tanımlandı ve bu helislerin karakterizasyonu verildi. Buna göre Izumiya ve Takeuchi genel olarak bir eğrinin birim asli normal vektörleri, sabit bir birim vektör ile sabit bir açı yapıyorsa bu eğrilere slant helis adını verdiler (Izumiya vd., 2004: 155).

2005 yılında Kula ve Yaylı da slant helislerin küresel göstergeleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Çalışmalarında slant helislerin tanjant(teğet) göstergelerinin ve binormal göstergelerinin küresel göstergelerini incelediler. Dahası küresel görüntülerin küresel sarmallar oldukları sonucunu elde ettiler (Kula vd., 2005: 601).

2013 yılında ise Okuyucu ve arkadaşları üç boyutlu Lie gruplarında slant helisleri tanımladılar ve slant helislerin küresel göstergelerini verdiler. Ayrıca Lie gruplarında slant helisler ile küresel göstergeleri arasındaki ilişkileri incelediler (Okuyucu vd., 2013: 672-683).

Ancak regüler eğriler için bu çalışmalar yapılırken singüler noktaları olan eğriler için maalesef fazla bir çalışma yapılamamıştır. Çünkü singüler noktaları olan eğrilerde regülerliği bozan noktalarda teğet vektörleri tanımlanamadığından Frenet-Serret formüllerinden yararlanmak mümkün olmamıştır. Dolayısıyla eğriye ait eğrilik ve burulmadan da bahsetmek mümkün olmamıştır. Sonuç olarak singüler noktaları olan eğrilerin karakterizasyonları da verilememiştir.

Son zamanlarda Shunichi Honda ve Masamoto Takahashi Öklid uzayında Framed (çatılandırılmış) eğrileri tanımladılar. Böylelikle singüler noktaları olan bu eğrilerin belli başlı koşullar altında Frenet tipi çatıları inşa edilmiş oldu (Honda vd., 2016: 265-276).

Dahası Yongqiao Wang ve arkadaşları da çatılandırılmış genel helisin tanımını verdiler ve bir çatılandırılmış eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter koşulu verdiler (Wang vd., 2019: 2-12).

$\mathbb{R}^3$ de yapılan bu çalışmaların yanı sıra $\mathbb{R}^4$ de yani 4 –boyutlu Öklid uzayında da çatılandırılmış eğriler çalışılmıştır. Mahmut Akyiğit ve Önder Gökmen Yıldız Öklid 4 –uzayında çatılandırılmış normal eğrileri incelemişlerdir (Akyiğit vd., 2021: 258-263).

Ayrıca yine $\mathbb{R}^4$ de Bahar Doğan Yazıcı, Sıddıka Özkaldı Karakuş ve Murat Tosun çatılandırılmış normal eğrilerin karakterizasyonlarını çalışmışlardır (Yazıcı vd., 2021: 125-131).

Bu tezde üç boyutlu Öklid uzayında bir çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış slant helis olması şartı verildi. Ayrıca çatılandırılmış slant helislerin karakterizasyonu verildi. Sonra bir çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış küresel göstergeleri tanımlandı. Daha sonra çatılandırılmış slant helisler ile bunların küresel göstergeleri arasındaki ilişkiler elde edildi. Son olarak ise bir çatılandırılmış slant helis örneği verildi ve tezde elde edilen sonuçlar bu örnekle desteklendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayı, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğriler, bir eğrinin küresel göstergeleri ve helis eğrileri ile ilgili tanım ve kavramlar verilmiştir.

2.1. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle, V ise $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu;

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$,

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır,

bu iki şartı sağlıyorsa A ya V ile birleşen bir afin uzay denir (Hacısalıhoğlu, 1998: 1).

Tanım 2.1.2. $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

eşitliğiyle tanımlanan $\langle , \rangle$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ uzayının doğal iç çarpımı ya da Öklid iç çarpımı denir (Sabuncuoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.3. $p \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $p \rightarrow ||p|| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ için

$||p|| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ de bir normdur denir (Sabuncuoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.4. $p, q \in \mathbb{R}^3$ için

$d(p, q) = ||p - q||$ şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\mathbb{R}$ uzayında bir metriktir denir (Sabuncuoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.5. A, V vektör uzayı ile birleşen bir 3 –boyutlu afin uzay olsun. Eğer V bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına bir Öklid uzayı denir (Yüce, 2020: 6).

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}^3$ de standart baz vektörler $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ olmak üzere ve $\vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ ifadesine $\vec{V}$ ile $\vec{W}$ nün vektörel çarpımı denir (Struik, 1988:

11).

2.2. $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

2.2.1. Eğriler İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne $\mathbb{R}^3$ uzayında diferansiyellenebilir bir eğri denir (Lugo, 1992: 8).

Buradaki her bir t parametresi için $t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ şeklindedir.

Tanım 2.2.1.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M eğrisi (I, α) komşuluğu ile verilsin.

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olmak üzere

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

yazılabilir.

Böylece

$$\frac{d\alpha}{dt}|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}|_t, \frac{d\alpha_3}{dt}|_t \right) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt} \right)|_t$$

vektörüne M eğrisinin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki hız vektörü denir (Yüce, 2020: 121).

Tanım 2.2.1.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M eğrisi (I, α) komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $t \rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$ olarak tanımlanan fonksiyona M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skalar hız fonksiyonu denir.

Buradaki $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına ise eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızı denir (Yüce, 2020: 123).

Tanım 2.2.1.4. (I, α) koordinat komşuluğu ile M eğrisi verilsin.

Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

oluyorsa M eğrisi bu komşulukta birim hızlıdır denir (Hacısalıhoğlu, 1998: 149).

Buradaki $s \in I$ parametresine yay-parametresi denir.

Tanım 2.2.1.5. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir (Carmo, 1976: 6).

Tanım 2.2.1.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2014: 74).

Tanım 2.2.1.7. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.

$\kappa(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014: 74).

Tanım 2.2.1.8. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2014: 75).

Tanım 2.2.1.9. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2014: 75).

Tanım 2.2.1.10. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir.

$\tau(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014: 76).

Sonuç 2.2.1.11. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi s yay parametresiyle birim hızlı bir eğri olsun.

α eğrisinin Frenet elemanları $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$ olmak üzere

i) $T(s) = \alpha'(s),$

ii) $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$

iii) $B(s) = T(s) \times N(s),$

iv) $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|,$

v) $\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \times \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha''(s)\|^2}$

ile hesaplanır.

Frenet vektörlerinin türevleri de;

$$i) \quad T'(s) = \kappa(s)N(s) ,$$

$$ii) \quad N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) ,$$

$$iii) \quad B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

şeklindedir.

Frenet vektörleri ile türevleri arasındaki ilişki kısaca;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

Birim hızlı olmayan eğrilerde ise Frenet elemanları

$$i) \quad T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} ,$$

$$ii) \quad N(s) = B(s) \times T(s),$$

$$iii) \quad B(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} ,$$

$$iv) \quad \kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} ,$$

$$v) \quad \tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2}$$

ile bulunur.

2.2.2. Bir Eğrinin Küresel Göstergeleri

Tanım 2.2.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında merkezi a ve yarıçapı r olan bir küre

$$S^2 = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \overrightarrow{X - a}, \overrightarrow{X - a} \rangle = r^2 \}$$

şeklinde ifade edilir.

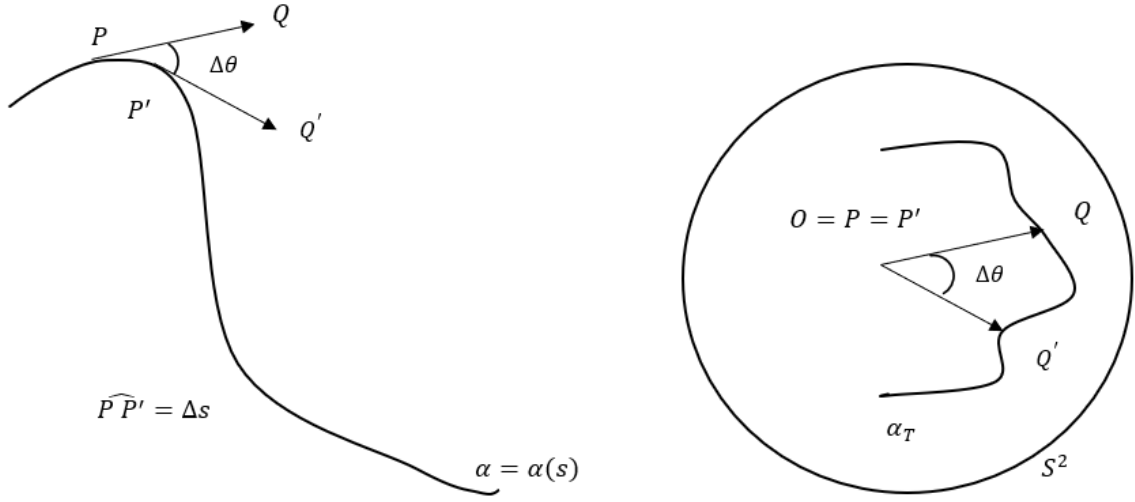
Böylece $X \in S^2 \subset \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^3$ için $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $a = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2$$

dir, $r = 1$ için S^2 küresi birim küredir (Yüce, 2020: 178).

Tanım 2.2.2.2. $M \subset \mathbb{R}^3, (I, \alpha)$ koordinat komşuluğuna sahip bir eğri olsun. Bu M eğrisi, S^2 küresi üzerinde yatıyorsa M eğrisine küresel eğri denir (Yüce, 2020: 178).

Tanım 2.2.2.3. $\mathbb{R}^3$ de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin bir P noktasındaki birim teğet vektörü T olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = T$ olacak şekilde $Q \in \mathbb{R}^3$ vardır. Burada P noktası α eğrisini çizerken Q noktasının birim küre yüzeyinde çizdiği eğriye α eğrisinin birinci küresel göstergesi veya teğetler göstergesi adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998: 259).



Şekil 2.1. Teğetler Göstergesi

α eğrisinin teğetler göstergesi α_T ile gösterilirse, α_T nin denklemi

$$\alpha_T = T$$

şeklindedir.

α_T eğrisinin yay parametresine s_T denilirse, α ile α_T eğrilerinin yay parametreleri arasındaki ilişki

$$ds_T = \| T'(s) \| ds$$

şeklindedir.

α eğrisinin P noktasındaki eğriliği

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

ile hesaplanır. Teğetler göstergesinin yay elementi $ds_T = \|T'(s)\| ds$ ve $T'(s) = \kappa N(s)$ olmak üzere

$$ds_T = \|\kappa N(s)\| ds$$

dir. Buradan

$$\frac{ds_T}{ds} = \kappa$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s_T} \cdot \frac{\Delta s_T}{\Delta s}$$

yazılabilir. Buradan

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s_T \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s_T} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_T}{\Delta s},$$

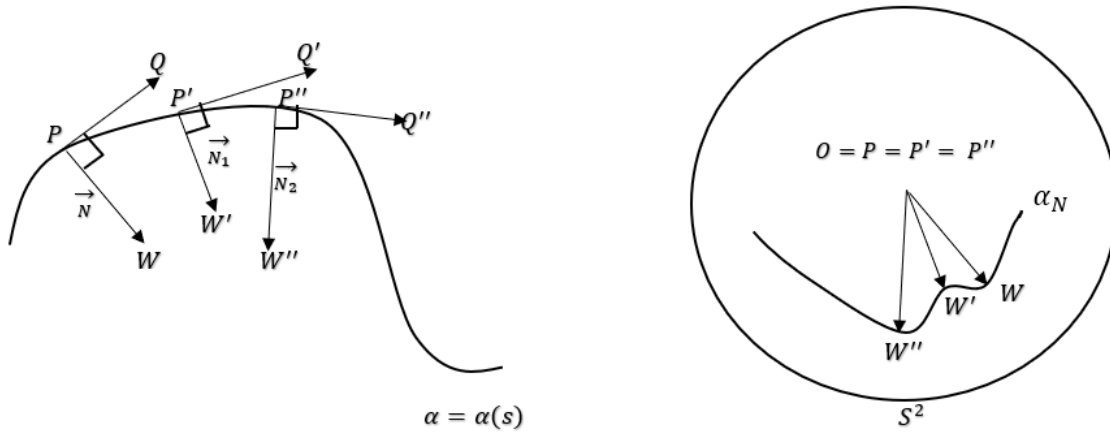
$$\lim_{\Delta s_T \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s_T} = 1,$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_T}{\Delta s}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{ds_T}{ds} = \kappa$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.2.4. $\mathbb{R}^3$ de bir α eğrisinin birim asli normal vektörü $\vec{N}$ olsun. α eğrisi çizilirken $\vec{N}$ vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin ikinci küresel göstergesi veya asli normaller göstergesi denir.



Şekil 2.2. Asli Normaller Göstergesi

α eğrisinin asli normaller göstergesi α_N ile gösterilirse, α_N nin denklemi

$$\alpha_N = N$$

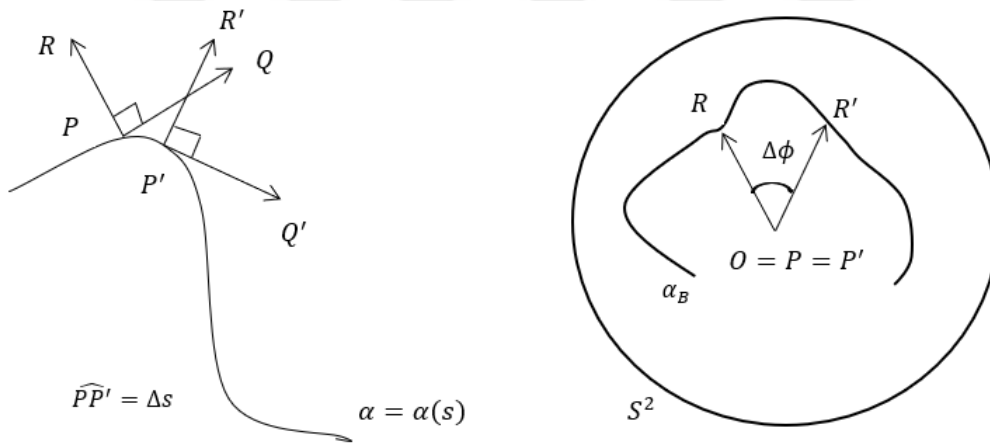
şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1998: 262).

α_N eğrisinin yay parametresine s_N denilirse, α ile α_N eğrilerinin yay parametreleri arasındaki ilişki

$$ds_N = \| N'(s) \| ds$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.2.5. $\mathbb{R}^3$ de bir α eğrisinin bir P noktasındaki binormal vektörü $B = \overrightarrow{PR}$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $\Delta\phi$ olmak üzere P noktası α eğrisini çizerken R noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin üçüncü küresel göstergesi veya binormaller göstergesi denir (Hacısalıhoğlu, 1998: 262).



Şekil 2.3. Binormaller Göstergesi

α eğrisinin binormaller göstergesi α_B ile gösterilirse, α_B nin denklemi

$$\alpha_B = B$$

şeklindedir.

α_B eğrisinin yay parametresine s_B denilirse, α ile α_B eğrilerinin yay parametreleri arasındaki ilişki

$$ds_B = \| B'(s) \| ds$$

şeklindedir.

α eğrisinin P noktasındaki burulması

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$$

ile hesaplanır. Binormaller göstergesinin yay elementi $ds_B = \|B'(s)\| ds$ ve $B'(s) = -\tau N(s)$ olmak üzere

$$ds_B = \|-\tau N(s)\| ds$$

dir. Buradan

$$\frac{ds_B}{ds} = |\tau|$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{\Delta \phi}{\Delta s_B} \cdot \frac{\Delta s_B}{\Delta s}$$

yazılabilir. Buradan

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s_B \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s_B} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_B}{\Delta s},$$

$$\lim_{\Delta s_B \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s_B} = 1,$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_B}{\Delta s}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{ds_B}{ds} = |\tau|$$

olarak bulunur.

2.2.3. Helis Eğrileri

Tanım 2.2.3.1. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. $\kappa \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin birim teğet vektör alanı T , sabit doğrultulu bir $\vec{u}$ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa, yani $\langle T(s), \vec{u} \rangle = \cos \theta ; \theta = \text{sabit}$ ise α eğrisine genel helis denir (Izumiya vd., 2004: 154).

Buradaki sabit doğrultulu $\vec{u}$ birim vektörüne helisin eksenı denir.

Teorem 2.2.3.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\kappa \neq 0, \tau$ sırasıyla α eğrisinin eğriliği ve burulması olmak üzere α eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır (Shifrin, 2015: 15).

Tanım 2.2.3.3. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi s yay parametresi ile verilsin. $\kappa \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin asli birim normal vektör alanı N , sabit doğrultulu bir $\vec{u}$ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa, α eğrisine slant helis denir (Izumiya vd., 2004: 155).

Teorem 2.2.3.4. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri ve $\kappa \neq 0$ olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul $\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olmasıdır (Izumiya vd., 2004: 155).

Teorem 2.2.3.5. $\mathbb{R}^3$ de bir Frenet eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul teğetler göstergesinin genel helis olmasıdır (Kula vd., 2005: 602).

Teorem 2.2.3.6. $\mathbb{R}^3$ de bir Frenet eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul normaller göstergesinin çember olmasıdır (Kula vd., 2010: 264).

Teorem 2.2.3.7. $\tau \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{R}^3$ de bir Frenet eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul binormaller göstergesinin genel helis olmasıdır (Kula vd., 2005: 602).

3. $\mathbb{R}^3$ DE ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLER VE ÇATILANDIRILMIŞ HELİSLER

Bu bölümde üç boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğriler ve çatılandırılmış helisler tanımlanmıştır. Ayrıca bir çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış helis olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

3.1. Çatılandırılmış Eğri

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi singüler noktaları olan bir eğri olmak üzere

$\Delta_2 = \{\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mu_i \mu_j = \delta_{ij}, i, j = 1, 2\}$ olarak tanımlanan üç boyutlu düzgün bir manifold olsun.

$\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$ için $v = \mu_1 \times \mu_2 \in \mathbb{R}^3$ birim vektörü tanımlanabilir. Bu durumda v vektörü μ_1 ve μ_2 ile ortogonaldır (Wang vd., 2019: 2).

Tanım 3.1.1. Her $s \in I$ ve $i = 1, 2$ için $(\gamma, \mu): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olmak üzere

$$\langle \gamma'(s), \mu_i(s) \rangle = 0$$

olacak şekilde bir γ eğrisi varsa γ eğrisine çatılandırılmış eğri denir (Wang vd., 2019: 2).

Burada $(\gamma, \mu): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisi için Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibidir.

$$v'(s) = -m(s)\mu_1(s) - n(s)\mu_2(s),$$

$$\mu_1'(s) = l(s)\mu_2(s) + m(s)v(s),$$

$$\mu_2'(s) = -l(s)\mu_1(s) + n(s)v(s).$$

Burada

$$l(s) = \langle \mu_1'(s), \mu_2(s) \rangle,$$

$$m(s) = \langle \mu_1'(s), v(s) \rangle,$$

$$n(s) = \langle \mu_2'(s), v(s) \rangle$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$$

olacak şekilde düzgün bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Buradaki $l(s), m(s), n(s)$ ve $\alpha(s)$ fonksiyonları γ eğrisinin eğrilikleri olarak adlandırılır. Eğer $m(s) = n(s) = 0$ ise $v'(s) = 0$

dır. Bu çalışmada $v'(s) \neq 0$ kabul edilecektir. Açıkçası $\alpha(s_0) = 0$ olursa s_0 noktası γ eğrisinin bir singüler noktası olacaktır. Çatılandırılmış eğrinin eğrilikleri singüler noktalarda eğriyi karakterize etmek için kullanılabilir.

Teorem 3.1.2. (γ, μ) ve $(\bar{\gamma}, \bar{\mu}): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrilerinin eğrilikleri, sırasıyla (l, m, n, α) ve $(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{\alpha})$ olsun. O zaman (γ, μ) ve $(\bar{\gamma}, \bar{\mu})$ çatılandırılmış eğrileri congruenttir (uyumludur) (Wang vd., 2019: 2).

γ eğrisi boyunca uyarlanmış bir çatıyı $\{v(s), \bar{\mu}_1(s), \bar{\mu}_2(s)\}$ olarak tanımlarsak Frenet-Serret formülleri

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ \bar{\mu}_1'(s) \\ \bar{\mu}_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p(s) & 0 \\ -p(s) & 0 & q(s) \\ 0 & -q(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \bar{\mu}_1(s) \\ \bar{\mu}_2(s) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Dolayısıyla

$$v'(s) = p(s)\bar{\mu}_1(s), \quad (3.1)$$

$$\bar{\mu}_1'(s) = -p(s)v(s) + q(s)\bar{\mu}_2(s), \quad (3.2)$$

$$\bar{\mu}_2'(s) = -q(s)\bar{\mu}_2(s) \quad (3.3)$$

şeklindedir.

$\theta(s)$ düzgün fonksiyon olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \bar{\mu}_1(s) \\ \bar{\mu}_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(s) & -\sin \theta(s) \\ \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2) \in \Delta_2$ tanımlayalım. $(\gamma, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğri ise

$$\bar{v}(s) = \bar{\mu}_1(s) \times \bar{\mu}_2(s) = \mu_1(s) \times \mu_2(s) = v(s)$$

olduğu açıktır. Buradaki $v(s)$, $\bar{\mu}_1(s)$, $\bar{\mu}_2(s)$ vektörlerine sırasıyla genelleştirilmiş tanjant vektör, genelleştirilmiş asli normal vektör ve genelleştirilmiş binormal vektör denir.

$(\gamma, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $(p(s), q(s), \alpha(s))$ olmak üzere

$$p(s) = |v'(s)| > 0 \text{ ve } q(s) = l(s) - \theta'(s)$$

dir.

Tanım 3.1.3. $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğri olsun. γ çatılandırılmış bazlı eğrisi S^2 üzerinde bir eğri ise γ eğrisine çatılandırılmış küresel eğri denir (Wang vd., 2019: 5).

3.2. Çatılandırılmış Helis

Tanım 3.2.1. $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. γ eğrisinin genelleştirilmiş teğetler vektörü olan v , sabit bir ζ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa γ eğrisine çatılandırılmış helis denir (Wang vd., 2019: 7).

Teorem 3.2.2. $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisi ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu_1}(s), \overline{\mu_2}(s), p(s), q(s)\}$ olsun. γ eğrisi bir çatılandırılmış helistir ancak ve ancak

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \pm \cot \omega, \omega = \text{sabit}$$

dir (Wang vd., 2019: 7).

İspat: γ bir çatılandırılmış helis olsun. Bu durumda

$$\langle v(s), \zeta \rangle = \cos \omega, \omega = \text{sabit} \quad (3.4)$$

yazılabilir.

(3.4) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned} ((v(s), \zeta))' &= (\cos \omega)', \\ \langle v'(s), \zeta \rangle + \langle v(s), \zeta' \rangle &= 0, \\ \langle v'(s), \zeta \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

(3.1) eşitliği (3.5) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle p(s) \overline{\mu_1}(s), \zeta \rangle &= 0, \\ p(s) \langle \overline{\mu_1}(s), \zeta \rangle &= 0, \\ \langle \overline{\mu_1}(s), \zeta \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

yazılabilir.

(3.6) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mu_1}'(s), \zeta \rangle + \langle \overline{\mu_1}(s), \zeta' \rangle &= 0, \\ \langle \overline{\mu_1}'(s), \zeta \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

bulunur.

(3.2) eşitliği (3.7) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \langle -p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle &= 0, \\
 \langle -p(s)v(s), \zeta \rangle + \langle q(s)\overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle &= 0, \\
 -p(s)\langle v(s), \zeta \rangle + q(s)\langle \overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle &= 0, \\
 p(s)\langle v(s), \zeta \rangle &= q(s)\langle \overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir.

(3.4) ifadesi (3.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle \overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle = \frac{p(s)}{q(s)} \cos \omega \tag{3.9}$$

olur.

ζ, γ çatılandırılmış slant helisinin ekseni olduğundan

$$\zeta = \lambda_1 v(s) + \lambda_2 \overline{\mu_1}(s) + \lambda_3 \overline{\mu_2}(s) \tag{3.10}$$

yazılabilir. Burada

$$\lambda_1 = \langle v(s), \zeta \rangle, \lambda_2 = \langle \overline{\mu_1}(s), \zeta \rangle, \lambda_3 = \langle \overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle$$

dir.

(3.10) denkleminde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerleri yazılırsa

$$\zeta = \cos \omega v(s) + \frac{p(s)}{q(s)} \cos \omega \overline{\mu_2}(s) \tag{3.11}$$

elde edilir.

ζ , birim vektör olduğundan $\|\zeta\| = 1$ dir.

$$\|\zeta\| = \sqrt{(\cos \omega)^2 + \left(\frac{p(s)}{q(s)}\right)^2 (\cos \omega)^2} = 1,$$

$$(\cos \omega)^2 + \left(\frac{p(s)}{q(s)}\right)^2 (\cos \omega)^2 = 1,$$

$$1 - \cos^2 \omega = \left(\frac{p(s)}{q(s)}\right)^2 \cos^2 \omega,$$

$$\sin^2 \omega = \left(\frac{p(s)}{q(s)}\right)^2 \cos^2 \omega,$$

$$\frac{\sin^2 \omega}{\cos^2 \omega} = \left(\frac{p(s)}{q(s)}\right)^2,$$

$$\tan^2 \omega = \left(\frac{p(s)}{q(s)} \right)^2,$$

$$\pm \tan \omega = \frac{p(s)}{q(s)},$$

$$\pm \cot \omega = \frac{q(s)}{p(s)}$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece ispat tamamlanır.



4. $\mathbb{R}^3$ DE ÇATILANDIRILMIŞ SLANT HELİS VE KÜRESEL GÖSTERGELERİ

Bu bölümde çatılandırılmış slant helis ve eksen tanımlandı. Ayrıca çatılandırılmış slant helisin bir karakterizasyonu verildi. Bunun yanında çatılandırılmış slant helislerin küresel göstergeleri ve çatılandırılmış slant helisler ile küresel göstergeleri arasındaki ilişkiler incelendi.

4.1. Çatılandırılmış Slant Helis

Tanım 4.1.1. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. γ eğrisinin genelleştirilmiş asli normal vektörü $\overline{\mu}_1$, sabit bir ζ birim vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa γ eğrisine çatılandırılmış slant helis denir.

Yani her $s \in I$ için

$$\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle = \cos \varphi$$

dir, burada $\varphi = \frac{\pi}{2}$ açısı $\overline{\mu}_1(s)$ ve ζ arasındaki sabit açıdır.

Tanım 4.1.2. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu}_1(s), \overline{\mu}_2(s), p(s), q(s)\}$ olsun. (γ, μ) çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış harmonik eğriliği $H(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.3. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu}_1(s), \overline{\mu}_2(s), p(s), q(s)\}$ olsun. γ bir çatılandırılmış slant helis ise ancak ve ancak

$$\sigma(s) = \frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}} = \pm \cot \varphi, \varphi = \text{sabit}$$

ifadesi bir sabit fonksiyondur, buradaki $H(s), \gamma$ çatılandırılmış eğrisinin bir çatılandırılmış harmonik eğriliğidir.

İspat: $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu}_1(s), \overline{\mu}_2(s), p(s), q(s)\}$ olsun. γ bir çatılandırılmış slant helis olmak üzere, φ bir sabit ve ζ da bir sabit birim vektör olsun. Bu durumda;

$$\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle = \cos \varphi \tag{4.1}$$

yazılabilir.

(4.1) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
(\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle)' &= (\cos \varphi)', \\
\langle \overline{\mu}_1'(s), \zeta \rangle + \langle \overline{\mu}_1(s), \zeta' \rangle &= 0, \\
\langle \overline{\mu}_1'(s), \zeta \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

olur.

(3.2) eşitliği (4.2) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle -p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle &= 0, \\
\langle -p(s)v(s), \zeta \rangle + \langle q(s)\overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle &= 0, \\
-p(s)\langle v(s), \zeta \rangle + q(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle &= 0, \\
\langle v(s), \zeta \rangle &= H(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle
\end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

(4.3) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\langle v'(s), \zeta \rangle + \langle v(s), \zeta' \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle + H(s)(\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle)', \\
\langle v'(s), \zeta \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle + H(s)(\langle \overline{\mu}_2'(s), \zeta \rangle + \langle \overline{\mu}_2(s), \zeta' \rangle), \\
\langle v'(s), \zeta \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle + H(s)\langle \overline{\mu}_2'(s), \zeta \rangle
\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir.

(3.1) ve (3.3) eşitlikleri (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle p(s)\overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle + H(s)\langle -q(s)\overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle, \\
p(s)\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle + H(s)(-q(s))\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle, \\
p(s)\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle + H(s)q(s)\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle, \\
(p(s) + H(s)q(s))\langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle &= H'(s)\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle
\end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir.

(4.1) eşitliği (4.5) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle &= \frac{p(s) + H(s)q(s)}{H'(s)} \cos \varphi, \\
\langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle &= \frac{p(s)(1 + H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir.

(4.6) ifadesi (4.3) eşitliğinde yazılırsa;

$$\begin{aligned}\langle v(s), \zeta \rangle &= H(s) \frac{p(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi, \\ \langle v(s), \zeta \rangle &= \frac{p(s)H(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi\end{aligned}\quad (4.7)$$

bulunur.

γ çatılandırılmış slant helisinin eksenini, ζ olduğundan

$$\zeta = \lambda_1 v(s) + \lambda_2 \overline{\mu_1}(s) + \lambda_3 \overline{\mu_2}(s) \quad (4.8)$$

yazılabilir. Burada

$$\lambda_1 = \langle v(s), \zeta \rangle, \lambda_2 = \langle \overline{\mu_1}(s), \zeta \rangle, \lambda_3 = \langle \overline{\mu_2}(s), \zeta \rangle$$

dir.

(4.8) denkleminde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerleri yerine yazılırsa

$$\zeta = \frac{p(s)H(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi v(s) + \cos \varphi \overline{\mu_1}(s) + \frac{p(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi \overline{\mu_2}(s)$$

elde edilir.

ζ bir sabit birim vektör olduğundan $\|\zeta\| = 1$ dir.

Buna göre

$$\left(\frac{p(s)H(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi \right)^2 + (\cos \varphi)^2 + \left(\frac{p(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \cos \varphi \right)^2 = 1,$$

$$\cos^2 \varphi \left(\frac{(1+H^2(s))}{H'(s)} \right)^2 p^2(s)(1+H^2(s)) = 1 - \cos^2 \varphi,$$

$$\cos^2 \varphi \left(\frac{(1+H^2(s))}{H'(s)} \right)^2 p^2(s)(1+H^2(s)) = \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{p^2(s)(1+H^2(s))^3}{(H'(s))^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$\frac{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}}{H'(s)} = \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$\pm \cot \varphi = \frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}}$$

olur.

$\pm \cot \varphi = \text{sabit}$ olduğundan $\sigma(s) = \frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}}$ ifadesi de sabittir, buradaki

$\varphi, \overline{\mu}_1(s)$ ile ζ arasındaki sabit açıdır.

Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin belirttiği uyarlanmış çatı $\{v(s), \overline{\mu}_1(s), \overline{\mu}_2(s)\}$ olsun. γ çatılandırılmış eğrisi bir çatılandırılmış slant helis ise γ çatılandırılmış eğrisinin eksenini ζ ;

$$\zeta = \left(\frac{p(s)H(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} v(s) + \overline{\mu}_1(s) + \frac{p(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \overline{\mu}_2(s) \right) \cos \varphi$$

dir. Burada γ eğrisinin çatılandırılmış harmonik eğriliği $H(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ dir ve $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ açısı sabit bir açıdır.

İspat: γ çatılandırılmış slant helisinin eksenini ζ ise

$$\zeta = \lambda_1 v(s) + \lambda_2 \overline{\mu}_1(s) + \lambda_3 \overline{\mu}_2(s) \text{ yazılabilir.}$$

Burada

$$\lambda_1 = \langle v(s), \zeta \rangle, \lambda_2 = \langle \overline{\mu}_1(s), \zeta \rangle, \lambda_3 = \langle \overline{\mu}_2(s), \zeta \rangle$$

dir.

(4.1), (4.6) ve (4.7) denklemlerinin sonucundan;

$$\zeta = \left(\frac{p(s)H(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} v(s) + \overline{\mu}_1(s) + \frac{p(s)(1+H^2(s))}{H'(s)} \overline{\mu}_2(s) \right) \cos \varphi$$

Bulunur, buradaki $\varphi, \overline{\mu}_1(s)$ ile ζ arasındaki sabit açıdır.

Böylelikle ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri ve γ çatılandırılmış eğrisinin uyarlanmış çatısı $\{v(s), \overline{\mu}_1(s), \overline{\mu}_2(s)\}$ olsun. γ bir çatılandırılmış slant helis ise γ çatılandırılmış eğrisinin eksenini;

$$\zeta = \cos \psi(s) \sin \varphi v(s) + \cos \varphi \overline{\mu}_1(s) + \sin \psi(s) \sin \varphi \overline{\mu}_2(s)$$

şeklindedir, burada $\psi(s) = \arccos\left(\frac{H(s)}{(1+H^2(s))^{\frac{1}{2}}}\right)$, $v(s)$ ile ζ arasındaki açıdır, ayrıca $\varphi, \overline{\mu_1}(s)$ ile ζ arasındaki sabit açıdır.

4.2. Çatılandırılmış Slant Helislerin Küresel Göstergeleri

4.2.1. Çatılandırılmış Slant Helislerin v – Göstergeleri

Tanım 4.2.1.1. $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Her $s \in I$ için

$$\beta(s) = v(s)$$

olarak tanımlanan $(\beta, \overline{\mu_{1\beta}}, \overline{\mu_{2\beta}}): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisine γ eğrisinin çatılandırılmış v – yönündeki göstergesi denir. β eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v_\beta, \overline{\mu_{1\beta}}, \overline{\mu_{2\beta}}\}$ ile gösterilirse

$$\beta'(s) = \alpha_\beta(s)v_\beta(s) \quad (4.9)$$

olacak şekilde $\alpha_\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır.

Teorem 4.2.1.2. $\mathbb{R}^3$ de $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin çatılandırılmış v – yönündeki göstergesi $(\beta, \overline{\mu_{1\beta}}, \overline{\mu_{2\beta}})$ olsun. γ bir çatılandırılmış slant helis ise ancak ve ancak β bir çatılandırılmış helistir.

İspat: Varsayalım ki γ , $\mathbb{R}^3$ de bir çatılandırılmış slant helis ve γ eğrisinin çatılandırılmış v – yönündeki göstergesi β olsun.

Tanım 4. 2. 1. 1. den

$$\beta(s) = v(s)$$

olup bu son eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s) = v'(s)$$

olur.

Son denklemde (3.1) ve (4.9) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\alpha_\beta(s)v_\beta(s) = p(s)\overline{\mu_1}(s) \quad (4.10)$$

elde edilir.

(4.10) eşitliğinin normu alınır

$$|\alpha_\beta(s)| = p(s) ,$$

$$\alpha_\beta(s) = p(s) > 0 \quad (4.11)$$

elde edilir.

(4.11) ifadesi (4.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$p(s) v_\beta(s) = p(s) \overline{\mu_1}(s) ,$$

$$v_\beta(s) = \overline{\mu_1}(s) \quad (4.12)$$

olacaktır.

(4.12) denkleminin türevi alınır

$$v_\beta'(s) = \overline{\mu_1}'(s)$$

elde edilir.

(3.2) eşitliği son denklemde yazılırsa

$$p_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) = -p(s) v(s) + q(s) \overline{\mu_2}(s) \quad (4.13)$$

elde edilir.

(4.13) eşitliğinin normu alınır

$$p_\beta(s) = p(s) \sqrt{(1 + H^2(s))} \quad (4.14)$$

eşitliği elde edilir.

(4.14) deki $p_\beta(s)$ ifadesinin eşiti (4.13) numaralı eşitlikte yazılırsa

$$p(s) \sqrt{1 + H^2(s)} \overline{\mu_{1\beta}}(s) = -p(s) v(s) + q(s) \overline{\mu_2}(s) ,$$

$$\overline{\mu_{1\beta}}(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s) \quad (4.15)$$

elde edilir.

$$\overline{\mu_{2\beta}}(s) = v_\beta(s) \times \overline{\mu_{1\beta}}(s),$$

$$\overline{\mu_{2\beta}}(s) = \begin{vmatrix} v(s) & \overline{\mu_1}(s) & \overline{\mu_2}(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} & 0 & \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \end{vmatrix} ,$$

$$\overline{\mu_{2\beta}}(s) = \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s) \quad (4.16)$$

olacaktır.

(4.16) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned}\overline{\mu_{2\beta}}'(s) &= \left(\frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \right)' v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v'(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \right)' \overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}'(s), \\ -q_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v'(s) - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}'(s)\end{aligned}$$

olur.

Son eşitlikte (3.1) ve (3.3) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}-q_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} p(s) \overline{\mu_1}(s) - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (-q(s) \overline{\mu_1}(s)), \\ -q_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \left(\frac{p(s)H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} - \frac{q(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \right) \overline{\mu_1}(s) \\ &\quad - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s), \\ -q_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + 0 \cdot \overline{\mu_1}(s) - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s), \\ -q_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

γ bir çatılandırılmış slant helis olduğundan $\sigma(s) = \frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}}$ düzenlemesi yapılırsa

$$-q_\beta(s) \overline{\mu_{1\beta}}(s) = p(s) \sigma(s) v(s) - p(s) H(s) \sigma(s) \overline{\mu_2}(s)$$

bulunur.

Bu son denklemin normu alınır

$$\begin{aligned}q_\beta(s) &= \sqrt{(p(s) \sigma(s))^2 + (p(s) \sigma(s) H(s))^2}, \\ q_\beta(s) &= p(s) \sigma(s) \sqrt{1 + H^2(s)}\end{aligned}\tag{4.17}$$

elde edilir.

(4.14) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\frac{q_\beta(s)}{p_\beta(s)} = \frac{p(s)\sigma(s)\sqrt{1+H^2(s)}}{p(s)\sqrt{1+H^2(s)}},$$

$$\frac{q_\beta(s)}{p_\beta(s)} = \sigma(s)$$

sonucuna ulaşılır.

γ , $\mathbb{R}^3$ de bir çatılandırılmış slant helis olduğundan $\frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}} = \sigma(s)$ ifadesi bir sabit sayıdır. Dolayısıyla $\frac{q_\beta(s)}{p_\beta(s)}$ ifadesinin de sabit olduğu aşıkardır. Yani γ eğrisinin çatılandırılmış v –yönündeki göstergesi olan β bir çatılandırılmış helistir.

Sonuç 4.2.1.3. γ çatılandırılmış eğrisinin v –gösterge eğrisi olan β bir regüler çatılandırılmış eğridir.

İspat: (4.11) den $\alpha_\beta(s) = p(s) > 0$ olup sonuç aşıkardır.

Sonuç 4.2.1.4. $\mathbb{R}^3$ de bir $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ çatılandırılmış eğrisi ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu_1}(s), \overline{\mu_2}(s)\}$ ile γ eğrisinin çatılandırılmış v –yönündeki göstergesi $(\beta, \overline{\mu_{1\beta}}, \overline{\mu_{2\beta}})$ ve β eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v_\beta(s), \overline{\mu_{1\beta}}(s), \overline{\mu_{2\beta}}(s)\}$ olsun. Bu durumda γ ve β eğrilerinin uyarlanmış çatı elemanları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$v_\beta(s) = \overline{\mu_1}(s),$$

$$\overline{\mu_{1\beta}}(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s),$$

$$\overline{\mu_{2\beta}}(s) = \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s).$$

Burada $H(s)$, γ çatılandırılmış eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat: (4.12), (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden görülür.

Sonuç 4.2.1.5. $\mathbb{R}^3$ de bir $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ çatılandırılmış eğrisi ve γ eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $p(s), q(s)$ ile γ eğrisinin çatılandırılmış v –yönündeki göstergesi $(\beta, \overline{\mu_{1\beta}}, \overline{\mu_{2\beta}})$ ve β eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $p_\beta(s), q_\beta(s)$ olsun. Bu durumda γ ve β çatılandırılmış eğrilerinin çatılandırılmış eğrilikleri arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$p_\beta(s) = p(s)\sqrt{1+H^2(s)},$$

$$q_\beta(s) = p(s)\sigma(s)\sqrt{1+H^2(s)}.$$

Burada $H(s), \gamma$ çatılandırılmış eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat: (4.14) ve (4.17) eşitliklerinden görülür.

4.2.2. Çatılandırılmış Slant Helislerin $\overline{\mu}_1$ –Göstergeleri

Tanım 4.2.2.1. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Her $s \in I$ için $\eta(s) = \overline{\mu}_1(s)$

olarak tanımlanan $(\eta, \overline{\mu}_{1\eta}, \overline{\mu}_{2\eta}): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisine γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu}_1$ –yönündeki göstergesi denir. η eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v_\eta, \overline{\mu}_{1\eta}, \overline{\mu}_{2\eta}\}$ ile gösterilirse

$$\eta'(s) = \alpha_\eta(s)v_\eta(s) \quad (4.18)$$

olacak şekilde $\alpha_\eta: I \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır.

Teorem 4.2.2.2. $\mathbb{R}^3$ de $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2)$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu}_1$ – yönündeki göstergesi $(\eta, \overline{\mu}_{1\eta}, \overline{\mu}_{2\eta})$ olsun. γ eğrisi bir çatılandırılmış slant helis ise η eğrisi S^2 üzerinde bir düzlemsel eğridir.

İspat: γ eğrisi, $\mathbb{R}^3$ de bir çatılandırılmış slant helis ve γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu}_1$ – yönündeki göstergesi η olsun.

Tanım 4. 2. 2. 1. den

$$\eta(s) = \overline{\mu}_1(s)$$

olup bu son eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\eta'(s) = \overline{\mu}_1'(s)$$

olur.

Son denklemde (3.2) ve (4.18) yerlerine yazılırsa

$$\alpha_\eta(s)v_\eta(s) = -p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu}_2(s) \quad (4.19)$$

elde edilir.

(4.19) eşitliğinin normu alınırsa

$$|\alpha_\eta(s)| = \sqrt{p^2(s) + q^2(s)},$$

$$|\alpha_\eta(s)| = p(s)\sqrt{1 + H^2(s)},$$

$$\alpha_\eta(s) = p(s)\sqrt{1+H^2(s)} \quad (4.20)$$

elde edilir.

(4.20) eşitliği (4.19) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p(s)\sqrt{1+H^2(s)}v_\eta(s) &= -p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu_2}(s), \\ v_\eta(s) &= -\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}(s) \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur.

(4.21) denkleminin türevinden

$$\begin{aligned} v_\eta'(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}\right)' v(s) - \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}v'(s) + \left(\frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}\right)' \overline{\mu_2}(s) \\ &\quad + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}'(s), \\ p_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}\right)' v(s) - \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}v'(s) + \left(\frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}\right)' \overline{\mu_2}(s) \\ &\quad + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}'(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde (3.1) ve (3.3) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) - \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}p(s)\overline{\mu_1}(s) + \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) \\ &\quad + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}(-q(s)\overline{\mu_1}(s)), \\ p_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) - p(s)\sqrt{1+H^2(s)}\overline{\mu_1}(s) + \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

γ bir çatılandırılmış slant helis olduğundan $\frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}} = \sigma(s)$ düzenlemesi yapılabilir.

Böylece

$$p_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) = p(s)H(s)\sigma(s)v(s) - p(s)\sqrt{1+H^2(s)}\overline{\mu_1}(s) + p(s)\sigma(s)\overline{\mu_2}(s) \quad (4.22)$$

ifadesi elde edilir.

(4.22) eşitliğinin normu alınır;

$$\begin{aligned}
p_\eta(s) &= \sqrt{(p(s)H(s)\sigma(s))^2 + \left(-p(s)\sqrt{1+H^2(s)}\right)^2 + (p(s)\sigma(s))^2}, \\
p_\eta(s) &= \sqrt{p^2(s)H^2(s)\sigma^2(s) + p^2(s)(1+H^2(s)) + p^2(s)\sigma^2(s)}, \\
p_\eta(s) &= p(s)\sqrt{H^2(s)\sigma^2(s) + (1+H^2(s)) + \sigma^2(s)}, \\
p_\eta(s) &= p(s)\sqrt{(1+H^2(s))(1+\sigma^2(s))} \tag{4.23}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.23) ifadesi (4.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
p(s)\sqrt{(1+H^2(s))(1+\sigma^2(s))}\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= p(s)H(s)\sigma(s)v(s) \\
&\quad - p(s)\sqrt{1+H^2(s)}\overline{\mu_1}(s) + p(s)\sigma(s)\overline{\mu_2}(s), \\
\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \frac{H(s)\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}v(s) - \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\overline{\mu_1}(s) + \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}(s) \tag{4.24}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\overline{\mu_{2\eta}}(s) &= v_\eta(s) \times \overline{\mu_{1\eta}}(s), \\
\overline{\mu_{2\eta}}(s) &= \begin{vmatrix} v(s) & \overline{\mu_1}(s) & \overline{\mu_2}(s) \\ \frac{-1}{\sqrt{1+H^2(s)}} & 0 & \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \\ \frac{\sigma(s)H(s)}{\sqrt{\sigma^2(s)+1}\sqrt{1+H^2(s)}} & -\frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s)+1}} & \frac{\sigma(s)}{\sqrt{\sigma^2(s)+1}\sqrt{1+H^2(s)}} \end{vmatrix}, \\
\overline{\mu_{2\eta}}(s) &= \frac{H(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}v(s) + \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\overline{\mu_1}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}(s) \tag{4.25}
\end{aligned}$$

bulunur.

(4.25) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned}
-q_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\left(\left(\frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}\right)'v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}v'(s)\right) \\
&\quad + \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\overline{\mu_1}'(s) + \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}\right)'\overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}'(s)\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Son denklemde (3.1), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
-q_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}} \left(\frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} p(s)\overline{\mu_1}(s) \right) \\
&+ \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}} (-p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu_2}(s)) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}} \left(\left(-\frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \right) \overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (-q(s)\overline{\mu_1}(s)) \right)
\end{aligned}$$

olur.

Son eşitlikte $\frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}} = \sigma(s)$ düzenlemesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
-q_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}} \left(p(s)\sigma(s)v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} p(s)\overline{\mu_1}(s) \right) \\
&+ \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}} (-p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu_2}(s)) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}} \left((-p(s)H(s)\sigma(s))\overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (-q(s)\overline{\mu_1}(s)) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
-q_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= 0 \cdot v(s) + 0 \cdot \overline{\mu_1}(s) + 0 \cdot \overline{\mu_2}(s), \\
q_\eta(s)\overline{\mu_{1\eta}}(s) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu son denklemin normu alındığında

$$q_\eta(s) = 0 \tag{4.26}$$

bulunur.

Sonuç olarak $q_\eta(s) = 0$ olduğundan η eğrisi bir düzlemsel eğridir. Yani γ bir çatılandırılmış slant helis iken γ çatılandırılmış eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_1}$ - yönündeki göstergesi olan η bir düzlemsel eğridir.

Sonuç 4.2.2.3. γ çatılandırılmış eğrisinin $\overline{\mu_1}$ -gösterge eğrisi olan η bir regüler çatılandırılmış eğridir.

İspat: (4.20) den $\alpha_\eta(s) = p(s)\sqrt{1+H^2(s)} > 0$ olup sonuç aşıkardır.

Sonuç 4.2.2.4. $\mathbb{R}^3$ de bir $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ çatılandırılmış eğrisi ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu_1}(s), \overline{\mu_2}(s)\}$ ile γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_1}$ -yönündeki göstergesi

$(\eta, \overline{\mu_{1\eta}}, \overline{\mu_{2\eta}})$ ve η eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v_\eta(s), \overline{\mu_{1\eta}}(s), \overline{\mu_{2\eta}}(s)\}$ olsun. Bu durumda γ ve η eğrilerinin uyarlanmış çatı elemanları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

$$v_\eta(s) = -\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}}v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}(s),$$

$$\overline{\mu_{1\eta}}(s) = \frac{H(s)\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}v(s) - \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\overline{\mu_1}(s) + \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}(s),$$

$$\overline{\mu_{2\eta}}(s) = \frac{H(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}v(s) + \frac{\sigma(s)}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}}\overline{\mu_1}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2(s)}\sqrt{1+H^2(s)}}\overline{\mu_2}(s).$$

Burada $H(s)$, γ çatılandırılmış eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat: (4.21), (4.24) ve (4.25) eşitliklerinden görülür.

4.2.3. Çatılandırılmış Slant Helislerin $\overline{\mu_2}$ –Göstergeleri

Tanım 4.2.3.1. $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Her $s \in I$ için

$$\delta(s) = \overline{\mu_2}(s)$$

olarak tanımlanan $(\delta, \overline{\mu_{1\delta}}, \overline{\mu_{2\delta}}) : I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisine γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_2}$ –yönündeki göstergesi denir. δ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v_\delta, \overline{\mu_{1\delta}}, \overline{\mu_{2\delta}}\}$ ile gösterilirse

$$\delta'(s) = \alpha_\delta(s)v_\delta(s) \tag{4.27}$$

olacak şekilde $\alpha_\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır.

Teorem 4.2.3.2. $\mathbb{R}^3$ de $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ bir çatılandırılmış eğri ve γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_2}$ – yönündeki göstergesi $(\delta, \overline{\mu_{1\delta}}, \overline{\mu_{2\delta}})$ olsun. γ bir çatılandırılmış slant helis ise ancak ve ancak δ bir çatılandırılmış helistir.

İspat: γ eğrisi, $\mathbb{R}^3$ de bir çatılandırılmış slant helis ve γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_2}$ – yönündeki göstergesi δ olsun.

Tanım 4. 2. 3. 1. den

$$\delta(s) = \overline{\mu_2}(s)$$

olup bu son eşitliğin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\delta'(s) = \overline{\mu_2}'(s)$$

olur.

(3.3) ve (4.27) eşitlikleri son denklemde yazılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_\delta(s)v_\delta(s) &= -q(s)\overline{\mu_1}(s), \\ \alpha_\delta(s)v_\delta(s) &= -p(s)H(s)\overline{\mu_1}(s)\end{aligned}\tag{4.28}$$

elde edilir.

(4.28) denkleminin normu alınır

$$\begin{aligned}|\alpha_\delta(s)| &= |p(s)H(s)|, \\ \alpha_\delta(s) &= \varepsilon p(s)H(s)\end{aligned}\tag{4.29}$$

olur, burada $\varepsilon = 1$ ise $H(s) > 0$, $\varepsilon = -1$ ise $H(s) < 0$ dir.

(4.29) eşitliği (4.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon p(s)H(s)v_\delta(s) &= -p(s)H(s)\overline{\mu_1}(s), \\ v_\delta(s) &= -\varepsilon \overline{\mu_1}(s)\end{aligned}\tag{4.30}$$

elde edilir.

(4.30) eşitliğinin türevi alınır

$$v_\delta'(s) = -\varepsilon \overline{\mu_1}'(s)$$

olacaktır.

Yukarıdaki son denklemde (3.2) eşitliği yazılırsa

$$\begin{aligned}p_\delta(s)\overline{\mu_{1\delta}}(s) &= -\varepsilon (-p(s)v(s) + q(s)\overline{\mu_2}(s)), \\ p_\delta(s)\overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \varepsilon p(s)v(s) - \varepsilon q(s)\overline{\mu_2}(s)\end{aligned}\tag{4.31}$$

olur.

(4.31) eşitliğinin normu alınır

$$\begin{aligned}p_\delta(s) &= \sqrt{p^2(s) + q^2(s)}, \\ p_\delta(s) &= p(s)\sqrt{1 + H^2(s)}\end{aligned}\tag{4.32}$$

elde edilir.

(4.32) eşitliği (4.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}p(s)\sqrt{1 + H^2(s)}\overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \varepsilon p(s)v(s) - \varepsilon q(s)\overline{\mu_2}(s), \\ \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + H^2(s)}} v(s) - \frac{\varepsilon H(s)}{\sqrt{1 + H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s)\end{aligned}\tag{4.33}$$

bulunur.

$$\overline{\mu_{2\delta}}(s) = v_\delta(s)x \overline{\mu_{1\delta}}(s)$$

$$\overline{\mu_{2\delta}}(s) = \begin{vmatrix} v(s) & \overline{\mu_1}(s) & \overline{\mu_2}(s) \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+H^2(s)}} & 0 & -\frac{\varepsilon H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \end{vmatrix}$$

$$\overline{\mu_{2\delta}}(s) = \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s) \quad (4.34)$$

olur.

(4.34) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \overline{\mu_{2\delta}}'(s) &= \left(\frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \right)' v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v'(s) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \right)' \overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}'(s), \\ -q_\delta(s) \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v'(s) \\ &\quad - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}'(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1) ve (3.3) eşitlikleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -q_\delta(s) \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} p(s) \overline{\mu_1}(s) \\ &\quad - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} (-q(s) \overline{\mu_1}(s)), \\ -q_\delta(s) \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + \left(\frac{p(s)H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} - \frac{q(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \right) \overline{\mu_1}(s) \\ &\quad - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s), \\ -q_\delta(s) \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) + 0 \cdot \overline{\mu_1}(s) - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s), \\ -q_\delta(s) \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} v(s) - \frac{H(s)H'(s)}{(1+H^2(s))^{3/2}} \overline{\mu_2}(s) \end{aligned}$$

bulunur.

Son eşitlikte $\frac{H'(s)}{p(s)(1+H^2(s))^{3/2}} = \sigma(s)$ düzenlemesi yapılırsa

$$q_\delta(s)\overline{\mu_{1\delta}}(s) = -p(s)\sigma(s)v(s) + p(s)\sigma(s)H(s)\overline{\mu_2}(s)$$

olur.

Bu son denklemin normu alınır

$$\begin{aligned} q_\delta(s) &= \sqrt{(-p(s)\sigma(s))^2 + (p(s)\sigma(s)H(s))^2}, \\ q_\delta(s) &= p(s)\sigma(s)\sqrt{1+H^2(s)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir.

(4.32) ve (4.35) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{q_\delta(s)}{p_\delta(s)} &= \frac{p(s)\sigma(s)\sqrt{1+H^2(s)}}{p(s)\sqrt{1+H^2(s)}}, \\ \frac{q_\delta(s)}{p_\delta(s)} &= \sigma(s) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\frac{q_\delta(s)}{p_\delta(s)}$ nin sabit olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak γ bir çatılandırılmış slant helis ise γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_2}$ – yönündeki göstergesi olan δ bir çatılandırılmış helistir.

Sonuç 4.2.3.3. $\mathbb{R}^3$ de bir $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ çatılandırılmış eğrisi ve γ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v(s), \overline{\mu_1}(s), \overline{\mu_2}(s)\}$ ile γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_2}$ – yönündeki göstergesi $(\delta, \overline{\mu_{1\delta}}, \overline{\mu_{2\delta}})$ ve δ eğrisinin uyarlanmış çatı elemanları $\{v_\delta(s), \overline{\mu_{1\delta}}(s), \overline{\mu_{2\delta}}(s)\}$ olsun. Bu durumda γ ve δ eğrilerinin uyarlanmış çatı elemanları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

$$\begin{aligned} v_\delta(s) &= -\varepsilon \overline{\mu_1}(s), \\ \overline{\mu_{1\delta}}(s) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) - \frac{\varepsilon H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s), \\ \overline{\mu_{2\delta}}(s) &= \frac{H(s)}{\sqrt{1+H^2(s)}} v(s) + \frac{1}{\sqrt{1+H^2(s)}} \overline{\mu_2}(s). \end{aligned}$$

Burada $\varepsilon = 1$ ise $H(s) > 0$, $\varepsilon = -1$ ise $H(s) < 0$ olup $H(s), \gamma$ çatılandırılmış eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat: (4.30), (4.33) ve (4.34) eşitliklerinden açıktır.

Sonuç 4.2.3.4. $\mathbb{R}^3$ de bir $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ çatılandırılmış eğrisi ve γ eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $p(s), q(s)$ ile γ eğrisinin çatılandırılmış $\overline{\mu_2}$ - yönündeki göstergesi $(\delta, \overline{\mu_{1\delta}}, \overline{\mu_{2\delta}})$ ve δ eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri $p_\delta(s), q_\delta(s)$ olsun. Bu durumda γ ve δ eğrilerinin çatılandırılmış eğrilikleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$p_\delta(s) = p(s)\sqrt{1 + H^2(s)}$$

$$q_\delta(s) = p(s)\sigma(s)\sqrt{1 + H^2(s)}$$

Burada $H(s), \gamma$ çatılandırılmış eğrisinin harmonik eğriliğidir.

İspat: (4.32) ve (4.35) eşitliklerinden açıktır.



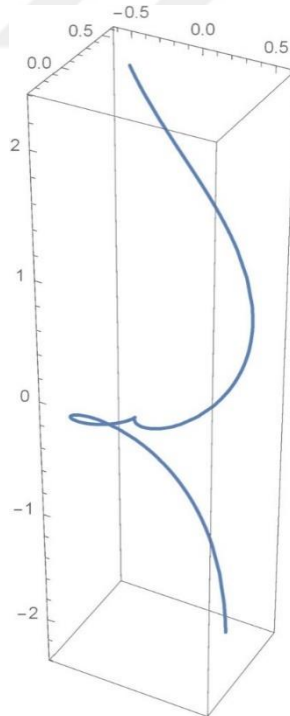
Örnek: $\gamma : (-2\pi, 2\pi) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{6}}{5} \left(\sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{\sin(t)}{5}, -\cos\left(\frac{3t}{5}\right) + \frac{2}{7} \cos\left(\frac{7t}{5}\right) + \frac{\cos(t)}{5}, \frac{2\sqrt{6}t}{5} - \sqrt{6} \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \right) \text{ olarak tanımlanan bir eğri olsun.}$$

γ eğrisinin $t = 0$ noktasında bir singüler noktaya sahip olduğu açıktır, ki böylece γ bir Frenet eğri değildir. Öte yandan, γ eğrisi $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2) : (-2\pi, 2\pi) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ görüntüsü ile bir çatılandırılmış eğridir. $(\gamma, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2)$ olarak verilen bu çatılandırılmış eğrinin uyarlanmış çatı vektörleri ve uyarlanmış eğrilikleri bulunup görüntüleri oluşturulursa

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{\sqrt{6}}{5} \left(\sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{\sin(t)}{5}, -\cos\left(\frac{3t}{5}\right) + \frac{2}{7} \cos\left(\frac{7t}{5}\right) + \frac{\cos(t)}{5}, \frac{2\sqrt{6}t}{5} - \sqrt{6} \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \right), \\ \gamma'(t) &= \frac{\sqrt{6}}{5} \left(\frac{3}{5} \cos\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{1}{5} \cos(t), \frac{3}{5} \sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{5} \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{1}{5} \sin(t), \frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir.



Şekil 4.1. γ Çatılandırılmış Slant Helis

(4.36) eşitliğinin normu alınırsa

$$\begin{aligned}
& \| \gamma'(t) \| = \\
& \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{9}{25} \cos^2\left(\frac{3t}{5}\right) + \frac{4}{25} \cos^2\left(\frac{7t}{5}\right) + \frac{1}{25} \cos^2(t) + \frac{9}{25} \sin^2\left(\frac{3t}{5}\right) + \frac{4}{25} \sin^2\left(\frac{7t}{5}\right) + \frac{1}{25} \sin^2(t)} \\
& + \frac{24}{25} + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{12}{25} \cos\left(\frac{3t}{5}\right) \cos\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{6}{25} \cos\left(\frac{3t}{5}\right) \cos(t) + \frac{4}{25} \cos\left(\frac{7t}{5}\right) \cos(t), \\
& - \frac{12}{25} \sin\left(\frac{3t}{5}\right) \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{6}{25} \sin\left(\frac{3t}{5}\right) \sin(t) + \frac{4}{25} \sin\left(\frac{7t}{5}\right) \sin(t) - \frac{48}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \\
& \| \gamma'(t) \| = \\
& \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25} + \frac{24}{25} + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{12}{25} \left(\cos\left(\frac{3t}{5}\right) \cos\left(\frac{7t}{5}\right) + \sin\left(\frac{3t}{5}\right) \sin\left(\frac{7t}{5}\right) \right)} \\
& - \frac{6}{25} \left(\cos\left(\frac{3t}{5}\right) \cos(t) + \sin\left(\frac{3t}{5}\right) \sin(t) \right) + \frac{4}{25} \left(\cos\left(\frac{7t}{5}\right) \cos(t) + \sin\left(\frac{7t}{5}\right) \sin(t) \right), \\
& - \frac{48}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \\
& \| \gamma'(t) \| = \\
& \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{38}{25} + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{12}{25} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{6}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) + \frac{4}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{48}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{38}{25} + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{12}{25} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{2t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{38}{25} + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{12}{25} \left(2 \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - 1 \right) - 2 \cos\left(\frac{2t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{38}{25} + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) - \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{2t}{5}\right) + \frac{12}{25} - 2 \cos\left(\frac{2t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{38}{25} + \frac{12}{25} - 2 \cos\left(\frac{2t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{2t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{t}{5}\right) \right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{\sqrt{6}}{5} 2 \sin\left(\frac{t}{5}\right), \\
& \| \gamma'(t) \| = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\gamma'(t) = \alpha(t)v(t)$ eşitliğinin normu alınırsa

$$\| \gamma'(t) \| = \alpha(t)$$

olur.

(4.37) eşitliği son denklemde kullanılırsa

$$\alpha(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

(4.38)

eşitliği elde edilir.

$\gamma'(t) = \alpha(t)v(t)$ eşitliğinde (4.36) ve (4.38) eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{\sqrt{6}}{5} \left(\frac{3}{5} \cos\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{1}{5} \cos(t), \frac{3}{5} \sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{5} \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{1}{5} \sin(t), \frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{1}{10} \left(3 \cos\left(\frac{3t}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{7t}{5}\right) - \cos(t), 3 \sin\left(\frac{3t}{5}\right) - 2 \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \sin(t), 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{1}{10} \left(2 \cos\left(\frac{3t}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{7t}{5}\right) + \cos\left(\frac{3t}{5}\right) - \cos(t), 2 \sin\left(\frac{3t}{5}\right) - 2 \sin\left(\frac{7t}{5}\right) + \sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \sin(t), 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{1}{10} \left(-4 \sin(t) \sin\left(\frac{-2t}{5}\right) + (-2) \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\left(\frac{-t}{5}\right), 4 \sin\left(\frac{-2t}{5}\right) \cos(t) + 2 \sin\left(\frac{-t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \left(1 - \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{1}{10} \left(4 \sin(t) \sin\left(\frac{2t}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\left(\frac{t}{5}\right), -4 \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \cos(t) - 2 \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \left(1 - \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{t}{5}\right) \right) \right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{1}{10} \left(4 \sin(t) \sin\left(\frac{2t}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\left(\frac{t}{5}\right), -4 \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \cos(t) - 2 \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \left(2 \sin^2\left(\frac{t}{5}\right) \right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) = \frac{1}{5} \left(2 \sin(t) \sin\left(\frac{2t}{5}\right) + \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\left(\frac{t}{5}\right), -2 \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \cos(t) - \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right) \right),$$

$$\sin\left(\frac{t}{5}\right) v(t) =$$

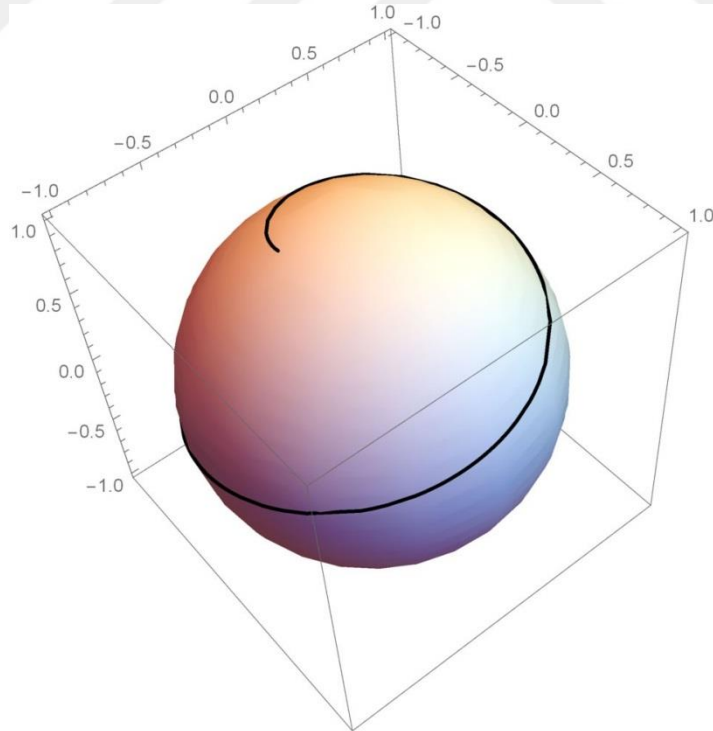
$$\frac{1}{5} \left(4 \sin(t) \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\left(\frac{t}{5}\right) + \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\left(\frac{t}{5}\right), -4 \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\left(\frac{t}{5}\right) \cos(t) - \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right) \right),$$

$$v(t) = \frac{1}{5} \left(4 \sin(t) \cos\left(\frac{t}{5}\right) + \sin\left(\frac{4t}{5}\right), -4 \cos\left(\frac{t}{5}\right) \cos(t) - \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \right),$$

$$v(t) = \frac{1}{5} \left(2 \left(\sin\left(\frac{6t}{5}\right) + \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \right) + \sin\left(\frac{4t}{5}\right), -2 \left(\cos\left(\frac{6t}{5}\right) + \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \right) - \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \right),$$

$$v(t) = \frac{1}{5} \left(2 \sin\left(\frac{6t}{5}\right) + 3 \sin\left(\frac{4t}{5}\right), -2 \cos\left(\frac{6t}{5}\right) - 3 \cos\left(\frac{4t}{5}\right), 2\sqrt{6} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \right) \quad (4.39)$$

elde edilir.



Şekil 4.2. γ eğrisinin v –göstergesi

(4.39) eşitliğinin türevi alınırsa

$$v'(t) = \frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) + \frac{12}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{12}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) + \frac{12}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right) \quad (4.40)$$

elde edilir.

(4.40) eşitliğinin normu alınırsa

$$\|v'(t)\| = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{144}{25} \cos^2\left(\frac{6t}{5}\right) + \frac{144}{25} \cos^2\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{288}{25} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{144}{25} \sin^2\left(\frac{6t}{5}\right) + \frac{144}{25} \sin^2\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{288}{25} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$\|v'(t)\| = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{144}{25} + \frac{288}{25} \left(\cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \right) + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$\|v'(t)\| = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{288}{25} + \frac{288}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$\|v'(t)\| = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{288}{25} \left(1 + \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right) + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$\|v'(t)\| = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{288}{25} \left(1 + 2\cos^2\left(\frac{t}{5}\right) - 1 \right) + \frac{24}{25} \cos^2\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$\|v'(t)\| = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{600}{25} \cos^2\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$\|v'(t)\| = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right)$$

elde edilir.

(3.1) ifadesine göre

$$v'(t) = p(t) \overline{\mu_1}(t)$$

eşitliği bilindiğinden bu son eşitliğin normu alınırsa;

$$\|v'(t)\| = p(t)$$

olur. Buna göre

$$p(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \quad (4.41)$$

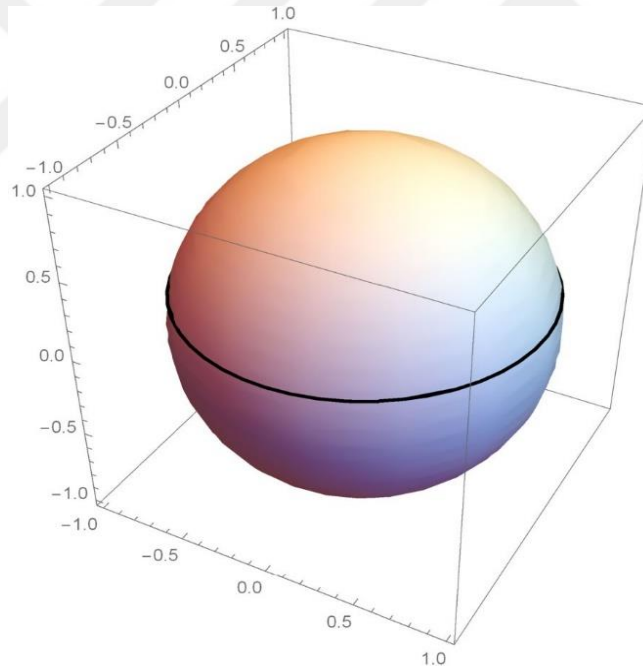
olur.

$$v'(t) = p(t) \overline{\mu_1}(t)$$

eşitliğinde (4.40) ve (4.41) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \overline{\mu}_1(t) &= \frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) + \frac{12}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{12}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{12}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right), \\
\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \overline{\mu}_1(t) &= \frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} \left(\cos\left(\frac{6t}{5}\right) + \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \right), \frac{12}{5} \left(\sin\left(\frac{6t}{5}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right), \\
\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \overline{\mu}_1(t) &= \frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} 2 \cos(t) \cos\left(\frac{t}{5}\right), \frac{12}{5} 2 \sin(t) \cos\left(\frac{t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right), \\
\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \overline{\mu}_1(t) &= \frac{1}{5} \left(\frac{24}{5} \cos(t) \cos\left(\frac{t}{5}\right), \frac{24}{5} \sin(t) \cos\left(\frac{t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right), \\
\overline{\mu}_1(t) &= \frac{1}{5} (2\sqrt{6} \cos(t), 2\sqrt{6} \sin(t), 1)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir.



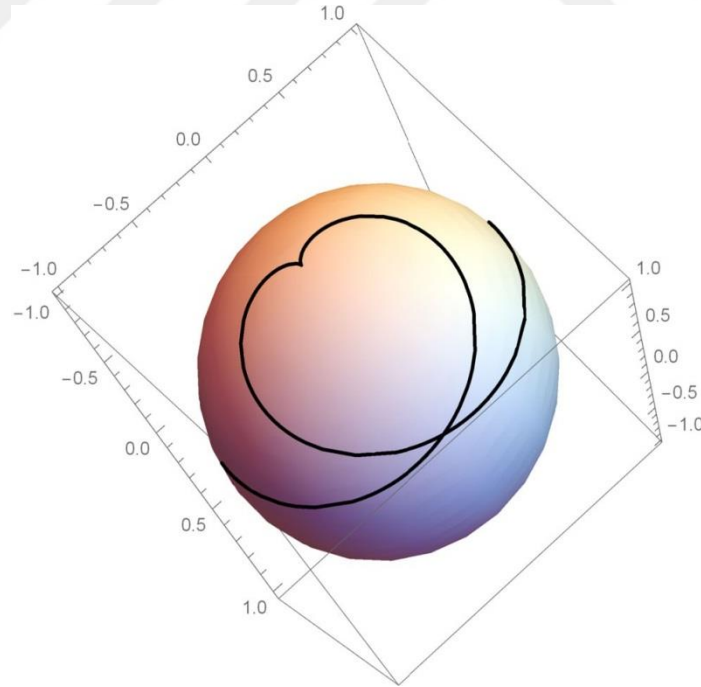
Şekil 4.3. γ eğrisinin $\overline{\mu}_1$ -göstergesi

$$\overline{\mu}_2(t) = v(t) \times \overline{\mu}_1(t),$$

$$\overline{\mu}_2(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{3}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) & -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) & \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \\ \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos(t) & \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin(t) & \frac{1}{5} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_2(t) &= \left(-\frac{3}{25} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{25} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{24}{25} \sin(t) \sin\left(\frac{t}{5}\right), \frac{24}{25} \cos(t) \sin\left(\frac{t}{5}\right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{25} \sin\left(\frac{6t}{5}\right), \frac{6\sqrt{6}}{25} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin(t) + \frac{4\sqrt{6}}{25} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin(t) + \right. \\
&\quad \left. \frac{6\sqrt{6}}{25} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \cos(t) + \frac{4\sqrt{6}}{25} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos(t) \right), \\
\overline{\mu}_2(t) &= \left(-\frac{3}{25} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{25} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{24}{25} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{6t}{5}\right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cos\left(\frac{4t}{5}\right)\right), \frac{24}{25} \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{6t}{5}\right) + \sin\left(\frac{-4t}{5}\right)\right) - \frac{3}{25} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{25} \sin\left(\frac{6t}{5}\right), \frac{6\sqrt{6}}{25} \left(\sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin(t) + \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \cos(t)\right) + \frac{4\sqrt{6}}{25} \left(\sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin(t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos(t)\right) \right), \\
\overline{\mu}_2(t) &= \left(-\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right), -\frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right), \\
\overline{\mu}_2(t) &= \frac{1}{5} \left(-3 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{6t}{5}\right), -3 \sin\left(\frac{4t}{5}\right) + 2 \sin\left(\frac{6t}{5}\right), 2\sqrt{6} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right) \quad (4.43)
\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 4.4. γ eğrisinin $\overline{\mu}_2$ –göstergesi

(4.43) eşitliğinin türevi alınır

$$\overline{\mu}_2'(t) = \frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{12}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right), -\frac{12}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{12}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right), -\frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \right)$$

olur.

(3.3) ifadesine göre;

$$\overline{\mu}_2'(t) = -q(t)\overline{\mu}_1(t)$$

eşitliği bilindiğinden bu ifadenin normu alınır

$$\|\overline{\mu}_2'(t)\| = |q(t)|$$

olur.

$$\begin{aligned} \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{144}{25} \sin^2\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{144}{25} \sin^2\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{288}{25} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{144}{25} \cos^2\left(\frac{6t}{5}\right) \\ &\quad + \frac{144}{25} \cos^2\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{288}{25} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{24}{25} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\ \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{144}{25} - \frac{288}{25} \left(\sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\left(\frac{4t}{5}\right) + \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \right) + \frac{24}{25} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\ \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{288}{25} - \frac{288}{25} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) + \frac{24}{25} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\ \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{288}{25} \left(1 - \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right) + \frac{24}{25} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\ \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{288}{25} \left(1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{5}\right) \right) \right) + \frac{24}{25} \sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\ \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{1}{5} \sqrt{24\sin^2\left(\frac{t}{5}\right)}, \\ \|\overline{\mu}_2'(t)\| &= \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right), \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$q(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \tag{4.44}$$

elde edilir. Ayrıca

$$H(t) = \frac{q(t)}{p(t)}$$

eşitliğinde (4.41) ve (4.44) ifadeleri kullanılırsa

$$H(t) = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right)}{\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right)},$$

$$H(t) = \tan\left(\frac{t}{5}\right) \quad (4.45)$$

bulunur.

(4.45) eşitliğinin türevi alınır

$$H'(t) = \frac{1}{5} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right) \right) \quad (4.46)$$

olur.

$$\sigma(t) = \frac{H'(t)}{p(t)(1+H^2(t))^{3/2}}$$

ifadesinde (4.41), (4.45) ve (4.46) değerleri yerine yazılırsa

$$\sigma(t) = \frac{\frac{1}{5} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right) \right)}{\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right) \right)^{3/2}},$$

$$\sigma(t) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right) \right)^{1/2}},$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 4. 1. 3. yardımıyla $\sigma(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ ifadesi sabit olduğundan $(\gamma, \overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ çatılandırılmış eğrisinin bir çatılandırılmış slant helis olduğu sonucuna varılır.

KAYNAKÇA

- Akyiğit, M., & Yıldız, Ö. G.** (2021). Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 4 (4) 258-263.
- Carmo, M.** (1976). Differential Geometry of Curves and Surfaces, *Instituto de Matematica Pura e Aplicada*, Rio de Janeiro, Brazil.
- Hacısalihoğlu, H. H.** (1998). Diferansiyel Geometri 1. Cilt, *Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi*.
- Honda, S., & M. Takahashi, M.** (2016). Framed curves in the Euclidean space, *Advances in Geometry* 16, 265-276.
- Izumiya, S., & Takeuchi, N.** (2004). New Special Curves and Developable Surfaces, *Turk J Math* 28, 153-163.
- Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y., & İlarslan, K.** (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, *Turk J Math* 34, 261-273.
- Kula, L., & Yaylı, L.** (2005). On slant helix its spherical indicatrix, *Applied Mathematics and Computation* 169, 600-607.
- Lugo, G.** (1992). Differential Geometry in Physics, *University of North Carolina Wilmington*.
- Okuyucu, O. Z., Gök, İ., Yaylı, Y., & Ekmekci, N.** (2013). Slant helices in three dimensional Lie groups, *Applied Mathematics and Computation* 221, 672-683.
- O'Neill, B.** (2006). Elementary Differential Geometry Revised Second Edition, *Department of Mathematics University of California, Los Angeles*.
- Sabuncuoğlu, A.** (2014). Diferansiyel Geometri 5. Basım, *Nobel Yayınları*.
- Shifrin, T.** (2015). Differential Geometry Preliminary Version, *Universty of Georgia, Fall*.
- Struik, D. J.** (1998). Lectures on Classical Differential Geometry Second Edition, *Massachusetts Institute of Technology*, New York.
- Wang, Y., Pei, D., & Gao, R.** (2019). Generic Properties of Framed Rectifying Curves, *Mathematics* 7(1), 37.
- Yazıcı, B. D., Karakus, S. Ö., & Tosun, M.** (2021) Universal Journal of Mathematics and Applications, 4 (4) 125-131.
- Yüce, S.** (2020). Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri 5. Baskı, *Pegem Akademi*.