

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÜÇGENSEL NORMlardan ELDE EDİLEN KONGRÜANSLAR YARDIMIYLA ÜÇGENSEL
NORMLARIN PARÇALANIŞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Samet ARPACI

**OCAK 2024
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÜÇGENSEL NORMLARDAN ELDE EDİLEN KONGRÜANSLAR YARDIMIYLA ÜÇGENSEL
NORMLARIN PARÇALANIŞI**

Samet ARPACI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 / 01 / 2024

Tezin Savunma Tarihi : 26 / 01 / 2024

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana örnek olan ve çalışma süresince her anlamda yol göstererek olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan beraber çalışmaktan ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Funda Karaçal'a, yürüdüğüm bu yolda her zaman bana yol gösterip yönlendiren, hiçbir yardımı esirgemeyen kıymetli abim, hocam sayın Doç. Dr. Ümit Ertuğrul'a, Araştırma Görevlisi olarak görev yaptığım Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Matematik Bölümünde birlikte çalışmaktan gurur ve onur duyduğum, fikirleriyle bu akademik yola ışık olarak her daim bana güvenip destek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Fatih YILMAZ'a ayrıca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümündeki diğer tüm hocalarıma da yüksek lisans öğrenimim sürecinde gösterdikleri ilgi ve verdikleri bilgilerden dolayı teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, yüksek lisans eğitimim boyunca maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Samet ARPACI
Trabzon, 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tez çalışması olarak sunduğum “Üçgensel Normlardan Elde Edilen Kongrüanslar Yardımıyla Üçgensel Normların Parçalanışı” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda Karaçal’ın sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 26/01/2024

Samet ARPACI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Genel Bilgiler	1
1.1. Kısmen Sıralı Kümeler	2
1.2. Kafesler.....	4
1.3. Denklik Bağınıtları	6
1.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Kongrüanslar	7
1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar.....	9
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	13
2.1. T -Uyumlu Kongrüanslar, Homomorfizmler ve Basit Üçgensel Normlar	13
2.2. Üçgensel Normların Direkt Parçalanabiliriliği	20
3. İRDELEME	42
3. SONUÇLAR.....	43
4. ÖNERİLER	44
5. KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

ÜÇGENSEL NORMLARDAN ELDE EDİLEN KONGRÜANSLAR YARDIMIYLA
ÜÇGENSEL NORMLARIN PARÇALANIŞI

Samet ARPACI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2024, 45 Sayfa

Bu çalışmada, sınırlı bir kafes üzerinde T -dağılmalı eleman, faktör kongrüansı, basit üçgensel norm ve parçalanamaz t -norm kavramlarını T -uyumlu kongrüans yardımıyla tanıtılmış ve ilgili özellikleri incelenmiştir. Bir Boole cebirindeki en küçük t -normun basit olduğunu gözlemlenmiştir. T -dağılmalı eleman vasıtasıyla bir kongrüans elde edilmiş ve bu tip kongrüansın bazı özellikleri araştırılmıştır. Herhangi bir T t -normunun direkt parçalanabilirliği ile supremumu T - V -parçalanabilir olan T -dağılmalı elemanlar arasında bir ilişki elde edilmiştir. Ayrıca, sınırlı bir kafes üzerindeki herhangi bir t -normun, ancak ve ancak onun altında kalan sınırlı kafesin direkt parçalanamaz olması durumunda direkt parçalanamaz olduğunu gösterilmiştir. Sonlu sınırlı bir kafes üzerindeki herhangi bir T t -normunun direkt parçalanamaz t -normların direkt çarpımına izomorf olduğunu gösterilmiştir. Son olarak, bazı açıklayıcı örnekler eklenerek elde edilen sonuçlar desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı kafes, Üçgensel norm, Kongrüans, Faktör kongrüansı.

Master Thesis

SUMMARY

TRIANGULAR NORM DECOMPOSITION THROUGH METHODS USING
CONGRUENCE RELATIONS

Samet ARPACI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2024, 45 Pages

In this paper, we introduce the concepts of T -distributive element, factor congruence, simple triangular norm and indecomposable t-norm on a bounded lattice through T -compatible congruence and study their related properties. We observe that the smallest t-norm on Boolean algebra is simple. We obtain a congruence by means of T -distributive element and investigate some properties of this type of congruence. A relation between the direct decomposability of any t-norm T and T -distributive elements whose supremum is T - $\vee$ -decomposable is obtained. Further, we show that any t-norm on a bounded lattice is directly indecomposable if and only if its underlying bounded lattice is directly indecomposable. We show that any t-norm T on a finite bounded lattice is isomorphic to a direct product of directly indecomposable t-norms. Finally, some illustrative examples are added.

Key Words: Bounded lattices, Triangular norm, Congruence, Factor congruence.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. L 'nin kafes diyagramı.....	23
Şekil 2. L 'nin kafes diyagramı	28
Şekil 3. L 'nin kafes diyagramı.....	29
Şekil 4. L/θ_p 'nin kafes diyagramı.....	30
Şekil 5. L 'nin kafes diyagramı.....	33
Şekil 6. L/θ_p 'nin kafes diyagramı.....	35
Şekil 7. L/θ_l 'nin kafes diyagramı.....	37
Şekil 8. L 'nin kafes diyagram	39
Şekil 9. L 'nin kafes diyagramı.....	39

TABLÖLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. L üzerindeki T t-normu	28
Tablo 2. L üzerindeki T t-normu	29
Tablo 3. L üzerindeki T t-norm.....	34
Tablo 4. L/Θ_p üzerindeki T_{Θ_p} t-normu	36
Tablo 5. $T_W \times T_W$ 'ya izomorf olan L üzerindeki $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılımlı T_2 t-normu.....	40
Tablo 6. $T_W \times T_\Lambda$ 'ya izomorf olan L üzerindeki $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılımlı T_3 t-normu.....	41
Tablo 7. $T_\Lambda \times T_W$ 'ya izomorf olan L üzerindeki $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılımlı T_4 t-normu	41

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\subseteq$	: Küme kapsama bağıntısı
$\cap$	: Kesişim
$(L, \leq)$	: Üzerindeki sıralama bağıntısı $\leq$ olan sıralı küme
$\cong$	: İzomorfi
$ L $	: L kümesinin eleman sayısı
$\wedge$	: İnfimum
$\vee$	: Supremum
$a \wedge b$	: a ve b elemanlarının infimumu
$a \vee b$	: a ve b elemanlarının supremumu
$a b$	: a ve b elemanları kıyaslanamaz
x'	: x elemanının komplementi
$[a]_{\Theta}$	: a elemanının Θ denklik bağıntısına göre denklik sınıfı
Δ_L	: L üzerindeki en küçük kongrüans
∇_L	: L üzerindeki en büyük kongrüans
$T_1 \times \dots \times T_n$	: $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ kümesinin kartezyen çarpımı
$\prod_{i \in L} T_i$	: $\{T_i \mid i \in L\}$ ailesinin kartezyen çarpımı
$Comp(L)$	: L kafesinin komplementlenebilir elemanlarının kümesi
$ConL$	: L kafesi üzerindeki tüm kongrüansların kümesi
$Con_T L$	: L kafesi üzerindeki tüm t-uyumlu kongrüansların kümesi

1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgiler

Birim aralık üzerindeki üçgensel normlar sistematik olarak Schweizer ve Sklar tarafından 1983'te olasılıksal metrik uzaylar çerçevesinde incelenmiştir (Schweizer ve Sklar, 1983). Bunlar, örneğin eklemeli olmayan ölçü ve integral teorisinin yanı sıra bulanık mantık ve uygulamaları (Höhle and Klement, 1995; Klement, Mesiar and Pap, 2000b; Liang and Pedrycz, 2009) gibi matematiğin birçok özel alanında vazgeçilmez bir rol oynarlar. (Alsina, Frank and Schweizer, 2006; Klement, Mesiar and Pap, 2000a).

Son yıllarda sınırlı kafesler üzerinde t-normlar araştırmacılar için oldukça ilgi çekici bir araştırma konusu olmuş ve birçok farklı açıdan araştırılmıştır (Ertuğtul, Karaçal and Mesiar, 2015; Karaçal and Khadjiev, 2005; Saminger, 2006). Sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normları incelemek, yalnızca üçgensel normların daha derin bir teorik analizine hizmet etmekle kalmaz, aynı zamanda birçok uygulama alanına ve üçgensel normlarla yakından ilişkili diğer birçok bulanık bağlaçların (uninormlar, nullnormlar, vb.) daha iyi anlaşılmasına da katkıda bulunur. Tüm bunları göz önünde bulundurarak, üçgensel normların cebirsel çalışması, sınırlı kafesler üzerindeki üçgensel norm yapısının daha iyi anlaşılmasında önemli bir role sahiptir.

Bu katkının temel amacı, t-kongruansları kullanarak üçgensel normların yapısını anlamaktır. Çarpım kafesi üzerinde t-normların direkt çarpımı kavramı De Baets ve Mesiar tarafından 1999'da tanıtıldı (Baets ve Mesiar, 1999). Onlar t-normların direkt çarpımı olan bir çarpım kafesi üzerinde V-dağılımalı t-normları karakterize ettiler. (Jenei ve Baets, 2003)'de, Jenei ve De Baets, direkt çarpım olmayan çarpım kafesleri üzerinde t-normları oluşturmak için bir yöntem sunmuştur. (Karaçal ve Khadjiev, 2005)'de, Karaçal ve Khadjiev, bir L tam kafesi üzerinde sonsuz V-dağılımalı t-normun direkt parçalanabilirliği ile L 'nin nötr elemanı 1 'in direkt parçalanabilirliği arasında bir ilişki verdiler. (Chajda, Halaš ve Mesiar, 2020)'de, sıralı kümelerin direkt çarpımları üzerinde birleşme fonksiyonlarının parçalanabilirliği hakkında daha derin bir çalışma sunuldu.

Bu çalışmanın katkısı şu şekilde özetlenebilir. T -uyumlu kongruans kavramıyla başlanmış ve onun homomorfizmalarla ilişkisi sunulmuştur. Sınırlı kafesler üzerinde direkt parçalanabilir t -normlar, supremumları T - V -parçalanabilir olan komplementlenebilir T -dağılmalı elemanlara sahip olup olmadıklarına göre karakterize edilmiştir. Ayrıca, sonlu sınırlı bir kafes üzerindeki herhangi bir t -normun, direkt parçalanamaz t -normların direkt çarpımına izomorf olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. Bölüm 1'de, çalışma için bazı önemli kavramlar ele alınmıştır. Bölüm 2'de t -normlar ve ilgili bazı homomorfizma teoremleri için kongrüans tanımı verilmiştir. Ayrıca, T_W 'nin Boole cebiri üzerinde basit olduğunu gösterilmiştir. İlâveten, T -dağılmalı elemanlar vasıtasıyla bir kongrüans tanıtılmış ve bu kongrüansın bazı özellikleri incelenmiştir. Bir parçalanmanın varlığı kanıtlanmış ve bu parçalanma, kongrüans ve supremumu T - V -parçalanabilir olan komplementlenebilir elemanlar kullanılarak belirlenmiştir. Sonlu sınırlı bir kafes üzerindeki herhangi bir üçgensel normun, direkt parçalanamaz t -normların direkt çarpımına izomorf olduğunu kanıtlanmıştır. Herhangi bir V - ve $\wedge$ -dağılmalı t -normun V - ve $\wedge$ -dağılmalı t -normların direkt çarpımına izomorf olması için gerekli ve yeterli koşulları elde edilmiştir.

1.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1.1: A bir küme ve $\leq$, A üzerinde bir bağıntı olsun. Bu durumda, A yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına A üzerinde bir sıralama bağıntısı (veya kısmen sıralama bağıntısı) denir. Bu özellikler sırasıyla aşağıdaki gibi verilir: Her $\mu, \nu, \sigma \in A$ için

$$\mathbf{P1.} (\mu, \mu) \in \leq \quad \text{(Yansıma)}$$

$$\mathbf{P2.} (\mu, \nu) \in \leq \text{ ve } (\nu, \mu) \in \leq \text{ ise } \mu = \nu \quad \text{(Ters simetri)}$$

$$\mathbf{P3.} (\mu, \nu) \in \leq \text{ ve } (\nu, \sigma) \in \leq \text{ ise } (\mu, \sigma) \in \leq \quad \text{(Geçişme)}$$

Eğer $(\mu, \nu) \in \leq$ ise o zaman bu durum $\mu \leq \nu$ şeklinde gösterilir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan A kümesine kısmen sıralı küme (veya sıralı küme) denir ve bu durum $(A, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $\mu, \nu \in A$ için $\mu \leq \nu$ ise bu durum ' μ, ν 'yı içerir' şeklinde okunur. Eğer $\mu \leq \nu$ ve $\mu \neq \nu$ ise o zaman $\mu < \nu$ yazılır ve ' μ, ν 'da öz olarak içerilir' şeklinde okunur. İlaveten, ' $\mu \leq \nu$ yanlış' ise $\mu \not\leq \nu$ yazılır. $\mu \not\leq \nu$ ve $\mu \not\geq \nu$ ise ' μ ve ν elemanları kıyaslanamaz' denir ve $\mu || \nu$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.1.2: $(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Bu taktirde, her $\mu, \nu \in A$ için $\mu \leq \nu$ veya $\nu \leq \mu$ ise $(A, \leq)$ kısmen sıralı kümesine tam sıralı küme (zincir) denir.

Önerme 1.1.3 (Birkhoff, 1967): $(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq A$ olsun. Bu taktirde, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Dahası, eğer A bir zincir ise, S de bir zincirdir.

Örnek 1.1.4: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{Z}$ tam sayılar, $\mathbb{N}$ doğal sayılar ve $\mathbb{N}_0$ pozitif doğal sayılar kümeleri doğal sıralamaya göre birer zincirdirler.

Tanım 1.1.5: $(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Bu taktirde,

- (i) Her $x \in A$ için $x \leq a$ şartını sağlayan $a \in A$ elemanına sıralı kümenin en büyük elemanı denir ve $EbeA$ ile gösterilir.
- (ii) Her $x \in A$ için $b \leq x$ şartını sağlayan $b \in A$ elemanına sıralı kümenin en küçük elemanı denir ve $EkeA$ ile gösterilir.
- (iii) Her $x \in A$ için $a \leq x$ iken $a = x$ oluyorsa, o zaman $a \in A$ elemanına maksimal eleman denir ve maksimal elemanların kümesi $MaksA$ ile gösterilir.
- (iv) Her $x \in A$ için $x \leq b$ iken $b = x$ oluyorsa, o zaman $b \in A$ elemanına minimal eleman denir ve minimal elemanların kümesi $MinA$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6: $(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $T \subseteq A$ olsun. Bu taktirde,

- (i) Bir $\mu \in A$ elemanına T kümesinin bir üst sınırı denir ancak ve ancak $\forall x \in T$ için $x \leq \mu$ şartını sağlar. T kümesinin üst sınırlarının kümesi $\bar{T}$ ile gösterilir. Yani,

$$\bar{T} = \{\mu \in A \mid \forall x \in T \text{ için } x \leq \mu\}$$

dır.

- (ii) Bir $\nu \in A$ elemanına T kümesinin bir alt sınırı denir ancak ve ancak $\forall x \in T$ için $\nu \leq x$ şartını sağlar. T kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{T}$ ile gösterilir. Yani,

$$\underline{T} = \{\nu \in A \mid \forall x \in T \text{ için } \nu \leq x\}$$

dır.

Tanım 1.1.7: $(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $T \subseteq A$ olsun. Bu taktirde $Eke\bar{T}$ elemanına (varsa) T kümesinin supremumu denir ve $supT$ şeklinde gösterilir. Dual olarak, $Ebe\underline{T}$ elemanına (varsa) T kümesinin infimumu denir ve $infT$ şeklinde gösterilir.

1.2. Kafesler

Bu bölümde, bu çalışmada kullanılan bazı temel kavramlar hatırlatılarak dikkate alınan notasyonlar açıklanmıştır.

Bir sınırlı kafes hem $(L, \wedge, \vee)$ şeklinde bir cebirsel yapı olarak hemde $(L, \leq)$ şeklinde bir sıralı küme olarak tanımlanabilir. Bir kafesin bu iki tanımını birbirine denk olduğundan amaçlara göre $(L, \wedge, \vee)$ veya $(L, \leq)$ notasyonlarından herhangi biri serbestçe kullanılacaktır.

Tanım 1.2.1 (Burris ve Sankapanavar, 1981): L üzerinde $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemleri tanımlı olan boştan farklı bir küme olsun. Bu taktirde, eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa, L 'ye bir kafes denir.

L1. (a) $\mu \vee \nu = \nu \vee \mu$ (Değişme kuralları)
 (b) $\mu \wedge \nu = \nu \wedge \mu$

L2. (a) $\mu \vee (\nu \vee \rho) = (\mu \vee \nu) \vee \rho$ (Birleşme kuralları)
 (b) $\mu \wedge (\nu \wedge \rho) = (\mu \wedge \nu) \wedge \rho$

L3. (a) $\mu \vee \mu = \mu$ (İdempotent kuralları)
 (b) $\mu \wedge \mu = \mu$

L4. (a) $\mu = \mu \vee (\mu \wedge \nu)$ (Soğurma kuralları)
 (b) $\mu = \mu \wedge (\mu \vee \nu)$

Tanım 1.2.2. (Birkhoff, 1967): $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. P kısmen sıralı kümesinin keyfi iki elemanının supremumu ve infimumu mevcut ise, P kısmen sıralı kümesine bir kafes denir.

Tanım 1.2.3. (Birkhoff, 1967): $(L, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. L 'nin her X alt kümesi için $\sup X$ ve $\inf X$ mevcut ise, L kısmen sıralı kümesine tam kafes denir

Tanım 1.2.4. (Birkhoff, 1967): Bir L kafesi en büyük eleman 1 ve en küçük eleman 0'a sahip ise, bu taktirde L kafesine sınırlı kafes denir.

Uyarı 1.2.5. Tanım 1.2.3 ve Tanım 1.2.4'ten açıkça görülür ki, her tam kafes bir sınırlı kafestir.

Tanım 1.2.6. Aşağıdaki şartları sağlayan bir L kafesine bir dağılmalı kafes denir. Her $\mu, \nu, \rho \in L$ için,

$$(i) \quad \mu \wedge (\nu \vee \rho) = (\mu \wedge \nu) \vee (\mu \wedge \rho)$$

$$(ii) \quad \mu \vee (\nu \wedge \rho) = (\mu \vee \nu) \wedge (\mu \vee \rho).$$

Tanım 1.2.7. L bir kafes ve her $\mu, \nu, \rho \in L$ için eğer $\mu \leq \nu$ iken $\mu \vee (\nu \wedge \rho) = \nu \wedge (\mu \vee \rho)$ eşitliği sağlanıyorsa, bu taktirde L 'ye modüler kafes denir.

Uyarı 1.2.8. Tanım 1.2.6 ve Tanım 1.2.7 dikkate alındığında dağılmalı kafeslerin modüler olduğu kolaylıkla görülür.

Tanım 1.2.4. (Birkhoff, 1967): 0 ve 1 elemanlarına sahip bir L kafesinin bir μ elemanının komplementi $\mu \wedge \nu = 0$ ve $\mu \vee \nu = 1$ olacak şekilde bir $\nu \in L$ dir.

$Comp(L)$ ile L kafesinin komplementlenebilir elemanlarının kümesi gösterilecektir.

Tanım 1.2.5. (Birkhoff, 1967): Eğer L sınırlı bir kafes ve L 'nin tüm elemanları komplemente sahip ise, bu taktirde L kafesine komplementlenebilir kafes denir.

Tanım 1.2.6. (Birkhoff, 1967): Eğer $0 < \mu$ ve $0 < \nu < \mu$ olacak şekilde bir ν elemanı yoksa, bu taktirde $\mu \in L$ ye atom denir.

Dual olarak coatom tanımlanır. Eğer $\mu, \nu \in L$ kıyaslanamaz ise, bu durumda $\mu || \nu$ notasyonu kullanılacaktır.

1.3. Denklik Bağlılıkları

Tanım 1.3.1: A bir küme ve R , A üzerinde bir bağıntı olsun. Bu durumda, R yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa R bağıntısına A üzerinde bir denklik bağıntısı denir. Bu özellikler sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

D1. $\forall \mu \in A$ için $(\mu, \mu) \in R$ dir. (Yansıma)

D2. $\forall \mu, \nu \in A$ için $(\mu, \nu) \in R$ ise $(\nu, \mu) \in R$ dir. (Simetri)

D3. $\forall \mu, \nu, \sigma \in A$ için $(\mu, \nu) \in R$ ve $(\nu, \sigma) \in R$ ise $(\mu, \sigma) \in R$ dir. (Geçişme)

Burada, μ ve ν elemanlarını bir R ikili bağıntısı altında ilişkili elemanlar olduğunu göstermek için $\mu, \nu \in L$ olmak üzere $(\mu, \nu) \in R$ gösterimi kullanılacaktır.

Teorem 1.3.2: L üzerinde herhangi bir R denklik bağıntısı, alt kümeleri R 'nin denklik sınıfları olan L 'nin bir parçalanışını oluşturur.

L/R , R nin tüm denklik sınıflarının kümesini göstermektedir ve bölüm kümesi olarak adlandırılır. Eğer $R \subseteq L \times L$, L üzerinde bir denklik bağıntısı ise, bu durumda bir $\mu \in L$ 'nin denklik sınıfı $[\mu]_R = \{v \in L \mid (\mu, v) \in R\}$ ile tanımlanır.

1.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Kongrüanslar

Bu bölümde, sınırlı kafesler üzerinde kongrüans kavramını hatırlatılarak bazı temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 1.4.1. (Burris ve Sankapanavar, 1981): L bir sınırlı kafes ve Θ , L üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer her $\mu, v, \rho, \sigma \in L$ ve $(\mu, v), (\rho, \sigma) \in \Theta$ için $(\mu \wedge \rho, v \wedge \sigma), (\mu \vee \rho, v \vee \sigma) \in \Theta$ ise, o zaman Θ 'ya $\wedge$ ve $\vee$ ile uyumlu denir. Bu durumda Θ , L üzerinde bir kongrüans olarak adlandırılır ve $(\mu, v) \in \Theta$ ise, $\mu \equiv v \pmod{(\Theta)}$ olarak yazılır.

L 'nin tüm kongrüanslarının kümesi $ConL$, keyfi kesişimler altında kapalıdır. Ayrıca, $ConL$ 'nin en büyük elemanı $\nabla_L = L^2$ ve en küçük elemanı ise diyagonal bağıntı $\Delta_L = \{(\mu, \mu) \mid \mu \in L\}$ dır.

Teorem 1.4.2. (Burris ve Sankapanavar, 1981): Kısmi sırası " $\subseteq$ " bağıntısı olan $ConL$ kısmi sıralı kümesi bir tam kafestir.

$(L, \leq)$ üzerinde bir Θ denklik bağıntısı için, $L/\Theta = \{[\mu]_\Theta \mid \mu \in L\}$ üzerinde $\vee_\Theta$ ve $\wedge_\Theta$ işlemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$[\mu]_\Theta \vee_\Theta [\nu]_\Theta = [\mu \vee \nu]_\Theta,$$

$$[\mu]_\Theta \wedge_\Theta [\nu]_\Theta = [\mu \wedge \nu]_\Theta.$$

İyi bilinir ki, L/Θ üzerinde $\vee_\Theta$ ve $\wedge_\Theta$ işlemleri iyi tanımlıdır ancak ve ancak Θ , L üzerinde bir kongrüanstır.

Tanım 1.4.3. (Burris ve Sankapanavar, 1981): L bir sınırlı kafes ve Θ , L üzerinde bir kongrüans olsun. Bu durumda $(L/\Theta, \vee_\Theta, \wedge_\Theta)$, L modulo Θ 'nın bölüm kafesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.4. (Burris ve Sankapanavar, 1981): L sınırlı bir kafes olsun. Eğer Θ_1 ve Θ_2 , L üzerinde iki ikili işlem ise, o zaman onların bağıntısal çarpımı $\Theta_1 \circ \Theta_2$ şu şekilde tanımlanır: $(\mu, \nu) \in \Theta_1 \circ \Theta_2$ ancak ve ancak $(\mu, \rho) \in \Theta_1$ ve $(\rho, \nu) \in \Theta_2$ olacak şekilde bir $\rho \in L$ vardır.

Θ_1 ve Θ_2 , L üzerinde kongrüanslar ise, o zaman onların bağıntısal çarpımı $\Theta_1 \circ \Theta_2$ L üzerinde bir kongrüanstır (Burris ve Sankapanavar, 1981).

Tanım 1.4.5. (Burris ve Sankapanavar, 1981): L sınırlı bir kafes ve $\Theta_1, \Theta_2 \in \text{Con}L$ olsun. Eğer $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$ ise, bu taktirde Θ_1 ve Θ_2 permutable (Θ_1 ve Θ_2 -permute) olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.6. (Burris ve Sankapanavar, 1981): L sınırlı bir kafes ve Θ , L üzerinde bir kongrüans olsun. Bu durumda, eğer $\Theta \wedge \Theta^* = \Delta_L$, $\Theta \vee \Theta^* = \nabla_L$ ve Θ, Θ^* permutable olacak şekilde L üzerinde bir Θ^* kongrüansı varsa, bu taktirde Θ 'ya L üzerinde bir faktör kongrüansı ve Θ, Θ^* çiftine ise L üzerinde faktör kongrüanslarının bir çifti denir.

Teorem 1.4.7. (Burris ve Sankapanavar, 1981): L sınırlı bir kafes ve $\Theta, \Theta^* \in \text{Con}L$ olsun. Bu taktirde, aşağıdakiler denktir:

i) $\Theta \circ \Theta^* = \Theta^* \circ \Theta$.

ii) $\Theta \vee \Theta^* = \Theta \circ \Theta^*$.

iii) $\Theta \circ \Theta^* \subseteq \Theta^* \circ \Theta$.

İyi bilinir ki, $\Theta, \Theta^* \in \text{Con}L$, için $\Theta \wedge \Theta^* = \Theta \cap \Theta^*$ dir. Dolayısıyla, Teorem 1.4.7 ile, Θ, Θ^* çifti L üzerinde faktör kongrüanlarının bir çiftini oluşturur ancak ve ancak $\Theta \cap \Theta^* = \Delta_L$ ve $\Theta^* \circ \Theta = \nabla_L$ (Burris ve Sankappanavar, 1981).

Teorem 1.4.8. (Burris ve Sankappanavar, 1981): L sınırlı bir kafes olsun. Eğer Θ, Θ^*, L üzerinde faktör kongrüanlarının bir çifti ise, o zaman

$$\begin{aligned} \alpha: L &\longrightarrow L/\Theta \times L/\Theta^* \\ \mu &\mapsto \alpha(\mu) = ([\mu]_\Theta, [\mu]_{\Theta^*}) \end{aligned}$$

dönüşümü ile, $L \cong L/\Theta \times L/\Theta^*$ dır.

1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar

Bu bölümde, bir sınırlı kafes üzerinde üçgensel norm kavramı tanıtılmış, bazı temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

Tanım 1.5.1. (De Cooman ve Kerre, 1994): $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı kafes olsun. Bir üçgensel norm T (kısaca t-norm) L üzerinde değişmeli, birleşmeli, monoton ve birim elemanı 1 olan bir ikili işlemdir. Yani, $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu her $\mu, \nu, \rho \in L$ için

$$\mathbf{T1.} \quad T(\mu, \nu) = T(\nu, \mu) \quad (\text{Değişmelilik})$$

$$\mathbf{T2.} \quad T(\mu, T(\nu, \rho)) = T(T(\mu, \nu), \rho) \quad (\text{Birleşme})$$

$$\mathbf{T3.} \quad \nu \leq \rho \text{ ise } T(\mu, \nu) \leq T(\mu, \rho) \quad (\text{Monotonluk})$$

$$\mathbf{T4.} \quad T(\mu, 1) = \mu \quad (\text{Sınır şartı})$$

özelliklerini sağlar. Dual olarak t-konorm tanımlanır.

Örnek 1.5.2: Literatürde iyi bilinen dört temel t-norm $T_M, T_P, T_L, T_D: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki gibi verilir:

$$T_M(\mu, \nu) = \min(\mu, \nu) \quad (\text{Minimum})$$

$$T_P(\mu, \nu) = \mu\nu \quad (\text{Çarpım})$$

$$T_L(\mu, \nu) = \max(\mu + \nu - 1, 0) \quad (\text{Lukasiewicz})$$

$$T_D(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & (\mu, \nu) \in [0,1]^2 \\ \min(\mu, \nu), & \text{Aksi halde} \end{cases} \quad (\text{Drastik çarpım})$$

T_1 ve T_2 L üzerinde iki t-norm olsun. $T_1 \leq T_2 : \Leftrightarrow$ Her $\mu, \nu \in L$ için $T_1(\mu, \nu) \leq T_2(\mu, \nu)$. Bu durumda, bir L sınırlı kafesi üzerinde en küçük ve en büyük t-norm sırasıyla

$$T_W(\mu, \nu) = \begin{cases} \mu, & \nu = 1 \\ \nu, & \mu = 1 \\ 0, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

ve $T_\Lambda(\mu, \nu) = \mu \wedge \nu$ olarak verilir.

Tanım 1.5.3. (Karaçal ve Khadjiev, 2005): L bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde, T t-normuna $\vee$ -dağılmalı denir : $\Leftrightarrow$ Her $\mu, \nu_1, \nu_2 \in L$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$T(\mu, \nu_1 \vee \nu_2) = T(\mu, \nu_1) \vee T(\mu, \nu_2).$$

Dual olarak bir kafes üzerinde $\wedge$ -dağılmalı t-norm tanımlanır.

Tanım 1.5.4. (De Baets ve Mesiar, 1999): L bir sınırlı kafes ve T , L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde,

i) Bir $\mu \in L$ elemanı T 'nin bir sıfır böleni olarak adlandırılır : $\Leftrightarrow \mu \wedge v \neq 0$ ve $T(\mu, v) = 0$ olacak şekilde bir $v \in L$ mevcuttur.

ii) L 'nin bir μ elemanına T -idempotent denir : $\Leftrightarrow T(\mu, \mu) = \mu$ dır.

iii) Bir $\mu \in L \setminus \{0\}$ elemanı T 'nin bir T -nilpotent elemanı olarak adlandırılır : $\Leftrightarrow \mu_\tau^{(n)} = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Burada, $\mu_\tau^{(n)} = 0$ notasyonu $T(x, \dots, x)$ (n defa μ elemanı) anlamına gelir.

Tanım 1.5.5. (De Baets ve Mesiar, 1999): L_1, L_2 sınırlı kafes ve T_1, T_2 sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde t-norm olsun. Bu taktirde, $L = L_1 \times L_2$ üzerinde her $(\mu_1, v_1), (\mu_2, v_2) \in L_1 \times L_2$ için

$$T_1 \times T_2((\mu_1, v_1), (\mu_2, v_2)) = (T_1(\mu_1, \mu_2), T_2(v_1, v_2))$$

ile tanımlanan $T_1 \times T_2$ t-normu T_1 ve T_2 'nin direkt çarpımı olarak adlandırılır.

I keyfi bir index kümesi ve $|I| > 2$ olsun. Eğer her $i \in I$ için T_i, L_i sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm ise, bu taktirde $L = \prod_{i \in I} L_i$ üzerinde $\prod_{i \in I} T_i$ t-normu benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 1.5.6. (Birkhoff, 1967): L ve M iki kafes olsun. Eğer bir $\phi: L \rightarrow M$ dönüşümü her $\mu, v \in L$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlıyorsa bu durumda, ϕ bir kafes homomorfisi olarak adlandırılır.

$$\phi(\mu \wedge v) = \phi(\mu) \wedge \phi(v),$$

$$\phi(\mu \vee v) = \phi(\mu) \vee \phi(v).$$

Tanım 1.5.7. (Karaçal ve Khadjiev, 2005): L, M sınırlı kafes ve T, P sırasıyla L ve M üzerinde t-norm olsun. Bu taktirde, T ve P t-normlarına homomorfiktir denir : $\Leftrightarrow$ Her $\mu, \nu \in L$ için

$$H(T(\mu, \nu)) = P(H(\mu), H(\nu))$$

olacak şekilde bir $H: L \rightarrow M$ kafes homomorfisi mevcuttur. Burada, eğer H biyektif ise, bu taktirde H 'a izomorfizm denir. Eğer H bir izomorfizm ise, $T \cong P$ notasyonunu kullanacağız. Bu durumda H bir kafes izomorfisi olduğu için $L \cong M$ notasyonunu kullanacağız.



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. T -Uyumlu Kongrüanslar, Homomorfizmler ve Basit Üçgensel Normlar

Bu bölümde, direkt parçalanamaz t -norm, faktör kongrüansları ve basit t -norm kavramlarını tanımlanmış ve bazı homomorfizma teoremleri verilmiştir. Üçgensel normlar sadece $L \times L$ 'den L 'ye cebirsel fonksiyonlar olduğu için üçgensel normların kongrüansı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.1: L bir sınırlı kafes, T , L üzerinde bir t -norm ve Θ , L üzerinde bir kongrüans olsun. Bu taktirde Θ , T -uyumlu olarak adlandırılır : $\Leftrightarrow \Theta$ aşağıdaki uyumluluk özelliğini sağlar: Her $i \in \{1,2\}$ için eğer $a_i \equiv b_i \pmod{\Theta}$ ise,

$$T(a_1, a_2) \equiv T(b_1, b_2) \pmod{\Theta}$$

Bir T t -normu için tüm T -uyumlu kongrüansların kümesi $Con_T L$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.2: Bir kongrüans Θ birden fazla t -norm için T -uyumlu olabilir. Örneğin, Δ_L ve ∇_L her T t -normu için T -uyumludur.

Önerme 2.1.3.: Θ_1 ve $\Theta_2 \in Con_T L$ olsun. Bu taktirde $\Theta_1 \circ \Theta_2 \in Con_T L$ dir.

İspat: $\Theta_1, \Theta_2 \in Con L$ ise, $\Theta_1 \circ \Theta_2 \in Con L$ (Burris ve Sankappanavar, 1981). Şimdi, $a_1 \equiv b_1 \pmod{\Theta_1 \circ \Theta_2}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{\Theta_1 \circ \Theta_2}$ olsun. Bu taktirde, $a_1 \equiv c_1 \pmod{\Theta_1}$, $c_1 \equiv b_1 \pmod{\Theta_2}$ ve $a_2 \equiv c_2 \pmod{\Theta_1}$, $c_2 \equiv b_2 \pmod{\Theta_2}$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in L$ mevcuttur. Θ_1, Θ_2 T -uyumlu olduğundan,

$$T(a_1, a_2) \equiv T(c_1, c_2) \pmod{\Theta_1},$$

$$T(c_1, c_2) \equiv T(b_1, b_2) \pmod{\Theta_2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, $T(a_1, a_2) \equiv T(b_1, b_2) \pmod{(\Theta_1 \circ \Theta_2)}$ ve dolayısıyla $\Theta_1 \circ \Theta_2 \in \text{Con}_T L$ olduğunu elde ederiz.

Önerme 2.1.4: L bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde $\text{Con}_T L$ küme kapsama bağıntısına göre bir tam kafes oluşturur.

İspat: İspat kolaylıkla elde edilir.

Uyarı 2.1.5. (Burris ve Sanpappanavar, 1981): $\text{Con} L$ herhangi bir L kafesi için bir dağılmalı kafes ve $\text{Con}_T L \subseteq \text{Con} L$ olduğu için $\text{Con}_T L$ bir dağılmalı kafestir.

Önerme 2.1.6: $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes, T, L üzerinde bir t-norm ve $\Theta \in \text{Con}_T L$ olsun. Bu taktirde,

$$T_\Theta: L/\Theta \times L/\Theta \rightarrow L/\Theta$$

$$([v]_\Theta, [v]_\Theta) \mapsto T_\Theta([v]_\Theta, [v]_\Theta) = [T(v, v)]_\Theta$$

bir t-normdur.

İspat: T t-normunun değişmeliliği ve birleşmeliliği kullanılarak T_Θ 'nin değişmeli ve birleşmeli olduğu elde edilir. Ayrıca, her $[v]_\Theta \in L/\Theta$ için

$$T_\Theta([v]_\Theta, [1]_\Theta) = [T(v, 1)]_\Theta = [v]_\Theta$$

olduğundan $[1]_\Theta$, T_Θ 'nin birim elemanıdır. Son olarak, T_Θ 'nin monoton olduğunu göstereceğiz. Diğer bir deyişle, $[v]_\Theta, [v]_\Theta \in L/\Theta$ için $[v]_\Theta \leq_\Theta [v]_\Theta$ iken keyfi bir $[p]_\Theta \in L/\Theta$ için $[T(p, v)]_\Theta \leq_\Theta [T(p, v)]_\Theta$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda, kabul edelim ki, $[v]_\Theta, [v]_\Theta \in L/\Theta$ için $[v]_\Theta \leq_\Theta [v]_\Theta$ olsun. O zaman, $[v]_\Theta \wedge_\Theta [v]_\Theta = [v]_\Theta$ dır. Buradan, $[v \wedge v]_\Theta = [v]_\Theta$ elde ederiz. Bu $(v \wedge v, v) \in \Theta$ olduğunu gösterir. Ayrıca, Θ 'nin yansıma özelliği ile, biliyoruz ki $(p, p) \in \Theta$ dır. Dolayısıyla, $\Theta \in \text{Con}_T L$ olduğundan $(T(v \wedge v, p), T(v, p)) \in \Theta$ olduğunu çıkarırız. İyi bilinen bir gerçektir ki,

$$(T(v, p) \wedge T(v, p), T(v, p) \wedge T(v, p)) \in \Theta.$$

Dolayısıyla, bu elemanların supremumu da Θ da olacağından

$$(T(v \wedge v, \rho) \vee (T(v, \rho) \wedge T(v, \rho)), T(v, \rho) \vee (T(v, \rho) \wedge T(v, \rho))) \in \Theta.$$

Buradan, T 'nin monotonluğunu kullanarak,

$$(T(v, \rho) \wedge T(v, \rho), T(v, \rho)) \in \Theta$$

elde edilir. Bunu akılda tutarak,

$$\begin{aligned} T_{\Theta}([v]_{\Theta}, [\rho]_{\Theta}) \wedge_{\Theta} T_{\Theta}([v]_{\Theta}, [\rho]_{\Theta}) &= [T(v, \rho)]_{\Theta} \wedge_{\Theta} [T(v, \rho)]_{\Theta} \\ &= [T(v, \rho) \wedge T(v, \rho)]_{\Theta} \\ &= [T(v, \rho)]_{\Theta} \\ &= T_{\Theta}([v]_{\Theta}, [\rho]_{\Theta}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, T_{Θ} t-normu monotonluk şartını sağlar. Sonuç olarak, Tanım 1.5.1 ile, T_{Θ} bir t-normdur.

Tanım 2.1.7: T , $|L| = 1$ olan bir sınırlı L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde, T t-normuna L üzerinde trivial t-norm denir. Bu durumda, L kafesi de trivial olarak adlandırılır. Aksi halde, T t-normuna L üzerinde non-trivial t-norm denir ve L non-trivial kafes olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.8: $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes ve T , L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde, T t-normuna L üzerinde direkt parçalanamaz t-norm denir : $\Leftrightarrow T$ t-normu non-trivial t-normların direkt çarpımına izomorf değildir.

Tanım 2.1.9: T_1 ve T_2 sırasıyla L_1 ve L_2 sınırlı kafesleri üzerinde iki t-norm ve $\alpha: L_1 \rightarrow L_2$ bir homomorfizm olsun. Bu taktirde α 'nın çekirdeği,

$$\ker(\alpha) = \{(a, b) \in L_1^2 \mid \alpha(a) = \alpha(b)\}$$

ile tanımlanır ve $\ker(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.10: T_1 ve T_2 sırasıyla L_1 ve L_2 sınırlı kafesleri üzerinde iki t-norm olsun. Bu taktirde, eğer $\alpha: L_1 \rightarrow L_2$ bir homomorfizm ise, $\ker(\alpha) \in \text{Con}_{T_1} L_1$ dir.

İspat: $\ker(\alpha)$ 'nın L_1 üzerinde bir kongrüans olduğunu göstermek kolaydır. Dolayısıyla $\ker(\alpha)$ 'nın T_1 -uyumlu olduğunu göstermek yeterlidir. O halde, $a, b, c, d \in L$ için $(a, b), (c, d) \in \ker(\alpha)$ alalım. Bu durumda, $(T_1(a, c), T_1(b, d)) \in \ker(\alpha)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Şimdi $(a, b), (c, d) \in \ker(\alpha)$ olduğundan $\alpha(a) = \alpha(b)$ ve $\alpha(c) = \alpha(d)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, α bir homomorfizma olduğundan,

$$\alpha(T_1(a, c)) = T_2(\alpha(a), \alpha(c)) = T_2(\alpha(b), \alpha(d)) = \alpha(T_1(b, d))$$

olduğunu elde ederiz. Bu ise, $(T_1(a, c), T_1(b, d)) \in \ker(\alpha)$ olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.11: $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes, T, L üzerinde bir t-norm ve $\Theta \in \text{Con}_T L$ olsun. Bu taktirde $f_\Theta: L \rightarrow L/\Theta$ dönüşümü,

$$f_\Theta(x) = [x]_\Theta$$

ile tanımlanır. f_Θ 'nın örten bir homomorfizm olduğu kolaylıkla gösterilebilir ve buradaki f_Θ 'ya doğal homomorfizm denir.

Teorem 2.12, Tanım 2.13, Önerme 2.14 ve Teorem 2.15 bu kavramı netleştirmek için çalışmaya eklenmiştir.

Teorem 2.1.12. (Üçgensel Normlar için Homomorfizm Teoremi): L_1, L_2 iki sınırlı kafes ve T_1, T_2 sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde iki t-norm olsun. Bu durumda, $\alpha: L_1 \rightarrow L_2$ örten bir homomorfizma ise, o zaman $\beta: L_1/\ker(\alpha) \rightarrow L_2$, $\beta([x]_{\ker(\alpha)}) := \alpha(x)$ ile tanımlanan yani, $\alpha = \beta \circ f_{\ker(\alpha)}$ olacak şekilde bir izomorfi mevcuttur. Burada, $f_{\ker(\alpha)}: L_1 \rightarrow L_1/\ker(\alpha)$ bir doğal homomorfizmdir.

İspat: $\beta: L_1/\ker(\alpha) \rightarrow L_2$ olmak üzere $[a]_{\ker(\alpha)}, [b]_{\ker(\alpha)} \in L_1/\ker(\alpha)$ keyfi elemanları için $\beta([a]_{\ker(\alpha)}) = \beta([b]_{\ker(\alpha)})$ olsun. O zaman $\alpha(a) = \alpha(b)$ dir. Buradan, $(a, b) \in \ker(\alpha)$ yani, $[a]_{\ker(\alpha)} = [b]_{\ker(\alpha)}$ elde edilir. Bu ise β 'nin birebir olduğunu gösterir. Şimdi $l \in L_2$ keyfi bir eleman olsun. α örten olduğundan $\alpha(a) = l$ olacak şekilde bir $a \in L_1$ vardır. Dolayısıyla, $\beta([a]_{\ker(\alpha)}) = \alpha(a) = l$ elde edilir. Böylece, β örtendir. İlaveten,

$$\begin{aligned} \beta(T_{\ker(\alpha)}([a]_{\ker(\alpha)}, [b]_{\ker(\alpha)})) &= \beta([T_1(a, b)]_{\ker(\alpha)}) \\ &= \alpha(T_1(a, b)) = T_2(\alpha(a), \alpha(b)) \\ &= T_2(\beta([a]_{\ker(\alpha)}), \beta([b]_{\ker(\alpha)})) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta([a]_{\ker(\alpha)} \wedge [b]_{\ker(\alpha)}) &= \beta([a \wedge b]_{\ker(\alpha)}) = \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b) \\ &= \beta([a]_{\ker(\alpha)}) \wedge \beta([b]_{\ker(\alpha)}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $\beta([a]_{\ker(\alpha)} \vee [b]_{\ker(\alpha)}) = \beta([a]_{\ker(\alpha)}) \vee \beta([b]_{\ker(\alpha)})$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla, β bir homomorfizmadır. Son olarak, her $a \in L_1$ için $(\beta \circ f_{\ker(\alpha)})(a) = \beta(f_{\ker(\alpha)}(a)) = \beta([a]_{\ker(\alpha)}) = \alpha(a)$ olduğundan $\beta \circ f_{\ker(\alpha)} = \alpha$ dır. Böylece ispat tamamdır.

Yukarıdaki homomorfizm teoremi “Birinci İzomorfi Teoremi” olarak da adlandırılır.

Tanım 2.1.13. (Burris ve Sankappanavar, 1981): $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes, T, L üzerinde bir t-norm ve $\Theta, \Phi \in \text{Con}_T L$ öyleki $\Theta \subseteq \Phi$ olsun. Bu taktirde Φ/Θ bölüm kümesi,

$$\Phi/\Theta = \{([a]_\Theta, [b]_\Theta) \in (L/\Theta)^2 : (a, b) \in \Phi\}$$

ile tanımlanır.

Önerme 2.1.14: $\Theta, \Phi \in \text{Con}_T L$ öyleki $\Theta \subseteq \Phi$ olsun. Bu taktirde $\Phi/\Theta, L/\Theta$ üzerinde bir T_Θ -uyumlu kongrüanstır.

İspat: İspat kolaylıkla elde edilir.

Teorem 2.1.15. (Üçgensel Normlar için İkinci İzomorfizm Teoremi) (Burris ve Sankappanavar, 1981): L sınırlı bir kafes, T, L üzerinde bir t-norm ve $\Theta, \Phi \in \text{Con}_T L$ öyleki $\Theta \subseteq \Phi$ olsun. Bu taktirde,

$$\alpha([a]_\Theta]_{\Phi/\Theta}) = [a]_\Phi$$

ile tanımlanan $\alpha: (L/\Theta)/(\Phi/\Theta) \rightarrow L/\Phi$ dönüşümü bir izomorfizmdir.

İspat: α 'nın bir iyi tanımlı bir bijeksiyon olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Şimdi, α 'nın $(L/\Theta)/(\Phi/\Theta)$ dan L/Φ ye bir homomorfi olduğunu gösterelim. $a, b \in L$ keyfi olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \alpha\left(T_{\Phi/\Theta}([a]_{\Phi/\Theta}, [b]_{\Phi/\Theta})\right) &= [\alpha(T_\Theta([a]_\Theta, [b]_\Theta))]_{\Phi/\Theta} \\ &= \alpha([T(a, b)]_\Theta)]_{\Phi/\Theta} \\ &= [T(a, b)]_\Phi \\ &= T_\Phi([a]_\Phi, [b]_\Phi) \\ &= T_\Phi\left(\alpha([a]_\Theta]_{\Phi/\Theta}), \alpha([b]_\Theta]_{\Phi/\Theta})\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha([a]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta} \wedge [b]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta}) &= \alpha([a]_{\Theta} \wedge [b]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta}) \\
&= \alpha([a \wedge b]_{\Theta})_{\Phi/\Theta} \\
&= [a \wedge b]_{\Phi} \\
&= [a]_{\Phi} \wedge [b]_{\Phi} \\
&= \alpha([a]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta}) \wedge \alpha([b]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta})
\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde, $\alpha([a]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta} \vee [b]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta}) = \alpha([a]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta}) \vee \alpha([b]_{\Theta}]_{\Phi/\Theta})$ eşitliği kolaylıkla elde edilir. Dolayısıyla, α dönüşümü $(L/\Theta)/(\Phi/\Theta)$ dan L/Φ ye bir izomorfidir.

Tanım 2.1.16: Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir T t-normuna basit denir : $\Leftrightarrow Con_T L = \{\Delta_L, \nabla_L\}$ dir.

Aşağıdaki önermede, L 'nin bir Boole cebiri olması durumunda T_W t-normunun L üzerinde basit olduğu gösterilmiştir. Fakat bir Boole cebiri üzerinde herhangi bir t-norm basit olmayabilir. Gerçekten, L bir Boole cebiri ve $|L| > 2$ olsun. Bu durumda, $T = T_{\wedge}$ t-normu $\vee$ -dağılmalı ve tüm elemanları komplementlenebilir olduğundan birazdan gösterilecek olan Teorem 2.2.10 ile, T direkt parçalanabilir. Örneğin, herhangi bir $L = \{0,1\} \times \{0,1\}$ Boole cebiri üzerinde $T = T_{\wedge}$ t-normunu düşünelim. Bu taktirde $T_{\wedge}$ t-normunun L üzerinde basit olmadığı kolaylıkla gösterilebilir.

Önerme 2.1.17: $(L, \leq)$ bir Boole cebiri olsun. Bu taktirde L üzerindeki en küçük t-norm T_W basittir.

İspat: $\Theta \in Con_{T_W} L$ öyleki $\Theta \neq \Delta_L$ ve $\Theta \neq \nabla_L$ olsun. Öncelikle, $x \in L \setminus \{1\}$ için $(x, 1) \notin \Theta$ olduğunu gösterelim. Bunun için aksini varsayalım. Kabul edelim ki $(x, 1) \in \Theta$ olsun. O zaman $(T_W(x, x), T_W(1, 1)) = (0, 1) \in \Theta$ dır. Buradan, her $y \in L$ için $(y, y) \in \Theta$ olduğunu kullanarak, $(y \wedge 0, y \wedge 1) = (0, y) \in \Theta$ olduğunu elde ederiz. Her $k, l \in L$ için, $(k, l) \in \Theta$ olduğuna sahibiz. Fakat $\Theta \neq \nabla_L$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Şimdi $m \neq n$ için $(m, n) \in \Theta$ ve m', n' sırasıyla m ve n 'nin komplementi olsun. Böylece $(m \vee m', n \vee m') = (1, n \vee m') \in \Theta$ dir. Buradan, $n \vee m' = 1$ dir. Benzer şekilde, $n' \vee m = 1$ dir.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \wedge 1 = (n \vee m') \wedge (n' \vee m) \\ &= (n \wedge n') \vee (n \wedge m) \vee (m' \wedge n') \vee (m \wedge m') \\ &= 0 \vee (n \wedge m) \vee (m' \wedge n') \vee 0 \\ &= (n \wedge m) \vee (m' \wedge n'). \end{aligned}$$

Buradan, $1 = (n \wedge m) \vee (m' \wedge n')$ elde edilir. Benzer şekilde, $0 = (n \wedge m) \wedge (m' \wedge n')$ dir. Dolayısıyla, $(m \wedge n)' = m' \wedge n'$ dir. Fakat, $(m \wedge n)' = m' \vee n'$ olduğundan $m' \wedge n' = m' \vee n'$ olduğunu elde ederiz. Buradan, $n' \leq m'$ ve $m' \leq n'$ ile, $m' = n'$ ve dolayısıyla $m = n$ olduğunu elde ederiz. Bu ise, $m \neq n$ olması ile çelişir. Böylece, $\Theta = \Delta_L$ veya $\Theta = \nabla_L$.

2.2. Üçgensel Normaların Direkt Parçalanabilirliği

Bu bölümde bazı kongrüanslar T -dağılımlı elemanlar sayesinde tanımlanmış ve bu kongrüansların bazı özellikleri incelenmiştir. Ardından, bu kongrüanslar kullanılarak, herhangi bir t-normun parçalanabilirliği için bazı gerekli ve yeterli koşulları elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1: $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Eğer $\Theta, \Theta^* \in \text{Con}_T L$, L üzerinde faktör kongrüanlarının bir çifti ise, bu taktirde

$$T \cong T_\Theta \times T_{\Theta^*}.$$

İspat: $\alpha: L \rightarrow L/\Theta \times L/\Theta^*$, her $a \in L$ için $\alpha(a) = ([a]_\Theta, [a]_{\Theta^*})$ olarak tanımlansın. Kabul edelim ki her $a, b \in L$ için $\alpha(a) = \alpha(b)$ olsun. O zaman, $[a]_\Theta = [b]_\Theta$ ve $[a]_{\Theta^*} = [b]_{\Theta^*}$ dir. Buradan, $(a, b) \in \Theta$, $(a, b) \in \Theta^*$ olduğunu ve dolayısıyla $(a, b) \in \Theta \wedge \Theta^* = \Delta_L$ olduğunu elde ederiz. Böylece, $a = b$ dir. Bu α 'nın birebir olduğunu gösterir.

Şimdi, $([a]_{\Theta}, [b]_{\Theta^*}) \in L/\Theta \times L/\Theta^*$ keyfi alalım. $(a, b) \in \nabla_L = \Theta \circ \Theta^*$ olduğundan $(a, c) \in \Theta$ ve $(c, b) \in \Theta^*$ olacak şekilde bir $c \in L$ vardır. Buradan, $\alpha(c) = ([c]_{\Theta}, [c]_{\Theta^*}) = ([a]_{\Theta}, [b]_{\Theta^*})$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, α örtendir. Ayrıca, aşağıdaki eşitliklerden de α 'nın homomorfizm olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned} T_{\Theta} \times T_{\Theta^*}(\alpha(a), \alpha(b)) &= T_{\Theta} \times T_{\Theta^*}([a]_{\Theta}, [a]_{\Theta^*}, [b]_{\Theta}, [b]_{\Theta^*}) \\ &= (T_{\Theta}([a]_{\Theta}, [b]_{\Theta}), T_{\Theta^*}([a]_{\Theta^*}, [b]_{\Theta^*})) \\ &= ([T(a, b)]_{\Theta}, [T(a, b)]_{\Theta^*}) \\ &= \alpha(T(a, b)). \end{aligned}$$

Böylece, $\alpha: L \rightarrow L_{\Theta} \times L_{\Theta^*}$ bir izomorfizmdir. O halde, $T \cong T_{\Theta} \times T_{\Theta^*}$ dir.

Sonuç 2.2.2: $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde T direkt parçalanamaz t-normdur ancak ve ancak L üzerindeki T -faktör kongrüanslar sadece Δ_L ve ∇_L dir.

İspat: T, L üzerinde direkt parçalanamaz t-norm ve Θ, Θ^*, L üzerinde T -faktör kongrüansı olsun. Bu taktirde, Teorem 3.1 ile, $T \cong T_{\Theta} \times T_{\Theta^*}$ dir. T direkt parçalanamaz olduğu için $|L/\Theta| = 1$ veya $|L/\Theta| = |L|$ dir. Eğer $|L| = 1$ ise, $\Theta = \nabla_L$ olduğu açıktır. Bu durumda, $\Theta^* = \Delta_L$ dir. Eğer $|L/\Theta| = |L|$ ise, $\Theta = \Delta_L$ olduğu elde edilir. Fakat bu durumda, $\Theta^* = \nabla_L$. Tersine, açıktır.

Tanım 2.2.3: L bir sınırlı kafes, T, L üzerinde bir t-norm ve $a \in L$ olsun. Bu durumda, eğer her $x, y \in L$ için $T(a, x \vee y) = T(a, x) \vee T(a, y)$ ve $T(a, x \wedge y) = T(a, x) \wedge T(a, y)$ eşitliklerini sağlıyorsa, bu taktirde, a elemanına L 'nin T -dağılmalı elemanı denir.

Açık olarak, bir kafesin 0 ve 1 elemanları T -dağılmalı elemanlardır.

Tanım 2.2.4: T bir sınırlı L kafesi üzerinde t-norm ve $a, b \in L$ olsun. $a \vee b$ elemanına T - $\vee$ -parçalanabilir denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in L$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$T(a \vee b, x) = T(a, x) \vee T(b, x).$$

Önerme 2.2.5: L bir sınırlı kafes, T, L üzerinde bir t-norm, $a \in L$, T -dağılmalı bir eleman olsun ve Θ_a aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x\Theta_a y : \Leftrightarrow T(x, a) = T(y, a)$$

Bu taktirde, $\Theta_a \in \text{Con}_T L$ dir.

İspat: Θ_a ’nın bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Şimdi, $x, y, z, t \in L$ için $x\Theta_a y$ ve $z\Theta_a t$ olsun. Buradan, $T(x, a) = T(y, a)$ ve $T(z, a) = T(t, a)$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$T(x \wedge z, a) = T(x, a) \wedge T(z, a) = T(y, a) \wedge T(t, a) = T(y \wedge t, a)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise, $(x \wedge z)\Theta_a(y \wedge t)$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $(x \vee z)\Theta_a(y \vee t)$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla, sadece Θ_a ’nın T -uyumlu olduğunu göstermek kalır. Kabullerimiz ile,

$$\begin{aligned} T(T(x, z), a) &= T(x, T(z, a)) = T(x, T(t, a)) = T(t, T(x, a)) = T(t, T(y, a)) \\ &= T(T(y, t), a) \end{aligned}$$

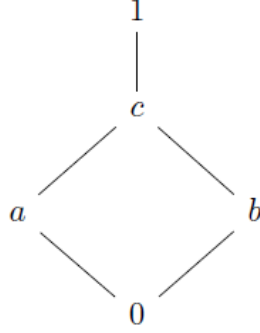
eşitliğini çıkarırız. Böylece, $T(x, z)\Theta_a T(y, t)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, Θ_a , T -uyumlu kongrüans olup buradan, $\Theta \in \text{Con}_T L$ elde edilir.

Sonuç 2.2.6: i) T, L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm olsun. Bu taktirde, her $a \in L$ için $\Theta \in \text{Con}_T L$ dir.

ii) Eğer L bir sınırlı zincir ve T, L üzerinde bir t-norm ise, bu taktirde her $a \in L$ için $\Theta_a \in \text{Con}_T L$ dir.

Tabii ki her $\Theta \in \text{Con}_T L$ için $\Theta = \Theta_x$ olacak şekilde bir x elemanının olup olmadığı merak edilebilir. Aşağıdaki örnek bunun doğru olamayabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.2.7: Kafes diyagramı Şekil 1'deki gibi olan $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesini düşünelim ve $T = T_\wedge$ t-normunu alalım. $\Theta = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (a,1), (1,a)\}$ olsun. Bu durumda, $\Theta \in \text{Con}_T L$ dir.



Şekil 1. L 'nin kafes diyagramı

Fakat, $\Theta = \Theta_x$ olacak şekilde bir $x \in L$ elemanı mevcut değildir.

Önerme 2.1.17 ile, T_W 'nin bir Boole cebirinde basit olduğu gösterilmiştir. Şimdi, T_W t-normunun herhangi bir sınırlı kafes üzerinde her zaman basit olup olmadığı sorusunun cevabı merak edilebilir. Aşağıdaki örnekle, bu soruya olumsuz bir cevap verilmiştir.

Örnek 2.2.8: $(L, \leq)$ bir sınırlı zincir ve $|L| > 3$ olsun. T_W 'nin basit olmadığını göstermek için $a \in L \setminus \{0,1\}$ olmak üzere Θ_a 'yı düşünelim. $\Theta_a \neq \Delta_L, \nabla_L$ olduğunu göstermek için öncelikle, $[1]_{\Theta_a}$ denklik sınıfına bakalım. $x \in [1]_{\Theta_a}$ olsun. Bu taktirde, $T_W(x, a) = T_W(1, a) = a$ dir. Bu nedenle, $x = 1$ dir. Bu ise, $[1]_{\Theta_a} = \{1\}$ olduğunu ve dolayısıyla $\Theta_a \neq \nabla_L$ olduğunu gösterir. Şimdi, kabul edelim ki $x \in L \setminus \{1\}$ ve $y \Theta_a x$ olsun. Bu taktirde, $T_W(x, a) = T_W(y, a) = 0$ dir. Dolayısıyla, $y \in L \setminus \{1\}$ dir. Böylece, $\Theta_a \neq \Delta_L, \nabla_L$ olduğunu elde ederiz.

Teorem 2.2.9: L bir sınırlı kafes, T , L üzerinde bir t-norm ve x, y , L 'nin T -dağılmalı elemanları olsun. Bu taktirde,

i) $\Theta_0 = \nabla_L$.

ii) $\Theta_1 = \Delta_L$.

- iii) Eğer $x \vee y$, T -V-parçalanabilir eleman ise, bu taktirde $\Theta_x \cap \Theta_y \subseteq \Theta_{x \vee y}$ dir.
- iv) Eğer x ve y , T -idempotent elemanlar ve $x \vee y$, T -parçalanabilir eleman ise, bu taktirde $\Theta_{x \vee y} \subseteq \Theta_x \cap \Theta_y$ dir.
- v) Eğer $x \vee y$, T -V-parçalanabilir eleman ve x, y , T -idempotent elemanlar ise, bu taktirde $\Theta_x \cap \Theta_y = \Theta_{x \vee y}$ dir.
- vi) Eğer x ve y , T -idempotent elemanlar ise, bu taktirde $\Theta_x \circ \Theta_y = \Theta_y \circ \Theta_x$ dir.
- vii) Eğer x ve y , T -idempotent elemanlar ise, bu taktirde $\Theta_x \circ \Theta_y = \Theta_{T(x,y)}$ dir.
- viii) Eğer x bir T -idempotent eleman ise, bu taktirde Θ_x , $(1, x)$ elemanını içeren en küçük kongrüanstır.
- ix) Eğer $x \in L \setminus \{0,1\}$ T -idempotent eleman ise, bu taktirde $\Theta_x \neq \nabla_L, \Delta_L$ dir.

İspat: i) ve ii) kolaylıkla elde edilir.

iii) $(c, d) \in \Theta_x \cap \Theta_y$ keyfi olsun. Bu taktirde, $T(x, c) = T(x, d)$, $T(y, c) = T(y, d)$ dir. $x \vee y$ elemanı T -V-parçalanabilir olduğundan,

$$T(x \vee y, c) = T(x, c) \vee T(y, c) = T(x, d) \vee T(y, d) = T(x \vee y, d)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise, $(c, d) \in \Theta_{x \vee y}$ olduğunu gösterir. O halde, $\Theta_x \cap \Theta_y \subseteq \Theta_{x \vee y}$ dir.

iv) $(c, d) \in \Theta_{x \vee y}$ olsun. Bu taktirde, $T(x \vee y, c) = T(x \vee y, d)$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} T(x, T(x \vee y, c)) &= T(x, T(x \vee y, d)) \\ T(T(x, x \vee y), c) &= T(T(x, x \vee y), d) \\ T(T(x, x) \vee T(x, y), c) &= T(T(x, x) \vee T(x, y), d) \\ T(x \vee T(x, y), c) &= T(x \vee T(x, y), d) \\ T(x, c) &= T(x, d) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise, $(c, d) \in \Theta_x$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $(c, d) \in \Theta_y$ olduğu gösterilebilir. Böylece, $(c, d) \in \Theta_x \cap \Theta_y$ dir. Dolayısıyla, $\Theta_{x \vee y} \subseteq \Theta_x \cap \Theta_y$ dir.

v) Kolaylıkla elde edilir.

vi) $(c, d) \in \Theta_x \circ \Theta_y$ olsun. Bu taktirde, $(c, k) \in \Theta_x$ ve $(k, d) \in \Theta_y$ olacak şekilde bir $k \in L$ mevcuttur. O zaman, $T(x, c) = T(x, k)$ ve $T(k, y) = T(d, y)$ dir. Şimdi, $T(x, d) \vee T(y, c) = m$ diyelim. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
 T(x, m) &= T(x, T(x, d) \vee T(y, c)) \\
 &= T(x, T(x, d)) \vee T(x, T(y, c)) \\
 &= T(T(x, x), d) \vee T(T(x, c), y) \\
 &= T(x, d) \vee T(T(x, k), y) \\
 &= T(x, d) \vee T(x, T(k, y)) \\
 &= T(x, d) \vee T(x, T(d, y)) \\
 &= T(x, d)
 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise, $(m, d) \in \Theta_x$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $T(y, m) = T(y, c)$ yani, $(c, m) \in \Theta_y$ olduğu elde edilir. Bundan dolayı, $(c, d) \in \Theta_y \circ \Theta_x$ dir. Dolayısıyla, $\Theta_x \circ \Theta_y \subseteq \Theta_y \circ \Theta_x$ dir. Benzer şekilde, $T(y, d) \vee T(x, c) = m$ diyerek, $\Theta_y \circ \Theta_x \subseteq \Theta_x \circ \Theta_y$ olduğu gösterilebilir. O halde, $\Theta_x \circ \Theta_y = \Theta_y \circ \Theta_x$.

vii) $(c, d) \in \Theta_x \circ \Theta_y$ olsun. Bu taktirde, $(c, q) \in \Theta_x$ ve $(q, d) \in \Theta_y$ olacak şekilde bir $q \in L$ mevcuttur. Böylece, $T(x, c) = T(x, q)$ ve $T(y, q) = T(y, d)$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 T(T(x, y), c) &= T(y, T(x, c)) = T(y, T(x, q)) = T(x, T(y, q)) = T(x, T(y, d)) \\
 &= T(T(x, y), d)
 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise, $(c, d) \in \Theta_{T(x, y)}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\Theta_x \circ \Theta_y \subseteq \Theta_{T(x, y)}$ dir. Tersine, $(c, d) \in \Theta_{T(x, y)}$ olsun. Buradan, $T(T(x, y), c) = T(T(x, y), d)$ elde edilir. Şimdi, $T(x, c) \vee T(y, d) = q$ diyelim. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
T(x, q) &= T(x, T(x, c) \vee T(y, d)) \\
&= T(x, T(x, c)) \vee T(x, T(y, d)) \\
&= T(T(x, x), c) \vee T(T(x, y), d) \\
&= T(x, c) \vee T(T(x, y), c) \\
&= T(x, c) \vee T(x, T(y, c)) \\
&= T(x, c)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise $(c, q) \in \Theta_x$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $T(y, d) = T(y, q)$ yani, $(q, d) \in \Theta_y$ olduğu gösterilebilir. Böylece, $(c, d) \in \Theta_x \circ \Theta_y$ dır. Dolayısıyla, $\Theta_{T(x, y)} \subseteq \Theta_x \circ \Theta_y$ dir ki bu da ispatı tamamlar.

viii) $T(x, x) = x = T(x, 1)$ olduğundan, $(x, 1) \in \Theta_x$ olduğunu elde ederiz. Kabul edelim ki Θ , $(1, x)$ elemanını içeren $\Theta \neq \Theta_x$ olacak şekilde herhangi bir kongrüans olsun. Şimdi, $(a, b) \in \Theta_x$ keyfi alalım. Buradan, $T(a, x) = T(b, x)$ elde edilir. Ayrıca, $(1, x) \in \Theta$ olduğundan $x = 1$ dir. Dolayısıyla, $(a, T(a, x)) \in \Theta$ ve $(b, T(b, x)) \in \Theta$ dır. Böylece, $(a, b) \in \Theta$ ve dolayısıyla $\Theta_x \subseteq \Theta$ elde edilir. O halde, Θ_x , $(1, x)$ elemanını içeren en küçük kongrüanstır.

ix) $a \neq 1$ ve (viii) ile, $(a, 1) \in \Theta_a \neq \Delta_L$ dır. a elemanı T -idempotent eleman ve $a \neq 0$ olduğundan $T(a, a) = a \neq 0$ ve $T(a, a) \neq T(a, 0)$ dır. Bu ise, $(a, 0) \notin \Theta_a$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\Theta_a \neq \nabla_L$ dır.

Teorem 2.2.10: L bir sınırlı kafes ve T , L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde, T t-normu T_1 ve T_2 t-normlarının direkt çarpımıdır ancak ve ancak b elemanının bir komplementi a ve $a \vee b$ elemanı T -V-parçalanabilir eleman olacak şekilde $a, b \in L$ elemanları mevcuttur.

İspat: $T \cong T_1 \times T_2$ olsun. Burada, $i \in \{1, 2\}$ için T_i , L_i üzerinde bir t-normdur. Bu taktirde, $L \cong L_1 \times L_2$ dir. Dolayısıyla, $\alpha: L \rightarrow L_1 \times L_2$ olacak şekilde bir izomorfi vardır. Öncelikle, $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ elemanlarının $T_1 \times T_2$ -dağılımalı olduğunu gösterelim. Bunun için, $(x, y), (z, t) \in L_1 \times L_2$ keyfi alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
T_1 \times T_2((1,0), (x,y) \vee (z,t)) &= T_1 \times T_2((1,0), (x \vee z, y \vee t)) \\
&= (T_1(1, x \vee z), T_2(0, y \vee t)) \\
&= (x \vee z, 0) = (x, 0) \vee (z, 0) \\
&= T_1 \times T_2((1,0), (x,y)) \vee T_1 \times T_2((1,0), (z,t)).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $(1,0)$ elemanının $T_1 \times T_2$ -dağılmalı olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $(0,1)$ elemanının $T_1 \times T_2$ -dağılmalı olduğu gösterilebilir. α örten olduğundan $\alpha(a) = (1,0)$ ve $\alpha(b) = (0,1)$ olacak şekilde $a, b \in L$ elemanları mevcuttur. Dolayısıyla, α bir izomorfi olduğundan a ve b elemanları da T -dağılmalıdır. $(0,1)$ elemanının komplementi $(1,0)$ olduğundan b elemanının bir komplementi a dır. $(1,1) = (1,0) \vee (0,1)$ elemanı $T_1 \times T_2$ -V-parçalanabilir ve α bir izomorfizm olduğundan $a \vee b$ elemanı T -V-parçalanabilir.

Tersine, Teorem 2.2.9 (ii) and (iii) ile, $\Theta_a \cap \Theta_b = \Theta_{a \vee b} = \Theta_1 = \Delta_L$ olduğunu elde ederiz. Yine Teorem 2.2.9 (i), (vi) ve (vii) ile, $\Theta_a \circ \Theta_b = \Theta_b \circ \Theta_a = \Theta_{T(a,b)} = \Theta_0 = \nabla_L$ olduğunu elde ederiz.

Uyarı 2.2.11: Teorem 2.2.10'un ispatından b elemanının tek komplementinin a olduğu açıktır.

Sonuç 2.2.12: i) T, L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-norm olsun. Bu taktirde, T direkt parçalanabilir ancak ve ancak b elemanının komplementi a olacak şekilde $a, b \in L$ elemanları mevcuttur.

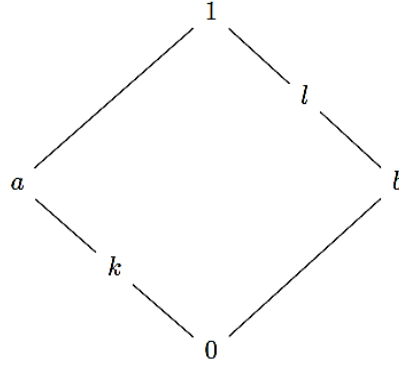
ii) L bir dağılmalı, sınırlı kafes olsun. Bu taktirde, L direkt parçalanamazdır ancak ve ancak b elemanının komplementi a olacak şekilde $a, b \in L\{0,1\}$ elemanları mevcut değildir.

Sonuç 2.2.13: T, L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm olsun. Bu taktirde, aşağıdaki iddialar sağlanır:

i) $i \in \{1,2\}$ için T_i, L_i üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde, $T \cong T_1 \times T_2$ ancak ve ancak $L \cong L_1 \times L_2$ dir.

ii) T direkt parçalanamaz t-normların direkt çarpımıdır ancak ve ancak L direk olarak parçalanamaz kafeslerin direkt çarpımıdır.

Örnek 2.2.14: i) Şekil 2 ile verilen $L = \{0, a, b, k, l, 1\}$ sınırlı kafesini ve Tablo 1’de gösterilen $T: L \times L \rightarrow L$ t-normunu düşünelim. Bu örnekte, a ve b elemanları T -dağılmalı elemanlar olmasına rağmen $a \vee b$ elemanı T -parçalanabilir değildir.

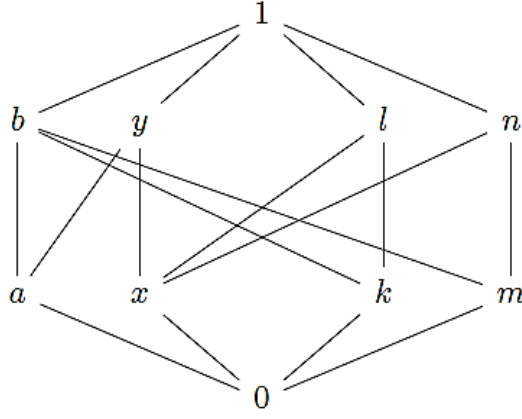


Şekil 2. L 'nin kafes diyagramı

Tablo 1. L üzerindeki T t-normu

T	0	a	k	b	l	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	0	a
k	0	a	0	0	0	k
b	0	0	0	b	b	b
l	0	0	0	b	1	1
1	0	a	k	b	1	1

ii) $L = \{0, a, b, x, y, k, l, m, n, 1\}$ Şekil 3 ile verilen bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde Tablo 2’de gösterildiği gibi bir t-norm olsun. Bu örnek, bize Teorem 2.2.10’un bir uygulamasını verir. Çünkü b ve x elemanları T -dağılmalı elemanlar, b elemanının komplementi x ve $b \vee x$ elemanı T -parçalanabilir. Ayrıca bu örnekte, $1 = b \vee x$ elemanı T -parçalanabilir iken $1 = x \vee k$ elemanının T -parçalanabilir olmadığını da gösterebiliriz. Gerçekten, $T(x \vee k, a) = a \neq 0 = T(x, a) \vee T(k, a)$ olduğundan $1 = x \vee k$ elemanı T -parçalanabilir değildir.



Şekil 3. L 'nin kafes diyagramı

Tablo 2. L üzerindeki T t-normu

T	0	x	a	y	k	l	m	n	b	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	x	0	x	0	x	0	x	0	x
a	0	0	0	0	0	0	0	0	a	a
y	0	x	0	x	0	x	0	x	a	y
k	0	0	0	0	0	0	0	0	k	k
l	0	x	0	x	0	x	0	x	k	l
m	0	0	0	0	0	0	0	0	m	m
n	0	x	0	x	0	x	0	x	m	n
b	0	0	a	a	k	k	m	m	b	b
1	0	x	a	y	k	l	m	n	b	1

Buna göre, Θ_b ve L/Θ_b aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\Theta_b = \{(0,0), (a,a), (b,b), (x,x), (y,y), (k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (1,1), (0,x), (x,0), (a,y), (y,a), (k,l), (l,k), (m,n), (n,m), (b,1), (1,b)\}$$

$L/\Theta_b = \{[0]_{\Theta_b}, [m]_{\Theta_b}, [a]_{\Theta_b}, [k]_{\Theta_b}, [1]_{\Theta_b}\}$ dir. Burada,

$$[0]_{\Theta_b} = \{0, x\}$$

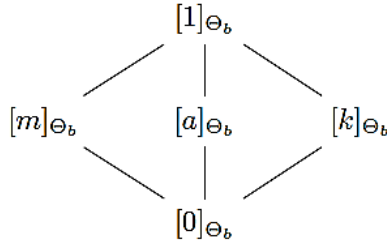
$$[a]_{\Theta_b} = \{a, y\}$$

$$[k]_{\Theta_b} = \{k, l\}$$

$$[m]_{\Theta_b} = \{m, n\}$$

$$[1]_{\Theta_b} = \{b, 1\}$$

dir. Buna göre L/Θ_b 'nin kafes diyagramı Şekil 4'teki gibidir.



Şekil 4. L/Θ_b 'nin kafes diyagramı

T_{Θ_b} 'nin L/Θ_b üzerinde T_W ile çakıştığı açıktır. Dahası,

$$\begin{aligned} \Theta_x = \{ & (0,0), (a,a), (b,b), (x,x), (y,y), (k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (1,1), (0,a), (a,0), \\ & (0,k), (k,0), (0,m), (m,0), (0,b), (b,0), (a,k), (k,a), (a,m), (m,a), (a,b), (b,a), \\ & (k,m), (m,k), (k,b), (b,k), (m,b), (b,m), (x,y), (y,x), (y,l), (l,y), (l,n), (n,l), \\ & (n,1), (1,n), (x,l), (l,x), (x,n), (n,x), (x,1), (1,x), (l,1), (1,l) \} \end{aligned}$$

$$[0]_{\Theta_x} = \{0, a, k, m, b\}$$

$$[1]_{\Theta_x} = \{n, x, l, 1\}$$

olarak elde ederiz. $L/\Theta_x = \{[0]_{\Theta_x}, [1]_{\Theta_x}\}$ üzerinde $T_{\Theta_x} = T_{\wedge}$ olduğu açıktır. $|L/\Theta_b| = 5$ ve $|L/\Theta_x| = 2$ asal sayı olduğundan Sonuç 2.2.13 ile, T_{Θ_b} ve T_{Θ_x} t-normlarının parçalanamaz olduğu açıktır.

Önerme 2.2.15: L dağılmalı bir kafes, $a \in L$ bir atom ve T, L üzerinde sıfır bölensiz bir t-norm olsun. Bu taktirde, a bir T -dağılmalı elemandır.

İspat: $x, y \in L$ keyfi olsun. a bir atom ve $T(a, x \vee y) \leq a$ olduğundan $T(a, x \vee y) = 0$ veya $T(a, x \vee y) = a$ dır. Eğer $T(a, x \vee y) = 0$ ise, $T(a, x) = T(a, y) = 0$ dır. Dolayısıyla, $T(a, x \vee y) = T(a, x) \vee T(a, y)$ dir. $T(a, x \vee y) = a$ olsun. Şimdi, $T(a, x) = a$ veya $T(a, y) = a$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, $T(a, x) = T(a, y) = 0$ olsun. T sıfır bölensiz ve L dağılmalı kafes olduğundan $a = T(a, x \vee y) \leq a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = 0 \vee 0 = 0$ elde edilir. Böylece, $a \leq 0$ olup $a = 0$ dır. Fakat, a bir atom ve T sıfır bölensiz bir t-norm olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, a elemanı T -dağılmalı bir elemandır.

Sonuç 2.2.16: i) L bir dağılmalı sınırlı kafes, $a \in L$ bir atom, T, L üzerinde sıfır bölensiz bir t-norm, $b \in L$ bir coatom öyleki $\Theta_b \in \text{Con}_T L$ ve $a || b$ olsun. Bu taktirde, $T \cong T_{\wedge} \times T_{\Theta_b}$ dır. Burada, $T_{\wedge}, \{0,1\}$ üzerinde infimum t-normu ve $T_{\Theta_b}, L/\Theta_b$ üzerinde bir t-normdur.

ii) T, L üzerinde $\wedge$ - ve $\vee$ -distributive bir t-norm, a bir atom ve b bir coatom öyleki $a || b$ olsun. Bu taktirde, $T \cong T_{\wedge} \times T_{\Theta_b}$ dır. Burada, $T_{\wedge}, \{0,1\}$ üzerinde bir t-norm ve $T_{\Theta_b}, L/\Theta_b$ üzerinde bir t-normdur.

iii) L dağılmalı bir kafes, $T = T_{\wedge}$, $a \in L$ bir atom atom, $b \in L$ bir coatom öyleki $a || b$ ve $a \vee b$ elemanı T - $\vee$ -parçalanabilir olsun. Bu taktirde $T \cong T_{\wedge} \times T_{\Theta_b}$ dır. Burada, $T_{\wedge}, \{0,1\}$ üzerinde bir t-norm ve $T_{\Theta_b}, L/\Theta_b$ üzerinde bir t-normdur.

İspat: i) a bir atom, b bir coatom ve $a||b$ olduğundan $a \wedge b = 0$ ve $a \vee b = 1$ dir. Teorem 2.2.10 ve Önerme 2.2.15 ile, $T \cong T_{\Theta_a} \times T_{\Theta_b}$ ve her $x \in L$ için $T(x, a) \leq a$ dir. Bu taktirde $T(x, a) = 0$ veya $T(x, a) = a$ dir. Buradan, $x \in [0]_a$ veya $x \in [1]_a$ elde edilir. Dolayısıyla, $L/\Theta_a \cong \{0,1\}$ ve $T_{\Theta_a} \cong T_\Lambda$ dir. Benzer şekilde, ii) ve iii) Teorem 2.2.10 ve Önerme 2.2.17 ile elde edilir.

Aşağıdaki teoremden, sonlu sınırlı bir kafes üzerindeki bir T t-normunun, direkt parçalanamaz t-normların direkt çarpımına izomorf olduğunu kanıtlanmıştır. Ancak kardinalite değerlendirmeleriyle, sayılabilir sonsuz bir Boole cebirindeki $T = T_W$ t-normunun direkt parçalanamaz t-normların direkt çarpımına izomorf olamayacağını hatırlayarak, çarpım kafeslerindeki trivial komplementlerin aşağıdaki teoremden ihmal edildiğine dikkat edelim.

Teorem 2.2.17: $(L, \leq)$ bir sonlu sınırlı kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu taktirde, T direkt parçalanamaz t-normların direkt çarpımına izomorftur.

İspat: Eğer L trivial ise, bu taktirde L 'nin kardinalitesi üzerinden induksiyon ile T parçalanamazdır. Şimdi, Kabul edelim ki L non-trivial sonlu kafes öyleki $|B| < |L|$ olan her B için B parçalanamaz t-normların çarpımına izomorf olsun. Eğer T parçalanamaz ise, iddia açıktır. Eğer T parçalanamaz değil ise, $|L_1|, |L_2| > 1$ ile $T \cong T_1 \times T_2$ dir. Bu taktirde, $|L_1|, |L_2| < |L|$, induksiyon hipotezi ile,

$$\begin{aligned} T_1 &\cong T'_1 \times \dots \times T'_m \\ T_2 &\cong T''_1 \times \dots \times T''_n \end{aligned}$$

Burada, T_i ve T_j parçalanamazdır. Sonuç olarak,

$$T \cong T'_1 \times \dots \times T'_m \times T''_1 \times \dots \times T''_n.$$

Aşağıdaki önermeden, T_W t-normunun herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde direkt parçalanamaz olduğu elde edilir.

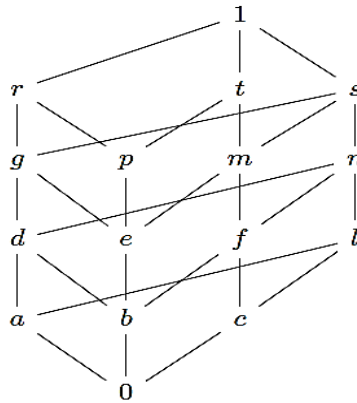
Önerme 2.2.18: $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes olsun. Bu taktirde, T_W , L üzerinde direkt parçalanamazdır.

İspat: Eğer $|L| \leq 2$ ise, bu taktirde T_W direkt parçalanamazdır. Şimdi, $|L| > 2$ olsun. Kabul edelim ki $\theta_1, \theta_2 \in \text{Con}_{T_W} L$ ve $\theta_1 \wedge \theta_2 = \Delta_L$, $\theta_1 \circ \theta_2 = \nabla_L$ olsun. $a \in L \setminus \{0, 1\}$ keyfi olsun. $(a, 1) \in \theta_1 \circ \theta_2$ ile, $(a, c) \in \theta_1$ ve $(c, 1) \in \theta_2$ olacak şekilde bir $c \in L$ mevcuttur. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \text{Eğer } c = 1 &\Rightarrow (a, 1) \in \theta_1 \\ &\Rightarrow (T_W(a, a), T_W(1, 1)) \in \theta_1 \\ &\Rightarrow (0, 1) \in \theta_1 \\ &\Rightarrow \theta_1 = \nabla_L, \theta_2 = \Delta_L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eğer } c \neq 1 &\Rightarrow (c, 1) \in \theta_2 \\ &\Rightarrow (T_W(c, c), T_W(1, 1)) \in \theta_2 \\ &\Rightarrow (0, 1) \in \theta_2 \\ &\Rightarrow \theta_1 = \Delta_L, \theta_2 = \nabla_L. \end{aligned}$$

Örnek 2.2.19: $L = \{0, a, b, c, d, e, f, g, l, m, n, p, r, s, t, 1\}$ Şekil 5'teki Hasse diyagramı ile karakterize edilen bir sınırlı kafes ve T , L üzerinde Tablo 3'te tanımlanan $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılımlı bir t-norm olsun.



Şekil 5. L 'nin kafes diyagramı

Tablo 3. L üzerindeki T t-norm

T	0	a	b	c	d	e	f	g	l	m	n	p	r	s	t	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a	0	0	a	a	0	a	0	a	a	0	a
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b	b	0	b	b
c	0	0	0	c	0	0	c	0	c	c	c	0	0	c	c	c
d	0	a	0	0	a	0	0	a	a	0	a	b	d	a	b	d
e	0	0	0	0	0	e	0	e	0	e	0	e	e	e	e	e
f	0	0	0	c	0	0	c	0	c	c	c	b	b	c	f	f
g	0	a	0	0	a	e	0	g	a	e	a	e	g	g	e	g
l	0	a	0	c	a	0	c	a	l	c	l	0	a	l	c	l
m	0	0	0	c	0	e	c	e	c	m	c	e	e	m	m	m
n	0	a	0	c	a	0	c	a	l	c	l	b	d	l	f	n
p	0	0	b	0	b	e	b	e	0	e	b	p	p	e	p	p
r	0	a	b	0	d	e	b	g	a	e	d	p	r	g	p	r
s	0	a	0	c	a	e	c	g	l	m	l	e	g	s	m	s
t	0	0	b	c	b	e	f	e	c	m	f	p	p	m	t	t
1	0	a	b	c	d	e	f	g	l	m	n	p	r	s	t	1

Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \Theta_p = \{ & (0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (g,g), (l,l), (m,m), (n,n), (p,p), \\ & (r,r), (s,s), (t,t), (1,1), (0,a), (a,0), (0,c), (c,0), (a,c), (c,a), (l,c), (c,l), (l,0), \\ & (0,l), (l,a), (a,l), (b,n), (n,b), (b,d), (d,b), (f,d), (d,f), (f,b), (b,f), (e,g), \\ & (g,e), (e,m), (m,e), (s,m), (m,s), (m,g), (g,m), (s,e), (e,s), (p,r), (r,p), (t,p), \\ & (t,r), (p,t), (r,t), (1,t), (t,1), (1,p), (p,1) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_l = \{ & (0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (g,g), (l,l), (m,m), (n,n), (p,p), \\ & (r,r), (s,s), (t,t), (1,1), (0,b), (b,0), (e,b), (b,e), (e,0), (0,e), (p,e), (e,p), (p,b), \\ & (b,p), (p,0), (0,p), (a,d), (d,a), (g,d), (d,g), (g,a), (a,g), (r,d), (d,r), (c,f) \\ & (f,c), (f,m), (m,f), (t,f), (f,t), (m,t), (t,m), (l,s), (s,l), (n,s), (s,n), (1,s), \\ & (s,g), (1,l), (l,1)\}.\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Θ_p ve $\Theta_l \in \text{Con}_T L$ için $\Theta_p \circ \Theta_l = \nabla_L$, $\Theta_p \wedge \Theta_l = \Delta_L$ eşitlikleri sağlanır ve ayrıca, $L/\Theta_p = \{[0]_{\Theta_p}, [b]_{\Theta_p}, [s]_{\Theta_p}, [1]_{\Theta_p}\}$ olarak elde edilir. Burada,

$$[0]_{\Theta_p} = \{0, a, c, l\},$$

$$[b]_{\Theta_p} = \{b, d, f, n\},$$

$$[s]_{\Theta_p} = \{s, e, m, g\},$$

$$[1]_{\Theta_p} = \{r, p, t, 1\}$$

dir. Buna göre L/Θ_p 'nin kafes diyagramı Şekil 6'daki gibidir.

$$\begin{array}{c} [1]_{\Theta_p} \\ | \\ [s]_{\Theta_p} \\ | \\ [b]_{\Theta_p} \\ | \\ [0]_{\Theta_p} \end{array}$$

Şekil 6. L/Θ_p 'nin kafes diyagramı

Dolayısıyla,

$$T_{\Theta_p}([0]_{\Theta_p}, [x]_{\Theta_p}) = [0]_{\Theta_p}, \text{ (her } [x]_{\Theta_p} \in L/\Theta_p \text{ için),}$$

$$T_{\Theta_p}([1]_{\Theta_p}, [x]_{\Theta_p}) = [x]_{\Theta_p}, \text{ (her } [x]_{\Theta_p} \in L/\Theta_p \text{ için),}$$

$$T_{\Theta_p}([b]_{\Theta_p}, [b]_{\Theta_p}) = [T(b, b)]_{\Theta_p} = [0]_{\Theta_p},$$

$$T_{\Theta_p}([b]_{\Theta_p}, [s]_{\Theta_p}) = [T(b, s)]_{\Theta_p} = [0]_{\Theta_p} = T([s]_{\Theta_p}, [b]_{\Theta_p}),$$

$$T_{\Theta_p}([s]_{\Theta_p}, [s]_{\Theta_p}) = [T(s, s)]_{\Theta_p} = [s]_{\Theta_p}$$

eşitliklerini elde ederiz. Buna göre, L/Θ_p üzerindeki T_{Θ_p} t-normu Tablo 4'deki gibidir.

Tablo 4. L/Θ_p üzerindeki T_{Θ_p} t-normu

T_{Θ_p}	$[0]_{\Theta_p}$	$[b]_{\Theta_p}$	$[s]_{\Theta_p}$	$[1]_{\Theta_p}$
$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$
$[b]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[b]_{\Theta_p}$
$[s]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[s]_{\Theta_p}$	$[s]_{\Theta_p}$
$[1]_{\Theta_p}$	$[0]_{\Theta_p}$	$[b]_{\Theta_p}$	$[s]_{\Theta_p}$	$[1]_{\Theta_p}$

$L/\Theta_l = \{[0]_{\Theta_l}, [a]_{\Theta_l}, [c]_{\Theta_l}, [1]_{\Theta_l}\}$ olarak elde edilir. Burada,

$$[0]_{\Theta_l} = \{0, b, p, e\},$$

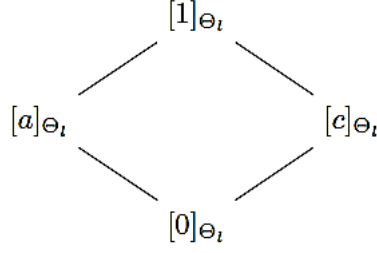
$$[a]_{\Theta_l} = \{a, d, g, r\},$$

$$[c]_{\Theta_l} = \{c, f, m, t\},$$

$$[1]_{\Theta_l} = \{l, 1, s, n\}$$

dır.

Buna göre, L/Θ_l 'nin kafes diyagramı Şekil 7'deki gibidir.



Şekil 7. L/Θ_l 'nin kafes diyagramı

Böylece, L/Θ_l üzerinde $T_{\Theta_l} = T_{\wedge}$ olduğu görülüyor. Teorem 2.2.10 ile, L üzerindeki T t-normunun, L/Θ_p üzerinde T_{Θ_p} ve L/Θ_l üzerinde T_{Θ_l} t-normlarının direkt çarpımı olduğunu elde ederiz.

Önerme 2.2.20: T , L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm, $a, b \in L \setminus \{0\}$ için Θ_a and Θ_b faktör kongrüanslarının bir çifti olsun. Bu taktirde, a ve b elemanları T -nilpotent elemanlar değildir.

İspat: Kabul edelim ki a elemanı bir T -nilpotent eleman olsun. Bu taktirde, $a_{\tau}^{(n)} = 0$ ve $a_{\tau}^{(n-1)} \neq 0$ olacak şekilde bir $n > 1$ doğal sayısı vardır. Bu taktirde, $T(a, b) = 0$ ile, $(a_{\tau}^{(n-1)}, 0) \in \Theta_a$ ve $(a_{\tau}^{(n-1)}, 0) \in \Theta_b$ dir. $\Theta_a \wedge \Theta_b = \Delta_L$ olduğundan $a_{\tau}^{(n-1)} = 0$ elde ederiz. Fakat bu bir çelişkidir. Böylece, a elemanı nilpotent bir eleman değildir. Benzer şekilde b elemanının nilpotent bir eleman olmadığı gösterilebilir.

Önerme 2.2.21: $s, r \in L$ ve T , L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm olsun. Bu taktirde, aşağıdaki önermeler sağlanır:

- i) Eğer Θ_s ve Θ_r faktör kongrüanslarının bir çifti ise, bu taktirde $s \wedge r = 0$ dir.
- ii) Eğer $\Theta_s \wedge \Theta_r = \Delta_L$ ve s, r elemanları T -idempotent ise, bu taktirde $s \vee r = 1$ dir.

İspat: i) $(0,1) \in \nabla_L = \Theta_s \circ \Theta_r$ olduğundan $(0,t) \in \Theta_s$ ve $(t,1) \in \Theta_r$ olacak şekilde bir $t \in L$ mevcuttur. Dolayısıyla, $T(0,s) = T(t,s)$, $T(t,r) = r$ dir. Bundan dolayı, $r = T(t,r \wedge 1) = T(t,r) \wedge t = r \wedge t$ dir. Buradan, $r \leq t$ elde ederiz. Böylece, $0 = T(s,t) = T(s,r \vee t) = T(s,r) \vee T(s,t) = T(s,r)$ dir. Dolayısıyla, $T(s,r) = 0 = T(s,0)$ dir. O halde, $(0,r) \in \Theta_s$ dır. Buradan, $(s,s) \in \Theta_s$ olduğundan $(0,s \wedge r) \in \Theta_s$ elde ederiz. Benzer şekilde, $(s,0) \in \Theta_r$, $(s \wedge r,0) \in \Theta_r$ ve dolayısıyla $(s \wedge r,0) \in \Theta_s \wedge \Theta_r = \Delta_L$ olduğunu elde ederiz. Buradan, $s \wedge r = 0$ elde edilir.

ii) $T(s,s) = s = T(s,1)$ ve $T(r,r) = r = T(r,1)$ olduğundan $(s,1) \in \Theta_s$ ve $(r,1) \in \Theta_r$ elde edilir. Dolayısıyla, $(r,r) \in \Theta_s$ ve $(s,s) \in \Theta_r$ olduğundan $(s \vee r,1) \in \Theta_s$ ve $(s \vee r,1) \in \Theta_r$ elde edilir. Buradan, $(s \vee r,1) \in \Theta_s \wedge \Theta_r = \Delta_L$ olduğundan $s \vee r = 1$ olduğu elde edilir.

Sonuç 2.2.22: Eğer L bir sınırlı dağılmalı kafes ve Θ_s, Θ_r faktör kongrüanlarının bir çifti ise, bu taktirde r elemanının bir komplementi s dir.

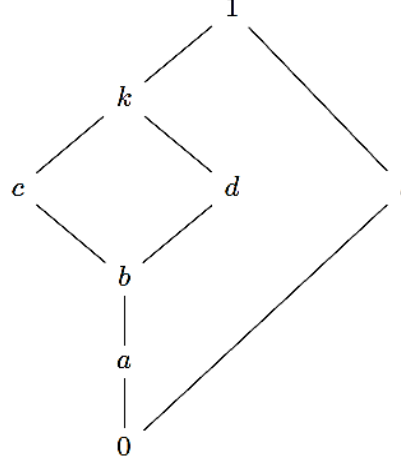
Sonuç 2.2.23: Eğer $|L|$ asal sayı, $|CompL| > 2$ ve L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm yok ise, bu taktirde dağılmalı bir kafes değildir.

Aşağıdaki sonuç, Önerme 2.2.21, Teorem 2.2.9 (ix) ve Teorem 2.2.10 kullanılarak elde edilir ve komplementlenebilir elemanların kümesi $CompL$ ile $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılımlı bir t-normun direkt parçalanabilirliği arasında bir ilişki verir.

Sonuç 2.2.24: i) L bir sınırlı kafes ve T, L üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm olsun. Bu taktirde, eğer T direkt parçalanabilir ise, $|CompL| > 2$ dir.

ii) L bir sınırlı dağılmalı kafes olsun. Bu taktirde, eğer L direkt parçalanabilir ise, $|CompL| > 2$ dir.

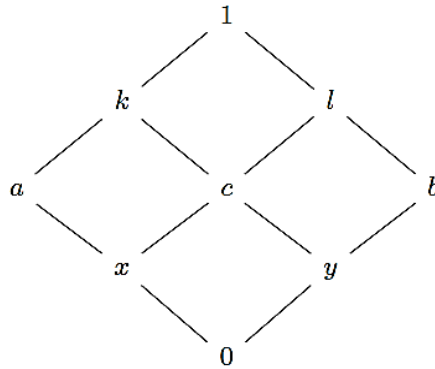
Örnek 2.2.25: Sonuç 2.2.24'ü kullanarak, Şekil 8'de kafes diyagramı gösterilen $L = \{0, a, b, c, k, l, 1\}$ üzerinde $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı bir t-norm olmadığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla, L dağılmalı bir kafes değildir.



Şekil 8. L 'nin kafes diyagramı

Aşağıdaki örnekte, Teorem 2.2.10'u kullanarak L kafesi üzerindeki tüm $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-normlar belirlenmiştir.

Örnek 2.2.26.: Şekil 9'da kafes diyagramı verilen L dağılmalı kafesi üzerinde bir $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-norm olduğunu bildiğimiz için, L kafesi üzerindeki tüm $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-normları belirleyebiliriz.



Şekil 9. L 'nin kafes diyagramı

Gerçekten, Eğer $T = T_\Lambda$ alırsak, Θ_a ve Θ_b kongrüansları için

$$L/\Theta_a = \{[0]_{\Theta_a}, [c]_{\Theta_a}, [1]_{\Theta_a}\}$$

ve

$$L/\Theta_b = \{[0]_{\Theta_b}, [c]_{\Theta_b}, [1]_{\Theta_b}\}$$

olarak elde ederiz. Dolayısıyla, $L \cong L/\Theta_a \times L/\Theta_b$ dir. Buna göre, muhtemel $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-normlar T_Λ ve L/Θ_a ve L/Θ_b üzerinde T_W olduğundan L üzerindeki tüm $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-normlar aşağıda verilmiştir. (Tablo 5-7):

$$T_1 = T_\Lambda,$$

Tablo 5. $T_W \times T_W$ 'ya izomorf olan L üzerindeki $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı T_2 t-normu

T_2	0	x	y	a	c	b	l	k	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	x	0	0	0	x	x
y	0	0	0	0	0	y	y	0	y
a	0	x	0	a	x	0	x	a	a
c	0	0	0	x	0	y	y	x	c
b	0	0	y	0	y	b	b	y	b
l	0	0	y	x	y	b	b	c	l
k	0	x	0	a	x	y	c	a	k
1	0	x	y	a	c	b	l	k	1

Tablo 6. $T_W \times T_\Lambda$ 'ya izomorf olan L üzerindeki $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı T_3 t-normu

T_3	0	x	y	a	c	b	l	k	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	x	0	0	0	x	x
y	0	0	y	0	y	y	y	y	y
a	0	x	0	a	x	0	x	a	a
c	0	0	y	x	y	y	y	c	c
b	0	0	y	0	y	b	b	y	b
l	0	0	y	x	y	b	b	c	l
k	0	x	y	a	c	y	c	k	k
1	0	x	y	a	c	b	l	k	1

Tablo 7. $T_\Lambda \times T_W$ 'ya izomorf olan L üzerindeki $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı T_4 t-normu

T_4	0	x	y	a	c	b	l	k	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	x	0	x	x	0	x	x	x
y	0	0	0	0	0	y	y	0	y
a	0	x	0	a	x	0	x	a	a
c	0	x	0	x	x	y	c	x	c
b	0	0	y	0	y	b	b	y	b
l	0	x	y	x	c	b	l	c	l
k	0	x	0	a	x	y	c	a	k
1	0	x	y	a	c	b	l	k	1

T_1 , T_2 , T_3 ve T_4 t-normlarının sırasıyla $T_\Lambda \times T_\Lambda$, $T_W \times T_W$, $T_W \times T_\Lambda$ ve $T_\Lambda \times T_W$ t-normlarına izomorf olduğuna dikkat edelim.

3. İRDELEME

Bir üçgensel normu doğrudan parçalanamayan üçgensel normların direkt çarpımı olarak yazılabilmesi sadece matematik ve fizikte değil, bunun yanı sıra mühendislikte, ekonomide ve diğer bilimlerde kayda değer bir öneme sahiptir. Bu sebeple, literatürde bu alanda pek çok çalışma mevcuttur. Esasen, üçgensel normlar ilk olarak birim aralık üzerinde tanımlanmış ve çalışılmıştır. Fakat uygulamada karşılaşılan problemler ışığında birim aralık dışında farklı sınırlı kafesler üzerinde üçgensel normalara ihtiyaç duyulmuştur. Böylece birim aralık üzerinde tanımlı üçgensel normaların farklı tanım kümeleri üzerinde tanımlanması problemi doğmuştur. Üçgensel normlar incelenirken daha sonraki çalışmalarda keyfi sınırlı kafesler üzerinde incelenmeye başlanmıştır. Bu durum üçgensel normal için yeni bir çalışma alanı oluşturmıştır. Bu bağlamda birçok çalışma yapılmış ve üçgensel normlar için sınırlı kafesler üzerinde pek çok inşaa elde edilmiştir. Yapılan inşalar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Böylece, bu alanın gelişmesinde belli safhalar kaydedilmiştir. Üçgensel normların keyfi sınırlı kafesler üzerinde tanımlanması probleminin yanı sıra uygulamada ve teoride kullanılmak üzere özel tipte normların tanımlanması ve ilgili özelliklerinin incelenmesi oldukça fazla önem arz etmektedir. Bu çalışmada ise öncelikle keyfi sınırlı kafesler üzerinde üçgensel norm kavramı tanıtılmıştır. $L = [0,1]$ alınması durumunda literatürde oldukça fazla karşılaşılan temel t-normlar verilmiştir. Bu ve bununla birlikte sunulan temel ışığında t-normların kongrüanslar aracılığı ile direkt parçalanışları ele alınmıştır. Üçgensel normalrın direkt parçalanışları ile ilgili özellikler incelenmiş ve elde edilen teoremler ispatları ile birlikte verilmeye çalışılmıştır.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada, üçgensel normların kongrüanslar aracılığıyla direkt parçalanışlarını elealdı. Bu bağlamda, sınırlı kafesler üzerinde kongrüanslar ve üçgensel normlar başta olmak üzere ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremler verildi. Ek olarak, bu çalışmada:

1. Sınırlı bir kafes üzerinde T -dağılmalı eleman, faktor kongrüansı kavramları verildi.
2. Sınırlı bir kafes üzerinde basit üçensel norm ve parcalanamaz t-norm kavramları T -uyumlu kongrüans yardımıyla tanıtılarak ilgili özellikleri incelendi.
3. Bir Boole cebiri üzerinde en küçük t-normun basit olduğu gözlemlendi.
4. Üçensel normlar yardımıyla bir kongrüans tanımlandı.
5. Bu kongrüansın bazı cebirsel özellikleri incelendi ve ispatlarıyla birlikte verildi.
6. Herhangi bir T t-normunun direkt olarak parcalanabilirliği ile supremumu T - $\vee$ parcalanabilir olan T -dağılmalı elemanlar arasında bir ilişki elde edildi.
7. Herhangi bir $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-normun $\vee$ - ve $\wedge$ -dağılmalı t-normların direkt bir çarpımına izomorf olması için gerekli ve yeterli koşulları verildi.
8. Sunulan bu teori çeşitli örnekler yardımıyla desteklendi

4. ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen sonuçlara benzer sonuçların diğer birleştirme fonksiyonları (uninormlar, nullnormlar vs.) için geçerli olup olmadığının araştırılması bu alanın gelişmesine katkı sağlayabilecek ve bu alana kazandırılacak araştırma konuları olacaktır.



5. KAYNAKLAR

- Alsina, C., Frank, M., J. ve Schweizer, B., 2006. Associative functions: Triangular norms and copulas, World Scientific, Singapore.
- Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, Rhode Island.
- Burris, S. ve Sankappanavar, H., P., 1981. Course in universal algebra, Springer, New York.
- Chajda, I., Halaš, R. ve Mesiar, R., 2020. On the decomposability of aggregation functions on direct products of posets, Fuzzy Sets and Systems, 386, 25-35
- De Baets, B. ve mesiar, R., 1999. Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104, 61-75.
- De Comman. G. ve Kerre, E., E., 1994. Order norms on bounded partially ordered sets, J. Fuzzy Math., 2, 281-310.
- Ertuğrul, Ü., Karaçal, F. ve Mesiar, R., 2015. Modified ordinal sums of triangular norms and triangular conorms on bounded lattices, Int. J. Intell. Systems, 30, 807-817.
- Höhle, U. ve Klment, E., P., 1995. Commutative, residuated, 1-monoids, in: Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets: A Handbook on the Mathematical Foundations of Fuzzy Set Theory, Kluwer, Dordrecht.
- Jenei, S. ve De Baets, B., 2003. On the direct decomposability of t-norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 139, 699-707.
- Karaçal, F. ve Khadjiev, Dj., 2005. $\vee$ -distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattices, Fuzzy Sets and Systems, 151, 341-352.
- Klement, E., P., Mesiar, R. ve Pap, E., 2000. Integration with respect to decomposable measures, based on a conditionally distributive semiring on the unit interval, Int. J. Uncertain Fuzziness Knowl-Based Syst., 8, 701-717.
- Klement, E., P., Mesiar, R. ve Pap, E., 2000. Triangular norms Trends in logic, Studia Logica Library, vol. 8, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Liang, X. ve Pedrycz, W., 2009. Logic-based fuzzy networks: a study in systems modeling with triangular norms and uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 160, 3475-3502.
- Saminger, S., 2006. On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 157, 1403-1416.
- Schweizer, B. ve Sklar, A., 1983. Probabilistic Metric Spaces, Elsevier, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Samet Arpacı, İlköğrenimini Arpacılı köyü Metinkale İlköğretim Okulunda ve lise öğrenimini Akçaabat İMKB Anadolu Lisesinde birincilikle tamamladı. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2021 yılında bu bölümden hem fakülte hemde bölüm birinciliği ile mezun oldu. Aynı yılda Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans Programını kazandı. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitime devam etmekte olup Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi bilim alanında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Yabancı dili ingilizcedir.