

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UNİ-NULLNORMLAR ÜZERİNDE SIRALAMA

Esra ŞAMLI

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ

RİZE-2021

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

UNİ-NULLNORMLAR ÜZERİNDE SIRALAMA

Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU danışmanlığında, Esra ŞAMLI tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 14/07/2021 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı, Adı Soyadı

İmza

Başkan

: Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Üye

: Prof. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU

Üye

: Dr. Öğr. Üyesi Ümit DENİZ

Doç. Dr. Ahmet YANIK
ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışma uni-nullnormlardan elde edilen sıralamaları incelemek amacı ile Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Tez çalışmamda ilgi ve desteğini esirgemeyen bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeyle çalışmamı şekillendiren değerli hocam Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca eğitimimde emeği geçen RTEÜ Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına, moral ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eşim Ahmet ŞAMLI, çocuklarım Ahsen ŞAMLI ve Göktuğ ŞAMLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Esra ŞAMLI

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Uni-nullnormlar Üzerinde Sıralama” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 14/07/2021

Esra ŞAMLI

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

UNI-NULLNORMLAR ÜZERİNDE SIRALAMA

Esra ŞAMLI

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışmanı: Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Bu çalışmada, sınırlı kafesler üzerinde uni-nullnormlardan elde edilen bir sıralama tanımlandı ve özellikleri incelendi. Tanımlanan sıralama ile diğer mantık operatörlerinden elde edilen sıralamalar arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca, sınırlı kafesler üzerindeki uni-nullnormlardan elde edilen sıralamanın oluşturduğu cebirsel yapılar ele alındı.

2021, 77 sayfa

Anahtar Kelimeler: Uninorm, Sınırlı kafes, Kısmen sıralama, Uni-nullnorm

ABSTRACT

ORDERING BASED ON UNI-NULLNORMS

Esra ŞAMLI

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics**

Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

In this study, an order obtained from uni-null norms on bounded lattices was defined and its properties were examined. The relationships between the defined order and the orders obtained from the other logical operators were investigated. In addition, the algebraic structures formed by the order obtained from uni-null norms on bounded lattices were discussed.

2021, 77 pages

Keywords: Uninorm, Bounded lattice, Partial order, Uni-nullnorm

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
TABLolar DİZİNİ.....	VIII
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kafes	3
1.2.1. Sıralama (Kısmen Sıralama Bağıntısı)	3
1.2.2. Kafes Cebiri	13
1.2.3. Dağılmahlılık	15
1.2.4. Modülerlik	16
1.3. T-normlar ve T-konormlar.....	17
1.4. Nullnormlar	20
1.5. Uninormlar.....	20
1.6. Uni-nullnormlar	21
1.7. Mantıksal Operatörlerden Elde Edilen Sıralamalar	21
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	25
2.1. $\leq_F$ Sıralaması.....	25
2.2. Sıralamalar Arasındaki İlişkiler	38
2.2.1. N-Duallik Durumu	38
2.2.2. ϕ -Eşlenik Durumu	48
3. BULGULAR	59

4.	TARTIşMA ve SONUÇLAR.....	61
5.	ÖNERİLER.....	62
	KAYNAKLAR	63



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Hasse Diyagramı	5
Şekil 2. $(A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 15\}, \leq)$	6
Şekil 3. Hasse Diyagramı	6
Şekil 4. Hasse Diyagramı	8
Şekil 5. P ve P nin Duali	9
Şekil 6. Hasse Diyagramı	10
Şekil 7. $(L = \{0, a, b, c, d, 1\}, \leq)$	12
Şekil 8. M_5 ve N_5	15
Şekil 9. N_5	16
Şekil 10. $(L, \leq, 0, 1)$	29
Şekil 11. $(L, \leq_F, 0, 1)$	32
Şekil 12. $(L, \leq_T)$	41
Şekil 13. $(L, \leq_{T_D}, 0, 1)$	44
Şekil 14. $(L, \leq_T, 0, 1)$	52
Şekil 15. $(L, \leq_T, 0, 1)$	53

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. L üzerinde F_Λ uni-nullnormu	31
Tablo 2. T fonksiyonu	52



SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit Değildir
$\leq$	Küçük Eşittir
$\geq$	Büyük Eşittir
$<$	Küçük
$>$	Büyük
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$:$	Öyle Ki
$\emptyset$	Boş Küme
$\cap$	Arakesit
$\cup$	Birleşim
$\subseteq$	Alt Küme
$\not\subseteq$	Alt Küme değildir
$[a, b]$	Kapalı Aralık
(a, b)	Açık Aralık
$ $	Böler
$ $	Kıyaslanabilir
$\bar{X}$	X in Üst Sınırlarının Kümesi
$\underline{X}$	X in Alt Sınırlarının Kümesi
$\forall$	Her
$\exists$	En Az
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve Ancak
$\vee$	Supremum
$\wedge$	İnfimum
$\mathcal{P}$	Güç Kümesi
$x \vee y$	x ve y nin En Küçük Üst Sınırı
$x \wedge y$	x ve y nin En Büyük Alt Sınırı
$\mathbb{P}$	Asal Sayı

$T_{\wedge}$	Sınırlı Bir Kafes Üzerindeki En Büyük t-norm
T_W	Sınırlı Bir Kafes Üzerindeki En Küçük t-norm
$\leq_F$	Uni-nullnorm F ile Elde Edilen Sıralama Bağıntısı
$\leq_T$	T-norm T ile Elde Edilen Sıralama Bağıntısı
$\leq_S$	T-konorm S ile Elde Edilen Sıralama Bağıntısı
$\leq_U$	Uni-norm U ile Elde Edilen Sıralama Bağıntısı
$\leq_V$	Nullnorm V ile Elde Edilen Sıralama Bağıntısı
$\leq_{T_{\varphi}}$	Eşlenik T-norm T_{φ} ile Elde Edilen Sıralama Bağıntısı



1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümdeki bilgiler Kafes Teorisi (Lattice Theory) [4] ve Üçgensel Normlar (Triangular Norms) [6] kaynaklarından alınmıştır.

1.1. Giriş

Üçgensel normlar ile ilgili çalışmalar Karl Menger tarafından 1942’de ‘İstatiksel Metrik’ isimli çalışma ile başlamıştır. 1958-1964 yılları arasında Sklar, Schweizer ve Serstnew tarafından bu alana katkı sağlanmıştır. Daha sonra Klement ve arkadaşları [6] t-normlar ve genel olarak bulanık akıl yürütme literatürüne değerli bir katkı sağlamıştır.

Uninormlar, üçgensel norm ve üçgensel konormların özel bir genelleştirmesidir. Uninormlar ilk kez Yager ve Rybalov [17] tarafından 1996’da ortaya çıkmıştır. Daha sonra Yager ve Kreinovich [18] 2003’teki çalışmalarında sınırlı kafesler üzerinde bir birime ve sıfırlayana sahip uninormları karakterize eden bir metot bulmuşlar ve bu şekildeki uninormların bazı temel özellikleri araştırmışlardır. Karaçal ve Mesiar [9], sınırlı kafesler üzerinde uninormların varlığını ortaya koymuşlardır.

Bunun yanı sıra, 1999 yılında Mas, Mayor ve Torrens [21] çalışmalarında t-operatör diye adlandırılan operatör sınıfını ve uninormlara benzer şekilde $[0, 1]$ üzerinde bir t-norm ve bir t-konormun özel bir kombinasyonu olarak karakterize etmişlerdir. 2001 yılında Calvo, De Baets ve Fodor [19] çalışmasında değişmeli, birleşmeli ve artan ikili operatörlerin iki sınıfı için Frank ve Alsina’nın fonksiyonel denklemlerini inceleyerek uninormlar ve nullnormlar ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Karaçal ve Khadjiev [10] 2005 yılında yaptıkları çalışmada tam kafes üzerindeki t-normların iç direkt çarpım kavramı ile dış direkt çarpım arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Karaçal [20] 2006’daki çalışmasında direkt çarpım şeklinde olmayan ve çarpım kafesleri üzerinde tanımlanan t-normları belirtmek için başka yöntemlerin var olduğunu göstermiştir.

Karaçal ve Kesicioğlu [7] 2011’deki çalışmada sınırlı bir L kafesi üzerinde t-

normlar yardımı ile

$$x \leq_T y \Leftrightarrow \exists \ell \in L \text{ öyle ki } T(\ell, y) = x$$

şeklinde bir sıralama tanımlamış ve bu bağıntının bir sıralama bağıntısı olduğunu göstermişlerdir. Kafes üzerindeki sıralama ile T -kısmen sıralama arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

Kesicioğlu, Karaçal ve Mesiar [11] 2015'deki çalışmada, T -kısmen sıralama tarafından üretilen t -normların sınıfları üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlamış ve bu denklik bağıntısına göre denklik sınıfları araştırılmıştır. Bazı özel t -normlara karşılık gelen denklik sınıfları karakterize edilmiş ve denklik bağıntısında korunan özellikler incelenmiştir. T -kısmen sıralamaya göre kıyaslanamayan elemanların kümesi tanımlanarak, bu küme detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Ertuğrul, Kesicioğlu ve Karaçal [1] 2016'daki çalışmada, sınırlı kafesler üzerindeki uninormlar yardımıyla üretilen bir kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış ve kafes üzerindeki sıralama ile ilişkisi incelenmiştir. Böylece, T -kısmen sıralama daha genel bir forma genişletilmiştir. Uninormun t -norm ve t -konorm kısımlarından elde edilen sıralamalar ile uninormun kendisinden elde edilen sıralama arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur.

Kesicioğlu, Ertuğrul ve Karaçal [3] 2017'deki çalışmada, U -kısmen sıralama ile üretilen uninormların sınıfı üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanmış ve özellikleri tartışılmıştır. U -kısmen sıralamaya göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi, ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Ayrıca, tek bir elemanla kıyaslanamayan elemanların kümesi tanımlanarak özellikleri ele alınmıştır.

Jayaram [21] 2016'daki çalışmada fuzzy gerektirmeleri ile üretilen sıralama tanımlanmış ve özelliklerini incelenmiştir. Daha sonra Kesicioğlu ve Çoğalmış [23] 2019'daki çalışmada uninormların rezidual gerektirmelerinden elde edilen sıralamalar incelenmiş ve cebirsel yapıları ele alınmıştır.

Bu çalışmada uninorm ve nullnormların genelleştirilmiş hali olan uni-nullnormlardan üretilen bir sıralama bağıntısı tanımlanarak ve cebirsel yapısı

incelenmiştir. Uni-nullnormlardan elde edilen sıralamanın doğal sıralama ile ilişkisi gösterilmiştir. Bir t-norm ve bu t-normun φ -eşleniğinden elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları incelenmiştir. Ayrıca, bir t-norm ve onun N -dual t-konormundan elde edilen sıralamalar incelenmiş ve bu şekildeki sıralamalardan elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

1.2. Kafes [4]

1.2.1. Sıralama (Kısmen Sıralama Bağıntısı)

Tanım 1.2.1.1. P bir küme ve $\leq, P$ kümesi üzerinde

- (i) Her $a \in P$ için $a \leq a$ (Yansıma Özelliği)
- (ii) $a, b \in P$ için $a \leq b$ ve $b \leq a \Rightarrow a = b$ (Ters Simetri Özelliği)
- (iii) $a, b, c \in P$ için $a \leq b$ ve $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Geçişme Özelliği)

özelliklerini sağlayan bir bağıntı olsun. $\leq$ bağıntısına sıralama bağıntısı ve P ye de sıralı küme (kısmen sıralı küme, poset) denir.

$x, y \in P$ için $x \leq y$ ise bu durum “ x, y den küçük veya eşittir.” şeklinde okunur. $x < y$ durumu “ $x \leq y$ ve $x \neq y$ ” olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.1.2. $(P, \leq)$ bir sıralı küme olsun. $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise x ve y elemanlarına kıyaslanabilir elemanlar denir. Aksi halde bu elemanlara kıyaslanamaz elemanlar denir ve bu durum $x||y$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.3. $(P, \leq)$ bir sıralı küme olsun. Eğer her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ sıralı kümesine tam sıralı küme (lineer sıralı küme veya zincir) denir.

Örnek 1.2.1.4. X bir küme $P(X)$, X in güç kümesi olsun. $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ bağıntısı tanımlanıyor. $(\mathcal{P}(X), \leq)$ bir sıralı kümedir fakat tam sıralı küme değildir. Gerçekten,

- (i) Yansıma: Her $A \in \mathcal{P}(X)$ için $A \subseteq A$ olduğundan $A \leq A$ dır.
- (ii) Ters Simetri: $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $A \leq B$ ve $B \leq A$ olsun. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğundan $A = B$ dır.

(iii) Geçişme: $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $A \leq B$ ve $B \leq C$ olsun. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ olduğundan

$A \subseteq C$ dir. Böylece $A \leq C$ dir.

$\leq$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından $(P, \leq)$ sıralı kümedir.

Şimdi $P(X)$ in tam sıralı olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim: $X = \{1, 2, 3\}$ kümesini alalım. $A = \{1\}, B = \{2\} \in \mathcal{P}(X)$ olup $A \not\leq B$ ve $B \not\leq A$ olduğundan $(\mathcal{P}(X), \leq)$ tam sıralı değildir.

Örnek 1.2.1.5. $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kümesi üzerinde " $\leq$ " bağıntısı $a, b \in \mathbb{N}$ için $a \leq b \Leftrightarrow a|b$ ($\exists k \in \mathbb{N} : b = a.k$) şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ bir sıralı kümedir fakat tam sıralı değildir. Gerçekten,

(i) Yansıma: Her $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $a = a.1$ olduğundan $a \leq a$ dir.

(ii) Ters Simetri: $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ olsun. Bu durumda $\exists k, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ öyle ki $b = a.kn$ ve $b = a.kc$ dir. $a = b.kc = a.kn.kc$ ve buradan $1 = kn.kc$ olup $kn = kc = 1$ elde edilir. Böylece $b = a$ dir.

(iii) Geçişme: $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ olsun. $\exists kn, kc \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ öyle ki $b = a.kn$ ve $c = b.kc$ dir. $c = b.kc = a.kn.kc$ olduğundan $t = kn.kc \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olduğundan $c = a.t$ dir. Böylece $a \leq c$ dir.

2 ve 5 elemanları $\leq$ bağıntısına göre kıyaslanamaz olduğundan $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ tam sıralı değildir.

Örnek 1.2.1.6. $(X, \leq)$ sıralı bir küme ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu taktirde, $(Y, \leq)$ sıralı bir kümedir.

Tanım 1.2.1.7. $(P, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

(i) Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq a$ olacak şekilde mevcutsa bu elemana P nin en büyük elemanı denir ve en büyük eleman mevcutsa 1 ile gösterilir.

(ii) Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $b \leq x$ olacak şekilde mevcutsa bu elemana P nin en küçük elemanı denir ve en küçük eleman mevcutsa 0 ile gösterilir.

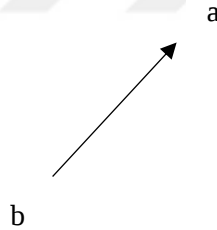
En büyük ve en küçük elemanı mevcut olan sıralı kümelere sınırlı sıralı kümeler denir.

Önerme 1.2.1.8. Bir sıralı kümede en büyük ve en küçük eleman mevcutsa tektir.

İspat: $(P, \leq)$ sıralı bir küme olsun. Farz edelim ki a ve b en büyük elemanlar olsun. a en büyük eleman olduğundan $b \leq a$ ve b en büyük eleman olduğunda $a \leq b$ olmalıdır. $(P, \leq)$ sıralı küme olduğunda ters simetri özelliği sağlanır. Böylece $a = b$ dir. En küçük eleman mevcutsa tek olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Tanım 1.2.1.9. $(X, \leq)$ bir sıralı küme olsun. $a, b \in X$ için a kover b denir: $\Leftrightarrow b < a$ ve $b < x < a$ olacak şekilde bir $x \in P$ mevcut değildir.

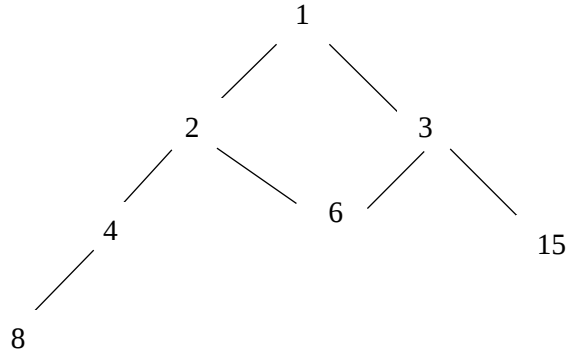
Bu bağıntı yardımıyla sonlu kısmen sıralı bir kümenin Hasse diyagramı şu şekilde çizilir: $(X, \leq)$ sıralı kümesinde a kover b ise a, b den daha yukarıya yazılır ve aralarında küçük bir çizgi çizilir. Her bir elemanın çevresine de küçük bir yuvarlak çizilir.



Şekil 1. Hasse diyagramı

Kolaylık açısından genel olarak iki eleman arasında ok işareti kullanılmayabilir. Bunun yerine düz bir çizgi çizilir. Bu durum okların yukarı doğru olduğu anlamındadır.

Örnek 1.2.1.10. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 15\}$ kümesi verilsin. $x, y \in A$ için $x \leq y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x = y.k$ bağıntısı tanımlansın. $(A, \leq)$ sıralı kümesinin Hasse diyagramı aşağıdaki gibidir.



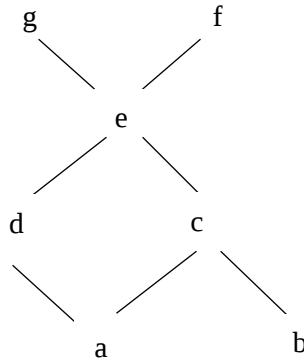
Şekil 2. $(A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 15\}, \leq)$

Tanım 1.2.1.11. $(P, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

(i) Bir $a \in P$ elemanına P sıralı kümesinin maksimal elemanı denir: $\Leftrightarrow a \leq x$ olacak şekilde $x \in P$ mevcutsa $x = a$ dır. P nin tüm maksimal elemanlarının kümesi $MaxP$ ile gösterilir.

(ii) Bir $b \in P$ elemanına P sıralı kümesinin minimal eleman denir: $\Leftrightarrow x \leq b$ olacak şekilde $x \in P$ mevcutsa $x = b$ dır. P nin tüm minimal elemanlarının kümesi $MinP$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.1.12. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ve $B = \{c, d, e\}$ kümeleri için Hasse diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 3. Hasse Diyagramı

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (i) $EbeA =$ Mevcut değildir. | (v) $EbeB = e$ |
| (ii) $EkeA =$ Mevcut değildir. | (vi) $EkeB =$ Mevcut değildir. |
| (iii) $MinA = \{a, b\}$ | (vii) $MinB = \{c, d\}$ |
| (iv) $MaxA = \{f, g\}$ | (viii) $MaxB = \{e\}$ |

Örnek 1.2.1.13. $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \leq)$ ve $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için $a \leq b \Leftrightarrow a|b$ ($\exists k \in \mathbb{N}: b = a \cdot k$) bağıntısı tanımlanıyor. Bu taktirde, $\text{Min}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \mathbb{P}$, $\text{Max}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \emptyset$ ve en büyük ve en küçük elemanı mevcut değildir.

- $\text{Min}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \mathbb{P}$ olduğunu gösterelim: $a \in \text{Min}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ olsun. Her $x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için $x \leq a$ ise $x = a$ dır. Burada, $x|a$ ise $x = a$ dır. Dolayısıyla, $a \in \mathbb{P}$ dir. Tersine $x \in \mathbb{P}$ olsun. Her $a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için $x|a$ ise $x = a$ dır. $a \leq x$ ise $a = x$ dir. $x \in \text{Min}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ olur. Böylece, $\text{Min}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \mathbb{P}$ dir.

- $\text{Max}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$\text{Max}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \neq \emptyset$ olsun. En az bir $b \in \text{Max}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ elemanı mevcuttur. $b \leq 2b$ ve $b \neq 2b$ olduğundan çelişki elde edilir. Böylece $\text{Max}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = \emptyset$ dir.

- $b \leq 2b \leq 4b \leq \dots$ olduğundan $\text{Ebe}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ mevcut değildir.

- $a = \text{Eke}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ olsun. Her $x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için $a \leq x$ dir. Buradan her $x \in \mathbb{N}$ için $a|x$ dir. Buradan $a = 1$ olup $a \notin \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ dir. Böylece $\text{Eke}(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ mevcut değildir.

Lemma 1.2.1.14. $(\mathcal{X}, \leq)$ sıralı küme ve $x_1, x_2, \dots, x_k, k \geq 2$ olsun. Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq x_1$ ise

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k$$

dır.

İspat: k üzerinden tümevarım ile gösterelim. $k = 2$ için $x_1 \leq x_2 \leq x_1$ olsun. $\leq$ ters simetri özelliğini sağladığından $x_1 = x_2$ dir. k için iddia doğru olsun. Yani $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq x_1$ ise $x_1 = x_2 = \dots = x_k$ olsun. İddianın $k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq x_{k+1} \leq x_1$ olsun. $x_k \leq x_{k+1}$ ve $x_{k+1} \leq x_1$ olduğundan geçişme özelliği ile $x_k \leq x_1$ dir. Böylece $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq x_1$ iddia k için doğru olduğundan $x_1 = x_2 = \dots = x_k$ olduğu elde edilir. $x_1 = x_k \leq x_{k+1} \leq x_1$ olduğundan geçişme özelliği ile $x_{k+1} = x_1$ elde edilir. Böylece $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1}$ dir.

Önerme 1.2.1.15. $(P, \leq)$ bir zincir $A \subseteq P$ olsun. Bu taktirde $(A, \leq)$ bir zincirdir.

İspat: $(P, \leq)$ bir zincir, $A \subseteq P$ ve $a, b \in A$ olsun. $A \subseteq P$ olduğundan $a, b \in P$ dir. $(P, \leq)$ bir zincir olduğundan $a \leq b$ veya $b \leq a$ dır. Böylece $(A, \leq)$ bir zincirdir.

Tanım 1.2.1.16. $(X, \leq_1)$ ve $(Y, \leq_2)$ sıralı küme ve $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

(i) f e artan (izoton) fonksiyon denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için $x \leq_1 y$ ise $f(x) \leq_2 f(y)$ dir.

(ii) f e izomorfi denir : $\Leftrightarrow f$ birebir, örten ve izoton fonksiyondur. Yani f birebir, örtendir ve her $x, y \in X$ için $x \leq_1 y \Leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y)$ sağlanır.

(iii) f e otomorfi denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X$ izomorfidir.

(iv) f e ters sıra korur dönüşüm(antiton) denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için $x \leq_1 y$ ise $f(x) \geq_2 f(y)$ dır.

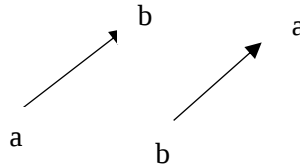
(v) f e dual- izomorfi denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X$ birebir, örten ve her $x, y \in X$ için $x \leq_1 y \Leftrightarrow f(x) \geq_2 f(y)$

sağlanır. f e self-dual izomorfi denir : $\Leftrightarrow f: X \rightarrow X$ dual izomorfidir.

(vi) f self-dual izomorfi ve her $x \in X$ için $f^2(x) = f(f(x)) = x = id(x)$ ise f ye involüsyon denir.

Örnek 1.2.1.17. $X = \{a, b\}$ ve $a \neq b$ olsun. $R_1 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ ve $R_2 = \{(a, a), (b, b), (b, a)\}$ bağıntılarını alalım. Aşağıdaki gibi tanımlanan g_1 fonksiyonu izomorfi ve g_2 fonksiyonu involüsyondur.

$$(X, R_1) \rightarrow (X, R_2)$$



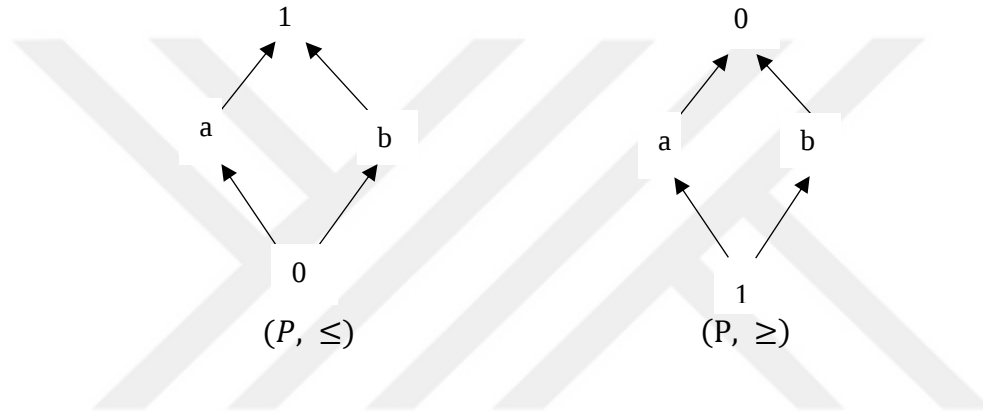
Şekil 4. Hasse Diyagramı

• $g_1: (X, R_1) \rightarrow (X, R_2)$ $g_1(a) = b$ ve $g_1(b) = a$ olarak tanımlanan fonksiyon birebir ve örtendir. aR_1a için $g_1(a) = aR_1a = g_1(b).bR_1b$ için $g_1(b) = aR_2a = g_1(b)$ ve aR_1b

için $g_1(a) = bR_2a = g_1(b)$ olduğundan g_1 sıra korur bir dönüşümdür. Böylece g_1 izomorfidir.

• $g_2: (X, R_2) \rightarrow (X, R_2)$, $g_2(a) = b$, $g_2(b) = a$ olarak tanımlanan fonksiyonu birebir ve örtendir. aR_2b ise $g_2(b) = aR_2b = g_2(a)$ ters sıra korur. $g_2(g_2(a)) = g_2(b) = a$ ve $g_2(g_2(b)) = g_2(a) = b$ olduğundan g_2 involüsyondur.

Tanım 1.2.1.18. $(P, \leq)$ sıralı bir küme olsun. P nin elemanları ile tanımlanan $(P, \leq)$ yine kısmen sıralı bir kümedir. Bu sıralı kümeye P nin duali denir.



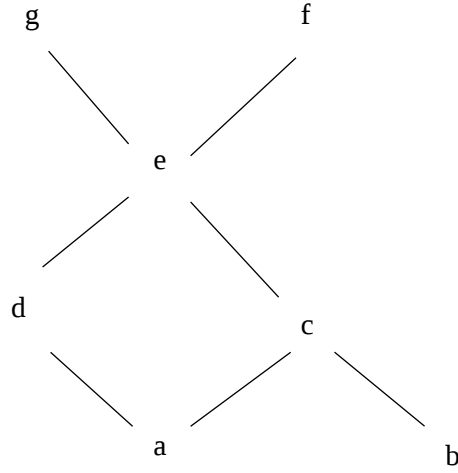
Şekil 5. P ve P nin Duali

Tanım 1.2.1.19. $(P, \leq)$ sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $m \in P$ elemanına X in bir üst sınırı denir: $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $x \leq m$ dir. X kümesinin tüm üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir.

(ii) $n \in P$ elemanına X in bir alt sınırı denir: $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $n \leq x$ dir. X kümesinin tüm alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.1.20. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $B = \{c, d, e\}$ alalım.



Şekil 6. Hasse Diyagramı

$\bar{B} = \{e, g, f\}$ ve $\underline{B} = \{a\}$ olduğu açıktır.

Tanım 1.2.1.21. $(P, \leq)$ sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

- (i) X alt kümesinin üst sınırlarının en küçüğü (varsa) bu elemana X kümesinin supremumu denir ve $SupX$ ile gösterilir.
- (ii) X alt kümesinin alt sınırlarının en büyüğü (varsa) bu elemana X kümesinin infimumu denir ve $InfX$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.1.22. Örnek 1.2.1.20 de

$$SupX = eke\bar{B} = eke\{e, g, f\} = e \text{ ve } InfX = ebe\underline{B} = ebe\{a\} = a$$

Genel olarak; $X = \{a, b\}$ için

- $SupX = sup\{a, b\} = a \vee b$
 - $InfX = inf\{a, b\} = a \wedge b$
- ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.23. $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun. L ye kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $x \vee y, x \wedge y \in L$ dir.

Tanım 1.2.1.24. Bir L kafesine tam kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $X \subseteq L$ için $\vee X, \wedge X \in L$ dir.

Uyarı 1.2.1.25.

(i) Her tam kafes sınırlıdır. Yani 0 en küçük ve 1 en büyük elemana sahiptir. Gerçekten; L bir tam kafes ve $L = H \subseteq L$ olduğundan $\wedge H, \vee H \in L$ dir. $\wedge L = \ell$ ve $\vee L = k$ olsun. $x \in L$ keyfi olsun. $\wedge L = \ell$ olduğundan $\ell \leq x$ olduğu açıktır. Böylece, $\ell = ekeL$ dir. Benzer şekilde $k = ebeL$ olduğu gösterilebilir.

(ii) Bir kafesin duali yine bir kafestir. Herhangi bir tam kafesin duali yine bir tam kafestir. Gerçekten;

$(L, \leq)$ bir kafes olsun. $x, y \in L$ için $x \leq' y \Leftrightarrow y \leq x$ olarak tanımlansın. Bu taktirde, $(L, \leq')$ kısmen sıralı bir küme olduğu açıktır. Şimdi $x \wedge' y = x \vee y$ olduğunu gösterelim:

• $x \leq x \vee y$ ve $y \leq x \vee y$ olduğundan $x \vee y \leq' x$ ve $x \vee y \leq' y$ dir. Böylece $x \vee y \in \{x, y\}_{\leq'}$ dir.

• $k \in \{x, y\}_{\leq'}$ keyfi eleman alalım. $k \leq' x$ ve $k \leq' y$ olduğundan $x \leq k$ ve $y \leq k$ dir.

Böylece $k \in \overline{\{x, y\}_{\leq}}$ dir. $x \vee y \leq k$ olduğundan $k \leq' x \vee y$ dir. Böylece, $x \vee y = x \wedge' y$ dir.

Benzer şekilde $x \wedge y = x \vee' y$ olduğu gösterilebilir.

Bir tam kafesin dualinin yine bir tam kafes olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

(iii) Her zincir bir kafestir. Gerçekten;

$(L, \leq)$ bir zincir olsun. Bu taktirde, her $x, y \in L$ için $x \wedge y = eke\{x, y\} \in L$ ve $x \vee y = ebe\{x, y\} \in L$ dir.

Şimdi $x \vee y = ebe\{x, y\}$ olduğunu gösterelim.

• $x \leq ebe\{x, y\}$ ve $y \leq ebe\{x, y\}$ olduğundan $ebe\{x, y\} \in \overline{\{x, y\}}$ dir.

• $k \in \overline{\{x, y\}}$ keyfi alalım. $x \leq k$ ve $y \leq k$ olduğundan $ebe\{x, y\} \leq k$ dir. Böylece $x \vee y = ebe\{x, y\}$ dir.

Benzer şekilde $x \wedge y = eke\{x, y\}$ olduğu gösterilebilir.

Örnek 1.2.1.26. $X \neq \emptyset, (\mathcal{P}(X), \leq)$ ve $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

olarak tanımlanan $(\mathcal{P}(X), \leq)$ in bir sıralı küme olduğu açıktır.

$A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $A \wedge B = A \cap B \in \mathcal{P}(X)$ ve $A \vee B = A \cup B \in \mathcal{P}(X)$ olduğunu

gösterelim: $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $A \cap B \subseteq X$ ve $A \cup B \subseteq X$ dir. Böylece $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{P}(X)$ dir.

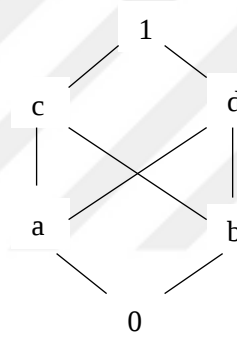
Şimdi $A \wedge B = A \cap B$ olduğunu gösterelim:

• $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan $A \cap B \leq A$ ve $A \cap B \leq B$ dir. Böylece $A \cap B \in \{A, B\}$ dir.

• $K \in \{A, B\}$ olsun. Buradan, $K \subseteq A$ ve $K \subseteq B$ dir. Böylece $K \subseteq A \cap B$ olup $K \leq A \cap B$ elde edilir. Böylece, $A \wedge B = A \cap B$ dir.

Benzer şekilde $A \vee B = A \cup B$ olduğu gösterilebilir. Böylece $(\mathcal{P}(X), \leq)$ bir kafestir.

Örnek 1.2.1.27. $(L = \{0, a, b, c, d, 1\}, \leq)$ sıralı kümesinin Hasse diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 7. $(L = \{0, a, b, c, d, 1\}, \leq)$

$c \wedge d = \underline{ebe\{c, d\}} = ebe\{a, b, 0\}$ mevcut olmadığından $(L, \leq)$ bir kafes değildir.

Tanım 1.2.1.28. (i) L sınırlı bir kafes olsun. Bir x elemanına L kafesinin atomu denir $\Leftrightarrow x$ elemanı $L \setminus \{0\}$ ın bir minimal elemanıdır.

(ii) L sınırlı bir kafes olsun. Bir y elemanına L kafesinin koatomu denir $\Leftrightarrow y$ elemanı $L \setminus \{1\}$ in bir maksimal elemanıdır.

Tanım 1.2.1.29. L sonlu uzunluklu bir kafes ve $a, b, c \in L$ olsun.

(i) $a \neq b$ ve a ve b kover c olduğunda $a \vee b$ kover a ve $a \vee b$ kover b ise L kafesine üst yarı-modüler kafes denir.

(ii) $a \neq b$ ve c kover a ve b olduğunda a ve b kover $a \wedge b$ ise L kafesine alt yarı-modüler kafes denir.

Tanım 1.2.1.30. Bir L kafesinin boştan farklı bir J alt kümesine L kafesinin ideali denir
 $\Leftrightarrow$

(i) $a \in J, x \in L, x \leq a$ ise $x \in J$,

(ii) $a, b \in J$ için $a \vee b \in J$,

koşulları sağlanır.

Tanım 1.2.1.30.'ye benzer şekilde dual ideal tanımı verilebilir.

Tanım 1.2.1.31. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Bir $a \in L$ elemanına join $(\vee)$ -indirgenemez denir $\Leftrightarrow x, y \in L$ için $x \vee y = a$ ise $x = a$ veya $y = a$ koşulu sağlanır.

Dual olarak, $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesinde bir $b \in L$ elemanına meet $(\wedge)$ -indirgenemez denir $\Leftrightarrow x, y \in L$ için $x \wedge y = b$ ise $x = b$ veya $y = b$ koşulu sağlanır.

1.2.2. Kafes Cebiri

Lemma 1.2.2.1. $(P, \leq)$ sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(L1) $x \wedge x = x$ ve $x \vee x = x$ (İdempotent)

(L2) $x \wedge y = y \wedge x$ ve $x \vee y = y \vee x$ (Değişme)

(L3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ ve $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (Birleşme)

(L4) $x \wedge (x \vee y) = x$ ve $x \vee (x \wedge y) = x$ (Yok Etme Kuralı)

(L5) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$

Lemma 1.2.2.2. $(P, \leq, 0)$ sıralı bir küme olsun. Her $x \in P$ için

$$0 \wedge x = 0 \text{ ve } 0 \vee x = x$$

dir. Dual olarak, $(P, \leq, 1)$ sıralı bir küme olsun. Her $x \in P$ için

$$1 \wedge x = x \text{ ve } 1 \vee x = 1$$

dir.

Lemma 1.2.2.3. Herhangi bir kafeste supremum ve infimum işlemleri izotondur. Yani,

$$(1) \quad y \leq z \Rightarrow x \vee y \leq x \vee z \text{ ve } x \wedge y \leq x \wedge z$$

sağlanır.

Lemma 1.2.2.4. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ kafes ve $x, y, z \in L$ için,

$$(2) \quad x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$(2') \quad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

şeklindedir.

Lemma 1.2.2.5. Herhangi bir kafesin elemanları modüler eşitlitsizliği sağlar. Yani her $x, y, z \in L$ için,

$$(3) \quad x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

sağlanır.

Tanım 1.2.2.6. Yalnızca idempotent, değişme ve birleşme özelliklerine sahip olan bir ikili işlemli cebirsel yapıya yarı-kafes denir.

Örnek 1.2.2.7. $(\mathcal{P}(X), \leq)$ sıralı bir küme ve $A \circ B = A \cap B$ olsun.

- $A \circ A = A \cap A = A$ olduğundan idempotenttir.
- $A \circ B = A \cap B = B \cap A = B \circ A$ olduğundan değişmelidir.
- $A \circ (B \circ C) = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \circ B) \circ C$ olduğundan birleşmelidir.

Böylece $(\mathcal{P}(X), \leq)$ yarı-kafestir.

Lemma 1.2.2.8.

$$x \leq y \Leftrightarrow x \circ y = x$$

ile tanımlanan bağıntı altında " $\circ$ " işlemle herhangi bir yarı kafes

$$x \circ y = \bigwedge \{x, y\} = x \wedge y$$

olan bir sıralı kümedir.

1.2.3. Dağılmalılık

Teorem 1.2.3.1. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafes olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(L6') Her $x, y \in L$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(L6'') Her $x, y \in L$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

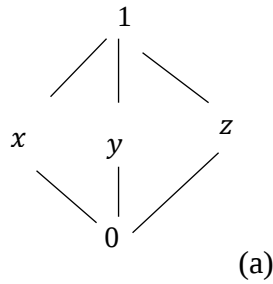
İspat: $(L6') \Rightarrow (L6'')$ olduğunu gösterelim: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ olsun.

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\ &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee (y \wedge z) \end{aligned}$$

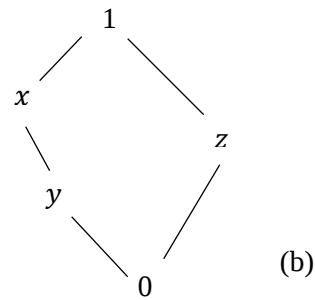
dir. Benzer şekilde $(L6'')$ ise $(L6')$ olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.2.3.2. Bir L kafesine dağılmalı kafes denir : $\Leftrightarrow (L6')$ (denk olarak $(L6'')$) özelliği sağlanır.

Örnek 1.2.3.3.



M_5



N_5

Şekil 8. M_5 ve N_5

Şekil 8 ile (a) ve (b) de verilen kafesler dağılma özelliğini sağlamaz. M_5 için, $x \vee (y \wedge z) = x \vee 0 = x$ ve $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = 1 \wedge 1 = 1$ dir. $x \neq 1$ olduğundan $x \vee (y \wedge z) \neq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ dir. Böylece M_5 dağılma kuralını

sağlamaz.

Şimdi N_5 in dağılma kuralını sağlamadığını gösterelim. $y \vee (x \wedge z) = y \vee 0 = y$ ve $(y \vee x) \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = z$ olup $x \neq y$ dir. Böylece $y \vee (x \wedge z) \neq (y \vee x) \wedge (y \vee z)$ olduğundan N_5 dağılma kuralını sağlamaz.

1.2.4. Modülerlik

(L6) dağılma kuralında $x \leq z$ alınırsa, $z = x \vee z$ olup modüler özdeşlik elde edilir.

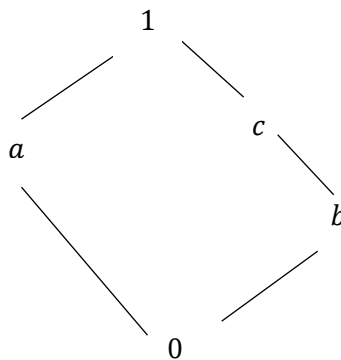
$$(L7) \quad x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

Böylece keyfi dağılmalı kafes (L7) i sağlar. Gerçekten; L dağılmalı kafes olsun. $x, y, z \in L$ için $x \leq z$ olsun.

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$$

olduğundan (L7) özelliği sağlanır.

Tanım 1.2.4.1. (L7) modüler özdeşliğini sağlayan bir kafese modüler kafes denir. Her kafesin modüler kafes olması gerekmez. 5 – elemanlı N_5 kafesi modüler kafes değildir. Gerçekten,



Şekil 9. N_5

$b \leq c$ için $b \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$ ve $(b \vee a) \wedge c = 1 \wedge c = c$ olduğundan $b \vee (a \wedge c) = b \neq c = (b \vee a) \wedge c$ dir. Yani modüler özdeşlik sağlanmaz. Her dağılmalı kafes modüler olmasına rağmen her modüler kafes dağılmalı değildir. Örneğin,

5 – elemanlı M_5 kafesi modülerdir fakat dağılmalı değildir.

Teorem 1.2.4.2. Herhangi bir G grubunun normal alt grupları bir modüler kafestir.

İspat: G nin normal alt grupları bir kafes oluşturur. $H \wedge N = H \cap N$ ve $H \vee N = H.N$ ($\neq H \cap N$) dir. Bu kafesin modüler olduğunu göstermek için $L \subseteq N$ ise $(L \vee M) \wedge N \subseteq L \vee (M \wedge N)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$a \in (L \vee M) \wedge N$ olsun. $a \in (L \vee M)$ ve $a \in N$ dir. $a \in LM$ ve $a \in N$ dir. Buradan en az bir $b \in L, c \in M$ mevcuttur öyle ki $a = b.c$ dir. $L.M = M.L$ olduğundan $a = c.b$ dir. $a = b.c = c.b$ olduğundan $c = b^{-1}.a \in N$ dir. Buradan, $c \in M$ ve $c \in N$ olduğundan $c \in M \cap N$ dir. $a = b.c \in L.(M \cap N) = L \vee (M \wedge N)$ dir. Böylece, $(L \vee M) \wedge N \subseteq L \vee (M \wedge N)$ olduğu elde edilir.

1.3. T - normlar ve T - konormlar

Tanım 1.3.1. ([7], [8]) L bir kafes olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir üçgensel norm denir.

- (i) Her $x, y \in L$ için $T(x, y) = T(y, x)$. (Değişme)
- (ii) Her $x, y, z \in L$ için $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$. (Birleşme)
- (iii) $x \leq y$ ise her $z \in L$ için $T(x, z) \leq T(y, z)$. (Monotonluk)
- (iv) Her $x \in L$ için $T(x, 1) = x$. (Sınır şartı)

T_M, T_P, T_L ve T_D temel t-normlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} T_M(x, y) &= \min(x, y) & T_P(x, y) &= x.y \\ T_L(x, y) &= \max(x + y - 1, 0) & T_D(x, y) &= \begin{cases} 0 & , (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y) & , A.T. \end{cases} \end{aligned}$$

Tanım 1.3.2. ([7], [8]) L sınırlı bir kafes olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna bir üçgensel konorm denir.

- (i) Her $x, y \in L$ için $S(x, y) = S(y, x)$. (Değişme)
- (ii) Her $x, y, z \in L$ için $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$. (Birleşme)
- (iii) $x \leq y$ ise $z \in L$ için $S(x, z) \leq S(y, z)$. (Monotonluk)
- (iv) Her $x \in L$ için $S(x, 0) = x$. (Sınır şartı)

S_M, S_P, S_L ve S_D temel t-konormlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} S_M(x, y) &= \max(x, y) & S_P(x, y) &= x + y - x \cdot y \\ S_L(x, y) &= \min(x + y, 1) & S_D(x, y) &= \begin{cases} 1 & , (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \max(x, y) & , A.T. \end{cases} \end{aligned}$$

Tanım 1.3.3. ([10]) L bir sınırlı kafes olsun. $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y, z)$ ($y = S(x, z)$) olacak şekilde bir $z \in L$ elemanı mevcutsa $T: L^2 \rightarrow L$ t-normuna ($S: L^2 \rightarrow L$) t-konormuna bölünebilirdir denir.

Uyarı 1.3.4. [10] **(i)** T_1 ve T_2 sınırlı bir L kafesi üzerinde iki t-norm olsun. Eğer her $(x, y) \in L^2$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in L^2$ elemanı için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x & , & y = 1 \\ y & , & x = 1 \\ 0 & , & A.T. \end{cases}$$

olsun. O halde T_W, L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0, 1]$ olduğunda T_W, T_D ile gösterilir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm, L üzerindeki en küçük t-normdur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$ ile verilir.

T-konormlar üzerinde sıralama benzer şekilde tanımlanır.

$S_\vee(x, y) = x \vee y$, L üzerindeki herhangi t-konorm S için $S_\vee \leq S$ dir. Böylece, $S_\vee$ en küçük t-konormdur.

$$S_W(x, y) = \begin{cases} x & , & y = 0 \\ y & , & x = 0 \\ 1 & , & A.T. \end{cases}$$

L üzerindeki herhangi t-konorm S için $S \leq S_W$ dir. Böylece, S_W en büyük t-konormdur.

Tanım 1.3.5. [10] **(i)** Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye (bir t-konorm S ye) $\vee$ -dağılmalıdır denir ancak ve ancak her $a, b_1, b_2 \in L$ için $T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2)$ ($S(a, b_1 \vee b_2) = S(a, b_1) \vee S(a, b_2)$) eşitliği sağlanır.

(ii) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye (bir t-konorm S ye) sonsuz $\vee$ -dağılmalıdır denir ancak ve ancak her $a \in L$ ve L nin $\{b_i : i \in I\}$ alt kümesi için $T(a, \bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} T(a, b_i)$ ($S(a, \bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} S(a, b_i)$) eşitliği sağlanır.

(iii) (Sonsuz) $\wedge$ -dağılmalı t-norm (t-konorm) benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 1.3.6. [15] L sınırlı bir kafes ve $T: L^2 \rightarrow L$ bir t-norm olsun. $x \in L$ elemanı için $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde $y \in L$ mevcutsa x elemanına T t-normunun sıfır (0) bölenei denir.

Bir S -konormun bir (1) bölenei Tanım 1.3.6.'ya dual olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.3.7. [15] L sınırlı bir kafes ve $S: L^2 \rightarrow L$ bir t-konorm olsun. $x \in L$ elemanı için $x \vee y \neq 1$ ve $S(x, y) = 1$ olacak şekilde bir $y \in L$ mevcutsa x elemanına S 'nin bir (1) bölenei denir.

Tanım 1.3.8. [12] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $N: L \rightarrow L$ azalan fonksiyonu

(i) $N(0) = 1$,

(ii) $N(1) = 0$,

şartlarını sağlıyorsa N fonksiyonuna L kafesi üzerinde negasyon denir.

Bir N negasyonuna güçlüdür denir $\Leftrightarrow$ Her $x \in L$ için $N(N(x)) = x$ sağlanır.

Tanım 1.3.9. [12] L sınırlı bir kafes, $T: L^2 \rightarrow L$ bir t-norm ve N güçlü bir negasyon olsun. $x, y \in L$ için

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$$

şeklinde tanımlanan S t-konormuna t-norm T nin N -dual t-konormu denir.

1.4. Nullnormlar

Tanım 1.4.1. [13] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun.

- (i) Her $x, y, z \in L$ için $V(x, V(y, z)) = V(V(x, y), z)$,
 - (ii) Her $x, y \in L$ için $V(x, y) = V(y, x)$,
 - (iii) $x \leq y$ ise her $z \in L$ için $V(x, z) \leq V(y, z)$,
 - (iv) Bir $a \in L$ yutan (sıfır) elemanına sahiptir öyle ki her $x \leq a$ için $V(x, 0) = x$ ve her $x \geq a$ için $V(x, 1) = x$,
- şartlarını sağlayan $V: L^2 \rightarrow L$ dönüşümüne L sınırlı kafesi üzerinde bir nullnorm denir.

Bu çalışmada $\mathcal{V}(a)$ notasyonu $a \in L$ sıfır elemanına sahip L üzerindeki tüm nullnormların kümesi için kullanılacaktır.

1.5. Uninormlar

Tanım 1.5.1. [9] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun.

- (i) $\forall x, y \in L$ için $U(x, y) = U(y, x)$,
 - (ii) $\forall x, y, z \in L$ için $U(x, U(y, z)) = U(U(x, y), z)$,
 - (iii) $x \leq y$ ise her $z \in L$ için $U(x, z) \leq U(y, z)$,
 - (iv) Bir $e \in L$ elemanı mevcuttur öyle ki her $x \in L$ için $U(x, e) = x$,
- şartları sağlayan $U: L^2 \rightarrow L$ dönüşümüne L sınırlı kafesi üzerinde bir uninorm denir.

Bu çalışmada $\mathcal{U}(e)$ notasyonu $e \in L$ nötral elemanına sahip L üzerindeki tüm uninormların kümesi için kullanılacaktır.

1.6. Uni-nullnormlar

Tanım 1.6.1. [14] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $F: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonuna L üzerindeki bir uni-nullnorm denir.

- (i) Her $x, y \in L$ için $F(x, y) = F(y, x)$.
- (ii) Her $x, y, z \in L$ için $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$.
- (iii) $x \leq y$ ise her $z \in L$ için $F(x, z) \leq F(y, z)$.
- (iv) $e, a \in L$ elemanları $0 \leq e \leq a \leq 1$ olacak şekilde mevcuttur öyle ki her $x \in [0, a]$ için $F(e, x) = x$ ve her $x \in [a, 1]$ için $F(x, 1) = x$.

Açıkça, e elemanı $[0, a]$ aralığında F nin bir nötral elemanıdır. Uni-nullnormun tanımından her $x \in [e, 1]$ için $F(x, a) = a$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Gerçekten, $a = F(e, a) \leq F(x, a) \leq F(1, a) = a$ olup $[e, 1]$ aralığında a elemanı F nin sıfır elemanıdır. Yani e elemanı F nin kısmen nötral elemanı ve a elemanı F nin kısmen sıfır elemanıdır. Bu çalışmada e elemanı F nin nötral elemanı, a elemanı da F nin sıfır elemanı olarak adlandırılır.

1.7. Mantıksal Operatörlerden Elde edilen Sıralamalar

Tanım 1.7.1. [7] L sınırlı bir kafes ve $T: L^2 \rightarrow L$ bir t-norm olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_T y \Leftrightarrow \exists l \in L \text{ öyle ki } T(l, y) = x$$

olarak tanımlanan $\leq_T$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı olup bu bağıntıya T - kısmen sıralama (üçgensel sıralama) denir.

S -kısmen sıralama benzer şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.7.2. [1] L sınırlı bir kafes ve $S: L^2 \rightarrow L$ bir t-konorm olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_S y \Leftrightarrow \exists l \in L \text{ öyle ki } S(l, x) = y$$

olarak tanımlanan $\leq_S$ bağıntısına S -kısmen sıralama denir.

Önerme 1.7.3. [2] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan birebir örten bir dönüşüm olsun. Bu taktirde $([a, b], \leq_T)$ bir infimum (supremum) yarı kafestir ancak ve ancak $([c, d], \leq_{T_\phi})$ bir infimum (supremum) yarı kafestir.

Tanım 1.7.4. [16] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $V \in \mathcal{V}(a)$ olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_V y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, a] \text{ için } k \in [0, a] \text{ mevcuttur öyle ki } V(k, x) = y \text{ veya,} \\ x, y \in [a, 1] \text{ için } l \in [a, 1] \text{ mevcuttur öyle ki } V(l, y) = x \text{ veya,} \\ (x, y) \in L^* \text{ ve } x \leq y, \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\leq_V$ bağıntısına V -kısmen sıralama denir.

Burada $I_a = \{x \in L \mid x \parallel a\}$ ve $L^* = [0, a] \times [a, 1] \cup [0, a] \times I_a \cup [a, 1] \times [0, a] \cup [a, 1] \times I_a \cup I_a \times [0, a] \cup I_a \times [a, 1] \cup I_a \times I_a$ dır.

Tanım 1.7.5. [1] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $U \in \mathcal{U}(e)$ olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_U y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, e] \text{ için } k \in [0, e] \text{ mevcuttur öyle ki } U(k, y) = x \text{ veya,} \\ x, y \in [e, 1] \text{ için } l \in [e, 1] \text{ mevcuttur öyle ki } U(x, l) = y \text{ veya,} \\ (x, y) \in L^* \text{ ve } x \leq y, \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\leq_U$ bağıntısına U -kısmen sıralama denir.

Burada $I_e = \{x \in L \mid x \parallel e\}$ ve $L^* = [0, e] \times [e, 1] \cup [0, e] \times I_e \cup [e, 1] \times [0, e] \cup [e, 1] \times I_e \cup I_e \times [0, e] \cup I_e \times [e, 1] \cup I_e \times I_e$ şeklindedir.

Uyarı 1.7.6. L sınırlı bir kafes ve M, L kafesi üzerinde bir işlem olsun. M ile elde edilen kısmen sıralama bağıntısı $\leq_M$ olsun. $X \subseteq L$ için, $\leq_M$ e göre X in üst (alt) sınırlarının kümesini $\overline{X}_{\leq_M}$ ($\underline{X}_{\leq_M}$) ile göstereceğiz. $x, y \in L$ elemanlarının supremumu (infimumu) varsa $x \vee_M y$ ($x \wedge_M y$) ile gösterilir.

Önerme 1.7.7. [1] L bir kafes, $U \in \mathcal{U}(e)$ ve $e \in L \setminus \{0, 1\}$ elemanı L nin tüm elemanları ile kıyaslanabilir olsun. Bu taktirde, $([0, e], \leq_{T^*})$ ve $([e, 1], \leq_{S^*})$ kafestir ancak ve ancak

$(L, \leq_U)$ bir kafestir.

Önerme 1.7.8. [1] L sınırlı bir kafes, $T: L^2 \rightarrow L$ bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun. Bu taktirde, $(L, \leq_T)$ bir meet (join) yarı-kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ bir join (meet) yarı-kafestir.

Sonuç 1.7.9. [1] L bir zincir, $U \in \mathcal{U}(e)$, $e \in L \setminus \{0,1\}$ ve S^*, T^* nin N -dual t-konormu olsun. $([0, e], \leq_{T^*})$ bir kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_U)$ bir kafestir.

Lemma 1.7.10. [3] L sınırlı bir kafes, T bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun.

Her $x, y \in L$ için

$$x \leq_T y \Leftrightarrow N(y) \leq_S N(x)$$

dir.

Önerme 1.7.11. [5] L sınırlı bir kafes, T bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun.

Her $x, y \in L$ için

$$(4) \quad N(x) \wedge_T N(y) = k^* \Leftrightarrow x \vee_S y = N(k^*)$$

$$(5) \quad N(x) \vee_T N(y) = k^* \Leftrightarrow x \wedge_S y = N(k^*)$$

denklikleri sağlanır.

Uyarı 1.7.12. [5] L , sınırlı kafesi üzerinde bir uninorm olsun. $\leq_U$ sıralamasına göre $x, y \in [0, e]$ elemanlarının supremumu mevcuttur ancak ve ancak $\leq_{T_U}$ sıralamasına göre $x, y \in [0, e]$ elemanlarının supremumu mevcuttur. Bu durumda,

$$(6) \quad x \vee_U y = x \vee_{T_U} y$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 1.7.13. [2] L bir kafes ve $V \in \mathcal{V}(a)$ ve $I_a = \emptyset$ olsun. Bu taktirde, $([0, a], \leq_{S_V})$ ve $([a, 1], \leq_{T_V})$ bir kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_V)$ bir kafestir.

Sonuç 1.7.14. [5] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, birebir ve örten bir dönüşüm olsun. Bu taktirde, $([a, b], \leq_T)$ bir kafestir ancak ve ancak $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ bir kafestir.

Önerme 1.7.15. [5] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, birebir ve örten bir dönüşüm olsun.

$$(7) \quad \varphi(x) \wedge_T \varphi(y) = k \Leftrightarrow x \wedge_{T_\varphi} y = \varphi^{-1}(k)$$

denkliği sağlanır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar “Uni-nullnormlar üzerinde sıralama” [22] isimli makalede yayımlanmıştır.

2.1. $\leq_F$ Sıralaması

Bu bölümde, sınırlı bir kafesteki uni-nullnormlardan elde edilen $\leq_F$ ile gösterilen sıralamayı tanıtır ve özelliklerini inceleyeceğiz. Kafeslerdeki doğal sıralama ve bir uni-nullnormdan elde edilen sıralama arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Uni-nullnormlardan elde edilen sıralamanın literatürdeki t-normlar, t-konormlar, uninormlar ve nullnormlardan elde edilen sıralamaların bir genelleştirilmesi olduğuna dikkat çekeceğiz. $\leq_F$ sıralamasına göre en küçük ve en büyük elemanların mevcut olduğunu göstereceğiz. $\leq_F$ sıralamasına göre L kafesindeki diğer elemanlar ile herhangi bir uni-nullnormun sıfır elemanı a ve nötral elemanı e arasındaki ilişkiden bahsedeceğiz. Uni-nullnormlardan elde edilen sıralamalar ve temel t-norm ve t-konormlardan elde edilen sıralamalar arasındaki bazı ilişkileri göstereceğiz.

Ayrıca, bir kafesin $\leq_F$ sıralamasına göre tekrar sınırlı bir kafes olması için gerekli ve yeterli şartı vereceğiz. Uni-nullnormun t-norm ve t-konorm kısımları üzerindeki bazı kısıtlamalar altında bir L kafesinin $\leq_F$ ye göre bir kafes olmasını sağlayan bazı denk şartlar belirleyeceğiz.

Tanım 2.1.1.’de sınırlı bir kafesteki uni-nullnormlar yardımıyla aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım.

Tanım 2.1.1. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F de L kafesi üzerinde nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm olsun. Aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım. $x, y \in L$ için

$$(8) \ x \leq_F y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, e] \text{ için } l \leq e \text{ veya } x, y \in [a, 1] \text{ için } l \geq a \text{ mevcuttur öyle ki } F(l, y) = x, \\ x, y \in [e, a] \text{ için } k \in [e, a] \text{ mevcuttur öyle ki } F(k, x) = y, \\ (x, y) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\} \text{ ve } x \leq y. \end{cases}$$

Şimdi, L kafesindeki doğal sıralama ile L sınırlı kafesi üzerindeki bir uni-nullnormla

elde edilen $\leq_F$ bağıntısı arasındaki ilişkiyi verelim.

Önerme 2.1.2. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F L kafesi üzerinde sıfır elemanı a ve nötral elemanı e olan bir uni-nullnorm olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_F y \text{ ise } x \leq y$$

dir.

İspat: $x, y \in L$ için $x \leq_F y$ olsun.

$(x, y) \in [0, e]^2$ olsun. Bu durumda $l \leq e$ mevcuttur öyle ki $F(l, y) = x$ dir.

$$x = F(l, y) \leq F(e, y) = y$$

olduğundan $x \leq y$ dir.

$(x, y) \in [e, a]^2$ olsun. Bu durumda $k \in [e, a]$ mevcuttur öyle ki $F(k, x) = y$ dir.

$$y = F(k, x) \geq F(e, x) = x$$

olduğundan $x \leq y$ dir.

$(x, y) \in [a, 1]^2$ olsun. Bu durumda $l \geq a$ mevcuttur öyle ki $F(l, y) = x$ dir.

$$x = F(l, y) \leq F(1, y) = y$$

olduğundan $x \leq y$ dir.

$(x, y) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ olsun. $\leq_F$ nin tanımı ile $x \leq y$ olduğu açıktır.

Önerme 2.1.3. (8)'de verilen $\leq_F$ bağıntısı L kafesi üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: (i) $x \in [0, e]$ veya $x \in [e, a]$ ise $F(e, x) = x$ olduğundan $x \leq_F x$ dir.

$x \in [a, 1]$ ise $F(1, x) = x$ olduğundan $x \leq_F x$ dir.

$x \notin \{[0, e], [e, a], [a, 1]\}$ için $x \leq x$ olduğundan $x \leq_F x$ elde edilir. Böylece, $\leq_F$ bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.

(ii) $x, y \in L$ için $x \leq_F y$ ve $y \leq_F x$ olsun.

Önerme 2.1.1.'den $x \leq y$ ve $y \leq x$ olur. $(L, \leq)$ bir sıralama bağıntısı olduğundan $x = y$ olur. $\leq_F$ bağıntısı ters simetri özelliğini sağlar.

(iii) $x, y, z \in L$ için $x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olsun.

1. $x \in [0, e]$,

1.1. $y \in [0, e]$,

1.1.1. $z \in [0, e]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan $\ell_1, \ell_2 \in [0, e]$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$F(\ell_1, y) = x \text{ ve } F(\ell_2, z) = y$$

dir.

$$\begin{aligned} x &= F(\ell_1, y) = F(\ell_1, F(\ell_2, z)) \\ &= F(F(\ell_1, \ell_2), z) \end{aligned}$$

$F(\ell_1, \ell_2) = k$ olsun. $k = F(\ell_1, \ell_2) \leq F(e, e) = e$ olup $k \leq e$ dir. Buradan $x = F(k, z)$ olduğundan $x \leq_F z$ dir.

1.1.2. $z \notin [0, e]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ ve $y \leq z$ dir. Buradan da $x \leq z$ olup $(x, z) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ olduğundan $x \leq_F z$ dir.

1.2. $y \notin [0, e]$ olsun.

$y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $y \leq z$ dir. $z \in [0, e]$ olsa $0 \leq y \leq z \leq e$ olup $y \in [0, e]$ çelişkisi elde edilir. Buradan $z \notin [0, e]$ dir.

1.2.1. $z \notin [0, e]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ vey $y \leq z$ dir. Buradan $x \leq z$ dir. $x \leq z$ ve $(x, z) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ olduğundan $x \leq_F z$ elde edilir.

2. $x \in [e, a]$ olsun.

$x \leq_F y$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ dir. Varsayalım ki $y \in [0, e]$ olsun.

$x \leq y \leq e$ olup $x \in [0, e]$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $y \notin [0, e]$ dir.

2.1. $y \in [e, a]$ olsun.

2.1.1. $z \in [e, a]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan $\ell_1, \ell_2 \in [e, a]$ mevcuttur öyle ki

$$F(\ell_1, x) = y \text{ ve } F(\ell_2, y) = z$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} z &= F(\ell_2, y) = F(\ell_2, F(\ell_1, x)) \\ &= F((\ell_2, \ell_1), x) . \end{aligned}$$

elde edilir. $F(\ell_2, \ell_1) = k$ diyelim. Buradan,

$$e = F(e, e) \leq F(\ell_2, \ell_1) = k \leq F(a, a) \leq F(a, 1) = a$$

olup $k \in [e, a]$ dir. $z = F(k, x)$ ve $k \in [e, a]$ olduğundan $x \leq_F z$ dir.

2.1.2. $z \notin [e, a]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ vey $y \leq z$ dir. $(L, \leq)$ sıralı küme olduğundan $x \leq z$ olduğu açıktır.

$x \in [e, a]$ ve $z \notin [e, a]$ olduğundan $(x, z) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ ve $x \leq z$ olup $x \leq_F z$ dir.

2.2. $y \notin [e, a]$ olsun.

2.2.1. $z \in [e, a]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ ve $y \leq z$ dir. $(L, \leq)$ sıralı küme olduğundan $x \leq z$ olduğu elde edilir. Bu durumda,

$e \leq x \leq y \leq z \leq a$ olup $y \in [e, a]$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $z \in [e, a]$ durumu söz konusu olamaz.

2.2.2. $z \notin [e, a]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq z$ dir. $x \in [e, a]$ ve $z \notin [e, a]$ olduğundan $(x, z) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ olup $x \leq_F z$ dir..

3. $x \in [a, 1]$

3.1. $y \notin [a, 1]$

$x \leq_F y$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ dir. Bu durumda, $a \leq x \leq y \leq 1$ olduğundan $y \in [a, 1]$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $y \notin [a, 1]$ durumu söz konusu değildir.

3.2. $y \in [a, 1]$ olsun.

$y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $y \leq z$ dir. $a \leq y \leq z \leq 1$ olduğundan $z \in [a, 1]$ olmalıdır.

3.2.1. $z \in [a, 1]$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan $\ell_1, \ell_2 \in [a, 1]$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$F(\ell_1, y) = y \text{ ve } F(\ell_2, z) = y$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} x &= F(\ell_1, y) = F(\ell_1, F(\ell_2, z)) \\ &= F(F(\ell_1, \ell_2), z). \end{aligned}$$

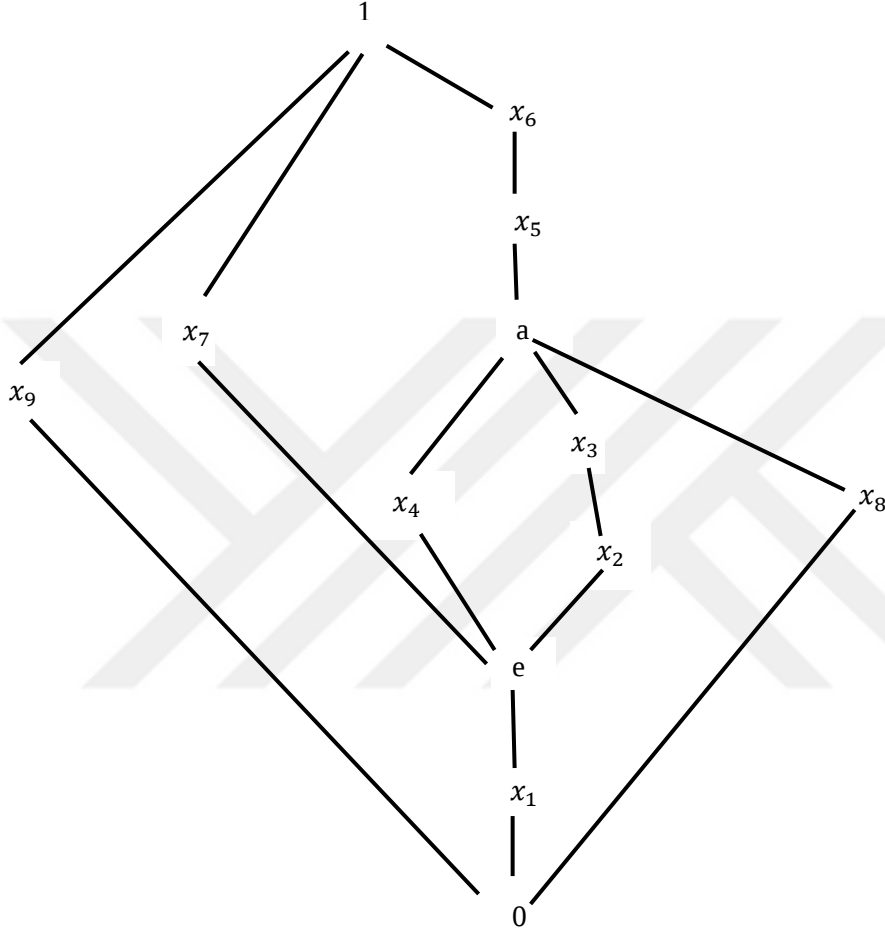
$F(\ell_1, \ell_2) = k$ diyelim. Bu durumda, $a = F(a, e) \leq F(\ell_1, \ell_2) = k$ olup $x = F(k, z)$ olduğundan $x \leq_F z$ dir.

4. $x \notin \{[0, e], [e, a], [a, 1]\}$ olsun.

$x \leq_F y$ ve $y \leq_F z$ olduğundan Önerme 2.1.2.'den $x \leq y$ ve $y \leq z$ olup $x \leq z$ dir. $(x, z) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ ve $x \leq z$ olduğundan $x \leq_F z$ olduğu açıktır.

Böylece $\leq_F$ geçişme özelliğini sağlar.

Örnek 2.1.4. $(L, \leq, 0, 1)$ kafes diyagramı Şekil 10'daki gibi bir kafes olsun.



Şekil 10. $(L, \leq, 0, 1)$

[14]'de verilen $F_\wedge$ uni-nullnormunu alalım. S , $[e, a]$ üzerinde bir t-konorm ve T , $[a, 1]$ üzerinde bir t-norm olmak üzere

$$F_\wedge = \begin{cases} S(x, y) & , (x, y) \in [e, a]^2 \\ T(x, y) & , (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \wedge y & , (x, y) \in [0, e) \times [0, a) \cup [e, a) \times [0, e) \cup [0, e) \times I_e \cup I_e \times [0, e) \cup I_e \times I_e \\ y & , (x, y) \in [e, a) \times I_e \\ x & , (x, y) \in I_e \times [e, a) \\ a & , \text{A.T.} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada $S = S_D$ ve $T = T_D$ alınırsa L üzerindeki $F_\wedge$ uni-nullnormuna göre L kafesinin elemanları arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:

$F_\wedge(x_2, x_1) = x_2 \wedge x_1 = x_1$	$F_\wedge(x_2, x_2) = S_D(x_2, x_2) = a$
$F_\wedge(x_3, x_4) = S_D(x_3, x_4) = a$	$F_\wedge(x_3, x_1) = x_3 \wedge x_1 = x_1$
$F_\wedge(x_2, x_3) = S_D(x_2, x_3) = a$	$F_\wedge(x_3, x_5) = a$
$F_\wedge(x_4, x_1) = x_4 \wedge x_1 = x_1$	$F_\wedge(x_2, x_4) = S_D(x_2, x_4) = a$
$F_\wedge(x_3, x_6) = aF_\wedge(x_5, x_1) = a$	$F_\wedge(x_2, x_5) = a$
$F_\wedge(x_3, x_7) = a$	$F_\wedge(x_6, x_1) = a$
$F_\wedge(x_2, x_6) = a$	$F_\wedge(x_3, x_8) = x_8$
$F_\wedge(x_2, x_7) = a$	$F_\wedge(x_3, x_9) = x_9$
$F_\wedge(x_8, x_1) = x_8 \wedge x_1 = 0$	$F_\wedge(x_2, x_8) = x_8$
$F_\wedge(x_3, 1) = a$	$F_\wedge(x_9, x_1) = x_9 \wedge x_1 = 0$
$F_\wedge(x_2, x_9) = x_9$	$F_\wedge(x_4, x_5) = a$
$F_\wedge(x_4, x_6) = a$	$F_\wedge(x_4, x_7) = a$
$F_\wedge(x_4, x_8) = x_8$	$F_\wedge(x_4, x_9) = x_9$
$F_\wedge(x_4, 1) = a$	$F_\wedge(x_5, x_6) = T_D(x_5, x_6) = a$
$F_\wedge(x_5, x_7) = a$	$F_\wedge(x_5, x_8) = a$
$F_\wedge(x_5, x_9) = a$	$F_\wedge(x_5, 1) = T_D(x_5, 1) = x_5$
$F_\wedge(x_6, x_7) = a$	$F_\wedge(x_6, x_8) = a$
$F_\wedge(x_6, x_9) = a$	$F_\wedge(x_6, 1) = T_D(x_6, 1) = x_6$
$F_\wedge(x_7, x_8) = aF_\wedge(x_7, x_9) = a$	$F_\wedge(x_7, 1) = a$
$F_\wedge(x_8, x_9) = x_8 \wedge x_9 = 0$	$F_\wedge(x_8, 1) = a$
$F_\wedge(x_9, 1) = a$	$F_\wedge(x_1, 0) = x_1 \wedge 0 = 0$
$F_\wedge(x_2, 0) = x_2 \wedge 0 = 0$	$F_\wedge(x_3, 0) = x_3 \wedge 0 = 0$
$F_\wedge(x_4, 0) = x_4 \wedge 0 = 0$	$F_\wedge(a, 0) = a$
$F_\wedge(x_5, 0) = a$	$F_\wedge(x_6, 0) = a$
$F_\wedge(x_7, 0) = a$	$F_\wedge(x_8, 0) = x_8 \wedge 0 = 0$
$F_\wedge(x_9, 0) = x_9 \wedge 0 = 0$	$F_\wedge(1, 1) = 1$

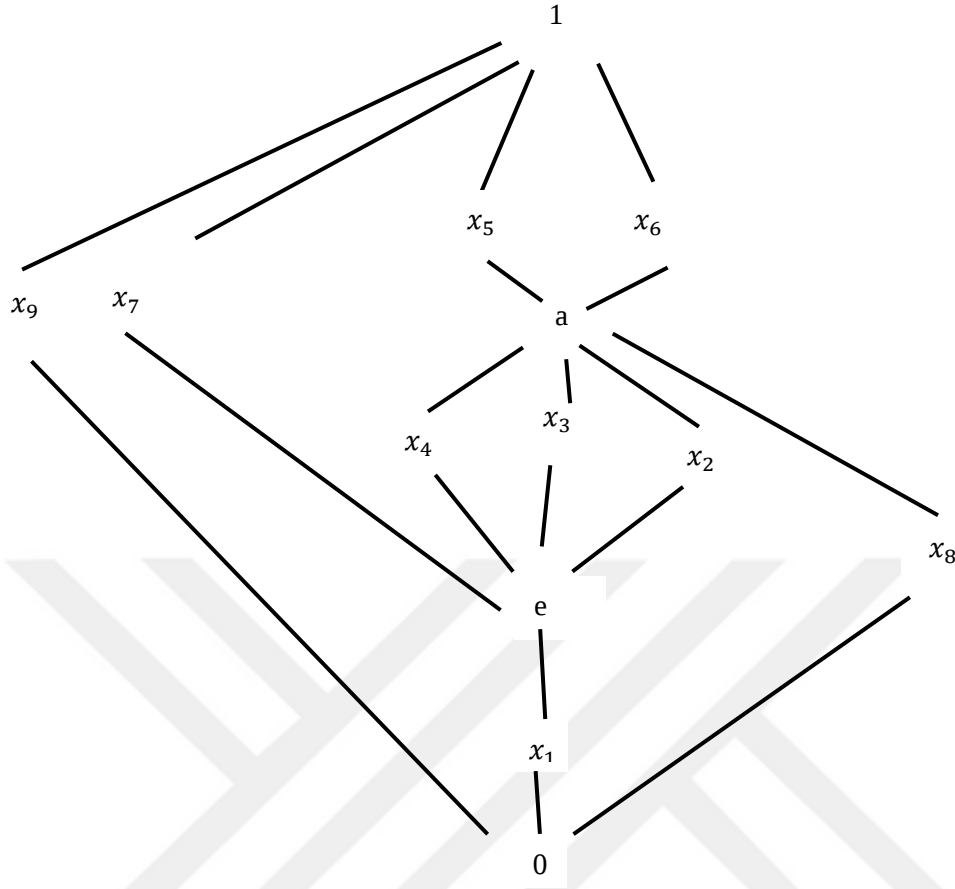
Bu elemanlar arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda verelim.

$F_\wedge$	0	x_1	e	x_2	x_3	x_4	a	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	1
0	0	0	0	0	0	0	a	a	a	a	0	0	a
x_1	0	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	a	a	a	a	0	0	a
e	0	x_1	e	x_2	x_3	x_4	a	a	a	a	x_8	x_9	a
x_2	0	x_1	x_2	a	a	a	a	a	a	a	x_8	x_9	a
x_3	0	x_1	x_3	a	a	a	a	a	a	a	x_8	x_9	a
x_4	0	x_1	x_4	a	a	a	a	a	a	a	x_8	x_9	a
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_5	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x_5
x_6	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x_6
x_7	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
x_8	0	0	x_8	x_8	x_8	x_8	a	a	a	a	x_8	0	a
x_9	0	0	x_9	x_9	x_9	x_9	a	a	a	a	0	x_9	a
1	a	a	a	a	a	a	a	x_5	x_6	a	a	a	1

Tablo 1. L üzerinde $F_\wedge$ uni-nullnormu

Burada $x_2 \leq x_3$ tür, ancak $F_\wedge(\ell, x_3) = x_2$ olacak şekilde bir $\ell \in [0, e]$ mevcut değildir. Böylece x_2 ve $x_3 \leq_{F_\wedge}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz elemanlardır.

Burada $x_5 \leq x_6$ dır, ancak $F_\wedge(\ell, x_6) = x_5$ olacak şekilde bir $\ell \in [0, e]$ mevcut değildir. x_6 ve $x_5 \leq_{F_\wedge}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz elemanlardır. Tüm elemanları kontrol ettikten sonra $(L, \leq_{F_\wedge})$ kısmen sıralı kümesinin diyagramı aşağıdaki gibi olur:



Şekil 11. $(L, \leq_F, 0, 1)$

Uyarı 2.1.5. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes ve F sıfır elemanı a ve nötral elemanı e olan bir uni-nullnorm olsun.

- (i) $\leq_F$ sıralaması $a = 1$ ($e = 1$) iken $\leq_u$ ($\leq_v$) sıralaması ile çakışiktır.
- (ii) Eğer $e = 1$ (ya da $a = 0$) ise $\leq_F$ sıralaması ile $\leq_T$ sıralaması çakışiktır. Ayrıca $e = 0$ ve $a = 1$ olduğunda $\leq_F$ sıralaması ile $\leq_S$ sıralamasının çakışık olduğu kolayca görülür.
- (iii) T-normlar ve t-konormlar, uninormlar ve nullnormlardan elde edilen sıralamalar, uni-nullnormlardan elde edilen sıralamalar tanımlanarak daha genel bir forma genişletilebilir.

Şimdi, $\leq_F$ sıralamasına göre en büyük ve en küçük elemanların varlığını gösterelim.

Önerme 2.1.6. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafes ve F sıfır elemanı a ve nötral elemanı e olan bir uni-nullnorm olsun. Bu durumda $(L, \leq_F)$ sınırlı bir kısmen sıralı bir kümedir.

İspat: $x \in [0, e]$ olsun. Bu durumda $F(0, x) \leq F(0, e) = 0$ olduğundan $F(0, x) = 0$

olur. Buradan $0 \leq_F x$ dır.

$x \notin [0, e]$ olsun. $(0, x) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ ve $0 \leq x$ olduğundan $\leq_F$ nin tanımından $0 \leq_F x$ olur. O halde $(L, \leq_F)$ posetinin en küçük elemanı 0 dır.

Şimdi $(L, \leq_F)$ posetinin en büyük elemanının 1 olduğunu gösterelim.

$x \in [a, 1]$ olsun. $\ell = x \geq a$ için

$$F(\ell, 1) = F(x, 1) = x$$

olduğundan $x \leq_F 1$ dır.

$x \notin [a, 1]$ olsun. $(x, 1) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ ve $x \leq 1$ olduğundan $\leq_F$ nin tanımından $x \leq_F 1$ olur. O halde $(L, \leq_F)$ nin en büyük elemanı 1 dır.

Önerme 2.1.7. [14] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $e, a \in L \setminus \{0, 1\}$ ve F sıfır elemanı a ve nötral elemanı e olan bir uni-nullnorm olsun. Bu taktirde,

- (i) $U^* = F|_{[0, a]^2}: [0, a]^2 \rightarrow [0, a]$, $[0, a]$ üzerinde bir uninormdur.
- (ii) $V^* = F|_{[e, 1]^2}: [e, 1]^2 \rightarrow [e, 1]$, $[e, 1]$ üzerinde bir nullnormdur.
- (iii) $T_1^* = F|_{[0, e]^2}: [0, e]^2 \rightarrow [0, e]$, $[0, e]$ üzerinde bir t-normdur.
- (iv) $S^* = F|_{[e, a]^2}: [e, a]^2 \rightarrow [e, a]$, $[e, a]$ üzerinde bir t-konormdur.
- (v) $T_2^* = F|_{[a, 1]^2}: [a, 1]^2 \rightarrow [a, 1]$, $[a, 1]$ üzerinde bir t-normdur.

Önerme 2.1.8. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve F, L üzerinde nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm olsun.

$$T_1^*, S^*, T_2^* \text{ bölünebilirdir} \Leftrightarrow \leq_F = \leq_{U^*} = \leq_{V^*} = \leq_{T_1^*} = \leq_{S^*} = \leq_{T_2^*} = \leq.$$

Şimdi, herhangi bir uni-nullnormun sıfır elemanı a ve nötral elemanı e ile L kafesindeki $\leq_F$ sıralamasına göre diğer elemanları arasındaki bağıntıyı gösterelim.

Lemma 2.1.9. L sınırlı bir kafes ve F nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm olsun. Bu taktirde,

- (i) Her $x \in [0, e]$ için $x \leq_F e$ dir.
- (ii) Her $x \in [e, a]$ için $e \leq_F x \leq_F a$ dır.
- (iii) Her $x \in [a, 1]$ için $a \leq_F x$ dir.

İspat: (i) $x \leq e$ olsun. $F(x, e) = x$ olduğundan $x \leq_F e$ dir.

(ii) $x \in [e, a]$ olsun. $F(e, x) = x$ olduğundan $e \leq_F x$ olur. Ayrıca, $F(a, x) = a$ olduğundan $x \leq_F a$ olur. Böylece $e \leq_F x \leq_F a$ dır.

(iii) $x \in [a, 1]$ olsun. $F(a, x) = a$ olduğundan $a \leq_F x$ dir.

Önerme 2.1.10. L sınırlı bir kafes ve F nötral elemanı e , sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm olsun. Bu durumda

(i) Her $x, y \in [0, e]$ için $x \leq_F y \Leftrightarrow x \leq_{T_1^*} y$.

(ii) Her $x, y \in [e, a]$ için $x \leq_F y \Leftrightarrow x \leq_{S^*} y$.

(iii) Her $x, y \in [a, 1]$ için $x \leq_F y \Leftrightarrow x \leq_{T_2^*} y$.

İspat: (i) $x, y \in [0, e]$ için $x \leq_F y \Leftrightarrow \exists \ell \in [0, e]$ öyle ki $F(\ell, y) = x$

$$\Leftrightarrow \exists \ell \in [0, e] \text{ öyle ki } T_1^*(\ell, y) = F(\ell, y) = x$$

$$\Leftrightarrow x \leq_{T_1^*} y.$$

(ii) $x, y \in [e, a]$ için $x \leq_F y \Leftrightarrow \exists \ell \in [e, a]$ öyle ki $F(\ell, x) = y$

$$\Leftrightarrow \exists \ell \in [e, a] \text{ öyle ki } S^*(\ell, x) = F(\ell, x) = y$$

$$\Leftrightarrow x \leq_{S^*} y$$

(iii) $x, y \in [a, 1]$ için $x \leq_F y \Leftrightarrow \exists \ell \in [a, 1]$ öyle ki $F(\ell, y) = x$

$$\Leftrightarrow \exists \ell \in [a, 1] \text{ öyle ki } T_2^*(\ell, y) = F(\ell, y) = x$$

$$\Leftrightarrow x \leq_{T_2^*} y.$$

Bir L kafesinin $\leq_F$ sıralamasına göre yine bir kafes olması için gerek ve yeter şartı belirleyelim.

Önerme 2.1.11. L sınırlı bir kafes, F nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm ve $I_e = I_a = \emptyset$ olsun. Bu takdirde,

$$([0, a], \leq_{U^*}) \text{ ve } ([e, 1], \leq_{V^*}) \text{ kafestir} \Leftrightarrow (L, \leq_F) \text{ kafestir.}$$

İspat: $([0, a], \leq_{U^*})$ ve $([e, 1], \leq_{V^*})$ kafes olsun. Önerme12 [1] ve Önerme8 [2]'den

$([0, e], \leq_{T_1^*})$, $([e, a], \leq_{S^*})$ ve $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ kafes olduğu açıktır. $([0, e], \leq_{T_1^*})$ bir kafes olduğundan her $x, y \in [0, e]$ için $x \vee_{T_1^*} y$ supremumu ve $x \wedge_{T_2^*} y$ infimumu mevcuttur. $x \vee_{T_1^*} y = k \in [0, e]$ ve $x \wedge_{T_1^*} y = m \in [0, e]$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $x \leq_{T_1^*} k$ ve $y \leq_{T_1^*} k$ olur. Önerme 2.1.10. (i)'den $x \leq_F k$ ve $y \leq_F k$ olduğu

açıktır. Bu durumda, $k \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_F}$ dır.

$t \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_F}$ keyfi bir eleman alalım. Bu durumda,

$$x \leq_F t \text{ ve } y \leq_F t$$

dir. $I_e = \emptyset$ olduğundan $e \leq t$ ya da $t \leq e$ olduğu açıktır.

$t \leq e$ olsun. Önerme 2.1.10. (i)'den $x \leq_{T_1^*} t$ ve $y \leq_{T_1^*} t$ 'dir. Böylece, $t \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_{T_1^*}}$ dır.

$x \vee_{T_1^*} y = k$ olduğundan $k \leq_{T_1^*} t$ dır. $k, t \in [0, e]$ olduğundan Önerme 2.1.10. (i)'den $k \leq_F t$ elde edilir.

$e \leq t$ olsun. Bu durumda $k \leq e \leq t$ dir. $\leq_F$ nin tanımından $k \leq_F t$ olur. Böylece $x \vee_F y = k$ dır.

Benzer şekilde, $x, y \in [0, e]$ için $x \wedge_F y = m$ olduğu gösterilebilir. $x, y \in [e, a]$ olsun. $([e, a], \leq_{S^*})$ bir kafes olduğundan $\leq_{S^*}$ sıralamasına göre x ve y elemanlarının supremumu ve infimumu mevcuttur.

$$x \vee_{S^*} y = k \in [e, a] \text{ ve } x \wedge_{S^*} y = m \in [e, a]$$

olsun. Bu durumda, $x \leq_{S^*} k$ ve $y \leq_{S^*} k$ dır. Önerme 2.1.10. (ii)'den $x \leq_F k$ ve $y \leq_F k$ olduğu açıktır. Böylece $k \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_F}$ olur.

$t \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_F}$ keyfi olsun. Bu durumda, $x \leq_F t$ ve $y \leq_F t$ dir. $I_a = \emptyset$ olduğundan $t \leq a$ ya da $a \leq t$ olmalıdır.

$t \leq a$ olsun. $x \leq_F t$ ve $y \leq_F t$ olduğundan $x \leq t$ olduğu açıktır. Böylece $e \leq x \leq t \leq a$ olur. $x, y, a, t \in [e, a]$ ve $x \leq_F t$ ve $y \leq_F t$ olduğundan Önerme 2.1.10. (ii)'den $x \leq_{S^*} t$ ve $y \leq_{S^*} t$ elde edilir.

Böylece, $t \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_{S^*}}$ olur. $x \vee_{S^*} y = k$ olduğundan $k \leq_{S^*} t$ dir. Önerme 2.1.10. (ii)'den $k \leq_F t$ elde edilir.

$t > a$ olsun. $k \leq a < t$ olup $\leq_F$ nin tanımından $k \leq_F t$ dir. Bu durumda, her $x, y \in [e, a]$ için $x \vee_F y = k$ dir.

Benzer şekilde, $x, y \in [e, a]$ için $x \wedge_F y = m$ olduğu gösterilebilir.
 $x, y \in [a, 1]$ olsun. $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ bir kafes olduğundan her $x, y \in [a, 1]$ elemanlarının $\leq_{T_2^*}$ sıralamasına göre supremumu ve infimumu mevcuttur.
 $x \vee_{T_2^*} y = k \in [a, 1]$ ve $x \wedge_{T_2^*} y = m \in [a, 1]$ olsun. Benzer yöntem ile $x \vee_{T_2^*} y = k$ ve $x \wedge_{T_2^*} y = m$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi $(x, y) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ ve $I_e = I_a = \emptyset$ olsun. Bu durumda, her eleman e ve a ile kıyaslanabilir olduğunu gösterelim.

$x \leq e$ olsun. $(x, y) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ olduğundan $y > e$ olmalıdır. O halde $x \leq e < y$ dir. $\leq_F$ nin tanımından $x \leq_F y$ olur. Bu durumda $x \vee_F y = y$ ve $x \wedge_F y = x$ olur.

$x \in [e, a]$ olsun. O halde $y < e$ veya $y > a$ dir. Eğer $y > e$ ise $y < e \leq x$ olup $\leq_F$ nin tanımından $y \leq_F x$ dir. Böylece, $y \wedge_F x = y$ ve $y \vee_F x = x$ olur.

$y > a$ olsun. $x \leq a < y$ olduğundan $\leq_F$ nin tanımından $x \leq_F y$ dir. Bu durumda, $y \wedge_F x = x$ ve $y \vee_F x = y$ olur.

$x \in [a, 1]$ olsun. Bu durumda, $(x, y) \notin \{[0, e]^2, [e, a]^2, [a, 1]^2\}$ olduğundan $y < a$ olmalıdır. Böylece $y \wedge_F x = y$ ve $y \vee_F x = x$ olduğu açıktır. O halde, $(L, \leq_F)$ bir kafestir.

Tersine olarak, $(L, \leq_F)$ bir kafes olsun.

$x, y \in [0, e]$ y elemanlarının infimumu ve supremumu $(L, \leq_F)$ kafes olduğundan mevcuttur. $x \vee_F y = k$ ve $x \wedge_F y = t$ olsun. Her $x, y \in [0, e]$ için $x \leq_F e$ ve $y \leq_F e$ olduğundan $e \in \overline{\{x, y\}_{\leq_F}}$ olduğu açıktır. Bu yüzden $x \vee_F y = k \leq_F e$ olur. Buradan, $k \leq e$ dir. $x \vee_F y = k$ olduğundan

$$x \leq_F k \text{ ve } y \leq_F k$$

dir. Böylece, Önerme 2.1.10. (i) ile $x \leq_{T_1^*} k$ ve $y \leq_{T_1^*} k$ dir. Bu durumda, $k \in \overline{\{x, y\}_{\leq_{T_1^*}}}$ dir.

$m \in \overline{\{x, y\}_{\leq_{T_1^*}}}$ olsun. $x \leq_{T_1^*} m$ ve $y \leq_{T_1^*} m$ olduğu açıktır. Önerme 2.1.10. (i) ile

$x \leq_F m$ ve $y \leq_F m$ olur. Böylece, $m \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_F}$ dir. $x \vee_F y = k$ olduğundan $k \leq_F m$ dir. $k, m \in [0, e]$ ve $k \leq_F m$ olduğundan Önerme 2.1.10. (i) ile

$$k \leq_{T_1^*} m$$

olduğu açıktır. Böylece, $x \vee_{T_1^*} y = k$ dır. Benzer şekilde $x \wedge_{T_1^*} y = t$ olduğu gösterilebilir. Benzer modelleme ile $([e, a], \leq_{S^*})$ ve $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ nin kafes oldukları ispatlanabilir. Önerme 12 [1] ve Önerme 8 [2] ile $([0, a], \leq_{U^*})$ ve $([e, 1], \leq_{V^*})$ kafestir.

Teorem 2.1.12. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm ve $\varphi: [0, e] \rightarrow [a, 1]$ sıra-koruyan, birebir ve örten bir fonksiyon öyle ki $T_1^* = (T_2^*)_\varphi$ olsun.

(i) $I_a = \emptyset$ olsun. $([0, a], \leq_{U^*})$ kafes ise $([e, 1], \leq_{V^*})$ kafestir.

(ii) $I_e = \emptyset$ olsun. $([e, 1], \leq_{V^*})$ kafes ise $([0, a], \leq_{U^*})$ kafestir.

İspat: (i) $I_a = \emptyset$ ve $([0, a], \leq_{U^*})$ bir kafes olsun. Önerme 12 [1] ile $([0, e], \leq_{T_1^*})$ ve $([e, a], \leq_{S^*})$ bir kafestir. $T_1^* = (T_2^*)_\varphi$ ve Önerme 1 [2] ile $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ in kafestir. $I_a = \emptyset$, $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ ve $([e, a], \leq_{S^*})$ sıralı küme olduğundan kafestirler. Önerme 8 [2] ile $([e, 1], \leq_{V^*})$ bir kafestir.

(ii) $I_e = \emptyset$ ve $([e, 1], \leq_{V^*})$ bir kafes olsun. O halde Önerme 12 [1] ile $([e, a], \leq_{S^*})$ ve $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ bir kafestir. $T_1^* = (T_2^*)_\varphi$ olduğundan Önerme 1 [2] ile $([0, e], \leq_{T_1^*})$ in kafes olduğu açıktır. $I_e = \emptyset$, $([0, e], \leq_{T_1^*})$ ve $([e, a], \leq_{S^*})$ kafes olduklarından Önerme 8 [2] ile $([0, a], \leq_{U^*})$ bir kafestir.

Sonuç 2.1.13. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir uni-nullnorm, $I_a = I_e = \emptyset$ ve $\varphi: [0, e] \rightarrow [a, 1]$ sıra-koruyan, birebir ve örten bir fonksiyon öyle ki $T_1^* = (T_2^*)_\varphi$ olsun. Bu durumda, $([0, a], \leq_{U^*})$ kafestir $\Leftrightarrow (L, \leq_F)$ kafestir $\Leftrightarrow ([e, 1], \leq_{V^*})$ kafestir.

Aşağıdaki teoremden $(L, \leq_F)$ nin bir kafes olmasına denk olan durumlar belirlenecektir.

Teorem 2.1.14. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, F nötral elemanı e ve sıfır elemanı a olan bir

uni-nullnorm, $I_a = I_e = \emptyset$ olsun. $N: [e, a] \rightarrow [e, a]$ bir negasyon, $\varphi: [0, e] \rightarrow [a, 1]$ ve $\psi: [0, e] \rightarrow [e, a]$ dönüşümleri $T_1^* = (T_2^*)_\varphi$ ve $T_1^* = (S_N^*)_\psi$ eşitliklerini sağlayan sırankoruyan, birebir ve örten fonksiyonlar olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $(L, \leq_F)$ bir kafestir.
- (ii) $([0, e], \leq_{T_1^*})$ bir kafestir.
- (iii) $([e, a], \leq_{S^*})$ bir kafestir.
- (iv) $([a, 1], \leq_{T_2^*})$ bir kafestir.
- (v) $([0, a], \leq_{U^*})$ bir kafestir.
- (vi) $([e, 1], \leq_{V^*})$ bir kafestir.

İspat: Sonuç 2.1.13. ile

$$\begin{aligned} (L, \leq_F) \text{ bir kafestir} &\Leftrightarrow ([0, a], \leq_{U^*}) \text{ bir kafestir,} \\ &\Leftrightarrow ([e, 1], \leq_{V^*}) \text{ bir kafestir,} \end{aligned}$$

denkliklerinin sağlandığı açıktır. $T_1^* = (S_N^*)_\psi$ olduğundan ve Önerme 10 [1] ile

$$\begin{aligned} ([0, e], \leq_{T_1^*}) \text{ bir kafestir} &\Leftrightarrow ([e, a], \leq_{S_N^*}) \text{ bir kafestir,} \\ &\Leftrightarrow ([e, a], \leq_{S^*}) \text{ bir kafestir,} \end{aligned}$$

denklikleri elde edilir. $T_1^* = (T_2^*)_\varphi$ olduğundan Sonuç 11 [2] ile

$$([0, e], \leq_{T_1^*}) \text{ bir kafestir} \Leftrightarrow ([a, 1], \leq_{T_2^*}) \text{ bir kafestir}$$

denkliği elde edilir. Ayrıca, Sonuç 13 [1] ile

$$\begin{aligned} ([0, a], \leq_{U^*}) \text{ bir kafestir} &\Leftrightarrow ([0, e], \leq_{T_1^*}) \text{ ve } ([e, a], \leq_{S^*}) \text{ kafestir} \\ &\Leftrightarrow ([0, e], \leq_{T_1^*}) \text{ bir kafestir.} \end{aligned}$$

2.2. Sıralamalar Arasındaki İlişkiler

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır.

2.2.1. N-Duallik Durumu

Bu bölümde, bir t-norm ve onun N -dual t-konormundan elde edilen sıralamalar üzerinde çalışacağız. Bu şekildeki sıralamalardan elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Bu sıralamalarla elde edilen kısmen

sıralı kümelerin elemanlarının 0 veya 1-bölen, atom veya koatom olma özellikleri arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Ayrıca, $T(S)$ kısmen sıralı kümeler tarafından üretilen alt (üst) kümeyi inceleyeceğiz. Bu sıralamalarla elde edilen kısmen sıralı kümelerin alt (üst) yarı modülerlikleri arasındaki ilişkileri araştıracağız. Bu sıralamalardan elde edilen kafeslerin ideal ve dual idealleri arasındaki ilişkileri ortaya koyacağız.

Aşağıdaki önermede bir t-norm ve onun N -dual t-konormundan elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Önerme 2.2.1.1. $T: L^2 \rightarrow L$, L tam kafesi üzerinde bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun. Bu durumda, $(L, \leq_T)$ tam kafestir $\Leftrightarrow (L, \leq_S)$ tam kafestir.

İspat: $(L, \leq_T)$ bir tam kafes olsun. Bu durumda her $\{x_i | i \in I\} \subseteq L$ ailesi için $\bigwedge_T N(x_i) = k \in L$ mevcuttur. Şimdi $\{x_i | i \in I\} \subseteq L$ ailesinin $\leq_S$ sıralamasına göre supremumunun mevcut olduğunu gösterelim.

$\bigwedge_T N(x_i) = k \in L$ olduğundan her $i \in I$ için $k \leq_T N(x_i)$ dir. Lemma 2 [3] ile her $i \in I$ için

$$N(N(x_i)) \leq_S N(k)$$

olduğu açıktır. N güçlü olduğundan her $i \in I$ için

$$x_i \leq_S N(k)$$

dır. Böylece, $N(k) \in \overline{\{x_i | i \in I\}}_{\leq_S}$ dir. $t \in \overline{\{x_i | i \in I\}}_{\leq_S}$ keyfi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için

$$x_i \leq_S t$$

dir. Lemma 2 [3] ile,

$$N(t) \leq_T N(x_i)$$

elde edilir. Böylece $N(t) \in \overline{\{N(x_i) | i \in I\}}_{\leq_T}$ dir. $\bigwedge_T N(x_i) = k$ olduğundan $N(t) \leq_T k$ olduğu açıktır. Lemma 2 [3] kullanılırsa

$$N(k) \leq_S N(N(t)) = t$$

elde edilir. Buradan $\bigvee_S x_i = N(k) \in L$ olduğu görülür. Her $x \in L$ için $S(x, 0) = x$ olduğundan $0 \leq_S x$ dir. Buradan, $(L, \leq_S)$ sıralı kümesinin en küçük elemanı 0 dir. Böylece Teorem 6 [4] ile $(L, \leq_S)$ bir tam kafestir.

Tersine olarak, $(L, \leq_S)$ bir tam kafes olsun. Bu durumda, her $\{x_i | i \in I\} \subseteq L$ ailesi için $\vee_S N(x_i) = u \in L$ supremumu mevcuttur. Şimdi, $\wedge_T x_i = N(u) \in L$ olduğunu gösterelim.

$\vee_S N(x_i) = u$ olduğundan her $i \in I$ için $N(x_i) \leq_S u$ dir. Lemma 2 [3] ile her $i \in I$ için,

$$N(u) \leq_T N(N(x_i)) = x_i$$

olduğu açıktır. Buradan, $N(u) \in \{x_i | i \in I\}_{\leq_T}$ dir.

$m \in \{x_i | i \in I\}_{\leq_T}$ keyfi olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için

$$m \leq_T x_i$$

dir. Lemma 2 [3] kullanılırsa her $i \in I$ için

$$N(x_i) \leq_S N(m)$$

elde edilir. Buradan, $N(m) \in \{N(x_i) | i \in I\}_{\leq_S}$ dir. $\vee_S N(x_i) = u$ olduğundan

$$u \leq_S N(m)$$

elde edilir. Bu durumda, $m = N(N(m)) \leq_T N(u)$ dir. Buradan, $N(u) = \wedge_T x_i$ elde edilir.

Her $x \in L$ için $x \leq_T 1$ olduğundan $(L, \leq_T)$ sıralı kümesinin en büyük elemanı 1 dir. Teorem 6 [4] ile $(L, \leq_T)$ bir tam kafestir.

Uyarı 2.2.1.2. Önerme 2.2.1.1.'in ispatı ile

$$(9) \quad \wedge_T N(x_i) = k \Leftrightarrow \vee_S x_i = N(k)$$

$$(10) \quad \vee_T N(x_i) = m \Leftrightarrow \wedge_S x_i = N(m)$$

denklikleri kolayca görülebilir.

Önerme 2.2.1.3. T , sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun. Bu taktirde, $a \in L$ elemanı $\vee_T (\wedge_T)$ -indirgenemezdir ancak ve ancak $N(a) \in L$ elemanı $\wedge_S (\vee_S)$ -indirgenemezdir.

İspat: $a \in L$ bir $\vee_T (\wedge_T)$ -indirgenemez eleman ve $b, c \in L$ için $N(a) = b \wedge_S c$ olsun. Bu durumda, $x, y \in L$ için [5]

$$(11) \quad N(x) \vee_T N(y) = k^* \Leftrightarrow x \wedge_S y = N(k^*)$$

denkliği ile

$$a = N(N(a)) = N(b \wedge_S c) = N(b) \vee_T N(c)$$

ve buradan, $a = N(b) \vee_T N(c)$ dir.

a , $\vee_T$ -indirgenemez olduğundan $a = N(b)$ veya $a = N(c)$ dir. Buradan, $N(a) = N(N(b)) = b$ veya $N(a) = N(N(c)) = c$ elde edilir. Böylece $N(a)$, $\wedge_S$ -indirgenemez elemandır.

Tersine olarak, $N(a)$ $\wedge_S$ -indirgenemez ve $b, c \in L$ için $a = b \vee_T c$ olsun. N güçlü olduğundan,

$$b = N(b^*) \text{ ve } c = N(c^*)$$

olacak şekilde $b^*, c^* \in L$ elemanları mevcuttur. Bu durumda,

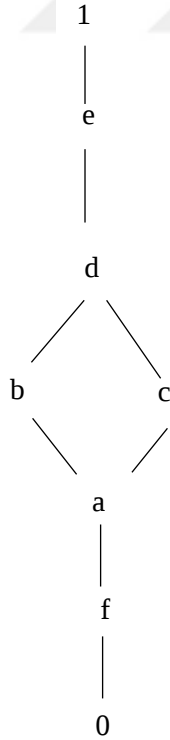
$$a = N(b^*) \vee_T N(c^*)$$

dir. (10) [5] denkleğini kullanırsak,

$$b^* \wedge_S c^* = N(a)$$

olduğu görülür. $N(a)$ $\wedge_S$ -indirgenemez olduğundan $N(a) = b^*$ veya $N(a) = c^*$ eşitlikleri sağlanır. Buradan, $a = N(b^*) = b$ veya $a = N(c^*) = c$ dir. Böylece, a elemanı $\vee_T$ -indirgenemezdir.

Örnek 2.2.1.4. T sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. $(L, \leq_T)$ kısmen sıralı kümesinin diyagramı Şekil 3'deki gibi olsun.



Şekil 12. $(L, \leq_T)$

L kafesi üzerinde N fonksiyonu,

$$N(x) = \begin{cases} f, & x = e \\ e, & x = f \\ d, & x = a \\ a, & x = d \\ b, & x = b \\ c, & x = c \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. N nin L kafesi üzerinde güçlü negasyon olduğu açıktır. Buradan $\vee_T$ -indirgenemez elemanları kümesi,

$$\{a, f, b, c, e, 0, 1\}$$

dir. Önerme 2.2.1.3. ile $\wedge_S$ -indirgenemez elemanları kümesi,

$$\{d, e, b, c, f, 0, 1\}$$

dir.

T bir t-norm ve S , N -dual t-konormu olmak üzere $(L, \leq_T)$ ve $(L, \leq_S)$ kısmen sıralı kümelerinin elemanları için aşağıdaki ilişki elde edilir.

Önerme 2.2.1.5. T sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve S , T nin N -dual t-konormu olsun. Bu taktirde, a elemanı $(L, \leq_T)$ nin bir 0-bölen elemanıdır ancak ve ancak $N(a)$ elemanı $(L, \leq_S)$ nin 1-bölen elemanıdır.

İspat: a elemanı $(L, \leq_T)$ nin 0-böleni olsun. Bu durumda, bir $b \in L$ mevcuttur öyle ki $a \wedge_T b \neq 0$ ve $T(a, b) = 0$ dır. N güçlü olduğundan $x, y \in L$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$N(x) = a \text{ ve } N(y) = b.$$

Böylece, $0 \neq a \wedge_T b = N(x) \wedge_T N(y)$ dir. Varsayalım ki $x \vee_S y = 1$ olsun. Buradan, $x \vee_S y = 1 = N(0)$ olduğundan (9) [5] ile

$$a \wedge_T b = N(x) \wedge_T N(y) = N(x \vee_S y) = N(1) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Buradan, $x \vee_S y \neq 1$ dir. Böylece,

$$1 \neq x \vee_S y = N(a) \vee_S N(b)$$

dir. Şimdi, $S(N(a), N(b)) = 1$ olduğunu gösterelim. $T(a, b) = 0$ olduğundan,

$$N(1) = 0 = T(a, b) = T(N(x), N(y))$$

elde edilir. N güçlü olduğundan,

$$\begin{aligned} 1 &= N(0) = N\left(T(N(x), N(y))\right) \\ &= T_N(x, y) \\ &= S(x, y) \\ &= S(N(a), N(b)) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, $N(a)$ elemanı için bir $N(b) \in L$ elemanı mevcuttur öyle ki

$$N(a) \vee_S N(b) \neq 1 \text{ ve } S(N(a), N(b)) = 1$$

dir. Bu ise $N(a)$ nın $(L, \leq_S)$ sıralı kümesinin 1-bölen elemanı olduğunu gösterir.

Tersinin sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

Önerme 2.2.1.6. T sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun. a elemanı $(L, \leq_T)$ nin bir atomudur (koatomudur) ancak ve ancak $N(a)$ elemanı $(L, \leq_S)$ nin bir koatomudur (atomudur).

İspat: a elemanı $(L, \leq_T)$ nin atomu olsun. Bir $y \in L$ elemanı $N(a) \leq_S y \leq_S 1$ olacak şekilde mevcut olsun. N güçlü olduğundan $x \in L$ elemanı mevcuttur öyle ki $N(x) = y$ dir. Bu durumda,

$$N(a) \leq_S N(x) \leq_S 1 = N(0)$$

dır. Lemma 2 [3] ile

$$0 \leq_T x \leq_T a$$

olduğu açıktır. a bir atom olduğundan $x = 0$ veya $x = a$ olmalıdır. Buradan, $y = N(x) = N(0) = 1$ veya $y = N(x) = N(a)$ dir. O halde, $N(a)$ elemanı $(L, \leq_S)$ nin bir koatomudur.

Tersi benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi, $T(S)$ kısmen sıralamasından elde edilen alt (üst) kümeleri araştıralım.

Önerme 2.2.1.7. $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $x \in L$ için

$$\downarrow_T x = \{y \in L \mid y \leq_T x\}$$

kümesi tanımlansın. Bu taktirde,

- (i) T sonsuz $\wedge$ -dağılmalı t-norm ise $(\downarrow_T x, \leq)$ bir tam kafestir.
- (ii) T sonsuz $\vee$ -dağılmalı t-norm ise $(\downarrow_T x, \leq)$ bir tam kafestir.

İspat: (i) T sonsuz $\wedge$ -dağılmalı t-norm olsun. I bir indeks kümesi olmak üzere $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq \downarrow_T x$ olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için $a_i \in \downarrow_T x$ dir. Buradan, her $i \in I$ için $a_i \leq_T x$ dir. Her $i \in I$ için $\ell_i \in L$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$T(\ell_i, x) = a_i$$

dır. T sonsuz $\wedge$ -dağılmalı olduğundan,

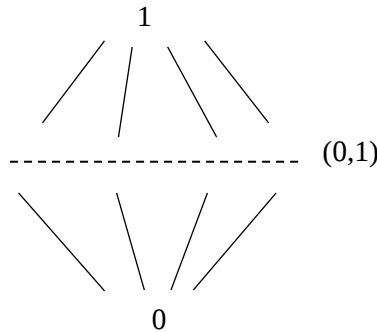
$$T(\wedge_i \ell_i, x) = \wedge_i T(\ell_i, x) = \wedge_i a_i$$

elde edilir. Buradan, $\wedge_i a_i \leq_T x$ dir. $\wedge_i a_i \in \downarrow_T x$ dir.

$x \leq_T x$ olduğundan $x \in \downarrow_T x$ olduğu açıktır. Her $a \in \downarrow_T x$ için $a \leq_T x$ olduğundan x en büyük elemandır. Teorem 6 [4] ile $(\downarrow_T x, \leq)$ bir tam kafestir.

(ii) Benzer şekilde ispatlanabilir.

Örnek 2.2.1.8. L sınırlı bir kafes ve T_D , L kafesi üzerinde drastik çarpım t-norm olsun. $x \neq y$ olan her $x, y \in L \setminus \{0, 1\}$ için $x \leq_{T_D} y$ olsun. Bu taktirde, bir $\ell \in L$ elemanı mevcuttur öyle ki $T_D(\ell, y) = x$ dir. Eğer $\ell = 1$ ise $x = y$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $\ell, y \neq 1$ dir. $x = T_D(\ell, y) = 0$ olur ki bu yine bir çelişkidir. Bu durumda, L kafesinde birbirinden farklı herhangi iki eleman $\leq_{T_D}$ sıralamasına göre kıyaslanamazdır. Buna göre, $(L, \leq_{T_D})$ kısmen sıralı kümesinin diyagramı aşağıdaki gibidir:



Şekil 13. $(L, \leq_{T_D}, 0, 1)$

Buradan, $x \neq 1$ olmak üzere $\downarrow_T x = \{0, x\}$ olduğu açıktır.

Önerme 2.2.1.9. $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam kafes ve S, L üzerinde bir t-konorm olsun. Her $x \in L$ için,

$$x \uparrow_S = \{y \in L \mid x \leq_S y\}$$

kümesi tanımlansın. Buradan,

- (i) S , sonsuz $\wedge$ -dağılmalı ise $(x \uparrow_S, \leq)$ bir tam kafestir.
- (ii) S , sonsuz $\vee$ -dağılmalı ise $(x \uparrow_S, \leq)$ bir tam kafestir.

İspat: Önerme 2.2.1.7.'nin ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Uyarı 2.2.1.10. L sınırlı bir kafes ve N, L üzerinde güçlü bir negasyon olsun. Bu durumda, her $a, b \in L$ için

$$(12) \quad N(a \vee b) = N(a) \wedge N(b)$$

olur.

Şimdi (5) denkleğinin sağlandığını gösterelim. $a \leq a \vee b$ ve $b \leq a \vee b$ olduğundan, $N(a \vee b) \leq N(a)$ ve $N(a \vee b) \leq N(b)$ olduğu açıktır. Buradan,

$$N(a \vee b) \leq N(a) \wedge N(b)$$

olduğu elde edilir.

$N(a) \wedge N(b) = y$ olsun. Bu durumda, $y \leq N(a)$ ve $y \leq N(b)$ dir. N güçlü olduğundan,

$$a \leq N(y) \text{ ve } b \leq N(y)$$

dir. Bu durumda, $a \vee b \leq N(y)$ dir. Buradan, N güçlü negasyon olduğundan,

$$N(a) \wedge N(b) = y = N(N(y)) \leq N(a \vee b)$$

olduğu elde edilir. Böylece, $N(a \vee b) = N(a) \wedge N(b)$ dir.

Önerme 2.2.1.11. T , sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve S, T nin N -dual t-konormu olsun. $x \in L$ için, $(N(x) \uparrow_S, \leq)$ bir infimum (supremum) alt kafestir ancak ve ancak $(\downarrow_T x, \leq)$ bir supremum (infimum) alt kafestir.

İspat: $(N(x) \uparrow_S, \leq)$ bir infimum alt kafes ve $a, b \in \downarrow_T x$ olsun. Bu durumda, $a \leq_T x$ ve $b \leq_T x$ dir. Buradan, Lemma 2 [3] ile

$$N(x) \leq_S N(a) \text{ ve } N(x) \leq_S N(b)$$

olduğu açıktır. Buradan, $N(a), N(b) \in N(x) \uparrow_S$ dir. $(N(x) \uparrow_S, \leq)$ bir infimum alt kafes olduğundan,

$$N(a) \wedge N(b) \in N(x) \uparrow_S$$

dir. Bu durumda, $N(x) \leq_S N(a) \wedge N(b)$ dir. Lemma 2 [3] ve 1.4.1.2.Uyarı ile

$$\begin{aligned} a \vee b &= N(N(a)) \vee N(N(b)) \\ &= N(N(a) \wedge N(b)) \quad ((12) \text{ ile}) \\ &\leq_T N(N(x)) = x \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $a \vee b \in \downarrow_T x$ dir. O halde, $(\downarrow_T x, \leq)$ bir supremum alt kafestir.

İspatın tersi benzer şekilde yapılır.

Önerme 2.2.1.12. T , sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t -norm ve S, T nin N -dual t -konormu olsun. Bu durumda, T t -normu $\vee_T (\wedge_T)$ -dağılmalıdır ancak ve ancak S t -konormu $\wedge_S (\vee_S)$ -dağılmalıdır.

İspat: $T, \vee_T$ -dağılmalı olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$\begin{aligned} S(x, y \wedge_S z) &= N(T(N(x), N(y \wedge_S z))) \\ &= N(T(N(x), N(y) \vee_T N(z))) \quad ((10) \text{ ile}) \\ &= N(T(N(x), N(y)) \vee_T N(T(N(x), N(z)))) \\ &= N(T(N(x), N(y)) \wedge_S N(T(N(x), N(z)))) \\ &= S(x, y) \wedge_S S(x, z). \end{aligned}$$

Böylece, S t -konormu $\wedge_S$ -dağılmalıdır.

İspatın tersi benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi, bir t -norm ve bu t -normun N -dual t -konormundan elde edilen sıralamalardan üretilen kısmen sıralı kümelerin alt (üst) yarı-modülerlikleri arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Önerme 2.2.1.13. T , sonlu uzunluklu bir L kafesi üzerinde bir t -norm ve S, T nin N -dual

t-konormu olsun. $(L, \leq_T)$ bir alt (üst) yarı-modüler $\vee_T (\wedge_T)$ -alt kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ bir üst (alt) yarı-modüler $\wedge_S (\vee_S)$ -alt kafestir.

İspat: Önerme 10 [1] ile $(L, \leq_T)$ bir $\vee_T (\wedge_T)$ -alt kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ bir $\wedge_S (\vee_S)$ -alt kafestir olduğu biliniyor. Şimdi, $(L, \leq_T)$ alt yarı-modüler olsun. $a \neq b$ olan her $a, b \in L$ için c , $\leq_S$ sıralamasına göre kover a ve b olsun. a ve b kover $a \wedge_S b$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $x \in L$ için $a \wedge_S b \leq_S x \leq_S a$ olsun. Bu durumda,

$$(13) \quad N(a) \leq_T N(x) \leq_T N(a \wedge_S b) = N(a) \vee_T N(b)$$

olduğu açıktır. $\leq_S$ sıralamasına göre c kover a ve b olduğundan $a \leq_S c$ ve $b \leq_S c$ dir. Bu taktirde,

$$N(c) \leq_T N(a) \text{ ve } N(c) \leq_T N(b)$$

dir. Farz edelim ki, bir $y \in L$ elemanı,

$$N(c) \leq_T y \leq_T N(a)$$

olacak şekilde mevcut olsun. N örten olduğundan, bir $x \in L$ elemanı $N(x) = y$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda,

$$N(c) \leq_T N(x) \leq_T N(a)$$

elde edilir. Buradan, $a \leq_S x \leq_S c$ dir. Bu durum $\leq_S$ sıralamasına göre c kover a olması ile çelişir. Bu durumda, $\leq_T$ sıralamasına göre $N(a)$ kover $N(c)$ dir. Benzer şekilde, $\leq_T$ sıralamasına göre $N(b)$ kover $N(c)$ olduğu gösterilebilir. $(L, \leq_T)$ bir üst yarı-modüler ve $\leq_T$ sıralamasına göre $N(a)$ ve $N(b)$ kover $N(c)$ olduğundan, $\leq_T$ sıralamasına göre $N(a) \vee_T N(b)$ kover $N(a)$ ve $N(a) \vee_T N(b)$ kover $N(b)$ dir.

(2) ile,

$N(a) \leq_T N(x) \leq_T N(a) \vee_T N(b)$ ve $N(a) \vee_T N(b)$ kover $N(a)$ ve $N(b)$ olduğundan,

$N(a) = N(x)$ veya $N(x) = N(a) \vee_T N(b) = N(a \wedge_S b)$ elde edilir. N , birebir ve örten olduğundan $x = a$ veya $x = a \wedge_S b$ dir. Bu durum, $\leq_S$ sıralamasına göre a kover $a \wedge_S b$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, $\leq_S$ sıralamasına göre b kover $a \wedge_S b$ olduğu gösterilebilir. O halde, $(L, \leq_S)$ alt yarı-modülerdir.

İspatın tersi benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi, bir t -norm ve onun N -dual t -konormundan elde edilen sıralamalardan üretilen kafeslerin idealleri ve dual idealleri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Önerme 2.2.1.14. T , sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t -norm ve S , T 'nin N -dual t -konormu ve J , L kafesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu taktirde, J , $(L, \leq_T)$ kafesinin bir idealidir (veya dual idealidir) ancak ve ancak $N(J)$, $(L, \leq_S)$ kafesinin bir dual idealidir (veya idealidir).

İspat: J , $(L, \leq_T)$ kafesinin bir ideali ve $a \in N(J)$, $x \in L$ olmak üzere $a \leq_S x$ olsun. Bu taktirde, bir $j \in J$ elemanı mevcuttur öyle ki $a = N(j)$ dir. N örten olduğundan, bir $y \in L$ elemanı mevcuttur öyle ki $N(y) = x$ dir. Buradan,

$$N(j) = a \leq_S x = N(y).$$

Lemma 2 [3] ile $y \leq_T j$ dir. J , $(L, \leq_T)$ kafesinin bir ideali olduğundan $y \in J$ olduğu açıktır. Böylece, $x = N(y) \in N(J)$ dir.

Şimdi, $a \in N(J)$ ve $b \in N(J)$ olsun. Bu durumda, $j_1, j_2 \in J$ elemanları $a = N(j_1)$ ve $b = N(j_2)$ olacak şekilde mevcuttur. J , $(L, \leq_T)$ kafesinin bir ideali olduğundan $j_1 \vee_T j_2 \in J$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} a \wedge_S b &= N(j_1) \wedge_S N(j_2) \\ &= N(j_1 \vee_T j_2) \in N(J). \end{aligned} \quad ((13) \text{ ile})$$

Buradan, $N(J)$, $(L, \leq_S)$ kafesinin bir dual idealidir.

Tersinin ispatı benzer şekilde gösterilebilir.

2.2.2. φ -Eşlenik Durumu

Bu bölümde, bir t -norm ve bu t -normun φ -eşleniğinden üretilen sıralamalardan bahsedeceğiz. Böyle sıralamalardan elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Böyle sıralamalar ile tanımlanan kısmen sıralı kümeler için 0-bölen veya 1-bölen elemanlar, indirgenemez elemanlar, atom veya koatomlar gibi

elemanların arasındaki ilişkileri araştıracağız. Ayrıca, böyle sıralamalardan elde edilen kısmen sıralamaların alt (üst) yarı-modülerlikleri arasındaki ilişkileri vereceğiz. Böyle sıralamalardan üretilen kafeslerin idealleri (dual idealleri) arasındaki ilişkileri üzerinde çalışacağız.

Aşağıdaki önermede bir t-norm ve onun φ -eşlenik t-normu ile üretilen sıralamalardan elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Önerme 2.2.2.1. $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ bir sıra-koruyan, bire-bir ve örten dönüşüm olsun. $([a, b], \leq_T)$ bir tam kafestir $\Leftrightarrow ([c, d], \leq_{T_\varphi})$ bir tam kafestir.

İspat: $([a, b], \leq_T)$ bir tam kafes ve $\{x_i \mid i \in I\} \subseteq [c, d]$ olsun. Bu durumda, $\{\varphi(x_i) \mid i \in I\} \subseteq [a, b]$ dir. $([a, b], \leq_T)$ bir tam kafes olduğundan $\bigwedge_T \varphi(x_i) = k \in [a, b]$ mevcuttur. Buradan, her $i \in I$ için

$$k \leq_T \varphi(x_i).$$

φ , örten olduğundan bir $\ell \in [c, d]$ elemanı mevcuttur öyle ki

$$\varphi(\ell) = k$$

dır. Bu durumda, $\varphi(\ell) = k \leq_T \varphi(x_i)$ dir. $\leq_T$ sıralamasının tanımını kullanırsak bir $m \in [a, b]$ elemanı mevcuttur öyle ki $T(m, \varphi(x_i)) = \varphi(\ell)$ dir. Bu taktirde, $t^* \in [c, d]$ elemanı mevcuttur öyle ki $\varphi(t^*) = m$ dir. Buradan,

$$T(\varphi(t^*), \varphi(x_i)) = \varphi(\ell)$$

olup

$$\ell = \varphi^{-1} \left(T(\varphi(t^*), \varphi(x_i)) \right) = T_\varphi(t^*, x_i)$$

elde edilir. Böylece, her $i \in I$ için $\ell \in \{x_i \mid i \in I\}_{\leq_{T_\varphi}}$ dir.

$u \in \{x_i \mid i \in I\}_{\leq_{T_\varphi}}$ keyfi olsun. Bu durumda, her $i \in I$ için $u \leq_{T_\varphi} x_i$ dir. Buradan, bir $n \in [c, d]$ elemanı vardır öyle ki

$$T_\varphi(n, x_i) = u$$

dır. Böylece,

$$T_\varphi(n, x_i) = \varphi^{-1} \left(T(\varphi(n), \varphi(x_i)) \right) = u$$

olduğundan $T(\varphi(n), \varphi(x_i)) = \varphi(u)$ dir. Buradan, $\varphi(u) \leq_T \varphi(x_i)$ elde edilir. Bu durumda, $\varphi(u) \in \{\underline{x_i | i \in I}\}_{\leq_T}$ dir. $\wedge_T \varphi(x_i) = k \in [a, b]$ olduğundan,

$$\varphi(u) \leq_T k = \varphi(\ell)$$

olduğu açıktır. $\leq_T$ sıralamasının tanımından, bir $v \in [a, b]$ elemanı mevcuttur öyle ki

$$T(v, \varphi(\ell)) = \varphi(u).$$

φ nin örtenliğinden, bir $s \in [c, d]$ elemanı mevcuttur öyle ki $v = \varphi(s)$ dir. Buradan,

$$\varphi(u) = T(\varphi(s), \varphi(\ell))$$

dir. $u = \varphi^{-1}(T(\varphi(s), \varphi(\ell))) = T_{\varphi}(s, \ell)$ olup $u \leq_{T_{\varphi}} \ell = \varphi^{-1}(k)$ elde edilir. Bu durum, $\wedge_{T_{\varphi}} x_i = \varphi^{-1}(k) \in [c, d]$ olduğunu gösterir.

Ayrıca, T_{φ} , $[c, d]$ üzerinde bir t-norm olduğundan her $x \in [c, d]$ için

$$T_{\varphi}(x, d) = x$$

olduğu açıktır. Bu durumda, $x \leq_{T_{\varphi}} d$ dir. Böylece, d elemanı $([c, d], \leq_{T_{\varphi}})$ kafesinin en büyük elemanıdır. Buradan, Teorem 6 [4] ile $([c, d], \leq_{T_{\varphi}})$ bir tam kafestir.

Tersi benzer şekilde ispat edilebilir.

Şimdi, bir t-norm ve bu t-normun φ -eşleniğinden elde edilen sıralamalardan üretilen kısmen sıralı kümelerin elemanları için aşağıdaki ilişkiyi verelim.

Önerme 2.2.2.2. L , sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Bu taktirde, u elemanı $\vee_T (\wedge_T)$ -indirgenemezdir ancak ve ancak $\varphi^{-1}(u)$ elemanı $\vee_{T_{\varphi}} (\wedge_{T_{\varphi}})$ -indirgenemezdir.

İspat: u , $\vee_T$ -indirgenemez ve $x, y \in [c, d]$ için $x \vee_{T_{\varphi}} y = \varphi^{-1}(u)$ olsun. (10) [5] denkliği ile

$$\varphi(x) \vee_T \varphi(y) = u$$

olduğu açıktır. u , $\vee_T$ -indirgenemez olduğundan $u = \varphi(x)$ veya $u = \varphi(y)$ olmalıdır. Bu durumda, $x = \varphi^{-1}(u)$ veya $y = \varphi^{-1}(u)$ elde edilir. Böylece, $\varphi^{-1}(u)$ elemanı $\vee_{T_{\varphi}}$ -indirgenemezdir.

İspatın tersi benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 2.2.2.3. L , sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Bu taktirde, u elemanı $([a, b], \leq_T)$ kafesinin bir sıfır elemanıdır ancak ve ancak $\varphi^{-1}(u)$ elemanı $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ kafesinin bir sıfır elemanıdır.

İspat: u , $([a, b], \leq_T)$ kafesinin bir sıfır elemanı olsun. Bu durumda, bir $v \in [a, b]$ elemanı mevcuttur öyle ki

$$u \wedge_T v \neq a \text{ ve } T(u, v) = a$$

dır. φ örten olduğundan, $x, y \in [c, d]$ elemanları mevcuttur öyle ki

$$\varphi(x) = u \text{ ve } \varphi(y) = v$$

dir. $\varphi(x) \wedge_T \varphi(y) \neq a$ ve $T(\varphi(x), \varphi(y)) = a = \varphi(c)$ elde edilir.

Varsayalım ki $x \wedge_{T_\varphi} y = c$ olsun. Bu durumda, $x \wedge_{T_\varphi} y = c = \varphi^{-1}(a)$ dır. (11) [5] denkliği ile

$$\varphi(x) \wedge_T \varphi(y) = a$$

dır. Bu bir çelişkidir. O halde, $x \wedge_{T_\varphi} y \neq c$ dir. Yani,

$$\varphi^{-1}(u) \wedge_{T_\varphi} \varphi^{-1}(v) \neq c$$

dır. $T(\varphi(x), \varphi(y)) = a = \varphi(c)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} c &= \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))) = T_\varphi(x, y) \\ &= T_\varphi(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) \end{aligned}$$

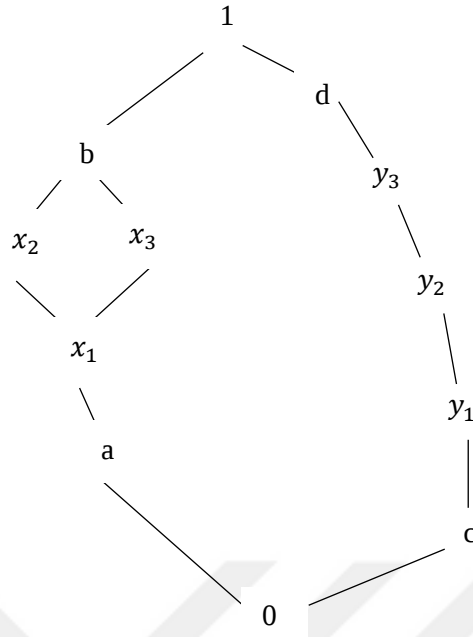
elde edilir. Buradan, $\varphi^{-1}(u)$ elemanı için $\varphi^{-1}(v)$ elemanı mevcuttur öyle ki

$$\varphi^{-1}(u) \wedge_{T_\varphi} \varphi^{-1}(v) \neq c \text{ ve } T_\varphi(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) = c$$

dir. Bu durum, $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ kafesinin sıfır bölen elemanının $\varphi^{-1}(u)$ olduğunu gösterir.

Tersi benzer şekilde ispatlanabilir.

Örnek 2.2.2.4. L , sınırlı kafesinin diyagramı Şekil 14'deki gibi olsun.



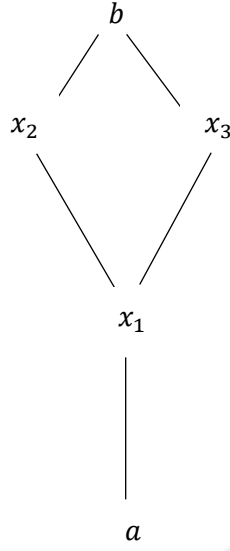
Şekil 14. $(L, \leq_T, 0, 1)$

Tablo 2’de tanımlanan T fonksiyonunu alalım.

T	a	x_1	x_2	x_3	b
a	a	a	a	a	a
x_1	a	a	a	a	x_1
x_2	a	a	x_1	a	x_2
x_3	a	a	a	x_1	x_3
b	a	x_1	x_2	x_3	b

Tablo 2. T fonksiyonu

T nin $[a, b]$ üzerinde bir t-norm olduğu açıktır. Ayrıca, $([a, b], \leq_T)$ kısmen sıralı kümesinin diyagramı aşağıdaki gibidir:



Şekil 15. $(L, \leq_T, 0, 1)$

$x_2 \wedge_T x_3 = x_1 \neq a$ ve $T(x_2, x_3) = a$ olduğundan x_2 ve x_3 elemanları $([a, b], \leq_T)$ nin sıfır bölen elemanlarıdır.

Aşağıdaki gibi tanımlanan $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan dönüşümünü ele alalım.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a & , & x = c \\ x_1 & , & x = y \\ x_2 & , & x = y_1 \\ x_3 & , & x = y_3 \end{cases}$$

Önerme 2.2.2.3. ile $y_2 = \varphi^{-1}(x_2)$ ve $y_3 = \varphi^{-1}(x_3)$ elemanları $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ sıralı kümesinin sıfır bölen elemanlarıdır.

Lemma 2.2.2.5. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ bir sıra-koruyan, bire-bir ve örten dönüşüm olsun. Her $x, y \in [c, d]$ için

$$x \leq_{T_\varphi} y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_T \varphi(y)$$

dir.

İspat: $x \leq_{T_\varphi} y$ olsun. Bu durumda, bir $\ell \in [c, d]$ elemanı mevcuttur öyle ki

$T_\varphi(\ell, y) = x$ dir.

$$x = T_\varphi(\ell, y) = \varphi^{-1} \left(T(\varphi(\ell), \varphi(y)) \right)$$

olup $\varphi(x) = T(\varphi(\ell), \varphi(y))$ dir. Böylece, $\varphi(x) \leq_T \varphi(y)$ elde edilir.

Önerme 2.2.2.6. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. u elemanı $([a, b], \leq_T)$ sıralı kümesinin bir atomudur (veya koatomudur) ancak ve ancak $\varphi^{-1}(u)$ elemanı $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ sıralı kümesinin bir atomudur (veya koatomudur).

İspat: $u, ([a, b], \leq_T)$ nin bir atomu ve $x \in [c, d]$ için $c \leq_{T_\varphi} x \leq_{T_\varphi} \varphi^{-1}(u)$ olsun. Lemma 2.2.2.5 ile

$$a = \varphi(c) \leq_T \varphi(x) \leq_T \varphi(\varphi^{-1}(u)) = u$$

olduğu açıktır. $u, ([a, b], \leq_T)$ nin bir atomu olduğundan $\varphi(x) = a$ veya $\varphi(x) = u$ dir. Buradan, $x = \varphi^{-1}(a) = c$ veya $x = \varphi^{-1}(u)$ dur. Böylece, $\varphi^{-1}(u) ([c, d], \leq_{T_\varphi})$ sıralı kümesinin bir atomudur.

Tersi benzer şekilde ispatlanabilir.

Uyarı 2.2.2.7. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Önerme 10 [1]'in ispatından, her $x, y \in [c, d]$ için

$$(14) \quad \varphi(x \vee_{T_\varphi} y) = \varphi(x) \vee_T \varphi(y).$$

Önerme 2.2.2.8. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, T t-normu $\vee_T (\wedge_T)$ -dağılmalıdır ancak ve ancak T_φ t-normu $\vee_{T_\varphi} (\wedge_{T_\varphi})$ -dağılmalıdır.

İspat: $T, \vee_T$ -dağılmalı bir t-norm olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$T_\varphi(x, y \vee_{T_\varphi} z) = \varphi^{-1} \left(T \left(\varphi(x), \varphi(y \vee_{T_\varphi} z) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi^{-1} \left(T(\varphi(x), \varphi(y) \vee_T \varphi(z)) \right) \\
&= \varphi^{-1} \left(T(\varphi(x), \varphi(y)) \vee_T T(\varphi(x), \varphi(z)) \right) \\
&= \varphi^{-1} \left(\varphi(\varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))) \vee_T \varphi(\varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(z)))) \right) \\
&= \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))) \vee_{T_\varphi} \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(z))) \\
&= T_\varphi(x, y) \vee_{T_\varphi} T_\varphi(x, z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

İspatın tersi benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi, bir t-norm ve bu t-normun φ -eşlenik t-normundan elde edilen sıralamalardan üretilen kısmen sıralı kümelerin alt (üst) yarı-modülerlikleri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Önerme 2.2.2.9. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. $([a, b], \leq_T)$ bir alt (üst) yarı-modüler $\vee_T$ ($\wedge_T$)-alt kafestir ancak ve ancak $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ bir alt (üst) yarı-modüler $\vee_{T_\varphi}$ ($\wedge_{T_\varphi}$)-alt kafestir.

İspat: Önerme 10 [2] ile $([a, b], \leq_T)$ bir $\vee_T$ ($\wedge_T$)-alt kafestir ancak ve ancak $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ bir $\vee_{T_\varphi}$ -alt kafestir. Şimdi $([a, b], \leq_T)$ bir alt yarı-modüler $\vee_T$ ($\wedge_T$)-alt kafes olsun. $x \neq y$ olan her $x, y \in [c, d]$ için $\leq_{T_\varphi}$ sıralamasına göre z kover x ve y olsun. x ve y kover $x \wedge_{T_\varphi} y$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $x \wedge_{T_\varphi} y \leq_{T_\varphi} u \leq_{T_\varphi} x$ olsun.

Lemma 2.2.2.5. ile,

$$\varphi(x \wedge_{T_\varphi} y) \leq_T \varphi(u) \leq_T \varphi(x)$$

olduğu görülür. Bu durumda,

$$(15) \quad \varphi(x) \wedge_T \varphi(y) = \varphi(x \wedge_{T_\varphi} y) \leq_{T_\varphi} \varphi(u) \leq_{T_\varphi} \varphi(x)$$

elde edilir. $\leq_{T_\varphi}$ sıralamasına göre z kover x ve y olduğundan, $x \leq_{T_\varphi} z$ ve $y \leq_{T_\varphi} z$ dir.

Buradan,

$$\varphi(x) \leq_T \varphi(z) \text{ ve } \varphi(y) \leq_T \varphi(z)$$

dir. Şimdi, $\leq_T$ sıralamasına göre $\varphi(z)$ kover $\varphi(x)$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki bir $v \in [a, b]$ elemanı mevcuttur öyle ki

$$\varphi(x) \leq_T v \leq_T \varphi(z)$$

olsun. φ , örten olduğundan $\varphi(\ell) = v$ olacak şekilde bir $\ell \in [c, d]$ mevcuttur. Bu durumda,

$$\varphi(x) \leq_T \varphi(\ell) \leq_T \varphi(z)$$

dir. Lemma 2.2.2.5. ile $x \leq_{T_\varphi} \ell \leq_{T_\varphi} z$ elde edilir. Bu ise, $\leq_{T_\varphi}$ sıralamasına göre z kover x olması ile çelişir. O halde $\leq_T$ sıralamasına göre $\varphi(z)$ kover $\varphi(x)$ dir.

Benzer şekilde, $\leq_T$ sıralamasına göre $\varphi(z)$ kover $\varphi(y)$ olduğu gösterilebilir. $([a, b], \leq_T)$ bir alt yarı-modüler $\vee_T$ -alt kafes ve $\leq_T$ sıralamasına göre $\varphi(z)$ kover $\varphi(x)$ ve $\varphi(y)$ olduğundan $\varphi(x)$ ve $\varphi(y)$ kover $\varphi(x) \wedge_T \varphi(y)$ dir. (17) ile, $\varphi(x) \wedge_T \varphi(y) \leq_T \varphi(u) \leq_T \varphi(x)$ ve $\leq_T$ sıralamasına göre $\varphi(x)$ kover $\varphi(x) \wedge_T \varphi(y)$ olduğundan,

$$\varphi(u) = \varphi(x) \wedge_T \varphi(y) = \varphi(x \wedge_{T_\varphi} y) \text{ veya } \varphi(u) = \varphi(x)$$

elde edilir. φ , birebir ve örten olduğundan $x \wedge_{T_\varphi} y = u$ veya $u = x$ dir. Bu durum, $\leq_{T_\varphi}$ sıralamasına göre x kover $x \wedge_{T_\varphi} y$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, $\leq_{T_\varphi}$ sıralamasına göre y kover $x \wedge_{T_\varphi} y$ olduğu gösterilebilir.

Böylece, $([c, d], \leq_{T_\varphi})$ bir alt yarı-modüler $\vee_{T_\varphi}$ -alt kafestir.

İspatın tersi benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi, bir t-norm ve onun φ -eşlenik t-normundan üretilen kafeslerin idealleri ve dual idealleri arasındaki ilişkiyi gösterelim.

Önerme 2.2.2.10. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$ olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Bu taktirde, $\mathcal{J}, ([a, b], \leq_T)$ kafesinin bir idealidir (dual idealidir) ancak ve ancak $\varphi^{-1}(\mathcal{J}), ([c, d], \leq_{T_\varphi})$ kafesinin bir idealidir (dual idealidir).

İspat: $\mathcal{J}, ([a, b], \leq_T)$ kafesinin bir ideali ve $x \in [c, d], u \in \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ için $x \leq_{T_\varphi} u$ olsun. Lemma 2.2.2.5. ile $\varphi(x) \leq_T \varphi(u)$ ve $\mathcal{J} \subseteq ([a, b], \leq_T)$ kafesinin bir ideali olduğundan

$\varphi(x) \in \mathcal{J}$ dir. Buradan, $x \in \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ elde edilir.

Şimdi, $u, v \in \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ olsun. Bu durumda, $\varphi(u), \varphi(v) \in \mathcal{J}$ dir. $\mathcal{J}, ([a, b], \leq_T)$ kafesinin bir ideali olduğundan, $\varphi(u) \vee_T \varphi(v) \in \mathcal{J}$ dir. Buradan, $\varphi(u \vee_{T_\varphi} v) = \varphi(u) \vee_T \varphi(v) \in \mathcal{J}$ olduğundan $u \vee_{T_\varphi} v \in \varphi^{-1}(\mathcal{J})$ dir. Böylece, $\varphi^{-1}(\mathcal{J}) ([c, d], \leq_{T_\varphi})$ kafesinin bir idealidir.

Dual idealliklerindeki ilişki benzer şekilde gösterilebilir.

İspatın tersi benzer şekilde elde edilir.

Önerme 2.2.2.11. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $[a, b], [c, d] \subseteq L$, L nin alt kafesleri olsun. $T: [a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ bir t-norm ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ sıra-koruyan, bire-bir ve örten bir dönüşüm olsun. Her $x \in [a, b]$ için $((\downarrow_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x), \leq), ([c, d], \leq))$ kafesinin bir infimum (supremum) alt kafesidir ancak ve ancak $(\downarrow_T x, \leq), ([a, b], \leq)$ kafesinin bir infimum (supremum) alt kafesidir.

İspat: $((\downarrow_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x), \leq), ([c, d], \leq))$ kafesinin bir infimum alt kafesi ve $u, v \in \downarrow_T x$ olsun.

Bu durumda, $u \leq_T x$ ve $v \leq_T x$ dir. Lemma 2.2.2.5. ile,

$$\varphi^{-1}(u) \leq_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x) \text{ ve } \varphi^{-1}(v) \leq_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x)$$

olduğu açıktır. Buradan, $\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \in \downarrow_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x)$ dir.

$(\downarrow_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x), \leq), ([c, d], \leq)$ kafesinin bir infimum alt kafesi olduğundan $\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v) \in \downarrow_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x)$ dir. Bu durumda,

$$\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v) \leq_{T_\varphi} \varphi^{-1}(x)$$

dir. Lemma 2.2.2.5. ile $\varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)) \leq_T \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ elde edilir.

Şimdi, $\varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)) = u \wedge v$ olduğunu gösterelim. $\varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)) = y$ olsun. Bu durumda, $\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)$ dir. Böylece,

$$\varphi^{-1}(y) \leq \varphi^{-1}(u) \text{ ve } \varphi^{-1}(y) \leq \varphi^{-1}(v)$$

dir. Buradan, $y \leq u$ ve $y \leq v$ olup $y \leq u \wedge v$ elde edilir.

Diğer taraftan, $\varphi^{-1}(u \wedge v) \leq \varphi^{-1}(u)$ ve $\varphi^{-1}(u \wedge v) \leq \varphi^{-1}(v)$ olduğundan

$\varphi^{-1}(u \wedge v) \leq \varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)$ olup

$$u \wedge v = \varphi(\varphi^{-1}(u \wedge v)) \leq \varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)) = y$$

dir. Buradan, $y = u \wedge v$ elde edilir. Böylece, $u \wedge v = \varphi(\varphi^{-1}(u) \wedge \varphi^{-1}(v)) \leq_T x$ olup $u \wedge v \in \downarrow_T x$ dir. Bu ise $(\downarrow_T x, \leq)$ kümesinin $([a, b], \leq)$ kafesinin bir infimum alt kafesi olduğu anlamına gelir.

İspatın tersi benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı 2.2.2.1. Benzer sonuçlar t-konormlar ve bunların φ -eşlenik t-konormlarından üretilen sıralamalardan elde edilen kısmen sıralı kümeler için de dual şekilde verilebilir.



3. BULGULAR

Karaçal ve Kesicioğlu'nun Kybernetika, 2011 "A t - partial order obtained from t -norms" adlı çalışmasında sınırlı bir L kafesi üzerinde t -normlar yardımı ile

$$x \leq_T y \Leftrightarrow \exists \ell \in L \text{ öyle ki } T(\ell, y) = x$$

şeklinde bir sıralama tanımlamıştır ve bu bağıntının bir sıralama bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Kafes üzerindeki sıralama ile T -kısmen sıralama arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Kesicioğlu, Karaçal ve Mesiar'ın Fuzzy Sets and Systems, 2015'deki "Order-equivalent triangular norms" çalışmasında T - kısmen sıralama tarafından üretilen t -normların sınıfları üzerinde bir denklik bağıntı tanımlamış ve bu denklik bağıntısı tartışılmıştır. Bazı özel t - normlara karşılık gelen denklik sınıfları karakterize edilmiş ve denklik bağıntısında korunan özellikleri incelenmiştir. T - kısmen sıralamaya göre kıyaslanamayan elemanların kümesi tanımlanarak, bu küme detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Ertuğrul, Kesicioğlu ve Karaçal'ın Information Sciences'de 2016'daki "Ordering based on uninorms" çalışmasında, sınırlı kafesler üzerindeki uninormlar yardımıyla üretilen bir kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış ve kafes üzerindeki sıralama ile ilişkisi incelenmiştir. Böylece, T - kısmen sıralama daha genel bir forma genişletilmiştir. Uninormun t - norm ve t - konorm kısımlarından elde edilen sıralamalar ile uninormun kendisinden elde edilen sıralama arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur.

Kesicioğlu, Ertuğrul ve Karaçal'ın Information Sciences'de 2017'deki "An Equivalence relation based on U -partial order" çalışmasında, U - kısmen sıralama ile üretilen uninormların sınıfı üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanmış ve özellikleri tartışılmıştır. U - kısmen sıralamaya göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi, ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Ayrıca, tek bir elemanla kıyaslanamayan elemanların kümesi tanımlanarak ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Ertuğrul, Kesicioğlu ve Karaçal 2019'daki "Some notes on the partial orders induced by a uninorm and a nullnorm in a bounded lattice" adlı çalışmalarında sınırlı bir kafes üzerinde bir uninormun elde etme yöntemlerini ortaya koymuşlardır.

Bu çalışmada uninorm ve nullnormların genelleştirilmiş hali olan uni-nullnormlardan üretilen bir sıralama bağıntısının tanımı ve cebirsel yapısı incelenmiştir. Uni-nullnormlardan elde edilen sıralamanın doğal sıralama ile ilişkisi gösterilmiştir. Daha sonra bir t-norm ve bu t-normun φ -eşleniğinden kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları incelenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar Journal of Intelligent & Fuzzy Systems isimli dergide “Ordering based on uni-nullnorms” [22] başlığıyla yayımlanmıştır.



4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Sınırlı bir kafes üzerinde bir uni-nullnormdan üretilen $\leq_F$ notasyonu ile gösterilen bir sıralama bağıntısı tanımlandı ve bu sıralamanın cebirsel yapısı incelendi.
2. Uni-nullnormlardan elde edilen sıralamanın doğal sıralama ile ilişkisi incelendi.
3. Bir t-norm ve onun N -dual t-konormundan elde edilen sıralamalar ve bu sıralamaların cebirsel yapıları incelendi.
4. Bir t-norm ve onun φ -eşleniğinden elde edilen sıralamalardan elde edilen kısmen sıralı kümelerin cebirsel yapıları incelendi.

5. ÖNERİLER

1. Uni-nullnormlardan elde edilen sıralamalar kullanılarak bir denklik bağıntısı tanımlanabilir ve bu bağıntıya göre uni-nullnormlardan denklik sınıfları araştırılabilir.
2. Kıyaslanamaz elemanların kümesi detaylı olarak incelenebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M.N. ve Karaçal, F. (2016). Ordering based on uninorms. *Information Sciences*, 315-327. DOI: 10.1016/j.ins.2015.10.019
- [2] Kesicioğlu, M.N. (2018). Some notes on the partial orders induced by a uninorm and a nullnorm in a bounded lattice. *Fuzzy Sets and Systems*, 55-71. DOI:10.1016/j.fss.2017.08.010
- [3] Kesicioğlu, M.N., Ertuğrul, Ü. ve Karaçal, F. (2017). An equivalence relation based on the U- partial order. *Information Sciences*, 39-51. DOI: 10.1016/j.ins.2017.05.020
- [4] Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*, 3 rd edition, Providence, Island.
- [5] Kesicioğlu, M.N. (2020). On the relationships between the orders induce by uninorms and nullnorms, *Fuzzy Sets and Systems*, 23-47. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.12.020>.
- [6] Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E. (2000). *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. DOI: 10.1016/S0165-0114(01)00093-8.
- [7] Karaçal, F. ve Kesicioğlu, M.N. (2011). A T- partial order obtained from t-norms. *Kybernetika*, 300-314. DOI: Classification : 03E72, 03B52.
- [8] Ma, Z. and Wu, W.M. (1991). Logical operators on complete lattices. *Information Sciences*, 77-97. DOI: 10.1016/0020-0255(91)90007-H.
- [9] Karaçal, F. ve Mesiar, R. (2015). Uninorms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 33-43. DOI: 10.1016/j.fss.2014.05.001.
- [10] Karaçal, F. ve Khadjiev, Dj., $\vee$ - distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattice, *Fuzzy Sets and Systems*, 151 (2005) 341-352.

[11] Kesicioğlu, M.N., Karaçal, F. ve Mesiar, R. (2015). Order- equivalent triangular norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 59-71. DOI: 10.1016/j.fss.2014.10.006.

[12] Baczyński, M. and Jayaram, B. (2008). Fuzzy implications. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 231, Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-540-69082-5_5 ISBN: 987-3-540-69080-1.

[13] Karaçal, F., İnce, M.A. ve Mesiar, R. (2015). Nullnorms on bounded lattices. *Information Sciences*, 227-236. DOI:/10.1016/j.ins.2015.06.052.

[14] Wang, Y.-M., Zhan, H. ve Liu, H.-W., (2020). Uni-nullnorms on bounded lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 132-144. DOI:10.1016/j.fss.2019.01.001.

[15] De Baets, B., Mesiar, R., (1999). Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 61-75.

[16] Aşıcı, E., Amiri-Bideshki, M., Hoskova-Mayerova, S., Saeid, A. B., (2017). Distributive Elements in Hyperlattices. *An. Stiint. Univ. 'Ovidius' Constanta Ser. Mat.*, 25-36.

[17] Yager, R., Rybalov, A., (1996). Uninorm aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 111-120.

[18] Yager, R., Kreinovich, V., (2003). Universal approximation theorem for uninorm-based fuzzy systems modeling, *Fuzzy Sets and Systems*, 331-339. DOI:10.1016/S0165-0114(02)00521-3.

[19] Mas, M., Mayor, G., Torrents, J., (1999). t-operators, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 31-50.

[20] Karaçal, F., (2006). On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices, *Information Sciences*, 3011-3025.

DOI:10.1016/j.ins.2005.12.010.

[21] Jayaram, B., (2016). A new ordering based on fuzzy implications, *Proceedings of ISAS*, 49-50.

[22] Kesicioğlu, M. N., Şamlı, E., (2020). Ordering based on uni-nullnorms, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 1-19. DOI: 10.3233/JIFS-191583

[23] Kesicioğlu, M. N., Coğalmış, F., (2019). On orders induced by implications, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 127-14. DOI: 10.22111/IJFS.2019.5024.

