

**ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR FONKSİYONEL DİFERENSİYEL  
DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE**

**Mustafa Fahri AKTAŞ**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ARALIK 2008  
ANKARA**

Mustafa Fahri AKTAŞ tarafından hazırlanan ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ .....

Tez Danışmanı, Matematik ve Bilgisayar Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Okay ÇELEBİ .....

Matematik Anabilim Dalı, Yeditepe Üniversitesi

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ .....

Matematik ve Bilgisayar Anabilim Dalı, İzmir Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR .....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Ağacık ZAFER .....

Matematik Anabilim Dalı, O.D.T.Ü.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU .....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih : 05/12/2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL .....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa Fahri AKTAŞ

# **ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE**

**(Doktora Tezi)**

**Mustafa Fahri AKTAŞ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Aralık 2008**

## **ÖZET**

**Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, amaca yönelik temel kavramlara değinilip üçüncü basamaktan denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin bazı önemli çalışmalara yer verilmiştir. Tamamen orijinal sonuçlardan oluşan üçüncü bölümde belli sınıftan üçüncü basamaktan denklemlerin salınımlılığına ilişkin kriterler inşa edilmiştir.**

|                          |                                                                                                                   |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Bilim Kodu</b>        | <b>: 204.1.138</b>                                                                                                |
| <b>Anahtar Kelimeler</b> | <b>: Diferensiyel Denklem, Üçüncü Basamaktan Lineer Olmayan Diferensiyel Denklem, Salınımlılık, Salınımsızlık</b> |
| <b>Sayfa Adedi</b>       | <b>: 67</b>                                                                                                       |
| <b>Tez Yöneticisi</b>    | <b>: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ</b>                                                                                  |

**ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF A CLASS OF THIRD ORDER  
FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**(Ph. D. Thesis)**

**Mustafa Fahri AKTAŞ**

**GAZI UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**December 2008**

**ABSTRACT**

**This thesis consists of three chapters. The first chapter is the introduction. The second chapter deals with the fundamental concepts and provides a survey of literature relevant to oscillation of solutions of third order equations. The third chapter, which presents completely new results, is the criteria regarding the oscillation of solutions of a class of third order equations.**

|                        |                                                                                                          |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Science Code</b>    | <b>: 204.1.138</b>                                                                                       |
| <b>Key Words</b>       | <b>: Differential Equation, Third Order Nonlinear Differential Equation, Oscillation, Nonoscillation</b> |
| <b>Number of Pages</b> | <b>: 67</b>                                                                                              |
| <b>Adviser</b>         | <b>: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ</b>                                                                         |

## TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim danışmanım Sayın Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ ye, bugünlere gelmemi sağlayan aileme ve yardımlarını benden esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK a teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                            | Sayfa |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                                                 | iv    |
| ABSTRACT .....                                                                             | v     |
| TEŞEKKÜR.....                                                                              | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                          | vii   |
| 1. GİRİŞ .....                                                                             | 1     |
| 2. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN<br>SALINIMLILIĞI .....                      | 3     |
| 2.1. Temel Kavramlar .....                                                                 | 3     |
| 2.2. Lineer Denklemlere İlişkin Bazı Sonuçlar .....                                        | 7     |
| 2.3. Lineer Olmayan Denklemlere İlişkin Bazı Sonuçlar .....                                | 13    |
| 3. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ<br>ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI..... | 23    |
| 3.1. $f$ Fonksiyonunun Monoton Olmaması Durumu .....                                       | 28    |
| 3.2. $f$ Fonksiyonunun Monoton Olması Durumu .....                                         | 48    |
| KAYNAKLAR .....                                                                            | 64    |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                             | 67    |

## 1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin geniş uygulama alanına sahip olduğu bilinmektedir. Bu nedenle her denklemin çözümünü bilmek istememiz doğaldır. Ancak çok az sayıdaki denklem tiplerinin elemanter çözümlerini elde edebilme gerçeği araştırmacıları, denklemin çözümünü elde etmeksizin verilen denklemden hareketle çözümlerin özelliklerini araştırmaya yöneltmiştir. Bu anlamda çözümlerin salınımlılığı, salınımsızlığı, sınırlılığı, kararlılığı ve uzun zaman davranışı gibi kalitatif incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olmuştur. İkinci basamaktan diferensiyel denklemlerin salınımlılık ve salınımsızlık problemi üzerine son yıllarda çok ilgi duyulmuş ve bu konuda yapılan bilimsel yayınlarla oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir. Ancak, üçüncü basamaktan diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ve salınımsızlığına ilişkin çalışmalara bakıldığında ikinci basamaktaki kadar geniş bir literatüre sahip değildir. Örneğin;

$$(ty')'' + \frac{1}{4t}y' + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \left|y(t + \sin t)\right|^{\alpha-1} y(t + \sin t) = 0$$

şeklindeki bir diferensiyel denklemin literatürde yer alan bilinen kriterlerle salınımlılığı ya da salınımsızlığı test edilememektedir. Bu tip örneklerle cevap verecek biçimde özellikle ikinci basamaktan denklemler için bilinen integral ortalama tekniğini kullanarak üçüncü basamaktan fonksiyonel tipten denklemlerin çözümlerinin davranışını incelemek önemlidir.

Çalışmaya esas olan orijinal sonuçların alt yapısını oluşturmak için ikinci bölümde, amaca yönelik temel kavramlar verildikten sonra üçüncü basamaktan lineer ve lineer olmayan belli tipten denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin ortalama tekniğini içeren bir dizi önemli sonuçlar, sistematik biçimde sunulacaktır.

Tamamen özgün ve orijinal sonuçlardan oluşan üçüncü bölümde önce  $f$  fonksiyonunun monoton olmaması durumunda

$$\left( r_2(t)(r_1(t)y')' \right)' + p(t)y' + q(t)f(y(g(t))) = 0$$

gecikmeli denkleminin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin ortalama tekniğini içeren bir dizi sonuçlara yer verilmiştir. Daha sonra,  $f$  fonksiyonunun monoton olması halinde

$$\left( r_2(t)(r_1(t)y')' \right)' + p(t)y' + q(t)f(y(g(t))) = 0$$

gecikmeli ve ileri tipten denklem için bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak da, özel durumda

$$y''' + p(t)y' + q(t)f(y(t)) = 0$$

denklemini üzerinde durulmuştur. Ayrıca, bu bölümde elde edilen teoremlerin uygulanabildiği fakat literatürdeki diğer sonuçların uygulanamadığı örnekler verilerek yeni kriterlerin önemi vurgulanmıştır.

## 2. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

### 2.1. Temel Kavramlar

Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı, salınımsızlığı, sınırlılığı, kararlılığı ve uzun zaman davranışı gibi kalitatif incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olduğu gibi halen de süregelmektedir. Fonksiyonel diferensiyel denklemlere ilişkin salınım teorisi adi diferensiyel denklemlerdeki salınım teorisinin doğal bir genellemesidir. Bu anlamda, fonksiyonel diferensiyel denklemlerinin bir  $y(t)$  çözümünün,  $[T_0, \infty)$  aralığında mevcut ve her  $T_1 \geq T_0$  için  $\sup \{|y(t)| : t \geq T_1\} > 0$  özelliğine sahip olduğunu kabul edelim.

Tanım 2.1.

Bir  $y(t) : [T_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  çözümü,  $t \geq T_0$  için keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip ise yani;  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  olacak şekilde çözümün sıfırlarının bir  $\{t_n\}$  dizisi mevcut ise çözüme salınımlıdır denir. Üçüncü basamaktan bir diferensiyel denkleminin en az bir çözümü salınımlı ise denkleme salınımlı denklemdir.

Tanım 2.2.

$y(t)$  çözümü, salınımlı değilse salınımsızdır. Salınımsız bir  $y(t)$  çözümüne,  $t \geq T_1$  için  $y(t) > 0$  ( $y(t) < 0$ ) olacak şekilde yeterince büyük bir reel  $T_1$  sayısı mevcut ise pozitif çözüm (negatif çözüm) denir.

Adi diferensiyel denklemlerle, değişen argümentli diferensiyel denklemler arasındaki ilişkileri vurgulamak açısından, aşağıdaki örnekler üzerinde duralım:

Örnek 2.1.

$$y'(t) \mp y\left(t \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

denklemini göz önüne alalım.  $y_1(t) = \cos t$  ve  $y_2(t) = \sin t$  bu denklemin birer salınımlı çözümleri olmasına rağmen,

$$y' \mp y = 0$$

denklemini, salınımlı bir çözüme sahip değildir.

Örnek 2.2.

$$y''(t) - y(t - \pi) = 0$$

denklemini,  $y_1(t) = \cos t$  ve  $y_2(t) = \sin t$  şeklinde salınımlı çözümlere sahip olmasına rağmen,

$$y'' - y = 0$$

denkleminin salınımlı çözümü yoktur.

Örnek 2.3.

$$y''(t) + y(\pi - t) = 0$$

denklemini,  $y_1(t) = \sin t$  şeklinde bir salınımlı çözüme ve  $y_2(t) = e^t - e^{\pi-t}$  şeklinde bir salınımsız çözüme sahiptir.

Örnek 2.4.

$$y''' + y = 0$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin  $y_1(t) = e^{-t}$  çözümü salınımsızdır.

$y_2(t) = e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$  ve  $y_3(t) = e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$  çözümleri ise salınımlıdır.

Örnek 2.5.

$$y'''(t) + y(t - \tau) = 0 \quad (\tau > 0)$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart  $\tau e > 3$  olmasıdır [1].

Bilindiği gibi, ikinci basamaktan

$$y'' + q(t)y = 0$$

lineer diferensiyel denkleminin bütün çözümleri, ya salınımlıdır ya da salınımsızdır ve üçüncü basamaktan lineer denklemler için Sturm teorisi genel olarak geçerli olmadığından böyle bir genelleme yapılamaz. Örnek 2.4 e bakıldığında denklemin lineer bağımsız iki çözümü salınımlı olmasına rağmen diğeri salınımsızdır.

Ancak, yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi, değişen argümentli denklemler için, durum böyle değildir. Örneğin;

$$y''(t) + q(t)y(g(t)) = 0 \tag{2.1}$$

veya

$$y'''(t) + q(t)y(g(t)) = 0 \quad (2.2)$$

denklemlerini göz önüne alırsak aşağıdaki durumlardan biri söz konusudur;

- a) Bütün çözümleri salınımlı olabilir.
- b) Bütün çözümleri salınımsız olabilir.
- c) Denklem salınımlı bir çözüme sahip olabilir.
- ç) Denklem salınımsız bir çözüme sahip olabilir.
- d) Denklem hem salınımlı hem de salınımsız çözümlere sahip olabilir.

Gerek elemanter düzeyde gerekse ileri düzeyde, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin inşa edilen kriterlerin pek çoğu limit ve integral metodunu içeren testlerle ilgilidir. Bu bölümde üçüncü basamaktan lineer ve lineer olmayan denklemler için ortalama tekniğini içeren bir dizi önemli sonuç ve kriter sistematik bir biçimde sunulacaktır.

Üçüncü basamaktan lineer

$$y''' + r(t)y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (2.3)$$

denklemin çözümlerinin salınımlılığы üzerine ilk çalışma 1911 yılında Birkhoff [2] tarafından yapıldı. 1960 yılında Villari [3], üçüncü basamaktan lineer

$$y''' + q(t)y = 0 \quad (2.4)$$

denklemini üzerine çalışmalar yaptı. Daha sonra Hanan [4], Lazer [5] ve Barrett [6] in çalışmaları Eş. 2.4 den daha genel olan

$$y''' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (2.5)$$

lineer denklemi ile devam etmiştir. Yukarıda belirtilen yazarların elde ettiği sonuçlar, salınımlılık konusunda birçok ilginç özelliğe sahip olan

$$y''' + p(t)y' + q(t)|y|^{\alpha-1}y = 0 \quad (2.6)$$

denkleme Nelson [7], Elias [8], Soltes [9] ve Erbe [10] tarafından genişletilmiştir. Eş. 2.5 den daha genel olan lineer olmayan

$$y''' + p(t)y' + q(t)y^\gamma = 0 \quad (2.7)$$

ve

$$y''' + p(t)y' + q(t)f(y) = 0 \quad (2.8)$$

denklemleri için Waltman [11] tarafından yapılan çalışmalardan sonra Heidel [12], Kura [13], Parhi [14] ve Tiryaki [15] de lineer olmayan denklemler için bazı salınımlılık sonuçları elde etmiştir.

## 2.2. Lineer Denklemlere İlişkin Bazı Sonuçlar

Lineer denklemlerin salınımlılığı için elde edilen bazı kriterler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Teorem 2.1.

$\eta > 0$  ve  $q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\int t^{2-\eta} q(t) dt = \infty$$

ise Eş. 2.4 ün bir salınımlı çözümü vardır [3].

Tanım 2.3.

Eş. 2.8 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $i = 0, 1, 2$  için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^{(i)}(t) = 0$$

ve her  $t \geq T_1$  için

$$(-1)^i y^{(i)}(t) \operatorname{sgn} y(t) > 0$$

olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  var ise Eş. 2.8 e  $\mathcal{A}$  özelliğine sahiptir denir [16].

Eş. 2.4 ün en az bir salınımlı çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart  $\mathcal{A}$  özelliğine sahip olmasıdır [17, Lemma 2.8' ].

Teorem 2.2.

$0 < \eta \leq 2$  ve  $q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\int t^{2-\eta} q(t) dt = \infty$$

ise Eş. 2.4  $\mathcal{A}$  özelliğine sahiptir [17-19].

Teorem 2.3.

$q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t \int_t^{\infty} s q(s) ds > \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ise Eş. 2.4  $\mathcal{A}$  özelliğine sahiptir [17, Teorem 2.12].

Teorem 2.4.

$q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^2 \int_t^{\infty} q(s) ds > \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

ise Eş. 2.4 en az bir salınımlı çözüme sahiptir [20, Teorem 2.1].

Teorem 2.5.

$p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $q(t) - p'(t) \geq 0$  ve  $z'' + p(t)z = 0$  denklemi salınımsız olsun.

Eğer

$$\int_T^{\infty} t(q(t) - p'(t)) dt = \infty$$

ise Eş. 2.5 in en az bir salınımlı çözümü vardır [4, Teorem 5.12].

Eş. 2.8 in aşikar olmayan bir  $y(t)$  çözümü için

$$F[y(t)] = 2y(t)y''(t) - y'^2(t) + p(t)y^2(t)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bir sifıra sahip  $(y(t^*)=0)$  herhangi bir çözüm için  $F(y(t^*)) \leq 0$  dır.

Teorem 2.6.

$p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $2q(t) - p'(t) \geq 0$  ve  $m < \frac{1}{2}$  için  $z'' + (p(t) + mtq(t))z = 0$  denklemini salınımlı ise Eş. 2.5 salınımlıdır. Yani;  $t_0 \geq T_0$  için  $F[y(t_0)] \leq 0$  ı sağlayan Eş. 2.5 in herhangi bir  $y(t)$  çözümü salınımlıdır [5, Teorem 3.1].

Teorem 2.7.

$p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $2q(t) - p'(t) \geq 0$  ve her  $t \geq T_0$  için  $t^2 p(t) \leq 1/4$  olsun. Eğer

$$\int_0^\infty \left[ t^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 p(t))^{3/2} \right] dt = \infty \quad (2.9)$$

ise Eş. 2.5 salınımlıdır. Yani;  $t_0 \geq T_0$  için  $F[y(t_0)] \leq 0$  ı sağlayan Eş. 2.5 in herhangi bir  $y(t)$  çözümü salınımlıdır [21].

Örnek 2.6.

$p_0 > 0$ ,  $q_0 > \frac{2}{3\sqrt{3}}$  ve  $\alpha \geq 2$  sabitler olmak üzere  $t > 0$  için

$$y''' + \frac{p_0}{t^\alpha} y' + \frac{q_0}{t^3} y = 0 \quad (2.10)$$

denklemini ele alalım.  $\alpha = -2$  için Eş. 2.10 Euler denklemdir. Euler denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$q_0 + p_0 - \frac{2}{3\sqrt{3}}(1 - p_0)^{3/2} > 0 \quad (2.11)$$

olmasıdır. Eş. 2.10 un  $\alpha = -2$  olduğunda salınımlı olması için gerekli olan Eş. 2.11 in, Eş. 2.9 a denk olduğu kolaylıkla görülür.  $\alpha = -2$  olduğunda her  $0 < p_0 < \frac{1}{4}$  ve  $q_0 > 0$  için Eş. 2.11 in,  $\alpha > 2$  olduğunda ise her  $p_0 > 0$  ve  $q_0 > \frac{2}{3\sqrt{3}}$  için Eş. 2.9 un sağlandığı görülür [21].

Teorem 2.8.

$p(t) \leq 0$  ve  $q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\int_T^\infty \left[ q(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}(-p(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.5 salınımlı çözümlere sahiptir [5, Teorem 1.3].

Teorem 2.9.

$p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $p'(t) - q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\int_T^\infty \left[ p'(t) - q(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}(-p(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.5 bağımsız iki salınımlı çözüme sahiptir [5, Teorem 2.6].

Teorem 2.10.

$p(t) \leq 0$  ve  $q(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\int \left[ t^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 p(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.5 en az bir salınımlı çözüme sahiptir [22].

Teorem 2.11.

$p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $r(t) \geq 0$  ve  $r'(t) \leq 0$  olsun. Eğer

$$\int_T \left[ q(t) + \frac{2r^3(t)}{27} - \frac{r(t)p(t)}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{r^2(t)}{3} - p(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.3 en az bir salınımlı çözüme sahiptir [23].

Teorem 2.12.

$r(t) \geq 0$ ,  $p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $p(t) - r'(t) \leq 0$  olsun. Eğer

$$\int_T \left[ q(t) + \frac{2r^3(t)}{27} - \frac{r(t)p(t)}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{r^2(t)}{3} - p(t) + r'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.3 en az bir salınımlı çözüme sahiptir [24].

### 2.3. Lineer Olmayan Denklemlere İlişkin Bazı Sonuçlar

Bu kesimde üçüncü basamaktan lineer olmayan denklemlere ilişkin pek çoğu ortalama tekniğine dayalı literatürde yer alan bazı çalışmalar üzerinde durulacaktır.

$p$  ve  $q$ ,  $[T_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlar  $f$ ,  $\mathbb{R}$  de sürekli ve her  $y \neq 0$  için  $y f(y) > 0$  koşulunu sağlayan bir fonksiyon olmak üzere üçüncü basamaktan lineer olmayan

$$y''' + p(t)y' + q(t)f(y) = 0 \quad (2.8)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu tip denklemlerin salınımlılığı için yapılan çalışmalarda değişken katsayının ortalama davranışını içeren kriterler elde edilmiştir. Bu kriterlerin, genellikle Wintner in ikinci basamaktan lineer denklem için elde ettiği klasik ortalama kriterinden ilham alınarak elde edildiği söylenebilir. Eş. 2.8 biçimindeki lineer olmayan üçüncü basamaktan denklemlerin salınımlılığı için ortalama tekniği kullanılan çalışmalar arasından Erbe [10], Parhi [14], Skerlik [16] ve Tiryaki [15, 25] nin çalışmaları örnek olarak gösterilebilir.

$f(y) = |y|^{\alpha-1} y$ ,  $y \in \mathbb{R}$  ( $\alpha > 0$ ) alındığında lineer olmayan Eş. 2.8 in bir özel hali olan

$$y''' + p(t)y' + q(t)|y|^{\alpha-1} y = 0 \quad (2.6)$$

denklemini elde edilir.

Tanım 2.4.

Eş. 2.6 nın  $\alpha > 1$  ya da her  $\varepsilon > 0$  için

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}} < \infty$$

şartını sağlaması durumunda, Eş. 2.8 in ise her  $\varepsilon > 0$  için

$$\int_{\mp \varepsilon}^{\mp \infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad (2.12)$$

şartını sağlaması durumunda, Eş. 2.6 ya ve Eş. 2.8 e üst lineerdir denir [16].

Licko ve Svec [26] ve Mikusinski [27] Eş. 2.6 nın özel hali olan

$$y''' + q(t)|y|^{\alpha-1}y = 0$$

denkleminin üst lineer olması halinde  $\mathcal{A}$  özelliğine sahip olması için gerek yeter şartın

$$\int t^2 q(s) ds = \infty$$

koşullunu sağlamak olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Nelson [7], Elias [8], Soltes [9] ve Erbe [10]  $\alpha > 1$  tek tamsayıların oranı olmak üzere

$$y''' + p(t)y' + q(t)|y|^{\alpha-1}y = 0 \quad (2.6)$$

denklemini üzerine çalışmalar yapıp Eş. 2.6 nın  $\mathcal{A}$  özelliğine sahip olması için yeter şartın  $p(t) \leq 0$ ,  $p'(t) \geq 0$ ,  $q(t) > 0$  ve

$$\int q(t) dt = \infty$$

olduğunu göstermişlerdir.

Lineer olmayan denklemlerin salınımlılığı için elde edilen bazı kriterler aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 2.13.

$\eta > 0$  ve  $q(t) \geq 0$  ve  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$  olsun. Eğer

$$\int_{\infty}^{\infty} t^{2-\eta} q(t) dt = \infty$$

ise

$$y''' + q(t)f(y) = 0$$

denklemini salınımlı bir çözüme sahiptir [28].

Teorem 2.14.

$p(t) \geq 0$ ,  $q(t) > 0$  ve  $p'(t) \leq 0$  olsun. Eğer  $A$  ve  $B$  herhangi reel sabitler olmak üzere yeterince büyük  $t$  ler için

$$A + Bt - \int_T^t \left( \int_T^s q(u) du \right) ds < 0$$

ise Eş. 2.7 nin bir sıfıra sahip herhangi bir çözümü salınımlıdır [11].

Teorem 2.15.

$p(t) \geq 0$ ,  $q(t) > 0$ ,  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$  ve  $Kq(t) - p'(t) \geq 0$  olsun. Eğer

$$\int_T^\infty t(Kq(t) - p'(t))dt = \infty$$

ise Eş. 2.8 in bir sıfıra sahip herhangi bir çözümü salınımlıdır [11].

Teorem 2.16.

$p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$ ,  $2Kq(t) - p'(t) \geq 0$  ve  $t^2 p(t) \leq \frac{1}{4}$

olsun. Eğer

$$\int_T^\infty \left[ Kt^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 p(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.8 salınımlıdır. Yani;  $t_0 \geq T_0$  için  $F[y(t_0)] \leq 0$  ı sağlayan Eş. 2.8 in herhangi bir  $y(t)$  çözümü salınımlıdır [15, Teorem 3.2].

Teorem 2.17.

$z'' + p(t)z = 0$  denklemi salınımsız,  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$

olsun. Eğer

$$\int_T^{\infty} \left[ Kt^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1-t^2 p(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.8 salınımlıdır. Yani; Eş. 2.8 in bir sifıra sahip her çözümü salınımlıdır [15, Uyarı 3.4].

Teorem 2.18.

$0 < m < \frac{1}{2}$  için  $z'' + (p(t) + Kmtq(t))z = 0$  denklemi salınımlı,  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$  ve  $2Kq(t) - p'(t) \geq 0$  olsun. Böylece  $t_0 \geq T_0$  için  $F[y(t_0)] \leq 0$  ı sağlayan Eş. 2.8 in herhangi bir  $y(t)$  çözümü salınımlıdır. Yani; Eş. 2.8 in bir sifıra sahip herhangi bir çözümü salınımlıdır [14, Teorem 3].

Teorem 2.19.

$(r_2(t)z')' + p(t)z = 0$  denklemi salınımsız,  $p(t) \geq 0$ ,  $p'(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $0 < g(t) \leq t$ ,  $g'(t) \geq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ ,  $\int_T^{\infty} \frac{dt}{r_2(t)} = \infty$  ve

$$\int_T^{\infty} q(t) dt = \infty$$

olsun. Böylece  $\gamma$  tek tamsayıların oranı olmak üzere

$$(r_2(t)y'')' + p(t)y' + q(t)y'(g(t)) = 0$$

denkleminin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır [1, Teorem 3.2].

Teorem 2.20.

$p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$  olsun. Eğer

$$\int_T^\infty \left[ Kt^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 p(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.8 in bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır [15, Teorem 2.3].

Teorem 2.21.

$p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $r(t) \geq 0$ ,  $r'(t) \leq 0$  ve  $y \neq 0$  için  $\frac{f(y)}{y} \geq K > 0$  olsun. Eğer

$$\int_T^\infty \left[ Kq(t) + \frac{2r^3(t)}{27} - \frac{r(t)p(t)}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{r^2(t)}{3} - p(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise

$$y''' + r(t)y'' + p(t)y' + q(t)f(y) = 0 \quad (2.13)$$

denkleminin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır [29, Teorem 2.12].

Teorem 2.22.

$p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $r(t) \leq 0$ ,  $p(t) - r'(t) \leq 0$  ve  $y \neq 0$  için  $f(y)/y \geq K > 0$  olsun.

Eğer

$$\int_T^{\infty} \left[ Kq(t) + \frac{2r^3(t)}{27} - \frac{r(t)p(t)}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{r^2(t)}{3} - p(t) + r'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 2.13 ün bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır [29, Teorem 3.6].

Teorem 2.23.

Eş. 2.12 sağlansın.  $p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $0 \leq \eta \leq 2$  için  $t^\eta p(t) \geq -M > -\infty$  olmak üzere

$$\int t^\eta q(t) dt = \infty$$

olsun. Her  $|u| \geq |u_0| > 0$  için

$$f'(u) \geq K_0, \quad 2f'^2(u) - f(u)f''(u) > 0$$

ve

$$\frac{f'^2(u)}{[2f'^2(u) - f(u)f''(u)]} \leq K_2$$

olacak şekilde  $K_0 = K_0(u_0) > 0$  ve  $K_2 = K_2(u_0) > 0$  sabitleri varsa Eş. 2.8  $\mathcal{A}$  özelliğine sahiptir [16].

Teorem 2.24.

Eş. 2.12 sağlansın.  $p(t) \leq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,  $0 \leq \eta \leq 2$  ve her pozitif  $L$  sabiti için

$$\int_0^{\infty} t^{\eta} \left( q(t) - L(-p(t))^{3/2} \right) dt = \infty$$

olsun. Her  $|u| \geq |u_0| > 0$  için  $0 < \delta < 2$  bir sabit olmak üzere

$$f'(u) \geq K_0, \quad \delta f'^2(u) - f(u)f''(u) > 0$$

ve

$$\delta f'^2(u) - f(u)f''(u) \geq K_1 \text{ veya } \frac{f'^2(u)}{[\delta f'^2(u) - f(u)f''(u)]} \leq K_2$$

olacak şekilde  $K_0 = K_0(u_0) > 0$ ,  $K_1 = K_1(u_0) > 0$  ve  $K_2 = K_2(u_0) > 0$  sabitleri varsa Eş. 2.8  $\mathcal{A}$  özelliğine sahiptir [16].

Teorem 2.25.

$$q(t) \geq 0, \quad y \neq 0 \quad \text{için} \quad \frac{f(y)}{y} \geq K > 0, \quad \int_T^{\infty} \frac{dt}{r_1(t)} = \int_T^{\infty} \frac{dt}{r_2(t)} = \infty \quad \text{ve}$$

$$\int_T^{\infty} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{1}{r_2(u)} \int_u^{\infty} q(\tau) d\tau du ds = \infty$$

şartları sağlansın. Eğer  $R_2(t, T) = \int_T^t \frac{ds}{r_2(s)}$  ve  $\varsigma \geq 0$  olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ K \rho(s) q(s) - \frac{(\rho'(s))^2 r_1(s - \varsigma)}{\rho(s) R_2(s - \varsigma, T)} \right] ds = \infty \quad (2.14)$$

olacak şekilde  $\rho \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  varsa

$$\left( r_2(t) \left( r_1(t) y' \right)' \right)' + q(t) f(y(t-\varsigma)) = 0 \quad (2.15)$$

gecikmeli denkleminin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır [30].

Tanım 2.5.

$D_0 = \{(t, s) : t > s > T_0\}$  ve  $D = \{(t, s) : t \geq s > T_0\}$  olsun.

$(H_1)$   $t \geq T_0$  için  $H(t, t) \equiv 0$ ;  $(t, s) \in D_0$  için  $H(t, s) > 0$ ;

$(H_2)$  Her  $(t, s) \in D_0$  için  $-\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} = h(t, s) \sqrt{H(t, s)}$ ;

olacak şekilde ikinci değişkene göre türevlenebilen ve  $\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} < 0$  şartını sağlayan

$H \in C(D, \mathbb{R})$  fonksiyonuna  $\mathcal{H}_I$  sınıfındandır denir.

Uyarı 2.1.

$n \geq 1$  için  $H(t, s) = (t - s)^n$  seçilirse Kamenev tipi salınımlılık kriterleri elde edilir.

Ayrıca  $H$  fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonlardan biri olabilir:

$$\left( \ln \frac{t}{s} \right)^n, \left( \sqrt{t} - \sqrt{s} \right)^n, \left( e^{t-s} - e^{s-t} \right)^n$$

ve  $d$  bir sabit olmak üzere  $\left((t-d)^3 - (s-d)^3\right)^n$  veya daha genel olarak,  $n \geq 1$  ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_s^t \frac{du}{\theta(u)} = \infty \text{ sağlayan } \theta \in C([T_0, \infty), R^+) \text{ olmak üzere } H(t, s) = \left( \int_s^t \frac{du}{\theta(u)} \right)^n \text{ dir.}$$

Teorem 2.26.

Teorem 2.25 in Eş. 2.14 dışındaki tüm şartları sağlansın. Eş. 2.14 yerine  $Q(t, s) =$

$$h(t, s) - \sqrt{H(t, s)} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \text{ olmak üzere}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ K \rho(s) q(s) H(t, s) - \frac{\rho(s) r_1(s - \varsigma) Q^2(t, s)}{4R_2(s - \varsigma, T)} \right] ds = \infty$$

olacak şekilde  $\mathcal{H}_t$  sınıfından  $H$  ve  $\rho \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları varsa Eş.

2.15 gecikmeli denkleminin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır [30].

### 3. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, ikinci bölümde verilen bir kısım çalışmalardan yararlanarak üçüncü basamaktan özel tipten fonksiyonel denklemler için elde edilen salınımlılık sonuçlarına yer verilecektir.

Üçüncü basamaktan

$$\left( r_2(t)(r_1(t)y')' \right)' + p(t)y' + q(t)f(y(g(t))) = 0 \quad (3.1)$$

fonksiyonel denklemini göz önüne alalım. Burada  $T_0 \geq 0$  olmak üzere  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $g \in C[T_0, \infty)$  ve  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın;

- $t \in I := [T_0, \infty)$  için  $r_1(t) > 0$ ,  $r_2(t) > 0$ ,  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,
- sonsuz komşuluğunda  $q(t) \neq 0$ ,
- $t \rightarrow \infty$  iken  $g(t) \rightarrow \infty$  ve  $u \neq 0$  için  $uf(u) > 0$ .

Ayrıca,  $[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in çözümlerinin varlığını kabul edelim.

Önceki bölümde yer verilen çalışmalardan ağırlıklı olarak Tiryaki ve Yaman [15], Skerlik [16, 21], Saker [30] ve Philos [31] un çalışmalarından esinlenerek bu bölümde Eş. 3.1 de  $f$  fonksiyonunun monoton olmaması ve olması durumlarında inşa edilen salınımlılık sonuçları üzerinde durulacaktır. Belirtelim ki elde edilen bu sonuçlar tamamen özgün ve orijinaldir.

Bölüm boyunca kullanılacak olan bazı notasyonları ve de ispatlarda esas olacak bazı lemmaları ifade edelim.  $t \in I$  için

$$L_0 y(t) := y(t), \quad L_i y(t) := r_i(t) (L_{i-1} y(t))'; \quad i = 1, 2, \quad L_3 y(t) := (L_2 y(t))',$$

$$\sigma(t) := \min \{t, g(t)\}$$

ve  $T_0 \leq s \leq t < \infty$  için

$$R_1(t, s) := \int_s^t \frac{du}{r_1(u)} \quad \text{ve} \quad R_2(t, s) := \int_s^t \frac{du}{r_2(u)}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } R_1(t, T_0) \rightarrow \infty \tag{3.2}$$

ve

$$t \rightarrow \infty \text{ iken } R_2(t, T_0) \rightarrow \infty \tag{3.3}$$

olduğunu kabul edelim. Burada  $\sigma$  fonksiyonu, gecikmeli ve ileri tipten denklemlerin incelenmesinde kolaylık sağlayan bir fonksiyon olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca

$$\sigma(t) = \begin{cases} g(t), & g(t) \leq t \\ t, & g(t) \geq t \end{cases}$$

olduğu açıkça görülür.

Tanım 3.1.

Her  $t \in [T_0, \infty)$  için

$$L_0 y(t) L_k y(t) > 0; \quad k = 0, 1, 2, \quad y(t) L_3 y(t) \leq 0$$

eşitsizliklerini sağlayan Eş. 3.1 in salınımsız bir  $y$  çözümüne,  $V_2$  özelliğine sahiptir denir [32].

Şimdi de ispatlar sırasında bize yardımcı olacak bazı lemmalar verelim.

Lemma 3.1.

$$(r_2(t)z')' + \frac{p(t)}{r_1(t)}z = 0 \tag{3.4}$$

denkleminin salınımsız olduğunu kabul edelim. Eğer  $[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  ise her  $t \geq T_1$  için ya  $y(t) L_1 y(t) > 0$  ya da  $y(t) L_1 y(t) < 0$  olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  vardır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim.  $t \geq t_0$  için ikinci basamaktan

$$(r_2(t)x')' + \frac{p(t)}{r_1(t)}x = q(t)f(y(g(t))) \tag{3.5}$$

homogen olmayan diferensiyel denklemin bir çözümünün  $x(t) = -L_1 y(t)$  olduğu açıktır. O halde Eş. 3.5 in salınımsız olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Tersine Eş. 3.5 in salınlı olduğunu kabul edelim. Yani;  $t_0 < b < c$  olmak üzere  $x'(b) \geq 0$  ve  $x'(c) \leq 0$  olacak şekilde Eş. 3.5 in ardışık iki sıfırı  $b$  ve  $c$  olsun. Ayrıca, genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0$  için  $z(t) > 0$  olduğunu kabul edelim. Eş. 3.4 ve Eş. 3.5 den elde edilen

$$(r_2(t)x'(t)z(t) - r_2(t)x(t)z'(t))' = z(t)q(t)f(y(g(t)))$$

eşitliğinin  $b$  den  $c$  ye integrali alınır, çelişki elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.

Eş. 3.3 sağlansın. Eğer  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.1 in  $y(t)L_1 y(t) \geq 0$  eşitsizliğini sağlayan salınımsız bir çözümü  $y$  ise her  $t \geq T_1$  için  $y$ ,  $V_2$  özelliğine sahip olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  vardır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Böylece her  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $L_1 y(t) > 0$  dır. Eş. 3.1 den her  $t \geq t_1$  için  $L_3 y(t) \leq 0$  olduğundan ya  $L_2 y(t) > 0$  ya da  $L_2 y(t) < 0$  elde edilir.  $t \geq t_1$  için  $L_2 y(t) < 0$  olamayacağından  $L_2 y(t) > 0$  bulunur. Dolayısıyla  $y$ ,  $V_2$  özelliğine sahiptir.

Lemma 3.3.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_*(t) = \infty \text{ ve her } t \geq T_0 \text{ için } \sigma_*(t) \leq \sigma(t) \quad (3.6)$$

olacak şekilde  $\sigma_*(t) \in C[T_0, \infty)$  olduğunu kabul edelim. Eğer  $[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in  $V_2$  özelliğine sahip bir çözümü  $y$  ise  $t \geq T_1$  için

$$L_1(y(\sigma(t))) \geq R_2(\sigma(t), \sigma_*(t)) L_2 y(t)$$

olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  vardır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_*(t) = \infty$  ve  $y, V_2$  özelliğine sahip olduğundan, her  $t \geq t_1$  için  $L_0 y(\sigma_*(t)) > 0$ ,  $L_1 y(t) > 0$ ,  $L_2 y(t) > 0$  ve  $L_3 y(t) \leq 0$  olacak şekilde bir  $t_1 \geq t_0$  vardır. Diğer taraftan,  $L_2 y$  nin azalanlığı kullanılırsa,

$$L_1 y(\sigma(t)) \geq \int_{\sigma_*(t)}^{\sigma(t)} (L_1 y(s))' ds = \int_{\sigma_*(t)}^{\sigma(t)} \frac{1}{r_2(t)} L_2 y(s) ds$$

$$\geq L_2 y(\sigma(t)) R_2(\sigma(t), \sigma_*(t))$$

elde edilir. Böylece her  $t \geq t_1$  için

$$L_1(y(\sigma(t))) \geq R_2(\sigma(t), \sigma_*(t)) L_2 y(t)$$

elde edilir.

Eğer  $y$ , Eş. 3.1 in bir çözümü ise  $f^*(z) = -f(-z)$  ve  $z \neq 0$  için  $zf^*(z) > 0$  olmak üzere  $z = -y$

$$L_3 z(t) + \frac{p(t)}{r_1(t)} L_1 z(t) + q(t) f^*(z(g(t))) = 0$$

denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla, Eş. 3.1 in salınımsız çözümleri ile ilgilenirken sadece pozitif çözümlerini incelemek yeterlidir.

### 3.1. $f$ Fonksiyonunun Monoton Olmaması Durumu

Üçüncü basamaktan gecikmeli tipten

$$\left( r_2(t) (r_1(t) y')' \right)' + p(t) y' + q(t) f(y(g(t))) = 0 \quad (3.7)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $r_1, r_2, p, q \in C[T_0, \infty)$ ,  $g \in C^1[T_0, \infty)$  ve  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın;

- $t \in I$  için  $r_1(t) > 0$ ,  $r_2(t) > 0$ ,  $p(t) \geq 0$ ,  $q(t) \geq 0$ ,
- sonsuz komşuluğunda  $q(t) \not\equiv 0$ ,
- $g'(t) \geq 0$ ,  $g(t) \leq t$ ,  $t \rightarrow \infty$  iken  $g(t) \rightarrow \infty$  ve  $u \neq 0$  için  $f(u)/u \geq K > 0$ .

Lemma 3.4.

Her  $t \geq T_1$  için  $Kq(t) - p'(t) \geq 0$  ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{1}{r_2(u)} \int_u^{\infty} (Kq(\tau) - p'(\tau)) d\tau du ds = \infty \\ \text{ve} \\ \int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{p(u)}{r_2(u)} du ds < \infty \end{array} \right. \quad (3.8)$$

veya

$$\int_{T_1}^{\infty} (Kq(s) - p'(s)) ds = \infty \quad (3.9)$$

olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca Eş. 3.2 sağlansın. Eğer her  $t \geq T_1$  için Eş. 3.7 nin  $y(t)L_1y(t) \leq 0$  eşitsizliğini sağlayan salınımsız bir çözümü  $y$  ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla,  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $L_1y(t) < 0$  dır.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lambda > 0$  olduğunu kabul edelim.

İlk olarak, Eş. 3.8 sağlansın. Bu durumda  $L_2y(t)$  fonksiyonunun işaretini inceleyelim.  $t \geq t_2 \geq t_1$  için  $L_2y(t) \leq 0$  olduğunda  $t \geq t_2$  için  $y'(t) \leq L_1y(t_2)/r_1(t)$  eşitsizliğinin integrali alınırsa,  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.2 den  $y(t) < 0$  elde edilir ki  $y(t) > 0$  kabulü ile çelişkidir.

$t \geq t_3 \geq t_1$  için  $y(t) > 0$ ,  $L_1y(t) < 0$  ve  $L_2y(t) \geq 0$  olsun. Eş. 3.1 in  $s$  den  $t$  ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
L_2 y(s) + p(s)y(s) &= L_2 y(t) + p(t)y(t) + \int_s^t y(u) \left[ \frac{f(y(g(u)))}{y(u)} q(u) - p'(u) \right] du \\
&\geq \lambda \int_s^\infty [Kq(u) - p'(u)] du
\end{aligned}$$

ve böylece

$$y(t) \leq y(t_3) + y(t_3) \int_{t_3}^t \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{p(u)}{r_2(u)} du ds - \lambda \int_{t_3}^t \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{1}{r_2(u)} \int_u^\infty (Kq(\tau) - p'(\tau)) d\tau du ds$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte,  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.8 den  $y(t) < 0$  elde edilir ki  $y(t) > 0$  kabulü ile çelişkidir.

Son olarak,  $t \geq t_4 \geq t_1$  için  $y(t) > 0$ ,  $L_1 y(t) < 0$  ve  $L_2 y(t)$  işaret değiştirsin. Bu durumda  $n \rightarrow \infty$  iken  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde  $L_2 y(t)$  nin sıfırlarının bir  $\{t_n\}$  dizisi mevcuttur. Eş. 3.1 in  $s$  den  $t_n$  ye integrali alınır

$$\begin{aligned}
L_2 y(s) + p(s)y(s) &= L_2 y(t_n) + p(t_n)y(t_n) + \int_s^{t_n} y(u) \left[ \frac{f(y(g(u)))}{y(u)} q(u) - p'(u) \right] du \\
&\geq \lambda \int_s^\infty [Kq(u) - p'(u)] du
\end{aligned}$$

ve böylece

$$y(t_n) \leq y(t_4) + y(t_4) \int_{t_4}^{t_n} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^{t_n} \frac{p(u)}{r_2(u)} du ds - \lambda \int_{t_4}^{t_n} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^{t_n} \frac{1}{r_2(u)} \int_u^\infty (Kq(\tau) - p'(\tau)) d\tau du ds$$

elde edilir. Sonuç olarak;  $t_n \rightarrow \infty$  iken  $y(t_n) < 0$  olur ki bu bir çelişkidir. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  elde edilir.

Öte yandan; Eş. 3.9 sağlansın. Eş. 3.7 nin  $t_1$  den  $t$  ye integrali alınırsa  $C_0$  bir sabit olmak üzere

$$L_2 y(t) \leq C_0 - \int_{t_1}^t y(s) \left[ \frac{f(y(g(s)))}{y(s)} q(s) - p'(s) \right] ds \leq C_0 - \lambda \int_{t_1}^t [Kq(s) - p'(s)] ds$$

elde edilir. Eş. 3.9 ve yukarıdaki eşitsizlikten  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $L_2 y(t) < 0$  olduğundan  $C_1$  negatif bir sabit olmak üzere

$$y(t) \leq y(t_1) + C_1 R_1(t, t_1)$$

elde edilir. Sonuç olarak,  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.2 den  $y(t) < 0$  elde edilir ki  $y(t) > 0$  kabulü ile çelişkidir. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  elde edilir.

Uyarı 3.1.

Eğer her  $t \geq T_1$  için  $p'(t) \leq 0$  olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  ve  $p \in C^1[T_0, \infty)$  var ise Lemma 3.4 de Eş. 3.8 veya Eş. 3.9 yerine sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{1}{r_2(u)} \int_u^{\infty} q(\tau) d\tau du ds = \infty \\ \text{ve} \\ \int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r_1(s)} \int_s^t \frac{p(u)}{r_2(u)} du ds < \infty \end{array} \right.$$

veya

$$\int_{T_1}^{\infty} q(s) ds = \infty$$

alınır.

**Teorem 3.1.**

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.8 (veya Eş. 3.9) sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun.

Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) q(s) - \frac{r_1(g(s))(r_1(s) \rho_1'(s) - \rho_1(s) p(s) R_2(g(s), \sigma_*(s)))^2}{4 \rho_1(s) R_2(g(s), \sigma_*(s)) g'(s) r_1^2(s)} \right] ds = \infty \quad (3.10)$$

olacak şekilde diferensiyellenebilir pozitif bir  $\rho_1$  fonksiyonu varsa Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.7 nin salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 den  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $L_1 y(t) > 0$  veya  $L_1 y(t) < 0$  dır. Eğer  $t \geq t_1$  için  $L_1 y(t) > 0$  ise Lemma 3.2 den  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $y$ ,  $V_2$  özelliğine sahiptir.  $t \geq t_1$  için

$$\omega(t) = \rho_1(t) \frac{L_2 y(t)}{y(g(t))}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.7 ve Lemma 3.3 den  $A_*(t) =$

$$\frac{R_2(g(t), \sigma_*(t))g'(t)}{r_1(g(t))\rho_1(t)} \text{ ve } B_*(t) = \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)} - p(t) \frac{R_2(g(t), \sigma_*(t))}{r_1(t)} \text{ olmak üzere}$$

$$\omega' \leq -K\rho_1(t)q(t) - [\omega^2(t)A_*(t) - \omega(t)B_*(t)] \quad (3.11)$$

ve böylece

$$\omega' \leq -K\rho_1(t)q(t) + \frac{B_*^2(t)}{4A_*(t)} \quad (3.12)$$

bulunur. Eş. 3.12 nin  $t_1$  den  $t$  ye integrali alınırsa

$$\int_{t_1}^t \left[ K\rho_1(s)q(s) - \frac{B_*^2(s)}{4A_*(s)} \right] ds \leq \omega(t_1) - \omega(t) \leq \omega(t_1)$$

elde edilir ki Eş. 3.10 kabulü ile çelişkidir.

Diğer yandan,  $t \geq t_1$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1 y(t) < 0$  olsun. Lemma 3.4 den  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

Örnek 3.1.

$t > 1/2$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{1}{4t^2} y'(t) + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right) y\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad (3.13)$$

gecikmeli denklemi ele alalım. Burada  $K=1$ ,  $r_1(t)=r_2(t)=1$ ,  $p(t)=\frac{1}{4t^2}$  ve  $q(t)=1-\frac{1}{4t^2}$  dir. Eş. 3.2, Eş. 3.3 ve Eş. 3.9 un sağlandığı kolaylıkla gösterilir.  $z''+\frac{1}{4t^2}z=0$  Euler denklemi salınımsızdır. Ayrıca  $\rho_1(t)=1$  ve  $\sigma_*(t)=t-\frac{3\pi}{2}-1$  seçersek

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) q(s) - \frac{r_1(g(s))(r_1(s)\rho_1'(s) - \rho_1(s)p(s)R_2(g(s), \sigma_*(s)))^2}{4\rho_1(s)R_2(g(s), \sigma_*(s))g'(s)r_1^2(s)} \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ 1 - \frac{1}{4s^2} - \frac{(-(1/4s^2))^2}{4} \right] ds = \infty \end{aligned}$$

olduğundan Eş. 3.10 sağlanır. Böylece Teorem 3.1 gereğince Eş. 3.13 ün her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır. Bu denklemin salınımlı bir çözümü  $y(t) = -\cos t$  dir. Eş. 3.8 in sağlanmadığına dikkat edilmelidir.

Örnek 3.2.

$t > 2$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{1}{t^3} y'(t) + \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t^4} \right) y(t - \ln t) = 0 \quad (3.14)$$

gecikmeli denklemi ele alalım.  $\rho_1(t)=1$  ve  $\sigma_*(t)=t-\ln t-1$  seçersek

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) q(s) - \frac{r_1(g(s))(r_1(s)\rho_1'(s) - \rho_1(s)p(s)R_2(g(s), \sigma_*(s)))^2}{4\rho_1(s)R_2(g(s), \sigma_*(s))g'(s)r_1^2(s)} \right] ds$$

$$= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^4} - \frac{1}{4s^5(s-1)} \right] ds = \infty$$

olduğundan Eş. 3.10 sağlanır. Teorem 3.1 in diğer tüm şartları sağlandığından Eş. 3.14 ün her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  olan bu denklemin bir çözümü  $y(t) = e^{-t}$  dir. Eş. 3.8 ve Eş. 3.9 un her ikisi de sağlanmaktadır.

Şimdi de Eş. 3.7 için, ikinci bölümde tanımlanan  $H(t, s)$  fonksiyonu yardımıyla Philos tipi salınımlılık kriterleri verelim.

Teorem 3.2.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.8 (veya Eş. 3.9) sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun.

$$\text{Eğer } A_*(t) = \frac{R_2(g(t), \sigma_*(t))g'(t)}{r_1(g(t))\rho_1(t)} \text{ ve}$$

$$Q_*(t, s) = h(t, s) - \sqrt{H(t, s)} \left( \frac{\rho_1'(s)}{\rho_1(s)} - p(s) \frac{R_2(g(s), \sigma_*(s))}{r_1(s)} \right)$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_*^2(t, s)}{4A_*(s)} \right] ds = \infty \quad (3.15)$$

olacak şekilde  $\mathcal{H}_I$  sınıfından  $H$  ve  $\rho_1 \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları varsa Eş.

3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.7 nin salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Teorem 3.1 in ispatında izlenen yol takip edilirse Eş. 3.11 elde edilir. Eş. 3.11 i  $H(t, s)$  ile çarpıp  $t_1$

den  $t$  ye integralini alırsak  $B_*(t) = \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)} - p(t) \frac{R_2(g(t), \sigma_*(t))}{r_1(t)}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^t KH(t, s) \rho_1(s) q(s) ds &\leq \int_{t_1}^t H(t, s) \left[ -\omega'(s) + B_*(s) \omega(s) - A_*(s) \omega^2(s) \right] ds \\
 &= -H(t, s) \omega(s) \Big|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \left[ \frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \omega(s) \right. \\
 &\quad \left. + H(t, s) (B_*(s) \omega(s) - A_*(s) \omega^2(s)) \right] ds \\
 &= H(t, t_1) \omega(t_1) - \int_{t_1}^t \left[ \omega^2(s) A_*(s) H(t, s) \right. \\
 &\quad \left. + \omega(s) \left( h(t, s) \sqrt{H(t, s)} - H(t, s) B_*(s) \right) \right] ds \tag{3.16} \\
 &\leq H(t, t_1) \omega(t_1) + \frac{1}{4} \int_{t_1}^t \frac{Q_*^2(t, s)}{A_*(s)} ds
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \left[ K \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_*^2(t, s)}{4 A_*(s)} \right] ds \leq \omega(t_1)$$

elde edilir ki Eş. 3.15 ile çelişkidir.

Diğer yandan,  $t \geq t_1$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1 y(t) < 0$  olsun. Lemma 3.4 den  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

Sonuç 3.1.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.8 (veya Eş. 3.9) sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho_1(s) H(t, s) q(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{Q_*^2(t, s)}{A_*(s)} < \infty$$

olacak şekilde  $\mathcal{H}_1$  sınıfından  $H$  ve  $\rho_1 \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları varsa Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Örnek 3.3.

$t \geq 1$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + e^{-2t+2} y'(t) + \frac{1}{e} y(t-1) (1 + y^2(t-1)) = 0 \quad (3.17)$$

denklemini ele alalım.  $\rho_1(t) = 1$ ,  $H(t, s) = (t-s)^2$  ve  $\sigma_*(t) = t-2$  seçersek

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_*^2(t, s)}{4A_*(s)} \right] ds \\
&= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t \left[ (t-s)^2 \frac{1}{e} - \frac{(2+(t-s)e^{-2s+2})^2}{4} \right] ds = \infty
\end{aligned}$$

olduğundan Eş. 3.15 sağlanır. Teorem 3.2 nin diğer şartları da sağlandığından Eş. 3.17 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır. Bu denklemin  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  olan bir çözümü  $y(t) = e^{-t}$  dir.

Örnek 3.4.

$t > 1$  için üçüncü basamaktan

$$(ty'(t))'' + \frac{1}{4t} y'(t) + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) y(t-1) (\beta + e^{y(t-1)}) = 0 \quad (3.18)$$

denklemini ele alalım.  $f(u) = u(\beta + e^u)$  olmak üzere  $K = \beta$  alınabilir. Eğer  $\rho_1(t) = 1$ ,  $H(t, s) = (t-s)^2$  ve  $\sigma_*(t) = t-2$  seçersek Teorem 3.2 gereğince Eş. 3.18 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Şimdi de Teorem 3.2 ye alternatif olabilecek salınımlılık kriterleri verelim.

Teorem 3.3.

Teorem 3.2 nin Eş. 3.15 dışındaki tüm şartları sağlansın. Ayrıca

$$0 < \inf_{s \geq T} \left[ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, T)} \right] \leq \infty \quad (3.19)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{Q_*^2(t, s)}{A_*(s)} ds < \infty \quad (3.20)$$

olsun. Eğer  $\psi_+(t) = \max\{\psi(t), 0\}$  olmak üzere

$$\int_T^\infty \psi_+^2(s) A_*(s) ds = \infty \quad (3.21)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_*^2(t, s)}{4 A_*(s)} \right] ds \geq \sup_{t \geq T} \psi(t) \quad (3.22)$$

olacak şekilde bir  $\psi \in C[T_0, \infty)$  fonksiyonu varsa Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

*İspat*

Teorem 3.2 nin ispatındaki gibi gidilirse Eş. 3.16 elde edilir. Bu eşitsizliğin tekrar düzenlenmesi ile

$$\int_{t_1}^t K H(t, s) \rho_1(s) q(s) ds \leq H(t, t_1) \omega(t_1)$$

$$-\int_{t_1}^t \left[ \sqrt{H(t, s) A_*(s)} \omega(s) + \frac{1}{2} \frac{Q_*(t, s)}{\sqrt{A_*(s)}} \right]^2 ds + \int_{t_1}^t \frac{Q_*^2(t, s)}{4 A_*(s)} ds$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanı  $t \rightarrow \infty$  için limsup u alınırsa

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \left[ KH(t, s) \rho_1(s) q(s) - \frac{Q_*^2(t, s)}{4A_*(s)} \right] ds \\ & \leq \omega(t_1) - \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \left[ \sqrt{H(t, s) A_*(s)} \omega(s) + \frac{1}{2} \frac{Q_*(t, s)}{\sqrt{A_*(s)}} \right]^2 ds \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.22 den

$$\omega(t_1) \geq \psi(t_1) + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \left[ \sqrt{H(t, s) A_*(s)} \omega(s) + \frac{1}{2} \frac{Q_*(t, s)}{\sqrt{A_*(s)}} \right]^2 ds$$

olup buradan

$$0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \left[ \sqrt{H(t, s) A_*(s)} \omega(s) + \frac{1}{2} \frac{Q_*(t, s)}{\sqrt{A_*(s)}} \right]^2 ds$$

$$\leq \omega(t_1) - \psi(t_1) < \infty \quad (3.23)$$

elde edilir.  $\alpha$  ve  $\beta$  fonksiyonlarını

$$\alpha(t) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t H(t, s) A_*(s) \omega^2(s) ds$$

ve

$$\beta(t) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \sqrt{H(t, s)} Q_*(t, s) \omega(s) ds$$

şeklinde tanımlayalım. Eş. 3.23 den

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} [\alpha(t) + \beta(t)] < \infty$$

elde edilir. Şimdi

$$\int_{t_1}^{\infty} A_*(s) \omega^2(s) ds < \infty$$

olduğunu gösterelim. Tersine

$$\int_{t_1}^{\infty} A_*(s) \omega^2(s) ds = \infty \quad (3.24)$$

olsun. Eş. 3.19 dan

$$\inf_{s \geq T} \left[ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, T)} \right] > \xi \quad (3.25)$$

olacak şekilde bir pozitif  $\xi$  sayısı vardır.  $\mu$  herhangi pozitif bir sayı olmak üzere Eş.

3.24 den  $t \geq t_2$  için

$$\int_{t_1}^{\infty} A_*(s) \omega^2(s) ds \geq \frac{\mu}{\xi}$$

olacak şekilde bir  $t_2 \geq t_1$  vardır ve  $t \geq t_2$  için

$$\alpha(t) = \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t H(t, s) \frac{d}{ds} \left[ \int_{t_1}^s A_*(u) \omega^2(u) du \right] ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_1}^t \left( -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right) \left[ \int_{t_1}^s A_*(u) \omega^2(u) du \right] ds \\
&\geq \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_2}^t \left( -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right) \left[ \int_{t_1}^s A_*(u) \omega^2(u) du \right] ds \\
&\geq \frac{\mu}{\xi} \frac{1}{H(t, t_1)} \int_{t_2}^t \left( -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right) ds = \frac{\mu}{\xi} \frac{H(t, t_2)}{H(t, t_1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 3.25 den  $t \geq t_3$  için  $\frac{H(t, t_2)}{H(t, t_1)} \geq \xi$  olacak şekilde bir  $t_3 \geq t_2$  sayısı vardır.

O halde her  $t \geq t_3$  için  $\alpha(t) \geq \mu$  dür.  $\mu$  keyfi sabit olduğundan  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$  elde edilir. Bu durumda ispatın geri kalan kısmı [33-38] de verilen benzer teoremlerin ispatlarındaki gibidir.

Diğer yandan,  $t \geq t_1$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1 y(t) < 0$  olsun. Lemma 3.4 den  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

Teorem 3.3 ün ispatına benzer şekilde ispatlanabilecek aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 3.4.

Teorem 3.3 ün Eş. 3.20 dışındaki tüm şartları sağlansın. Eş. 3.20 yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho_1(s) H(t, s) q(s) ds < \infty \quad (3.26)$$

şartı sağlansın. Bu durumda Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Uyarı 3.2.

Teorem 3.1-Teorem 3.4 de  $\sigma_*(t)=T$ ,  $p(t)\equiv 0$  ve  $\varsigma\geq 0$  bir sabit olmak üzere  $g(t)=t-\varsigma$  olması durumunda Saker [30] in sırasıyla Teorem 1-Teorem 4 ü elde edilir. Ayrıca, Teorem 3.1-Teorem 3.4 de  $\sigma_*(t)=T$  alındığında Tiryaki ve Aktaş [39] in sırasıyla Teorem 1-Teorem 4 ü elde edilir.

Üçüncü basamaktan

$$y''' + \frac{p_0}{t^2} y' + \frac{q_0}{t^3} y = 0$$

Euler denklemi göz önüne alındığında Eş. 3.8 (veya Eş. 3.9) koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla yukarıdaki teoremlerin hiçbiri yukarıdaki Euler denklemi için uygulanamaz. Bu tip denklemlerde uygulanabilir sonuçlar elde etmek için gerekli olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.5.

$\rho_2$ ,  $[T_0, \infty)$  aralığında tanımlı yeterince düzgün pozitif bir fonksiyon ve  $\phi$  fonksiyonunu,  $\phi(t)=r_1(t)(r_2(t)\rho_2'(t))' + \rho_2(t)p(t)$  şeklinde tanımlayalım. Her  $t\geq T_1$  için

$$\rho_2'(t)\geq 0, \phi(t)\geq 0 \text{ ve } K\rho_2(t)q(t)-\phi'(t)\geq 0 \quad (3.27)$$

olmak üzere

$$\int_{T_1}^{\infty} (K\rho_2(s)q(s)-\phi'(s))ds = \infty \quad (3.28)$$

olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca Eş. 3.2 sağlansın. Eğer  $t \geq T_1$  için Eş. 3.7 nin  $y(t)L_1y(t) \leq 0$  eşitsizliğini sağlayan salınımsız bir çözümü  $y$  ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

### *İspat*

$[T_0, \infty)$  aralığında Eş. 3.7 nin salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla,  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1y(t) < 0$  dır.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lambda > 0$  olduğunu kabul edelim. Eş. 3.7 i  $\rho_2(t)$  ile çarpıp  $t_1$  den  $t$  ye integrali alınırsa  $C_2$  sabit olmak üzere

$$\rho_2(t)L_2y(t) = C_2 + \rho_2'(t)r_2(t)L_1y(t) - \phi(t)y(t)$$

$$-\int_{t_1}^t y(s) \left( \frac{f(y(g(s)))}{y(s)} \rho_2(s)q(s) - \phi'(s) \right) ds$$

ve

$$\rho_2(t)L_2y(t) \leq C_2 - \lambda \int_{t_1}^t (K\rho_2(s)q(s) - \phi'(s)) ds$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.28 den  $L_2y(t) < 0$  elde edilir. Bu ise  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.2 den  $y(t) < 0$  elde edilir ki  $y(t) > 0$  kabulü ile çelişkidir. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  elde edilir.

Uyarı 3.3.

Eğer her  $t \geq T_1$  için  $\phi'(t) \leq 0$  olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  ve  $\phi \in C^1[T_0, \infty)$  varsa Lemma 3.5 de Eş. 3.28 yerine

$$\int_{T_1}^{\infty} \rho_2(s) q(s) ds = \infty$$

alınır.

Teorem 3.1-Teorem 3.4 ün ispatlarında yer alan Lemma 3.4 yerine Lemma 3.5 kullanıldığında kolaylıkla elde edilebilen aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.5.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.27, Eş. 3.28 sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Eğer Eş. 3.10 sağlanacak şekilde diferensiyellenebilir pozitif bir  $\rho_1$  fonksiyonu varsa Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Örnek 3.5.

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p_0$ ,  $q_0$  ve  $0 < \lambda \leq 1$  sabitler olmak üzere  $t \geq 1$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{p_0}{t^\alpha} y'(t) + \frac{q_0}{t^\beta} y(\lambda t) = 0 \quad (3.29)$$

gecikmeli denklemini ele alalım.  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t^2$  ve  $\sigma_*(t) = \frac{\lambda t}{2}$  seçersek

$0 \leq p_0 \leq \frac{1}{4}$ ,  $q_0 > 0$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $\beta < 3$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) q(s) - \frac{r_1(g(s))(r_1(s) \rho_1'(s) - \rho_1(s) p(s) R_2(g(s), \sigma_*(s)))^2}{4 \rho_1(s) R_2(g(s), \sigma_*(s)) g'(s) r_1^2(s)} \right] ds \\
& = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ q_0 s^{2-\beta} - \frac{(4 - \lambda p_0 s^{2-\alpha})^2}{8 \lambda^2 s} \right] ds = \infty
\end{aligned}$$

olduğundan Eş. 3.10 sağlanır. Teorem 3.5 in diğer tüm şartları da sağlandığından Eş. 3.29 un her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır. Diğer yandan,

eğer  $\alpha = 2$  ve  $\beta = 3$  ise  $q_0 > \frac{(4 - \lambda p_0)^2}{8 \lambda^2}$  elde edilir.  $\lambda = 1$ ,  $p_0 = \frac{1}{4}$  ve  $q_0 = \frac{25}{4}$

alırsak Eş. 3.29 Euler diferensiyel denkleminin çözümleri  $y_1(t) = \frac{1}{t}$ ,

$y_2(t) = t^2 \cos\left(\frac{3}{2} \ln t\right)$  ve  $y_3(t) = t^2 \sin\left(\frac{3}{2} \ln t\right)$  dir.

Örnek 3.6.

$t \geq 2$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{1}{t^3} y'(t) + \frac{1}{t^3} y(t-1) (4 - \cos y(t-1)) = 0 \quad (3.30)$$

gecikmeli denklemi ele alalım.  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t^2$  ve  $\sigma_*(t) = \frac{t}{2} - 1$  seçersek Eş. 3.10

ve Teorem 3.5 in diğer tüm şartları da sağlandığından Eş. 3.30 un her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Teorem 3.6.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.27, Eş. 3.28 sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Eğer Eş. 3.15 sağlanacak şekilde  $\mathcal{H}_1$  sınıfından  $H$  ve  $\rho_1 \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları varsa Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Örnek 3.7.

$t \geq 1$  için üçüncü basamaktan

$$\left(\frac{1}{t}y'\right)'' + \frac{1}{4t^3}y' + \frac{1}{t^2}y\left(1 + \frac{1}{1+y^2}\right) = 0 \quad (3.31)$$

denklemini ele alalım.  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t$ ,  $H(t, s) = (t-s)^2$  ve  $\sigma_*(t) = \frac{t}{2} - 1$  seçersek

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ K \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_*^2(t, s)}{4A_*(s)} \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t \left[ s(t-s)^2 \frac{1}{s^2} - \frac{(2 - (t-s)(1/s - (1/4s^3)(s^2/2)))^2}{4(s^2/2)s} \right] ds = \infty \end{aligned}$$

olduğundan Eş. 3.15 sağlanır. Teorem 3.6 nın diğer şartları da sağlandığından Eş. 3.31 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Örnek 3.8.

$t > 1$  için üçüncü basamaktan

$$\left( \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t^4} y'(t) \right)' \right)' + \frac{1}{t^9} y'(t) + \frac{1}{t^2} y(\sqrt{t}) \cosh y(\sqrt{t}) = 0 \quad (3.32)$$

denklemini ele alalım.  $f(u) = u \cosh u$  olmak üzere  $K = 1$  alınabilir.

$\left( \frac{1}{t} z' \right)' + \frac{1}{t^5} z = 0$  denklemi salınımsızdır [19, sayfa 71]. Eğer  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t$ ,

$H(t, s) = (t - s)^2$  ve  $\sigma_*(t) = \sqrt{t/2}$  seçersek Teorem 3.6 gereğince Eş. 3.32 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Teorem 3.7.

Teorem 3.6 nın Eş. 3.15 dışındaki tüm şartları sağlansın. Ayrıca Eş. 3.19 ve Eş. 3.20 sağlansın. Eğer Eş. 3.21 ve Eş. 3.22 sağlanacak şekilde bir  $\psi \in C[T_0, \infty)$  fonksiyonu varsa Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Teorem 3.8.

Teorem 3.7 nin Eş. 3.20 dışındaki tüm şartları sağlansın ve Eş. 3.20 yerine Eş. 3.26 sağlansın. Bu durumda Eş. 3.7 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

### 3.2. $f$ Fonksiyonunun Monoton Olması Durumu

Üçüncü basamaktan

$$\left( r_2(t) (r_1(t) y')' \right)' + p(t) y' + q(t) f(y(g(t))) = 0 \quad (3.1)$$

denklemini ele alalım. Burada  $r_1, r_2, p, q, g \in C[T_0, \infty)$  ve  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın;

- $t \in I$  için  $r_1(t) > 0, r_2(t) > 0, p(t) \geq 0, q(t) \geq 0,$
- sonsuz komşuluğunda  $q(t) \neq 0,$
- $t \rightarrow \infty$  iken  $g(t) \rightarrow \infty$  ve  $u \neq 0$  için  $uf(u) > 0.$

Ayrıca,  $f$  aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i)  $u \neq 0$  için  $f'(u) \geq 0$  olacak şekilde  $f \in C^1(-\infty, 0) \cap C^1(0, \infty);$

(ii)  $D > 0$  bir sabit olmak üzere  $|u| \geq D$  için  $f'(u) \geq K_0$  olacak şekilde bir  $K_0 > 0$  sabiti olsun.

$V_2$  özelliğine sahip her  $u(t)$  fonksiyonu sınırsızdır ve sonuç olarak,  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $f'(u(t)) \geq K_0 > 0$  olduğu kolaylıkla görülür.

Lemma 3.6.

$\rho_2, [T_0, \infty)$  da tanımlı yeterince düzgün pozitif bir fonksiyon ve  $\phi$  fonksiyonunu,

$\phi(t) = r_1(t)(r_2(t)\rho_2'(t))' + \rho_2(t)p(t)$  şeklinde tanımlayalım. Her  $t \geq T_1$  için

$$\rho_2'(t) \geq 0, \phi(t) \geq 0, \phi'(t) \leq 0 \quad (3.33)$$

ve

$$\int_{T_1}^{\infty} \rho_2(s)q(s)ds = \infty \quad (3.34)$$

olacak şekilde bir  $T_1 \geq T_0$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca Eş. 3.2 sağlansın. Eğer  $t \geq T_1$  için Eş. 3.1 in  $y(t)L_1y(t) \leq 0$  eşitsizliğini sağlayan salınımsız bir çözümü  $y$  ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

### *İspat*

$[T_0, \infty)$  da Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Böylece  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1y(t) < 0$  dır.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lambda > 0$  olduğunu kabul edelim. Böylece  $y(t) \geq \lambda/2$  ve  $f$  fonksiyonunun monotonluğundan her  $t \geq t_1$  için  $f(y(g(t))) \geq f(\lambda/2)$  dir. Eş. 3.1 i  $\rho_2(t)$  ile çarpıp  $t_1$  den  $t$  ye integral alınırsa  $C_3$  sabit olmak üzere

$$\rho_2(t)L_2y(t) = C_3 + \rho_2'(t)r_2(t)L_1y(t) - \phi(t)y(t)$$

$$+ \int_{t_1}^t \phi'(s)y(s)ds - \int_{t_1}^t \rho_2(s)q(s)f(y(g(s)))ds$$

ve böylece

$$\rho_2(t)L_2y(t) \leq C_3 - f(\lambda/2) \int_{t_1}^t \rho_2(s)q(s)ds$$

elde edilir.  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.34 den  $L_2y(t) < 0$  elde edilir. Bu ise  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $y(t) < 0$  olmasıdır ki  $y(t) > 0$  kabulü ile çelişkidir. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

Teorem 3.9.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.33, Eş. 3.34 sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[ \rho_1(s)q(s) - \frac{r_1(g(s))(r_1(s)\rho_1'(s) - \rho_1(s)p(s)R_2(\sigma(s), \sigma_*(s)))^2}{4K_0\rho_1(s)R_2(\sigma(s), \sigma_*(s))g'(s)r_1^2(s)} \right] ds = \infty \quad (3.35)$$

olacak şekilde diferensiyellenebilir pozitif bir  $\rho_1$  fonksiyonu varsa Eş. 3.1 nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  da Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 den  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $L_1 y(t) > 0$  veya  $L_1 y(t) < 0$  dır. Eğer  $t \geq t_1$  için  $L_1 y(t) > 0$  ise Lemma 3.2 den  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $V_2$  özelliğine sahiptir. Böylece  $y$  sınırsız olduğundan  $f'(y) \geq K_0 > 0$  olacak şekilde bir  $K_0 > 0$  sabiti vardır.  $t \geq t_1$  için

$$\omega(t) = \rho_1(t) \frac{L_2 y(t)}{y(g(t))}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.1 ve Lemma 3.3 den  $A_0(t) =$

$$\frac{K_0 R_2(\sigma(t), \sigma_*(t))g'(t)}{r_1(g(t))\rho_1(t)} \text{ ve } B_0(t) = \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)} - p(t) \frac{R_2(\sigma(t), \sigma_*(t))}{r_1(t)} \text{ olmak üzere}$$

$$\omega' \leq -\rho_1(t)q(t) - [\omega^2(t)A_0(t) - \omega(t)B_0(t)]$$

ve böylece

$$\omega' \leq -\rho_1(t)q(t) + \frac{B_0^2(t)}{A_0(t)} \quad (3.36)$$

bulunur. Eş. 3.36'nın  $t_1$  den  $t$  ye integrali alınır

$$\int_{t_1}^t \left[ \rho_1(s)q(s) - \frac{B_0^2(s)}{4A_0(s)} \right] ds \leq \omega(t_1) - \omega(t) \leq \omega(t_1)$$

elde edilir ki Eş. 3.35 kabulü ile çelişkidir.

$t \geq t_1$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1 y(t) < 0$  olsun. Lemma 3.6 dan  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

Örnek 3.9.

$\alpha > 1$  ve  $\lambda > 0$  olmak üzere  $t \geq 1$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{1}{4t^2} y'(t) + \frac{25}{4} \frac{(\lambda t)^\alpha}{t^4} |y(\lambda t)|^{\alpha-1} y(\lambda t) = 0 \quad (3.37)$$

denklemini ele alalım.  $0 < \lambda < 1$  olduğunda  $\sigma_*(t) = \frac{\lambda t}{2}$ ,  $\lambda \geq 1$  olduğunda  $\sigma_*(t) = \frac{t}{2}$

ve  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t^2$  seçersek Teorem 3.9'un tüm şartları sağlandığından Eş. 3.37'nin her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır. Denklemin bir

çözümü  $y(t) = \frac{1}{t}$  dir.  $\alpha = \lambda = 1$  olduğunda Euler olan Eş. 3.37'nin çözümleri

$y_1(t) = \frac{1}{t}$ ,  $y_2(t) = t^2 \cos\left(\frac{3}{2} \ln t\right)$  ve  $y_3(t) = t^2 \sin\left(\frac{3}{2} \ln t\right)$  dir.

Örnek 3.10.

$p_0, q_0, \alpha, \beta$  ve  $\lambda > 0$  sabitler olmak üzere  $t \geq 1$  için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{p_0}{t^\alpha} y'(t) + \frac{q_0}{t^\beta} y(\lambda t) = 0 \quad (3.38)$$

denklemini ele alalım.

$$0 < \lambda < 1 \text{ olduğunda } \sigma_*(t) = \frac{\lambda t}{2}, \lambda \geq 1 \text{ olduğunda } \sigma_*(t) = \frac{t}{2}$$

ve  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t^2$  seçersek  $0 \leq p_0 \leq \frac{1}{4}$ ,  $q_0 > 0$ ,  $\alpha \geq 2$  ve  $\beta < 3$  için Teorem 3.9

dan Eş. 3.38 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır. Diğer yandan, eğer  $\alpha = 2$  ve  $\beta = 3$  ise

$$0 < \lambda < 1 \text{ için } q_0 > \frac{(4 - \lambda p_0)^2}{8\lambda^2} \text{ ve } \lambda \geq 1 \text{ için } q_0 > \frac{(4 - p_0)^2}{8\lambda}$$

elde edilir. Eğer  $\lambda = 1$ ,  $p_0 = \frac{1}{4}$  ve  $q_0 = \frac{25}{4}$  alırsak Eş. 3.38 Euler diferensiyel

denkleminin çözümleri  $y_1(t) = \frac{1}{t}$ ,  $y_2(t) = t^2 \cos\left(\frac{3}{2} \ln t\right)$  ve  $y_3(t) = t^2 \sin\left(\frac{3}{2} \ln t\right)$  dir.

Teorem 3.10.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.33, Eş. 3.34 sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Eğer

$$A_0(t) = \frac{K_0 R_2(\sigma(t), \sigma_*(t)) g'(t)}{r_1(g(t)) \rho_1(t)} \text{ ve}$$

$$Q_0(t, s) = h(t, s) - \sqrt{H(t, s)} \left( \frac{\rho_1'(s)}{\rho_1(s)} - p(s) \frac{R_2(\sigma(s), \sigma_*(s))}{r_1(s)} \right)$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_0^2(t, s)}{4A_0(s)} \right] ds = \infty \quad (3.39)$$

olacak şekilde  $\rho_1 \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  ve  $\mathcal{H}_t$  sınıfından  $H$  fonksiyonları varsa Eş. 3.1 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Sonuç 3.2.

Eş. 3.2, Eş. 3.3, Eş. 3.6, Eş. 3.33, Eş. 3.34 sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho_1(s) H(t, s) q(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{Q_0^2(t, s)}{A_0(s)} ds < \infty$$

olacak şekilde  $\mathcal{H}_t$  sınıfından  $H$  ve  $\rho_1 \in C^1([T_0, \infty), (0, \infty))$  fonksiyonları varsa Eş. 3.1 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Örnek 3.11.

$t \geq 1$  için üçüncü basamaktan

$$\left(\frac{1}{t}y''\right)' + \frac{1}{4t^3}y' + \frac{1}{t^2}y = 0 \quad (3.40)$$

denklemini ele alalım.  $\rho_1(t) = \rho_2(t) = t$ ,  $H(t, s) = (t - s)^2$  ve  $\sigma_*(t) = \frac{t}{2}$  seçersek Teorem 3.10 gereğince Eş. 3.40'ın her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Şimdi de Teorem 3.10'a alternatif olabilecek salınımlılık kriterleri verelim.

Teorem 3.11.

Teorem 3.10'un Eş. 3.39 dışındaki tüm şartları sağlansın. Ayrıca

$$0 < \inf_{s \geq T} \left[ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, T)} \right] \leq \infty \quad (3.19)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{Q_0^2(t, s)}{A_0(s)} ds < \infty \quad (3.41)$$

olsun. Eğer  $\psi_+(t) = \max\{\psi(t), 0\}$  olmak üzere

$$\int_T^\infty \psi_+^2(s) A_0(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \rho_1(s) H(t, s) q(s) - \frac{Q_0^2(t, s)}{4A_0(s)} \right] ds \geq \sup_{t \geq T} \psi(t)$$

olacak şekilde bir  $\psi \in C[T_0, \infty)$  fonksiyonu varsa Eş. 3.1 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Teorem 3.12.

Teorem 3.11 in Eş. 3.41 dışındaki tüm şartları sağlansın ve Eş. 3.41 yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho_1(s) H(t, s) q(s) ds < \infty$$

şartı sağlansın. Bu durumda Eş. 3.1 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Teorem 3.10-Teorem 3.12 nin ispatları Teorem 3.2-Teorem 3.4 ün ispatlarına benzerdir.

$\sigma(t)$  fonksiyonu ve (ii) şartı olmaksızın, Eş. 3.1 fonksiyonel denklemi için aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.13.

Eş. 3.2, Eş. 3.3 sağlansın ve Eş. 3.4 salınımsız olsun. Ayrıca, her  $t \geq T$  için  $p'(t) \leq 0$  olacak şekilde bir  $T \geq T_0$  ve  $p \in C^1[T_0, \infty)$  olsun. Eğer

$$\int_T^\infty q(s) ds = \infty \tag{3.42}$$

ise Eş. 3.1 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dir.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  da Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  ve  $y(g(t)) > 0$  olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 den  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $L_1 y(t) > 0$  veya  $L_1 y(t) < 0$  dir. Eğer  $t \geq t_1$  için  $L_1 y(t) > 0$  ise Lemma 3.2 den  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $V_2$  özelliğine sahiptir.  $t \geq t_1$  için

$$\omega(t) = \frac{L_2 y(t)}{f(y(g(t)))} \quad (3.43)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.1 den  $C_4$  bir sabit olmak üzere

$$\frac{L_2 y(t)}{f(y(g(t)))} \leq C_4 - \int_{t_1}^t q(s) ds$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte,  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.42 den  $L_2 y(t) < 0$  bulunur ki  $L_2 y(t) > 0$  olması ile çelişir.

Diğer yandan,  $t \geq t_1$  için  $y(t) > 0$  ve  $L_1 y(t) < 0$  olsun.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  olduğunu gösterelim.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lambda > 0$  olduğunu kabul edelim. Böylece  $y(t) \geq \lambda/2$  ve  $f$  in monotonluğundan her  $t \geq t_1$  için  $f(y(g(t))) \geq f(\lambda/2)$  dir. Eş. 3.1 in  $t_1$  den  $t$  ye integrali alınırsa  $C_5$  sabit olmak üzere

$$L_2 y(t) \leq C_5 - f(\lambda/2) \int_{t_1}^t q(s) ds$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik ve Eş. 3.42 den  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $L_2 y(t) < 0$  ve böylece

$$y(t) \leq y(t_1) + L_1 y(t_1) R_1(t, t_1)$$

elde edilir. Sonuç olarak,  $t$  nin yeterince büyük değerleri için Eş. 3.2 den  $y(t) < 0$  elde edilir ki  $y(t) > 0$  kabulü ile çelişkidir. Böylece  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Örnek 3.12.

$\alpha > 0$  olmak üzere  $t > 1$  için üçüncü basamaktan

$$(ty')'' + \frac{1}{4t} y' + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) |y(t + \sin t)|^{\alpha-1} y(t + \sin t) = 0 \quad (3.44)$$

fonksiyonel denklemi ele alalım. Dolayısıyla, Teorem 3.13 gereğince Eş. 3.44 ün her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

Belirtelim ki Eş. 3.44 için Teorem 3.1-Teorem 3.9 dan hiçbiri uygulanamaz.

Şimdi de E.ş. 3.1 denkleminin bir özel durumu olan

$$y''' + p(t)y' + q(t)f(y(t)) = 0 \quad (3.45)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $p, q \in C[T_0, \infty)$  ve  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın;

- $t \in I$  için  $p(t) \geq 0, q(t) \geq 0$ ,
- sonsuz komşuluğunda  $q(t) \neq 0$ ,

- $u \neq 0$  için  $uf(u) > 0$ .

Ayrıca  $f$  fonksiyonu, (i) şartını sağlasın.

Lemma 3.1 ve Lemma 3.2, Eş. 3.1 in özel hali olan Eş. 3.45 içinde geçerlidir.

Tanım 2.5 de tanımlanan  $\mathcal{H}_I$  sınıfından fonksiyonlar ilaveten aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$(H_3) \quad t \geq T \text{ için } \left. \frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right|_{s=t} \equiv 0;$$

$$(H_4) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left. -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right|_{s=T}}{H(t, T)} < \infty;$$

$$(H_5) \quad t \geq s \geq T \text{ için } \frac{\partial^2 H(t, s)}{\partial s^2} \geq 0.$$

Tüm bu koşulları sağlayan  $H \in C(D, \mathbb{R})$  fonksiyonlar sınıfını da  $\mathcal{H}_2$  ile gösterelim.

$r_1(t) = r_2(t) = 1$  olduğunda Lemma 3.6 aşağıdaki gibi ifade edilir.

Lemma 3.7.

$\rho_2, [T_0, \infty)$  da tanımlı yeterince düzgün pozitif bir fonksiyon ve  $\phi_1$  fonksiyonunu  $\phi_1(t) = \rho_2''(t) + \rho_2(t)p(t)$  şeklinde tanımlayalım. Her  $t \geq T$  için

$$\rho_2'(t) \geq 0, \phi_1(t) \geq 0, \phi_1'(t) \leq 0 \quad (3.46)$$

ve

$$\int_T^\infty \rho_2(s) q(s) ds = \infty \quad (3.47)$$

olacak şekilde bir  $T \geq T_0$  olduğunu kabul edelim. Ayrıca Eş. 3.2 sağlansın. Eğer  $t \geq T$  için Eş. 3.45 in  $y(t) L_1 y(t) \leq 0$  eşitsizliğini sağlayan salınımsız bir çözümü  $y$  ise  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

**Teorem 3.14.**

$0 < \delta < 1$  ve  $D > 0$  sabitler olmak üzere  $|u| \geq D$  için  $2\delta f'^2(u) - f(u)f''(u) \geq K_1$  olacak şekilde bir  $K_1 > 0$  olsun. Eş. 3.46, Eş. 3.47,  $z'' + p(t)z = 0$  denklemi salınımsız ve  $t > s \geq T \geq T_0$  için

$$A(t, s) := \left( \frac{3\rho_1'(s)}{4\rho_1(s)} \right)^2 \left( \frac{1}{1-\delta} \right) - \frac{\rho_1''(s)}{\rho_1(s)} - 2 \frac{\rho_1'(s)}{\rho_1(s)} \frac{\frac{\partial H(t, s)}{\partial s}}{H(t, s)} - p(s) \geq 0$$

olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho_1(s) H(t, s) \left[ q(s) - \frac{1}{\sqrt{K_1}} \left( \frac{2}{3} A(t, s) \right)^{\frac{3}{2}} \right] ds = \infty \quad (3.48)$$

olacak şekilde  $\rho_1 \in C^2([T_0, \infty), (0, \infty))$  ve  $\mathcal{H}_2$  sınıfından bir  $H$  fonksiyonu varsa Eş. 3.45 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

*İspat*

$[T_0, \infty)$  da Eş. 3.45 in salınımsız bir çözümü  $y$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \geq t_0 \geq T_0$  için  $y(t) > 0$  olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 den  $t \geq t_1 \geq t_0$  için  $y'(t) > 0$  veya  $y'(t) < 0$  dır. Eğer  $t \geq t_1$  için  $y'(t) > 0$  ise Lemma 3.2 den  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $V_2$  özelliğine sahiptir.  $t \geq t_1$  için

$$\omega(t) = \rho_1(t) \frac{y'(t)}{f(y(t))}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eş. 3.45 den  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned} & \left( \omega'(t) + \frac{3}{2} \frac{f'(y(t))}{\rho_1(t)} \omega^2(t) - 2 \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1(t)} \omega(t) \right)' \\ &= - \left[ \frac{\omega^3(t)}{\rho_1^2(t)} (f'^2(y(t))) - \frac{f(y(t)) f''(y(t))}{2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1^2(t)} f'(y(t)) \omega^2(t) + \left( p(t) + \frac{\rho_1''(t)}{\rho_1^2(t)} \right) \omega(t) + \rho_1(t) q(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Eş. 3.49 ı  $H(t, s)$  ile çarpıp  $t_1$  den  $t$  ye integrali alırsak

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t H(t, s) \left( \omega'(s) + \frac{3}{2} \frac{f'(y(s))}{\rho_1(s)} \omega^2(s) - 2 \frac{\rho_1'(s)}{\rho_1(s)} \omega(s) \right) ds \\ &= - \int_{t_1}^t H(t, s) \left[ \frac{\omega^3(s)}{\rho_1^2(s)} (f'^2(y(s))) - \frac{f(y(s)) f''(y(s))}{2} \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{2} \frac{\rho_1'(t)}{\rho_1^2(t)} f'(y(t)) \omega^2(t) + \left( p(t) + \frac{\rho_1''(t)}{\rho_1^2(t)} \right) \omega(t) + \rho_1(t) q(t) \Big] ds$$

elde edilir.  $t$  nin yeterince büyük değerleri için  $y$  sınırsız olduğundan  $2\delta f'^2(u) - f(u)f''(u) \geq K_1$  olacak şekilde bir  $K_1 > 0$  sabiti vardır. İlk integrale kısmi integrasyon uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa  $C_6$  sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t H(t,s) \left( \frac{1}{2} \frac{\omega^3(s)}{\rho_1^2(s)} (2\delta f'^2(y(s)) - f(y(s))f''(y(s))) - \omega(s)A(t,s) + \rho_1(s)q(s) \right) ds \\ & \leq H(t,t_1)C_6 - \omega(t_1) \frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \Big|_{s=t_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{H(t,t_1)} \int_{t_1}^t \rho_1(s) H(t,s) \left[ q(s) - \frac{1}{\sqrt{K_1}} \left( \frac{2}{3} A(t,s) \right)^{\frac{3}{2}} \right] ds \leq C_6 - \omega(t_1) \frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \Big|_{s=t_1}}{H(t,t_1)}$$

bulunur ki Eş. 3.48 ile çelişkidir.

Diğer yandan,  $t \geq t_1$  için  $y(t)$  ve  $y'(t) < 0$  olsun. Lemma 3.7 den  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  dır.

Sonuç 3.3.

Teorem 3.14 ün Eş. 3.48 dışındaki tüm koşulları sağlansın. Eş. 3.48 yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \rho_1(s) H(t,s) q(s) ds = \infty$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \rho_1(s) H(t, s) A^{\frac{3}{2}}(t, s) ds < \infty$$

olsun. Böylece Eş. 3.45 in her  $y$  çözümü ya salınımlı ya da  $t \rightarrow \infty$  iken  $y(t) \rightarrow 0$  dır.

## KAYNAKLAR

1. Parhi, N., Das, P., "Oscillatory and asymptotic behavior of a class of nonlinear functional differential equations of third order", *Bull. Calcutta. Math. Soc.*, 86:253-266 (1994).
2. Birkhoff, G.D., "On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order", *Ann. of Math.*, 12:103-127 (1911).
3. Villari, G., "Contributi allo studio asintotico dell'equazione  $y''' + p(t)y = 0$ ", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 51:301-328 (1960).
4. Hanan, M., "Oscillation criteria for a third order linear differential equations", *Pacific J. Math.*, 11:919-944 (1961).
5. Lazer, A., "The behaviour of solutions of the differential equation  $y''' + p(t)y' + q(t)y = 0$ ", *Pacific J. Math.*, 17:435-466 (1966).
6. Barrett, J.H., "Oscillation theory of ordinary linear differential equations", *Advances in Math.*, 3:415-509 (1969).
7. Nelson, J.L., "A stability theorem for a third order nonlinear differential equation", *Pacific J. Math.*, 24:341-344 (1968).
8. Elias, J., "Properties of the nonoscillatory solution for a third order nonlinear differential equation", *Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied*, 20:249-253 (1970).
9. Soltes, P., "A remark on the oscillatoriness of solutions of a non-linear third-order equation", *Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied*, 23:326-332 (1973).
10. Erbe, L., "Oscillation, nonoscillation, and asymptotic behavior for third order nonlinear differential equations", *Ann. Mat. Pura Appl.*, 110(4):373-391 (1976).
11. Waltman, P., "Waltman, Oscillation criteria for third order nonlinear differential equations", *Pacific J. Math.*, 18:385-389 (1966).
12. Heidel, J.W., "Qualitative behavior of solutions of a third order nonlinear differential equation", *Pacific J. Math.*, 27:507-526 (1968).
13. Kura, T., "Nonoscillation criteria for nonlinear ordinary differential equations of the third order", *Nonlinear Anal.*, 8:369-379 (1984).
14. Parhi, N., Das, P., "Oscillation criteria for a class of nonlinear differential equations of third order", *Ann. Pol. Math.*, 57:219-229 (1992).

15. Tiryaki, A., Yaman, Ş., “Oscillatory behavior of a class of nonlinear differential equations of third order”, *Acta Math. Sci.*, 21(B(2)):182-188 (2001).
16. Skerlik, A., “Criteria of property A for third order superlinear differential equations”, *Math. Slovaca*, 43:171-183 (1993).
17. Chanturiya, T.A., Kiguradze, I.T., “Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations”, *Nauka, Moscow*, 57-67 (1990).
18. Gregus, M., “Linear differential equation of third order”, *Veda, Bratislava*, 50-60 (1981).
19. Swanson, C.A., “Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations”, *Academic Press, Newyork*, 44-52, 70-74 (1968).
20. Chanturiya, T.A., “Integral conditions of oscillation of solutions of higher-order linear differential equations”, *Differentsial’nye Uravneniya*, 16:470-482 (1980).
21. Skerlik, A., “An integral condition of oscillation for equation  $y''' + p(t)y' + q(t)y = 0$  with nonnegative coefficients”, *Arch. Math.*, 31:155-161 (1995).
22. Skerlik, A., “Integral criteria of oscillation for third order linear differential equation”, *Math. Slovaca*, 45:403-412 (1995).
23. Parhi, N., Das, P., “Asymptotic property of solutions of a class of third-order differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110:387-393 (1990).
24. Parhi, N., Pardi, S., “On oscillation and asymptotic property of a class of third order differential equations”, *Czec. Math. J.*, 49:21-33 (1999).
25. Tiryaki, A., Yaman, Ş., “Asymptotic behavior of a class of nonlinear functional differential equations of third order”, *Appl. Math. Lett.*, 14:327-332 (2001).
26. Licko, I., Svec, M., “Le caract`ere oscillatoire des solutions de l’equation  $y^{(n)} + f(t)y^\lambda = 0$ ,  $n > 1$ ”, *Czec. Math. J.*, 13:481-491 (1963).
27. Mikusinski, J.G., “On Fite's oscillation theorems”, *Colloquium Math.*, 2:34-39 (1949).
28. Cecchi, I., Marini, M., “On the oscillatory behavior of a third order nonlinear differential equation”, *Nonlinear Anal.*, 15:141-153 (1990).
29. Parhi, N., Das, P., “Oscillatory and asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of third order”, *Acta Math. Sci.*, 18(1):95-106 (1998).

30. Saker, S.H., "Oscillation criteria of third-order nonlinear delay differential equations", *Math. Slovaca*, 56:433-450 (2006).
31. Philos, Ch.G., "Oscillation theorems for linear differential equation of second order", *Arch. Math.*, 53:482-492 (1989).
32. Skerlik, A., "Oscillation theorems for third order nonlinear differential equations", *Math. Slovaca*, 42:471-484 (1992).
33. Ayanlar, B., Tiryaki, A., "Oscillation theorems for nonlinear second order differential equation with damping", *Acta Math. Hungar.* 89:1-13 (2000).
34. Grace, S.R., Lalli, B.S., "On oscillation and nonoscillation of general functional-differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 109:522-533 (1985).
35. Grace, S.R., "Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping", *Math. Nachr.*, 141:117-127 (1989).
36. Rogovchenko, Yu.V., "Oscillation theorems for second-order equations with damping", *Nonlinear Anal.*, 41:1005-1028 (2000).
37. Tiryaki, A., Zafer, A., "Oscillation criteria for second-order nonlinear differential equations with damping", *Turkish J. Math.*, 24:185-196 (2000).
38. Wong, J.S.W., "On Kamenev-Type oscillation theorems for second-order differential equations with damping", *J. Math. Anal. Appl.*, 258:244-257 (2001).
39. Tiryaki, A., Aktas, M.F., "Oscillation criteria of a certain class of third order nonlinear delay differential equations with damping", *J. Math. Anal. Appl.*, 325:54-68 (2007).

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : AKTAŞ, Mustafa Fahri  
 Uyruğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 04.02.1979 Ankara  
 Medeni hali : Bekar  
 Telefon : 0 (312) 361 19 87  
 e-mail : mustafafahri@hotmail.com, mfahri@gazi.edu.tr.

### Eğitim

| Derece        | Eğitim Birimi                         | Mezuniyet tarihi |
|---------------|---------------------------------------|------------------|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü   | 2003             |
| Lisans        | Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü | 2001             |
| Lise          | Şereflikoçhisar Lisesi                | 1996             |

### İş Deneyimi

| Yıl       | Yer               | Görev               |
|-----------|-------------------|---------------------|
| 2002-2008 | Gazi Üniversitesi | Araştırma Görevlisi |

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

1. Tiryaki, A., Aktas, M.F., “Oscillation criteria of a certain class of third order nonlinear delay diferential equations with damping”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325:54-68, 2007.
2. Aktas, M.F., Tiryaki, A., “Oscillation criteria of a certain class of third order nonlinear delay diferential equations”, ISAAC2007.
3. Aktas, M.F., Tiryaki, A., Zafer, A., “Oscillation criteria for third order nonlinear functional diferential equations”, preprint.

### Hobiler

Futbol, Yüzme, Bilgisayar Teknolojileri