

**ÜNİFORM SICAKLIK DAĞILIMI VE BASINÇ ETKİSİNDE
DÖNEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
ŞAFT İÇİN GERİLME ANALİZİ**

Nihat ÖZKAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Kasım 2005

ANKARA

Nihat ÖZKAN tarafından hazırlanan ÜNİFORM SICAKLIK DAĞILIMI VE BASINÇ ETKİSİNDE DÖNEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞAFT İÇİN GERİLME ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Levend PARNAS

Üye : Prof. Dr. Bedri TUÇ

Üye : Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ

Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

**ÜNİFORM SICAKLIK DAĞILIMI VE BASINÇ ETKİSİNDE
DÖNEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
ŞAFT İÇİN GERİLME ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Nihat ÖZKAN

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Kasım 2005**

ÖZET

Bu çalışmada üniform sıcaklık ve basınç altında, sabit bir hızla dönen FGM şaftta üzerinde oluşan gerilme bileşenleri, genlemeler ve radyal deplasman; denge denklemi, uygunluk denklemi ve Hooke Kanunu denklemleri kullanılarak, yarı analitik yarı nümerik olarak çözülmüştür. Bu çözümde, malzeme özelliklerinin dağılımı yarıçapa bağlı olarak, eksponesiyel fonksiyonlar ile ifade edilmiştir. Şaft malzemesini oluşturan iki farklı malzemenin özelliklerine ve karışım oranlarına bağlı olarak değişim gösteren elastik modülüs, ısıl genleşme katsayısı ve özgül ağırlığın gerilme bileşenleri, genleme ve radyal deplasman üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 944
Anahtar Kelimeler : Elastisite, FGM malzeme, Gerilme analizi, Şaft
Sayfa Adedi : 75
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ

**STRESS ANALYSIS FOR A FUNCTIONALLY GRADED
MATERIAL SHAFT UNDER THE UNIFORM TEMPERATURE
AND THE EFFECT OF PRESSURE
(M.Sc. Thesis)**

Nihat ÖZKAN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
November 2005**

ABSTRACT

In this study, stresses, strains and radial displacement taking place on a FGM shaft rotating with a constant speed under the uniform temperature and the effect of pressure are solved using equilibrium equation, compatibility equation and Hooke equations as semi analytically and semi numerically. In this paper, the distribution of material properties are expressed with exponential functions depending on radius. While homogeneous part of the differential equation yielding the solution can be solved analytically, on the other side particular solution is evaluated numerically due to the integrations required by the solution. The effects of the elastic modulus, thermal expansion coefficient and specific weight distributions on the stress, strain and radial displacement in the shaft are studied.

Science Code : 944

Key Words : Elasticity, FGM Material, Stress analysis, Rotating shaft

Page Number: 75

Adviser : Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ

TEŞEKKÜR

Master programı boyunca bilgi ve tecrübelerini paylaşarak yardım ve katkılarını esirgemeyen değerli Hocam Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ'e, tezimi sunma aşamasında danışmanlık görevini üstlenerek, destek sağlayan değerli Hocam Yrd. Doç. Dr. Selim TÜRKBAS'a, tez konumu belirleme aşamasında vermiş olduğu fikirlerle katkıda bulunan Doç. Dr. Ahmet ERASLAN'a, derslerinde bilgilerini bizlerle paylaşan Hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Laboratuvar olanağı sağlayan Orta Doğu Teknik Üniversitesi'ne ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÜNİFORM SICAKLIK DAĞILIMI VE BASINÇ ETKİSİNDE DÖNEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞAFT İÇİN GERİLME ANALİZİ.....	6
2.1. Uçları Sabit Dönen Şaft İçin Gerilme Analizi.....	6
2.2. Uçları Serbest Dönen Şaft İçin Gerilme Analizi.....	33
3. FGM ŞAFTTA SICAKLIK, BASINÇ, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ PARAMETRELERİNİN GERİLMELER VE DEPLASMANA ETKİSİ.....	41
3.1. Uçları Sabit Dönen FGM Şaftta Sıcaklık, Basınç, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ Parametrelerinin Gerilmeler ve Deplasmana Etkisi.....	41
3.2. Uçları Serbest Dönen FGM Şaftta Sıcaklık, Basınç, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ Parametrelerinin Gerilmeler ve Deplasmana Etkisi.....	61
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	75

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Değişik sıcaklıklarda oluşan aksenal kuvvetler	48
Çizelge 3.2. $\bar{a} = -0,1$ için değişik sıcaklıklarda oluşan aksenal kuvvet.....	48
Çizelge 3.3. Değişik basınçlarda oluşan aksenal kuvvetler	51
Çizelge 3.4. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinde oluşan aksenal kuvvetler.....	54
Çizelge 3.5. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinde oluşan aksenal kuvvetler	57
Çizelge 3.6. Değişik $\bar{a}$ değerlerinde oluşan aksenal kuvvetler	60
Çizelge 3.7. $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin sabit uçlu şaftın hızına etkisi	61
Çizelge 3.8. $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin serbest uçlu şaftın hızına etkisi	70

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Metal-seramik karışım oranlarının yarıçapa göre değişimi	1
Şekil 2.1. $U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, r, \bar{\beta})$ fonksiyonu grafiği	21
Şekil 2.2. $L^2_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}(r, \bar{\beta})$ fonksiyonu grafiği.....	21
Şekil 2.3. $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z$ gerilmeleri ile $\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\theta$ genlemeleri ve $\bar{u}$ deplasmanının grafiği.....	30
Şekil 2.4. Uçları sabit üniform şaftta gerilmeler, genlemeler ve $\bar{u}$ deplasmanı	31
Şekil 2.5. Uçları sabit üniform şaftta değişik sıcaklıklarda gerilmeler ve $\bar{u}$ deplasmanı	32
Şekil 2.6. Uçları serbest üniform şaftta gerilmeler, genlemeler ve $\bar{u}$ deplasmanı	38
Şekil 2.7. Uçları serbest üniform şaftta gerilmeler ve $\bar{u}$ deplasmanı	39
Şekil 2.8. Uçları serbest üniform şaftta değişik sıcaklıklarda gerilmeler ve $\bar{u}$ deplasmanı	40
Şekil 3.1. Değişik sıcaklık değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi	44
Şekil 3.2. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_r$ 'a etkisi.....	44
Şekil 3.3. Değişik sıcaklık değerlerinin açısıl gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi.....	45
Şekil 3.4. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_\theta$ 'a etkisi	45
Şekil 3.5. Değişik sıcaklık değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	46
Şekil 3.6. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_z$ 'a etkisi.....	46
Şekil 3.7. Değişik sıcaklık değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi.....	47
Şekil 3.8. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{u}$ 'a etkisi	47

Şekil	Sayfa
Şekil 3.9. Değişik basınç değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi	49
Şekil 3.10. Değişik basınç değerlerinin açısıl gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi	50
Şekil 3.11. Değişik basınç değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	50
Şekil 3.12. Değişik basınç değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	51
Şekil 3.13. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi	52
Şekil 3.14. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin teğet gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi	53
Şekil 3.15. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	53
Şekil 3.16. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	54
Şekil 3.17. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi	55
Şekil 3.18. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin teğet gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi	56
Şekil 3.19. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	56
Şekil 3.20. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	57
Şekil 3.21. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi	58
Şekil 3.22. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin teğet gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi	59
Şekil 3.23. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	59
Şekil 3.24. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	60
Şekil 3.25. Değişik sıcaklık değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	64
Şekil 3.26. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_z$ 'a etkisi	64
Şekil 3.27. Değişik sıcaklık değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	65

Şekil	Sayfa
Şekil 3.28. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{u}$ 'a etkisi	65
Şekil 3.29. Değişik basınç değerlerinin aksenal gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	66
Şekil 3.30. Değişik basınç değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	66
Şekil 3.31. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin aksenal gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	67
Şekil 3.32. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	67
Şekil 3.33. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin aksenal gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	68
Şekil 3.34. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	68
Şekil 3.35. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin aksenal gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi	69
Şekil 3.36. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
b	Şaft yarıçapı
E	Elastisite modülü $E = E_0 e^{\beta r}$
α	Isıl genleşme katsayısı $\alpha = \alpha_0 e^{a r}$
ρ	Kütle yoğunluğu $\rho = \rho_0 e^{\gamma r}$
$\bar{T}$	Boyutsuz Sıcaklık $\bar{T} = \frac{T \alpha_0 E_0}{\sigma_0}$
$\bar{P}$	Boyutsuz Basınç $\bar{P} = \frac{P}{\sigma_0}$
σ_0	Şaft malzemesinin akma dayanımını
E_0	Elastik Modülüs sabit katsayısı
α_0	Isıl Genleşme Katsayısı sabit katsayısı
ρ_0	Özgül Ağırlık sabit katsayısı
β	Elastik Modülüse ait taban fonksiyonun üst katsayısı
a	Isıl Genleşme Katsayısına ait taban fonksiyonun üst katsayısı
γ	Özgül Ağırlığa Katsayısına ait taban fonksiyonun üst katsayısı
u	Radyal deplasman
$\bar{\sigma}_r$	Boyutsuz Radyal Gerilme Bileşeni $\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}$
$\bar{\sigma}_\theta$	Boyutsuz Teğetsel Gerilme Bileşeni $\bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}$
$\bar{\sigma}_z$	Boyutsuz Eksenel Gerilme Bileşeni $\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_0}$

Simgeler**Açıklama** $\bar{\varepsilon}_r$

Normalize Edilmiş Radyal Genleme Bileşeni $\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \frac{E_0}{\sigma_0}$

 $\bar{\varepsilon}_\theta$

Normalize Edilmiş Teğetsel Genleme Bileşeni $\bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta \frac{E_0}{\sigma_0}$

 $\bar{\varepsilon}_z$

Normalize Edilmiş Eksenel Genleme Bileşeni $\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z \frac{E_0}{\sigma_0}$

 ν

Poisson oranı

 ω

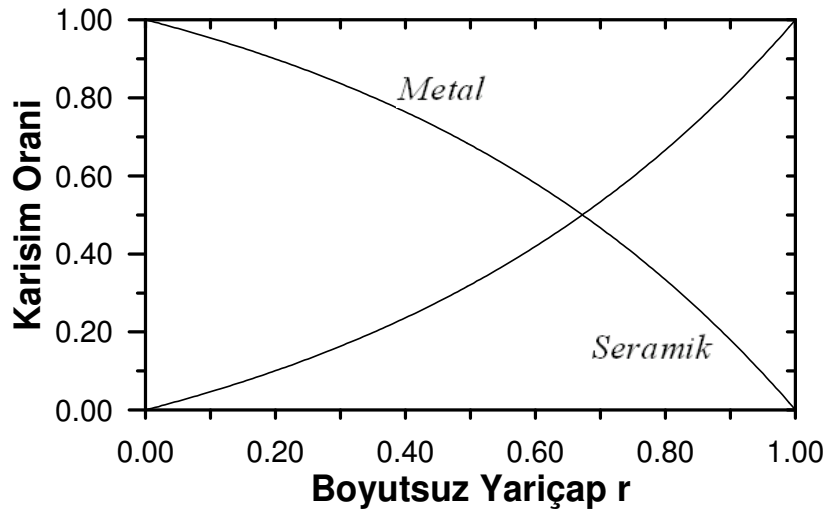
Açısal hız $\bar{\Omega} = \frac{b^2 \rho_0 \omega^2}{\sigma_0}$

Kısaltmalar**Açıklama****FGM**

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme

1. GİRİŞ

Günümüzde kısaca FGM olarak adlandırılan Fonksiyonel Derecelendirilmiş malzemeler (Functionally Gradient/Graded Materials) oldukça ilgi gören bir konu haline gelmiş ve bu konu ile ilgili araştırma ve geliştirme çabaları halen devam etmektedir. Bir tür kompozit malzeme olarak kabul edebileceğimiz FGM temel olarak, uygulanan makine elemanına mekanik destek sağlayacak bir metal malzeme ile bu elemanın sıcaklığa karşı direnç göstermesini sağlayacak bir seramik malzemenin birbirleri ile belli yönde, Şekil 1.1’de görüldüğü gibi sürekli ve düzenli bir şekilde değişim gösteren oranlarda karışımından oluşmaktadır (1-3). Sıcaklığa karşı gösterdiği dayanımın yanında seramik malzemeler ayrıca ısı izolasyonu, aşınmaya karşı direnç, yüzey sertliğinde de üstün özellikler taşımaktadırlar. Bu yolla bir malzemede metaller ile seramiklerin istenen avantajlı özellikleri bir araya getirilmiş olmaktadır (4). Düzenli olarak iki malzemenin bir doğrultu boyunca karışım oranlarındaki değişim iki farklı özelliklere sahip malzemenin daha kolay uyuşmasını sağlamakta ve malzemede herhangi bir etki karşısında metalin ve seramiğin ayrışmasına, malzemelerin bütünlüğünün bozulmasına izin verilmemektedir (5).



Şekil 1.1. Metal-seramik karışım oranlarının yarıçapa göre değişimi

FGM ilk olarak 1980’li yılların ortalarında araştırmacılar tarafından ortaya atılmış ve o zamanlardan bu zamana kadar bu konudaki gelişmeler sürekli devam etmiş ve

kullanım alanları artmıştır (6). Kavram olarak Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FGM) ilk olarak 1984 yılında malzeme bilimcileri tarafından Japonya’da ısı bariyer malzemesi üretmek için önerilmiştir. Bu tür bir malzemenin, içersindeki karışımın, mikro yapının ve gözenekli yapının sürekli değişimi (malzeme içersinde), malzemede mekanik mukavemet ve termal kondaktivitenin de değişim göstermesine neden olmaktadır. Birkaç yıl sonra, 1987 yılında Japonya’da “Isıl Gerilmelerin Azaltılması için Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Gelişimi için Temel Teknolojide Araştırma” başlığı altında ulusal bir proje başlatılmış olup, ısı gerilmelerin azaltılması yönünde FGM tasarımı konusu süreç kazanmıştır. Bu projenin amacı gelecekteki uzay programları için ısıya karşı dayanıklı malzemeler geliştirmektir. Düşünce olarak FGM’in önerilmesi yüksek sıcaklığın olduğu tarafta seramik, düşük sıcaklığın olduğu tarafta termal kondaktivitesi yüksek metalin kullanıldığı seramik taraftan metale ya da metal taraftan seramiğe doğru karışım oranının sürekli değişim gösterdiği bir kompozit malzeme oluşturmaktadır. Bu tür bir karışımdan dolayı mikro yapıdaki sürekli değişim, FGM malzemeleri diğer klasik kompozit malzemelerden ayıran bir özelliktir. Sadece ısıya dayanıklı refraktör malzeme tasarımı için değil, FGM diğer fonksiyonel malzemelerin geliştirilmesinde de ele alınmaktadır. Örneğin optik ve elektronik malzemeler bunlar arasında sayılabilir. Bu amaçla 1993 yılında, Japonya’da ikinci ulusal proje olarak da anılan “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler ile Enerji Çevrim Malzemeleri Üzerinde Araştırma” adı altında bir çalışma başlatılmıştır. Bu program, FGM malzemelerin enerji çevriminde verimi artırması amaçlanmıştır (7). FGM malzemenin en genel olarak kullanım alanları uzay araçları, havacılık, enerji bilimi, diğer teknolojik ve endüstriyel alanlar oluşturmaktadır (8). FGM malzemelerin uzay araçlarında kullanım nedeni bu araçların gövdesinde kullanılacak malzemelerin çok yüksek sıcaklıklara, ayrıca aracın içi ve dışı arasında oluşan çok yüksek sıcaklık farklarına dayanım göstermeleridir (9). Oluşan sıcaklık farkı malzeme üzerinde oluşacak ısı gerilmelerin kaynağıdır. FGM malzemenin oynadığı en önemli rol, kullanılmış oldukları yerde büyük sıcaklık farklarından dolayı oluşan ısı gerilmelerin azaltılmasıdır (10-11). Aynı şekilde bu ihtiyaç hava araçlarında da görülmüştür. FGM malzemelerin geliştirilmesi gaz türbünlerinden daha yüksek bir performans elde edilebilmesi için son derece önemlidir. Çok yüksek sıcaklıklarda ve hızlarda

dönen parçaların ısı izolasyon mekanizmasının sağlanması, oluşan aşırı ısı gerilmelerin azaltılmasında FGM malzemelerden faydalanılabilmektedir (12). Nükleer santraller ve nükleer teknolojinin kullanıldığı yerler de FGM malzemelerden üretilmiş parçaların kullanılabileceği alanlar içindedir (13). Oksitlenmenin önlenmesi amacı ile yüzeylerin ince FGM tabakası ile kaplanarak kolay oksitlenen malzemelerin korunması sağlanabilmektedir (14). Güneş enerjisi dönüşümünde teknolojik olarak FGM kullanılabilmektedir (15). Roket motorlarının tekrar kullanılabilmesi için FGM'ler ısı bariyer olarak kullanılabilmektedir (16).

Literatürde izotropik özelliğe sahip, üniform malzemelerden yapılmış, dönen şaftlar üzerinde dönmenin etkisi ile oluşan elastik-plastik gerilmeler, genlemeler ve deplasmanların dağılımı ile ilgili çalışmalar bulunmaktadır. Gamer, Mack ve Varga (17) yapmış oldukları çalışmada sabit uçlu, dönen elastik-mükemmel plastik şaftta oluşan gerilme, deplasman ve plastik genlemelerin dağılımı veren çözümü Tresca şartı ve yardımcı akma kuralını dikkate alarak (dört farklı plastik bölge için) sunmuşlardır. Eraslan (18), Gamer, Mack ve Varga'nın yapmış olduğunu bu çalışmada, lineer sertleşme gösteren bir malzemeden yapılan bir solid şaftı ele alarak geliştirmiştir. Bu çalışmada Eraslan sabit uçlu şaft için Tresca şartını ve yardımcı akma kuralını dikkate alarak dört farklı elastik-plastik bölge için çözüm elde etmiştir. Aynı çalışmada serbest uçlu şaft için de çözüm yapan Eraslan, bu durumda sabit uçlu şaftan farklı olarak son iki plastik bölgenin oluşmadığını göstermiştir. Eraslan'dan önce Mack (19) elastik ve ideal plastik, uçları serbest, dönen bir şaft için çalışmasını sunmuştur. Eraslan (20) daha sonraki bir çalışmada Von Mises akma şartını dikkate alarak lineer olmayan pekleşme özelliği gösteren içi dolu ve boş olan sabit ve serbest uçlu dönen bir şaft için gerilme dağılımını veren bir nümerik çözüm metodu geliştirmiştir. Pekleşme için Swift sertleşme yasası kullanılmıştır. Bu sertleşme yasası ile ideal plastik, doğrusal ve doğrusal olmayan sertleşme ifade edilebilmektedir ve dolayısı ile sadece doğrusal olmayan sertleşme için değil hem ideal plastik hem de lineer plastik durumlar için de çözüm elde edilebilmektedir.

Şaftlar gibi disk, içi boş silindirler de silindirik koordinatlara uygun geometrilere sahip olduklarından benzer problemlere konu olmaktadır. Değişik şartlar, sınır

koşulları, yarıçapa bağlı olarak değişen kalınlıklar, farklı sertleşme biçimleri ele alındığında diskler üzerine çok farklı çalışmalar ortaya konmuştur. Makine Mühendisliğinde kullanılan birçok elemana benzerlikleri disklerin fazlaca incelenmesine neden olmaktadır. Eraslan (21), lineer olmayan sertleşme özelliğine sahip, üslü ve eksponensiyel fonksiyonlara bağlı olarak profilleri değişen anuler diskler için Von Mises akma kriterini dikkate alarak, elastik olmayan gerilmeleri ve deformasyonları nümerik olarak hesaplamıştır. Orcan ve Eraslan (22), üslü fonksiyona bağlı olarak kalınlığı değişen, elastik plastik solid disk için Tresca akma kriteri, yardımcı akma ve lineer sertleşme kuralına dayalı olarak gerilme, deplasman ve plastik deplasman dağılımları çözmüş ve elde edilen sonuçları literatürde sabit kalınlıktaki disk için elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Yine Eraslan ve Orcan (23), Tresca akma kriterini dikkate alarak, yardımcı akma kuralı ve lineer sertleşme kullanılarak, kalınlığı eksponensiyel olarak değişen bir solid disk için elastoplastik deformasyon üzerinde çalışmışlardır. Tekrar Eraslan ve Orcan (24), yapmış oldukları çalışmada, konkav profile sahip anuler disklerin dönmesi nedeni ile oluşan elastik-plastik gerilme dağılımını veren analitik bir çözüm sunmuşlardır. Çözüm, Tresca akma kriteri, yardımcı akma kuralı ve malzemenin lineer sertleşme özelliği üzerine dayandırılmıştır. Eraslan ve Argeso (25) üslü fonksiyona bağlı olarak kalınlıkları değişen disklerin elastik ve plastik sınır hızlarını hesaplamışlardır. Eraslan (26) kalınlıkları parabolik formda değişen, anuler diskler için Tresca akma kriterini dikkate alarak dönme nedeni ile oluşan gerilme dağılımını veren bir çözüm bulmuştur. Bu konuda fazla çalışması bulunan Eraslan (27), bu sefer Tresca akma kriterine, yardımcı akma kuralına ve lineer sertleşmeye dayalı olarak parabolik profilli diskler için çözümler elde etmiştir. Eraslan, Orcan ve Güven (28), Von Mises akma kriterini, Swift sertleşme yasasını temel alan, profili parabolik fonksiyon formunda, dıştan basınç altında olan anuler disklerin elastoplastik analizi Newton iterasyonu kullanılarak nümerik olarak yapılmıştır. Güven ve Altay (29), lineer sertleşme özelliğine sahip, üniform ısı kaynaklı, radyal deplasmanı yüzeyde sınırlandırılmış disk üzerinde oluşan termal gerilmeleri bulmuşlardır.

Mack (30), elastik-ideal plastik, serbest uçlu dönen içi boş silindir için gerilme ve deplasman dağılımları için çalışmıştır. Gülgeç ve Orcan (31) sabit uçlu, üniform ısı

üreten bir tüp için akma dayanımının sıcaklığa bağlı olduğu elastik ve plastik gerilme, deplasman ve plastik genleme dağılımını veren, Tresca akma kriterini ve yardımcı akma kuralını temel alan analitik bir çözüm yapmışlardır. Yine Gülgeç ve Orcan (32) aynı çalışmayı serbest uçlu tüp için de yapmışlardır. Eraslan, Sener ve Argeso (33), enerji ürettikleri için termal olarak indüklenen iki katmanlı, içten serbest ve dıştan sınırlandırılmış kompozit tüpler için analitik çözüm elde etmişlerdir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş bir malzemeden oluşan, dönme hareketi yapan bir şaft için herhangi bir çalışmaya literatürde şu ana kadar rastlanılmamıştır. Bu çalışmada ise sıcaklığın etkisinde, sabit bir basınç altında, sabit bir hızla dönme hareketi yapan bir şaft için elastik sınırlar içerisinde oluşan gerilmelerin formülize edilmesi amaçlanmaktadır.

Problemde yarıçapı b olan yeterince uzun bir şaft ele alınmıştır. Şaftın eksenel simetrik özelliğe sahip olduğu ve z doğrultusu boyunca değişiklik olmadığı kabul edilmektedir.

2. ÜNİFORM SICAKLIK DAĞILIMI VE BASINÇ ETKİSİNDE DÖNEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞAFT İÇİN GERİLME ANALİZİ

2.1. Uçları Sabit Dönen Şaft İçin Gerilme Analizi

Eksenel simetriye sahip dönen bir şaft için denge denklemi;

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad [2.1]$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede σ_r radyal gerilmeyi, σ_θ teğetsel gerilmeyi, ρ yoğunluğu, ω açısal hızı göstermektedir.

Elastik Genlemeler ile Gerilme Bileşenleri arasında Hooke Kanunları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \quad [2.2]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \quad [2.3]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T \quad [2.4]$$

Bu ifadelerde ε_r radyal genleme, ε_θ teğetsel genleme, ε_z eksenel genleme, ν Poisson oranı, α ise lineer ısı genleşme katsayısıdır.

Eksenel simetri durumu için Genlemeler arasındaki ilişkiyi veren uygunluk denklemi

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \quad [2.5]$$

şeklinde yazılabilir.

Genlemeler uygunluk (Compatibility) denkleminde yerine konularak σ_r gerilmesi cinsinden diferansiyel denklem elde edilebilir. σ_r 'ın çözümünden sonra σ_θ ve σ_z elde edilebilir.

Şaftın uçlarının sabit olduğu kabul edilmesi durumunda $\varepsilon_z = 0$ olmakta ve problem düzlem genleme problemine dönüşmektedir. Bu durumda elde edilecek denklem aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} (1-\nu)Er^2 \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} - \left[E\nu(1+\nu)r - E(1-\nu^2)r + \frac{dE}{dr}(1-\nu^2)r^2 - E(1-\nu^2)r + E\nu(1+\nu)r \right] \frac{d\sigma_r}{dr} \\ - \left[E(1-\nu^2) + E\nu(1+\nu) - \frac{dE}{dr}\nu(1+\nu)r \right] \sigma_r + E\nu(1+\nu)\rho\omega^2 r^2 - E(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^2 \\ - \frac{dE}{dr}(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^3 + 2E(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^2 - E(1-\nu^2)\frac{d\rho}{dr}\omega r^3 + rE^2 \frac{d(\alpha T)}{dr} = 0 \end{aligned} \quad [2.6]$$

Şaftın uçları serbest olması durumunda yeterince uzun bir shaft için ε_z değerinin sabit olduğu kabul edilmektedir. Bu durumda problem genelleştirilmiş düzlem genlemesi problemine dönüşmektedir. Ancak ν (Poisson oranının) sabit kabul edilmesinden dolayı elde edilen denklem, yukarıdaki denklemden farklı bir sonuç ortaya çıkarmamaktadır.

Bu çalışmada Elastisite Modülü E , bu çalışmada r 'ye bağlı bir fonksiyon ile ifade edilecektir. ρ (özgül ağırlık) ve α (ısı genleşme katsayısı) da E 'ye benzer şekilde

bir fonksiyonlarla ifade edilecektir. T (sıcaklık) ise Poisson oranı gibi sabit bir değer kabul edilecektir.

Yukarıdaki denklem değişim gösteren parametreler için uygun fonksiyonel ifadeler yazıldıktan sonra normalize edilen parametrelerle birlikte daha sade forma getirilerek ele alınabilir.

Bu problemde kullanılacak olan eşitliklere (denge denklemi, elastik denklemleri ve uygunluk denklemi) ve homojen, izotropik bir şaft için yapılan çözüme kısaca değinilmişti. Problemin çözümünde gerilme formülasyonu kullanılmamış olup elde edilen diferansiyel denklemin çözümü sonunda σ_r elde edilebilecektir.

Denge denklemi olarak bilinen Eş. 2.1'den σ_θ gerilmesi, σ_r cinsinden elde edilebilir. Burada σ_θ 'nın tercih edilmesinin sebebi, σ_θ bilinmeyeninin σ_r gibi diferansiyel içermemesidir. Dolayısı ile σ_θ eşitliğin bir tarafına tek başına çekilebilmekte ve aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2 \quad [2.7]$$

Bu bölümde uçları sabit olan (rijit yataklarla desteklenmiş), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş (homojen olmayan), sabit bir hızla dönen, b yarıçaplı bir şaft ele alınmıştır. Şaftın uçlarının rijit olarak sabitlenmiş olması, z yönündeki genlemenin (ε_z) sıfır olması anlamına gelmektedir. Bu şart 1.4 denkleminde kullanılıp, bu ifade σ_z için çözülürse

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) - T \alpha E \quad [2.8]$$

denklemini elde edilir.

Elde edilen bu denklem Eş.2.2 ve 2.3'de σ_z yerine yazılır ise ε_r ve ε_θ için sadece σ_r ve σ_θ 'nın içerilmiş olduğu yeni denklemler bulunur. Yukarıda Eş. 2.7'de σ_θ , σ_r cinsinden elde edildiğine göre, ε_r ve ε_θ da sadece σ_r cinsinden yazılabilir.

Eş. 2. 2'de ε_r ' a karşılık gelen matematiksel ifadede σ_z yerine yazıldığında;

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \sigma_\theta \right] + (1+\nu) \alpha T \quad [2.9]$$

eşitliği bulunur.

Aynı işlem ε_θ için yapıldığında;

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_\theta - \nu(1+\nu) \sigma_r \right] + (1+\nu) \alpha T \quad [2.10]$$

elde edilir.

Eş. 2.9 ve 2.10'deki denklemlerde σ_θ yerine yazılır ise aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[-\nu(1+\nu) r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \rho \omega^2 r^2 \right] + (1+\nu) \alpha T \quad [2.11]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_r + (1-\nu^2) \rho \omega^2 r^2 \right] + (1+\nu) \alpha T \quad [2.11]$$

Bundan sonraki adım, elde edilen bu genlemeleri Eş. 2.5'de gösterilen uygunluk denkleminde yerine yerleştirmektir. Fakat, bundan önce uygunluk denkleminde de görüldüğü gibi ε_θ 'nın r 'ye göre türevinin alınması gerekir.

Eş. 2.12 ile gösterilen denklemin her iki tarafının türevi alınarak ε_θ 'nın r 'ye göre türevi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} &= \frac{(1-\nu^2)}{E} r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left[-\frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) r + \frac{(2-\nu-3\nu^2)}{E} \right] \frac{d\sigma_r}{dr} \\ &- \frac{E'}{E^2} (1-\nu-2\nu^2) \sigma_r - \frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) \rho \omega^2 r^2 + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{d\rho}{dr} \omega^2 r^2 \\ &+ 2 \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \omega^2 r + (1+\nu) T \frac{d\alpha}{dr} \end{aligned} \quad [2.13]$$

Daha sonra uygunluk denkleminde yerine konulmadan önce eşitliğin her iki tarafı r ile çarpılırsa; aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} &= \frac{(1-\nu^2)}{E} r^2 \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left[-\frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) r^2 + \frac{(2-\nu-3\nu^2)}{E} r \right] \frac{d\sigma_r}{dr} \\ &- \frac{E'}{E^2} (1-\nu-2\nu^2) r \sigma_r - \frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) \rho \omega^2 r^3 + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{d\rho}{dr} \omega^2 r^3 \\ &+ 2 \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \omega^2 r^2 + (1+\nu) T r \frac{d\alpha}{dr} \end{aligned} \quad [2.14]$$

Yukarıdaki eşitlikler çözümü σ_r 'ı verecek olan diferansiyel denklemi elde etmek için uygunluk denkleminde (Eş. 2.5'de) aşağıdaki gibi yerine konur.

$$\left\{ \frac{1}{E} \left[-\nu(1+\nu) r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \rho \omega^2 r^2 \right] + (1+\nu) \alpha T \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_r + (1-\nu^2) \rho \omega^2 r^2 \right] + (1+\nu) \alpha T \right\} \\
& - \left\{ \frac{(1-\nu^2)}{E} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left[-\frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) r^2 + \frac{(2-\nu-3\nu^2)}{E} r \right] \frac{d\sigma_r}{dr} \right. \\
& - \frac{E'}{E^2} (1-\nu-2\nu^2) r \sigma_r - \frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) \rho \omega^2 r^3 + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{d\rho}{dr} \omega^2 r^3 \\
& \left. + 2 \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \omega^2 r^2 + (1+\nu) Tr \frac{d\alpha}{dr} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Elde edilen bu denklem üzerinde bazı terimler üzerinde sadeleştirmeye gidildiğinde denklem aşağıdaki gibi biraz daha kısa bir hale gelecektir.

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1-\nu^2)}{E} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left[\frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) r^2 - \frac{3(1-\nu^2)}{E} r \right] \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{E'}{E^2} (1-\nu-2\nu^2) r \sigma_r \\
& - \frac{(1+\nu)}{E} \rho \omega^2 r^2 + \frac{E'}{E^2} (1-\nu^2) \rho \omega^2 r^3 - \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{d\rho}{dr} \omega^2 r^3 - 2 \frac{(1-\nu^2)}{E} \rho \omega^2 r^2 \\
& - (1+\nu) Tr \frac{d\alpha}{dr} = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri, seramik ve metal malzemenin karışım oranlarının değişimine bağlı olarak, belirlenmiş olan bir eksen boyunca bir fonksiyona göre değişim gösterecek şekilde olabilmektedir. FGM (fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme) ismini de buradan almaktadır. Genleme ifadeleri tek bir gerilmeye (σ_r) bağlı olarak bulunup uygunluk denkleminde yerlerine konularak, gerilme değerini (σ_r) verecek olan diferansiyel denklem bulunduktan sonra

Elastisite Modülü (E), Isıl Genleşme Katsayısı (α) ve özgül ağırlık (ρ) için uygun fonksiyonel ifadelerin seçilmesine (belirlenmesine) ihtiyaç vardır. Elastisite Modülü, Isıl Genleşme Katsayısı ve Özgül ağırlığın iki farklı malzemenin yarıçap boyunca, eksenel olarak değişen oranlarda karışımlarının söz konusu olması nedeni ile yarıçap boyunca değişim göstermeleri beklenmektedir. Bu çalışmada değişimin her üç parametre için de aşağıdaki gibi taban fonksiyonu ile değiştiği varsayılmıştır.

$$E = E_0 e^{\beta r}, \alpha = \alpha_0 e^{a r}, \rho = \rho_0 e^{\gamma r}$$

Burada çözüm kolaylığı sağlamasına rağmen herhangi bir üslü fonksiyon yerine, r^α gibi, taban fonksiyonu tercih edilmiştir. Bunun nedeni gerilme analizi yapılacak olan dönen shaftın içinin boş olmaması nedeni ile malzeme özelliklerinin shaftın merkezinde ($r = 0$ iken) sıfır değerini almamaları içindir.

Bu çalışmada ayrıca problemin önemli parametreleri olan ortam sıcaklığı (T) ve Poisson oranı (ν) sabit olarak kabul edilecektir.

Elastisite Modülü (E), Isıl Genleşme Katsayısı (α) ve Özgül Ağırlık (ρ) için kabul edilen ifadeleri yukarıda elde edilmiş olan diferansiyel denkleme götürülerek yerlerine konulduklarında matematiksel çözüm yapılmaya hazır hale gelmiş olan σ_r cinsinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{(1-\nu^2)}{E_0} e^{-\beta r} r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left[\frac{\beta(1-\nu^2)}{E_0} r^2 - \frac{3(1-\nu^2)}{E_0} r \right] e^{-\beta r} \frac{d\sigma_r}{dr} \\ & + \frac{\beta}{E_0} (1-\nu-2\nu^2) e^{-\beta r} r \sigma_r - \frac{(1+\nu)}{E_0} \rho_0 \omega^2 e^{(\gamma-\beta)r} r^2 \\ & + \frac{\beta}{E_0} (1-\nu^2) \rho_0 \omega^2 e^{(\gamma-\beta)r} r^3 - \frac{\gamma}{E_0} (1-\nu^2) \rho_0 \omega^2 e^{(\gamma-\beta)r} r^3 \end{aligned}$$

$$-2 \frac{(1-\nu^2)}{E_0} \rho_0 \omega^2 e^{(\gamma-\beta)r} r^2 - (1+\nu) T r a \alpha_0 e^{a r} = 0 \quad [2.17]$$

Öncelikle diferansiyel denklemin her iki tarafı Elastisite Modülü ($E = E_0 e^{\beta r}$) ifadesi ile bölündüğünde, denklem aşağıda yazılmış olan daha sade bir şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} & - (1-\nu^2) r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + [\beta(1-\nu^2) r^2 - 3(1-\nu^2) r] \frac{d \sigma_r}{dr} \\ & + \beta(1-\nu-2\nu^2) r \sigma_r + (2\nu^2 - \nu - 3) \rho_0 \omega^2 e^{\gamma r} r^2 \\ & + (\beta - \gamma)(1-\nu^2) \rho_0 \omega^2 e^{\gamma r} r^3 - (1+\nu) T E_0 r a \alpha_0 e^{(a+\beta)r} = 0 \end{aligned} \quad [2.18]$$

Elde edilen bu denklemde birkaç düzenleme daha yapılabilir. İkinci derecede diferansiyel içeren terimin katsayısı bir olacak şekilde diferansiyel denklemin her iki tarafı da $-(1-\nu^2) r^2$ ifadesi ile bölündüğünde denklemin son şekli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} - \left(\beta - \frac{3}{r} \right) \frac{d \sigma_r}{dr} - \frac{\beta(1-2\nu)}{(1-\nu)r} \sigma_r - \frac{(2\nu^2 - \nu - 3)}{(1-\nu^2)} \rho_0 \omega^2 e^{\gamma r} \\ & - (\beta - \gamma) \rho_0 \omega^2 e^{\gamma r} r + \frac{T E_0 a \alpha_0 e^{(a+\beta)r}}{(1-\nu)r} = 0 \end{aligned} \quad [2.19]$$

2.19 denklemi çok sayıda parametreyi içermektedir. Bu parametreler σ_r (N/m²) değişkeni dışında sınıflandırılacak ve birimleri incelenecek olursa; denklemin tek bağımsız değişkeni r yarıçapıdır ve birimi metredir. β , γ ve a malzemenin özelliklerinin ifade edilmesi için kullanılan taban fonksiyonlarının üst katsayılarıdır ve birimleri 1/m cinsindendir. Poisson oranı sabit bir değer olarak alınmakta ve

birimsizdir. E_0 , ρ_0 ve α_0 malzeme özelliklerini belirtmek için kullanılan fonksiyonel ifadelerdeki sabit katsayılarıdır ve birimleri ilgili oldukları malzeme özelliklerine bağlı olarak sırası ile N/m^2 , kg/m^3 ve $1/^\circ C$ cinsindendir. Açısal hız ifade etmekte olan ω 'nin birimi rad/sn 'dir. Sıcaklık (T) birimi ise $^\circ C$ 'dir. Tüm bu birimler dikkate alındığında diferansiyel denklemin bütün terimleri $\frac{N/m^2}{m^2}$ cinsinden bir birime sahiptirler. Bu birim Pascal/ m^2 olarak da ifade edilebilir. Dolayısı ile σ_r ve r yerlerine normalize edilmiş değerler konulduğunda yukarıdaki diferansiyel denklemin tüm terimleri birimsiz hale getirilmiş olacaktır.

σ_r ve r aşağıdaki bağıntılar kullanılarak boyutsuz hale getirilebilir.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \quad [2.20]$$

$$\bar{r} = \frac{r}{b} \quad [2.21]$$

Bu ifadede σ_0 şaft malzemesinin akma dayanımını, b ise şaftın yarıçapını göstermektedir.

Eş. (2.20) ve (2.21), (2.19) eşitliğinde yerine yazılırsa denklem aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\sigma}_r}{d\bar{r}^2} - \left(\beta b - \frac{3}{\bar{r}} \right) \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} - \frac{\beta(1-2\nu)b}{(1-\nu)\bar{r}} \bar{\sigma}_r - \frac{(2\nu^2 - \nu - 3)}{(1-\nu^2)} b^2 \rho_0 \omega^2 e^{\gamma b \bar{r}} \\ - \frac{(\beta - \gamma)}{\sigma_0} b^3 \rho_0 \omega^2 e^{\gamma b \bar{r}} \bar{r} + \frac{TE_0 b a \alpha_0 e^{(a+\beta)b \bar{r}}}{(1-\nu)\sigma_0 \bar{r}} = 0 \end{aligned} \quad [2.22]$$

Problemin malzeme özelliklerinden bağımsız olarak ifade edilebilmesi için gerilmenin ve yarıçapın yanı sıra sıcaklık, basınç, elastisite modülü, hız ve β , γ ve a değerlerinin de boyutsuz hale getirilmeleri gerekmektedir. Bu nedenle sıcaklık, basınç, elastisite modülü, hız ve β , γ ve a değişkenleri için aşağıdaki bağıntılar tanımlanmıştır.

$$\bar{T} = \frac{T \alpha_0 E_0}{\sigma_0} \quad [2.23]$$

$$\bar{P} = \frac{P}{\sigma_0} \quad [2.24]$$

$$\bar{E}_0 = \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.25]$$

$$\bar{\Omega} = \frac{b^2 \rho_0 \omega^2}{\sigma_0} \quad [2.26]$$

$$\bar{\beta} = b \beta \quad [2.27]$$

$$\bar{\gamma} = b \gamma \quad [2.28]$$

$$\bar{a} = b a \quad [2.29]$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.30]$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.31]$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.32]$$

Normalize edilen bu birimler denklemde yerlerine konulduğunda denklem aşağıdaki şekilde bir görünüm kazanmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\sigma}_r}{d\bar{r}^2} - \left(\bar{\beta} - \frac{3}{\bar{r}} \right) \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} - \frac{\bar{\beta}(1-2\nu)}{(1-\nu)\bar{r}} \bar{\sigma}_r - \frac{(2\nu^2 - \nu - 3)}{(1-\nu^2)} \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma}\bar{r}} \\ - (\bar{\beta} - \bar{\gamma}) \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma}\bar{r}} \bar{r} + \frac{\bar{T} \bar{a} e^{(\bar{a} + \bar{\beta})\bar{r}}}{(1-\nu)\bar{r}} = 0 \end{aligned} \quad [2.33]$$

Yukarıdaki denklem, denge denklemi, elastik denklemler (Hooke kanunundan bulunan denklemler) ve uygunluk denklemi kullanılarak sabit hızla, sabit sıcaklık ve basınç etkisi altında uygun fonksiyonel ifadeler ile belirtilmiş malzeme özelliklerine sahip, dönen shaft üzerinde oluşacak olan gerilmelerin hesaplanması için gerekli tüm sadeleştirmeler yapılarak elde edilmiştir. Bundan sonraki kısımlarda bu denklem matematiksel yöntemlerle çözülme çalışarak yukarıda bahsedilen şartlar altında shaftta oluşacak olan elastik gerilmeler, genlemeler ve radyal deplasmanı verecek formüller, bu bilinmeyenlerin nasıl bir değişim gösterdiğini gösteren grafikler elde edilmeye çalışılacaktır.

Yukarıda elde edilen denklem ikinci dereceden homojen olmayan diferansiyel bir denklemdir. Çözülebilmesi için öncelikle homojen kısmının çözülmesi gerekmektedir. Homojen kısmın çözümü, denklemin ikinci dereceden olması nedeni ile iki farklı fonksiyon ve bu fonksiyonlarla beraber iki integral sabit içerecektir. Daha sonra homojen çözümü tamamlayacak olan partiküler çözümün elde edilmesi gerekmektedir. Homojen çözümden gelen integral sabiteleri iki farklı sınır şartı yardımı ile belirlendikten sonra denklemin çözümü tamamlanmış olacaktır.

Aşağıda yazılı Eş. 2.34 çözülmesi gereken Eş. 2.33'nin homojen kısmıdır. Çözümün ilk adımı bu denklemin çözülmesi ile başlamaktadır.

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}_r}{d\bar{r}^2} - \left(\bar{\beta} - \frac{3}{\bar{r}} \right) \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} - \frac{\bar{\beta}(1-2\nu)}{(1-\nu)\bar{r}} \bar{\sigma}_r = 0 \quad [2.34]$$

Eş. 2.34'deki denklemin çözümü aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\sigma_{rh} = C_1 U\left(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r} \bar{\beta}\right) + C_2 L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2(\bar{r} \bar{\beta}) \quad [2.35]$$

Matematiksel olarak $U(a, b, z)$ ve $L_n^\lambda(z)$ notasyonu ile gösterilen ikinci tür Hipergeometrik Fonksiyon ve Genelleştirilmiş Laguerre Polinomlarına karşılık gelen ifadeler aşağıda belirtilmiştir.

$$U(a, b, z) = 1/\Gamma(a) \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \quad [2.36]$$

$$L_n^\lambda(z) = \frac{\Gamma(\lambda + n + 1)}{\Gamma(n + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k z^k}{\Gamma(\lambda + k + 1)} \quad n \in \mathbb{N} \quad [2.37]$$

Böylece denklemin homojen kısmının çözümü bulunmuş olmaktadır. Çözümün tamamlayıcı (partiküler) kısmının bulunabilmesi için Parametrelerin Değişimi Metoduna (34) başvurulabilir.

Genel olarak 2.33 denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d^2 y(\bar{r})}{d\bar{r}^2} + P(\bar{r}) \frac{dy(\bar{r})}{d\bar{r}} + R(\bar{r}) y(\bar{r}) = F(\bar{r}) \quad [2.38]$$

Bu durumda $F(\bar{r})$ denklemin homojen olmayan kısmını oluşturmaktadır. 2.17 denklemine göre $F(\bar{r})$ eşitliliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$F(\bar{r}) = \frac{(2\nu^2 - \nu - 3)}{(1 - \nu^2)} \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma}) \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r} - \frac{\bar{T} a e^{(\bar{a} + \bar{\beta}) \bar{r}}}{(1 - \nu) \bar{r}} \quad [2.39]$$

Yukarıdaki gibi ikinci dereceden, lineer, homojen olmayan bu diferansiyel denklemin partiküler çözümü, homojen kısmın çözümü $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ ise kısaca $y_p = u y_1 + v y_2$ şeklindedir.

Denklemin homojen kısmının çözümü bilindiğine göre; y_1 ve y_2

$$y_1 = U\left(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}, \bar{\beta}\right) \quad [2.40]$$

ve

$$y_2 = L^{\frac{2}{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}, \bar{\beta}) \quad [2.41]$$

olarak ifade edilebilirler.

u ve v Parametrelerin Değişimi Metoduna göre aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$\frac{du}{dx} = -\frac{y_2 F(x)}{y_1 \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} y_2} \quad [2.42]$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{y_1 F(x)}{y_1 \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} y_2} \quad [2.43]$$

$y_1 \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} y_2$ ifadesi y_1 ve y_2 'nin Wroksian'ı olarak adlandırılır ve $W(x)$ ile gösterilecektir.

$$W(x) = y_1 \frac{dy_2}{dr} - \frac{dy_1}{dr} y_2 \quad [2.44]$$

Denklemin genel çözümü homojen ve partiküler çözümün toplamı olduğuna göre, çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u y_1 + v y_2$$

Elde edilen çözüm radyal gerilme olduğuna göre, radyal gerilmeyi verecek olan çözüm şöyle ifade edilebilir;

$$\sigma_r = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u y_1 + v y_2 \quad [2.45]$$

u ve v ifadeleri yerlerine konulduğunda, yukarıda σ_r 'ı veren formül aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\sigma_r = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \int -\frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2 \quad [2.46]$$

y_1 , y_2 ve $F(r)$ 'nin açık ifadeleri yukarıda belirtilmiştir. $W(\bar{r})$ 'nin açık ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$W(\bar{r}) = U\left(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}\bar{\beta}\right) \frac{d}{d\bar{r}} L^{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}(\bar{r}\bar{\beta}) - \frac{d}{d\bar{r}} U\left(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}\bar{\beta}\right) L^{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}(\bar{r}\bar{\beta}) \quad [2.47]$$

$U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}\bar{\beta})$ ve $L^{\frac{2}{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}\bar{\beta})$ fonksiyonlarının türevleri ise aşağıda gösterildiği gibi bulunmaktadır;

$$\frac{d}{dr} U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}\bar{\beta}) = \frac{\beta U(1-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 4, \bar{r}\bar{\beta})}{-1+\nu} \quad [2.48]$$

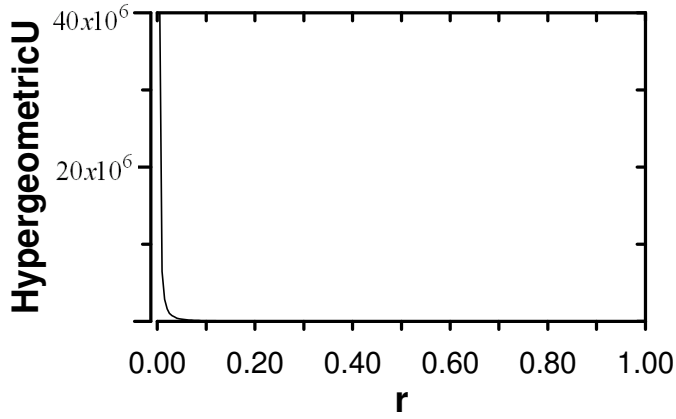
$$\frac{d}{dr} L^{\frac{2}{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}\bar{\beta}) = -\beta L^{\frac{3}{-1-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}\bar{\beta}) \quad [2.49]$$

Yukarıda elde edilen σ_r çözümü görüleceği üzere iki tane tanımsız integral içermektedir. Bu tanımsız integrallerin içersinde hipergeometrik fonksiyon ile genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının bulunduğu oldukça uzun ifadeler bu tanımsız integrallerin çözülebilmelerini zorlaştırmaktadır. Buna karşın, herhangi bir r değeri için bir gerilme değerinin hesaplanabilmesi, bu ifadelerin söz konusu yarıçaptaki integral değerleri nümerik integrasyon yöntemi ile bulunarak sağlanabilir. Nümerik integrasyonun sıfırdan söz konusu yarıçap değerine kadar alınması gerekmektedir.

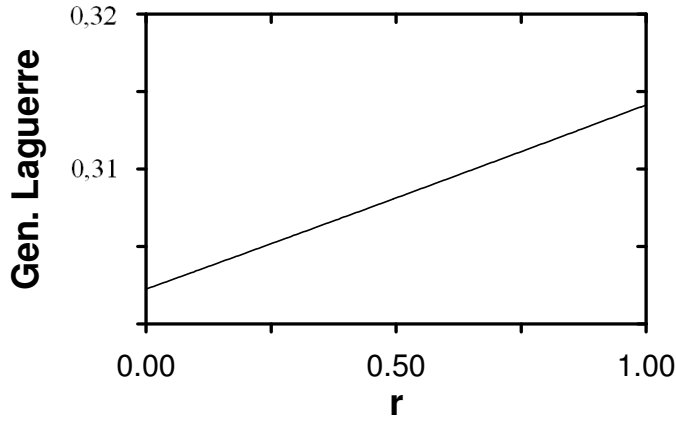
Elde edilen σ_r çözümü, çözümü yapılan diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümü ile tamamlayıcı partiküler kısmın toplamından oluşmaktadır. Homojen kısım tamamen analitik olmasına karşın partiküler kısmın tanımsız integralleri nümerik integrasyon yöntemi ile hesaplanacaktır.

Yardımcı olması açısından $U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}\bar{\beta})$ ve $L^{\frac{2}{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}\bar{\beta})$ fonksiyonlarının

$\nu = 0,3$ ve $\bar{\beta} = 0,1$ değerleri için r 'nin 0'dan 1'e kadar olan grafikleri aşağıda çizilmiştir.



Şekil 2.1. $U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, r, \bar{\beta})$ fonksiyonu grafiği



Şekil 2.2. $L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2(\bar{r}, \bar{\beta})$ fonksiyonu grafiği

İkinci dereceden bir diferansiyel denklemin çözümü olduğu için iki tane integral sabiti içermektedir. Bu sabitler, sabit sıcaklık ve basınç altında sabit hızla dönen FGM shaftın merkez ve dış yüzeyindeki şartları, yani sınır şartlarını sağlamak zorundadırlar. $r=0$ için σ_r sınırlı bir değer olması gerekirken $U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, r, \bar{\beta})$ fonksiyonunun sonsuza doğru gittiği görülmektedir. Dolayısı ile bu C_1 integral sabitinin sıfır olduğu anlamına gelmektedir. C_1 sıfır olduğuna göre çözümün homojen kısmında yer alan Hipergeometrik fonksiyon ortadan kalkmış olur ve σ_r fonksiyonu aşağıdaki şekle indirgenmiş olur.

$$\sigma_r = C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2 \quad [2.50]$$

C_2 ise shaftın dış yüzeyindeki radyal gerilmenin dış yüzey basıncının (P basıncı) tersine eşit olacak bir değer alması gerekir. Bu değer aşağıda olduğu gibi bulunur.

$$C_2 = \frac{-P + \int_0^1 \frac{y_2(r)F(r)}{W(r)} dr y_1(1) - \int_0^1 \frac{y_1 F(r)}{W(r)} dr y_2(1)}{L^{\frac{2}{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}, \bar{\beta})} \quad [2.51]$$

$\int_0^1 \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}$ ve $\int_0^1 \frac{y_1(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}$ integrallerinin değerleri, $y_1(\bar{r})$, $y_2(\bar{r})$, $F(\bar{r})$ ve

$W(\bar{r})$ 'e ait r 'ye bağlı ifadeler açıkça yazılıp 0'dan 1'e kadar nümerik integrasyonla bulunduktan sonra yukarıda sınır şartını sağlayan denklemde yerine konularak diğer fonksiyonların (y_1 ve y_2 , yani $U(-\frac{1-2\nu}{-1+\nu}, 3, \bar{r}, \bar{\beta})$ ve $L^{\frac{2}{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}}(\bar{r}, \bar{\beta})$ fonksiyonları, ve $F(\bar{r})$) verdiği değerler kullanılarak C_2 bulunur.

Bundan sonra σ_r 'ya bağlı olarak σ_θ ve σ_z gerilmeleri ε_r ve ε_θ genlemeleri u deplasmanı ve ayrıca shaftların uçlarına etki eden toplam kuvvet bulunabilir. σ_θ , σ_z , ε_r , ε_θ ve u'nin genel olarak birimsiz bir şekilde ifade edebilmek için normalize edilmeleri gerekmektedir. σ_θ ve σ_z , σ_r 'a benzer şekilde aşağıdaki gibi normalize edilirler.

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} \quad [2.52]$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_0} \quad [2.53]$$

ε_r ve ε_θ birimsiz ifadeler olmalarına rağmen grafiklerinin genel bir görünüm kazanmaları için uygun şekilde normalize edilmeleri gerekir. ε_r ve ε_θ aşağıdaki biçimde genelleştirilirler.

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.54]$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.55]$$

u deplasmanı ($= \varepsilon_\theta r$), b yarıçapına bölünerek ve $\frac{E_0}{\sigma_0}$ ile çarpılarak normalize edilir.

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon}_\theta \bar{r} \quad \bar{u} = \varepsilon_\theta \frac{E_0}{\sigma_0} \frac{r}{b} \quad [2.56]$$

Eş. 2.7’de σ_r yerine konulduğunda σ_θ bulunmaktadır. Bunu yapmadan önce normalize edilen değerler denklemde yerine konularak denklemin tüm terimleri birimsiz hale getirilir.

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{r} \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} + \bar{\sigma}_r + \frac{\rho b^2 \omega^2 \bar{r}^2}{\sigma_0} \quad [2.57]$$

ρ için r ’ye bağlı olarak değişen fonksiyonel ifade yazıldığında ve birimsiz hız ifadesi yerine konulduğunda denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{r} \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} + \bar{\sigma}_r + \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r}^2 \quad [2.58]$$

$\bar{\sigma}_r$ yerine yazılır ise denklemi aşağıdaki şekle bürünür ve $\bar{\sigma}_\theta$ ’ın hesaplanması ve grafiğinin bulunması bundan sonra mümkün bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_\theta = & \bar{r} \frac{d}{dr} \left(C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2 \right) \\
& + C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2 + \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r}^{-2}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Denklem açıldığında ve biraz düzenlendiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_\theta = & - \left(\bar{r} \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_1 - r \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{dr} \\
& + \left(\bar{r} \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + C_2 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_2 + \left(C_2 \bar{r} + \bar{r} \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) \frac{dy_2}{dr} + \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r}^{-2}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$\bar{\sigma}_r$ ve $\bar{\sigma}_\theta$ çözüldüğüne göre bunlara bağlı olan $\bar{\sigma}_z$ gerilmesi de çözülebilir. $\bar{\sigma}_r$ ve $\bar{\sigma}_\theta$ 'yi içeren $\bar{\sigma}_z$ 'i veren Eş. 2.8'de normalize edilen değerler yerlerini konulduğunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\bar{\sigma}_z = \nu (\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) + \frac{T \alpha E}{\sigma_0} \tag{2.61}$$

Termal Genleşme katsayısı α ve Elastisite Modülü E için yazılan fonksiyonel ifadeler yerine konulduğunda denklem aşağıdaki şekli almaktadır.

$$\bar{\sigma}_z = \nu (\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) - \frac{T \alpha_0 e^{\bar{a} \bar{r}} E_0 e^{\bar{\beta} \bar{r}}}{\sigma_0} \tag{2.62}$$

Son olarak birimsiz sıcaklık ifadesi denklemde yerine konulursa, denklem aşağıdaki gibi daha sade bir forma getirilir.

$$\bar{\sigma}_z = \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta) - \bar{T}e^{(\bar{a}+\bar{\beta})\bar{r}} \quad [2.63]$$

$\bar{\sigma}_r$ ve $\bar{\sigma}_\theta$ 'yı eşitlikte yerlerine koyulduğunda, $\bar{\sigma}_z$ 'yi veren eşitliği en açık şekilde elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z = & \nu \left(-\bar{r} \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + 2 \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_1 - \bar{r} \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} \\ & + \left(\bar{r} \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + 2C_2 + 2 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_2 + \left(C_2 \bar{r} + \bar{r} \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\ & + \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r}^{-2} - \bar{T} e^{(\bar{a}+\bar{\beta})\bar{r}} \end{aligned} \quad [2.64]$$

y_1 çözümü $\bar{\sigma}_r$ 'ı veren diferansiyel denkleminde ait homojen kısmın birinci çözüm fonksiyonu olan ikinci tür Hipergeometrik fonksiyonudur. y_2 ise homojen çözümün ikinci fonksiyonu olan genelleştirilmiş Laguerre polinomlarıdır. $F(\bar{r})$ diferansiyel denklemin homojen olmayan (non-homojen) kısmıdır. $W(\bar{r})$ de y_1 ve y_2 homojen çözümlerin Wroksian fonksiyonudur.

ε_r genlemesini veren Eş. 2.11'de çözülmüş olan $\bar{\sigma}_r$ radyal gerilmesi yerine konursa Eş. 2.61 bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = & \frac{1}{E} (-\nu(1+\nu) \bar{r} \sigma_0 \frac{d}{d\bar{r}} (C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2) \\ & + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_0 (C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2) \end{aligned}$$

$$-\nu(1+\nu)\rho\omega^2 b^2 \bar{r}^2) + (1+\nu)\alpha T \quad [2.65]$$

ε_r ve ε_θ genlemeleri $\varepsilon_r \frac{E_0}{\sigma_0}$ ve $\varepsilon_\theta \frac{E_0}{\sigma_0}$ şeklinde normalize edilmişlerdir. Bu normalizasyon kullanılarak, bulunan normalize edilmiş ε_r radyal genlemesini veren denklem aşağıdaki bulunabilir.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r = & \frac{1}{E} (-\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \frac{d}{d\bar{r}} (C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2) \\ & + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 (C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2) \\ & -\nu(1+\nu)\rho\omega^2 b^2 \bar{r}^2) \frac{E_0}{\sigma_0} + (1+\nu)T\alpha \frac{E_0}{\sigma_0} \end{aligned} \quad [2.66]$$

Yukarıdaki denklemde Elastisite Modülü (E), özgül ağırlık (ρ) ve ısı genleşme katsayısı (α) için seçilen fonksiyonel ifadeler yerine konduktan sonra denklem yeniden düzenlenirse aşağıdaki şekilde bir denkleme dönüşmektedir.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r = & \frac{e^{-\bar{\beta}\bar{r}}}{E_0} ((\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_1 \\ & + \nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} + (-\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 C_2 \\ & + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_2 + (-\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 C_2 - \nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) \frac{dy_2}{d\bar{r}} \end{aligned}$$

$$-\nu(1+\nu)\rho_0 e^{\bar{\gamma}\bar{r}} \omega^2 b^2 \bar{r}^2 \frac{E_0}{\sigma_0} + (1+\nu)T\alpha_0 e^{\bar{a}\bar{r}} \frac{E_0}{\sigma_0} \quad [2.67]$$

Bazı sadeleştirme işlemlerinden ve normalize edilen hız ve sıcaklık ifadeleri yerine konulduğunda denklem aşağıdaki biçimde olmaktadır.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r = e^{-\bar{\beta}\bar{r}} & \left((\nu(1+\nu)\bar{r} \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2) \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_1 \right. \\ & + \nu(1+\nu)\bar{r} \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} + (-\nu(1+\nu)\bar{r} \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2) C_2 \\ & + (1-\nu-2\nu^2) \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_2 + (-\nu(1+\nu)\bar{r} C_2 - \nu(1+\nu)\bar{r} \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\ & \left. - \nu(1+\nu)\bar{\Omega} e^{\bar{\gamma}\bar{r}} \bar{r}^2 \right) + (1+\nu)\bar{T} e^{\bar{a}\bar{r}} \end{aligned} \quad [2.68]$$

ε_θ genlemesini veren denklem Eş. 2.12 eşitliğidir.

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \bar{r} \frac{d\sigma_r}{d\bar{r}} + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_r + (1-\nu^2) \rho \omega^2 \bar{r}^2 \right] + (1+\nu) \alpha T$$

$\bar{\sigma}_r$ 'ı veren matematiksel ifade yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} & \left((1-\nu^2) \bar{r} \sigma_0 \frac{d}{d\bar{r}} (C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2) \right. \\ & \left. + (1-\nu-2\nu^2) \sigma_0 (C_2 y_2 + \int -\frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_1 + \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2) \right) \end{aligned}$$

$$+ (1 - \nu^2) \rho \omega^2 b^2 \bar{r}^2 + (1 + \nu) \alpha T \quad [2.69]$$

ifadesi elde edilmiş olur.

Fonksiyonel ifadeler yerine yazıldıktan ve denklemin açılımı yapıldıktan sonra denklemin aldığı biçim aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{e^{-\bar{\beta} \bar{r}}}{E_0} \left((-1 - \nu^2) \bar{r} \sigma_0 \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) \sigma_0 \int - \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_1 \\ & - (1 - \nu^2) \bar{r} \sigma_0 \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{dr} + ((1 - \nu^2) \bar{r} \sigma_0 \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) \sigma_0 C_2 \\ & + (1 - \nu - 2\nu^2) \sigma_0 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2 + ((1 - \nu^2) \bar{r} \sigma_0 C_2 + (1 - \nu^2) \bar{r} \sigma_0 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) \frac{dy_2}{dr} \\ & + (1 - \nu^2) \rho_0 e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \omega^2 b^2 \bar{r}^2 + (1 + \nu) T \alpha_0 e^{\bar{a} \bar{r}} \end{aligned} \quad [2.70]$$

Teğetsel genleme $\frac{E_0}{\sigma_0}$ ifadesi ile çarpılarak normalize edilip, bazı sadeleştirme

işlemleri yapıp, birimsiz hız ve sıcaklık ifadeleri kullanılırsa aynı denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

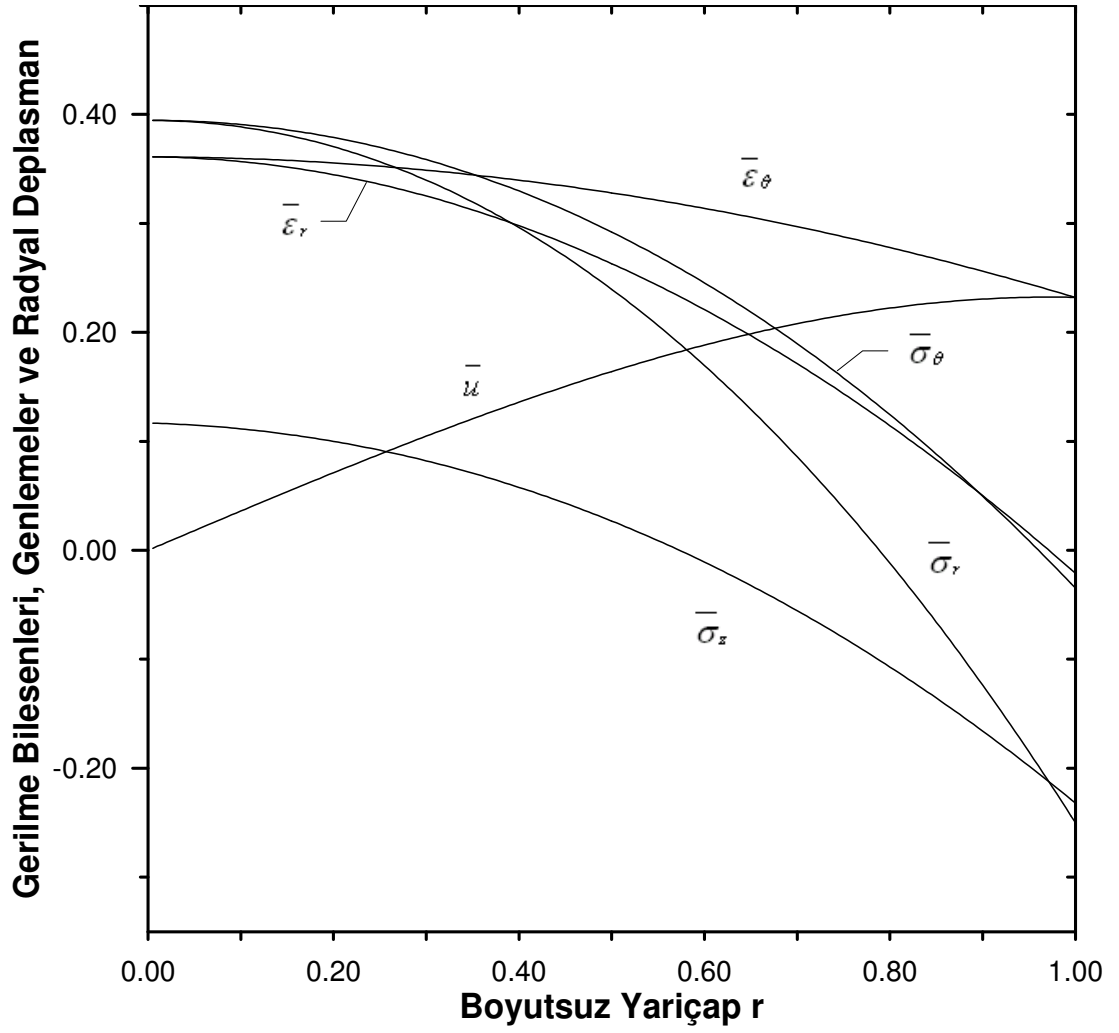
$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\theta = & e^{-\bar{\beta} \bar{r}} \left((-1 - \nu^2) \bar{r} \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) \int - \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_1 \\ & - (1 - \nu^2) \bar{r} \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{dr} + ((1 - \nu^2) \bar{r} \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \nu - 2\nu^2\right) \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} y_2 + \left(1 - \nu^2\right) \bar{r} C_2 + \left(1 - \nu^2\right) \bar{r} \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\
& + \left(1 - \nu^2\right) \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r}^{-2} + (1 + \nu) \bar{T} e^{\bar{a} \bar{r}}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \tag{2.72}$$

Yukarıdaki eşitlik u deplasmanı ile ε_{θ} radyal gerilmesi arasındaki ilişkiyi basit bir şekilde vermektedir. Buna göre boyutsuz u deplasmanı $\bar{u} = \bar{\varepsilon}_{\theta} \bar{r}$ ($\bar{u} = \varepsilon_{\theta} \frac{E_0}{\sigma_0} \frac{r}{b}$) formülü kullanılarak bulunabilir.

$\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 0,12$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$ boyutsuz değerleri için $C_2 = 1,228$ olarak hesaplanır, buna bağlı olarak $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_{\theta}$, $\bar{\sigma}_z$ gerilmelerine, $\bar{\varepsilon}_r$, $\bar{\varepsilon}_{\theta}$ genlemelerine ve $\bar{u}$ radyal deplasmanına ait grafikler aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 2.3. $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_z$ gerilmeleri ile $\bar{\epsilon}_r$, $\bar{\epsilon}_\theta$ genlemeleri ve $\bar{u}$ deplasmanının grafiği

Problem içerisinde yer alan parametreler daha farklı değerler aldıkça, $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\epsilon}_r$, $\bar{\epsilon}_\theta$, $\bar{u}$ daha farklı grafikler çizecektir. Bir parametre dışında diğer parametrelerin sabit tutularak çizilecek olan değişik bu eğriler, bu parametrenin, değişkenler üzerine nasıl etki ettiğini gösterecektir.

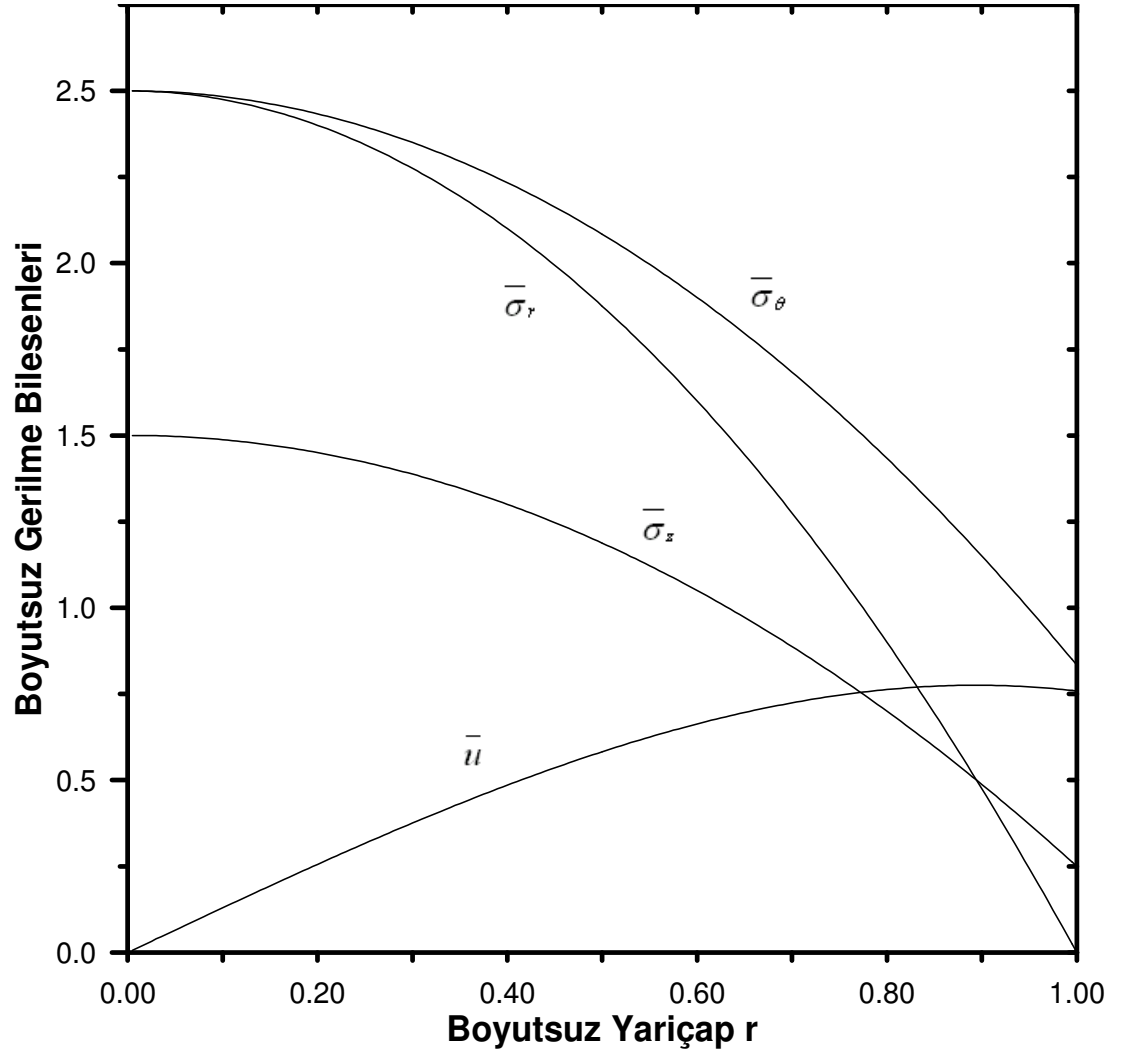
ϵ_z ise şaftın uçlarının sabit olduğu kabul edildiği için sıfıra eşit olmaktadır.

Şaft uçlarının sabit tutulmasından dolayı şaftın uçlarına etki eden eksenel kuvvet eksenel gerilmenin (σ_z) şaft kesiti boyunca integraline eşittir.

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_z r dr d\theta \quad [2.73]$$

σ_z gerilmesi bilindiğine göre yukarıdaki integral işlemi $\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 1,2$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$ değerleri için yapıldığında, şaftın uçlarına etki eden kuvvet $-0.185 \times (\sigma_0 \times r^2)$ Newton olarak bulunmakta.

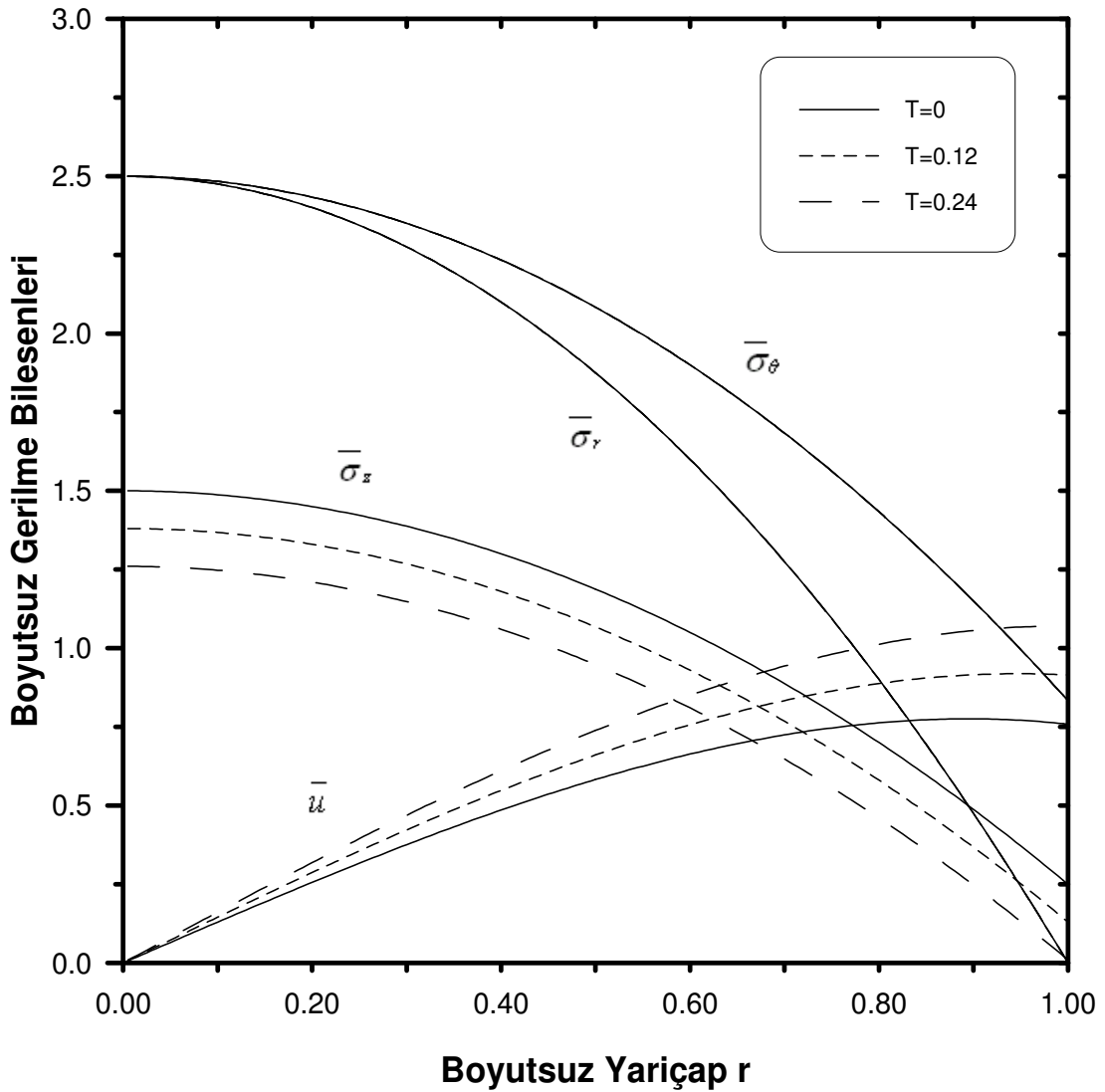
β , γ ve a parametreleri sıfır alındığında şaft üniform hale gelmektedir. Basınç (P) sıfır alındığında ve boyutsuz dönme hızı ($\bar{\Omega}$) 5.83 alınırsa $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_z$ gerilmeleri ve $\bar{u}$ deplasmanının grafikleri aşağıda olduğu gibi elde edilir. ($\nu = 0,3, T = 0$)



Şekil 2.4. Uçları sabit üniform şaftta gerilmeler, genlemeler ve $\bar{u}$ deplasmanı

$\bar{\Omega} = 5,83$ hızı bir sınır değerdir. Şöyle ki; Tresca akma şartına göre, merkezde σ_z gerilmesi ile σ_r ve σ_θ gerilmeleri arasındaki fark σ_0 değerini bulduğu için şaft malzemesi burada söz konusu $\bar{\Omega} = 5,83$ hızına yaklaştığında akma noktasına gelmiş olacaktır. Bu durum [18] çalışmada da ifade edilmiştir.

Uçları sabit homojen şaftın, birimsiz sıcaklık değerleri sırası ile 0 , 0,12 ve 0,24 olan ortamlarda çalıştığında oluşan gerilme bileşenleri ve deplasman değerleri aşağıdaki grafikte görülmekte.



Şekil 2.5. Uçları sabit üniform şaftta değişik sıcaklıklarda gerilmeler ve $\bar{u}$ deplasmanı

Yukarıdaki grafikte sıcaklık değişimi ile birlikte deplasman ve eksenel gerilme değişim gösterirken, radyal ve teğet gerilmede herhangi bir değişim görülmemektedir.

2.2. Uçları Serbest Dönen Şaft İçin Gerilme Analizi

Sabit basınç ve sabit sıcaklık altında sabit bir hızla dönen shaftın uçlarının serbest olduğu kabul edildiğinde, gerilme analizi düzlem genleme probleminden genelleştirilmiş düzlem genleme problemine dönüşmektedir. Shaftın uçlarının serbest alınması durumunda z yönünde σ_z gerilmesine karşılaşılmamasına rağmen shaftın uçlarına uygulanan kuvvet sıfırdır. Shaftın uçları serbest olduğu için z yönünde deplasman oluşmasına engel yoktur. Bu problemde, shaftın bahsedilen basınç ve sıcaklık altında dönerken z yönünde oluşan genlemelerin sabit bir genlemeye (ε_0) eşit olduğu kabul edilir. Bu durumda 2.2 numaralı eşitlik sıfıra eşit olmayacaktır.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T = \varepsilon_0 \quad [2.74]$$

Bu eşitlikte σ_z 'ye karşılık gelen eşitlik aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) + (\varepsilon_0 - \alpha T)E \quad [2.75]$$

Hook yasasına göre ε_r ve ε_θ genlemeleri;

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T$$

σ_z 'e gerilmesi ε_r ve ε_θ genlemelerini veren denklemlerde σ_θ ile beraber yerine konulduğunda, aşağıdaki genleme ifadeleri bulunur.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[-\nu(1+\nu)r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\rho\omega^2 r^2 \right] + (1+\nu)\alpha T - \nu\varepsilon_0 \quad [2.76]$$

ve

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2)r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_r + (1-\nu^2)\rho\omega^2 r^2 \right] + (1+\nu)\alpha T - \nu\varepsilon_0 \quad [2.77]$$

Elde edilen bu ε_r ve ε_θ genlemeleri ve ε_θ 'nin türevi uygunluk denkleminde yerine konulduğunda σ_r 'ı veren diferansiyel denklem elde edilir.

Aşağıda tekrar yazılan Eş. 2.5'de (uygunluk denklemi) ε_r ve ε_θ birbirlerine göre ters işaretli olması nedeni ile $\nu\varepsilon_0$ terimleri birbirini götürür. Poisson oranı (ν) da ε_0 gibi sabit kabul edildiği için ε_θ 'nin türevi alındığında bu terim sadeleşir. Sonuçta elde edilen diferansiyel denklem Sabit Uçlu Dönen Şaft için bulunan diferansiyel denklemden farklı olmamaktadır.

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0$$

Bu durumda, sınır şartlarının da aynı olması nedeni ile σ_r gerilmesini çözümü Sabit Uçlu Dönen Şaft için yapılan çözümle aynı olmaktadır. σ_θ ise σ_r 'a sadece denge denklemi ile bağlı olduğu için σ_θ 'nin da çözümünde bir değişiklik söz konusu olmaz. Fakat bu durum σ_z için geçerli değildir. σ_z 'yi veren denklem ε_0 'ı içermektedir. Bu nedenle ε_0 'nin bulunması gerekir.

Serbest uçlu şaftın uçlarına kuvvet uygulanmadığına göre σ_z 'nin şaft kesiti yüzeyince alınan integrali sıfıra eşit olacaktır.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \sigma_z r dr d\theta = 0 \quad [2.78]$$

σ_r ve σ_θ gerilmeleri Eş. 2.75’de yerine konularak σ_z ’nin çözümü bulunur.

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \nu \left(r \frac{y_2 F(r)}{W(r)} + 2 \int \frac{y_2 F(r)}{W(r)} dr \right) y_1 - r \int \frac{y_2 F(r)}{W(r)} dr \frac{dy_1}{dr} \\ & + \left(r \frac{y_1 F(r)}{W(r)} + 2C_2 + 2 \int \frac{y_1 F(r)}{W(r)} dr \right) y_2 + \left(C_2 r + r \int \frac{y_1 F(r)}{W(r)} dr \right) \frac{dy_2}{dr} \\ & + \frac{\rho_0 e^{\gamma r} b^2 \omega^2 r^2}{\sigma_0} + \frac{(\varepsilon_0 - T \alpha_0 e^{a r}) E_0 e^{\beta r}}{\sigma_0} \end{aligned} \quad [2.79]$$

Denklemini, malzeme özelliklerinden bağımsız olarak ifade edebilmek için boyutsuz hız ve sıcaklık ifadesi kullanıldığında, denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z = & \nu \left(\bar{r} \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + 2 \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_1 - \bar{r} \int \frac{y_2 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} \\ & + \left(\bar{r} \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + 2C_2 + 2 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) y_2 + \left(C_2 \bar{r} + \bar{r} \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \right) \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\ & + \bar{\Omega} e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \bar{r}^2 + (\bar{\varepsilon}_0 - \bar{T} e^{\bar{a} \bar{r}}) e^{\bar{\beta} \bar{r}} \end{aligned} \quad [2.80]$$

Sabit eksenel genleme (ε_0) bu ifadede diğer genleme ifadelerine benzer şekilde normalize edilmiş olarak alınmaktadır.

σ_z ifadesi bilindiğine göre nümerik olarak şaftın tüm kesiti boyunca integrasyonu alınıp, integral sifıra eşitlendiğinde, $\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 0,12$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$ değerleri dikkate alınarak $\bar{\varepsilon}_0$ genlemesi $5,53 \times 10^{-5}$ olarak hesaplanır.

Serbest Uçlu Şaftta oluşan radyal genleme aşağıdaki denkleme göre bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = & \frac{e^{-\bar{\beta} \bar{r}}}{E_0} ((\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 \int -\frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_1 \\ & + \nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \int \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} + (-\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 C_2 \\ & + (1-\nu-2\nu^2)\sigma_0 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_2 + (-\nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 C_2 - \nu(1+\nu)\bar{r}\sigma_0 \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\ & - \nu(1+\nu)\rho_0 e^{\bar{\gamma} \bar{r}} \omega^2 b^2 \bar{r}^2) + (1+\nu)T\alpha_0 e^{\bar{a} \bar{r}} - \nu \varepsilon_0 \end{aligned} \quad [2.81]$$

Bu denklemin normalize edilmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r = & e^{-\bar{\beta} \bar{r}} ((\nu(1+\nu)\bar{r} \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2) \int -\frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_1 \\ & + \nu(1+\nu)\bar{r} \int \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} + (-\nu(1+\nu)\bar{r} \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2) C_2 \\ & + (1-\nu-2\nu^2) \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) y_2 + (-\nu(1+\nu)\bar{r} C_2 - \nu(1+\nu)\bar{r} \int \frac{y_1 F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r}) \frac{dy_2}{d\bar{r}} \end{aligned}$$

$$-\nu(1+\nu)\bar{\Omega}e^{\bar{\gamma}\bar{r}\bar{r}^{-2}}+(1+\nu)\bar{T}e^{\bar{a}\bar{r}}-\nu\bar{\varepsilon}_0 \quad [2.82]$$

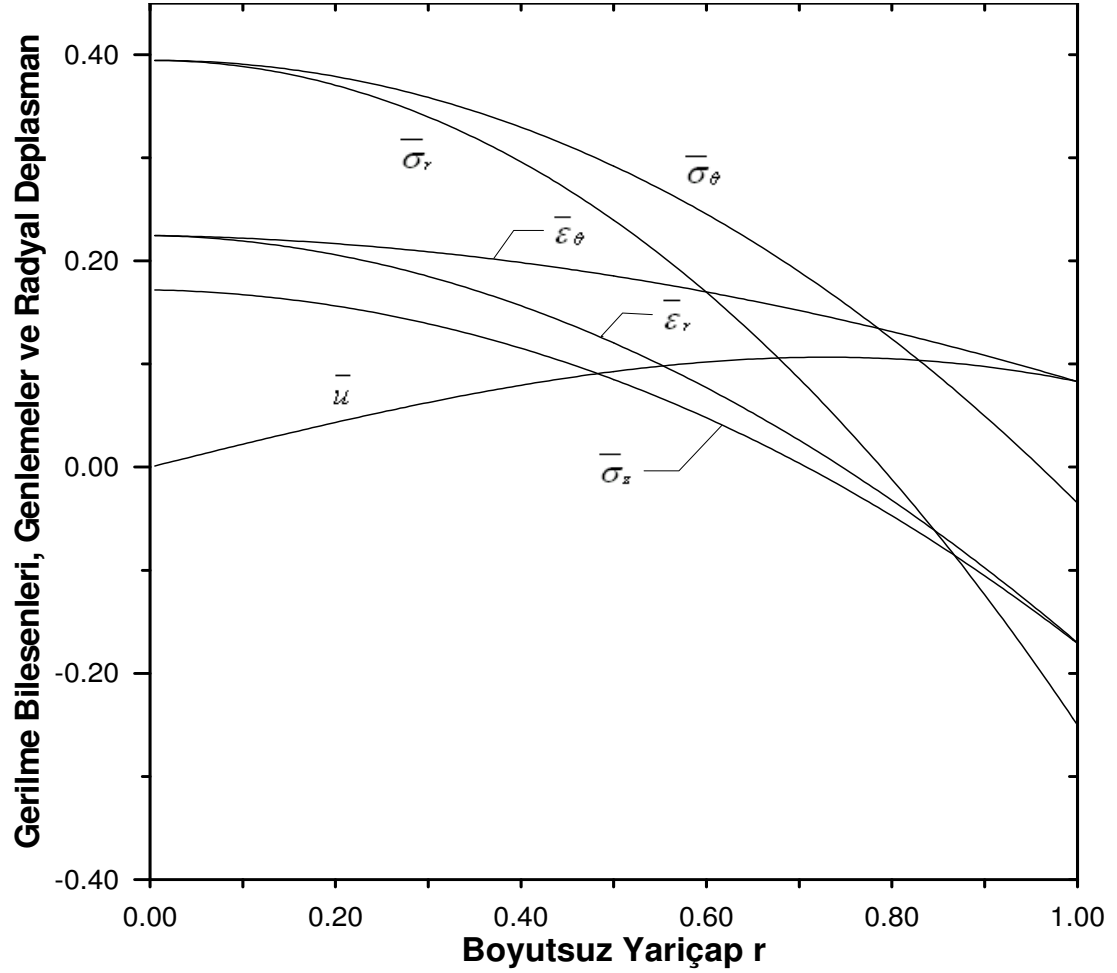
Açısal genlemeye (ε_θ) ait denklem gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{e^{-\bar{\beta}\bar{r}}}{E_0} ((-\bar{r}(1-\nu^2)\bar{\sigma}_0 \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\bar{\sigma}_0 \int -\frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r})y_1 \\ & - (1-\nu^2)\bar{r}\bar{\sigma}_0 \int \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} + (1-\nu^2)\bar{r}\bar{\sigma}_0 \frac{y_1F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\bar{\sigma}_0 C_2 \\ & + (1-\nu-2\nu^2)\bar{\sigma}_0 \int \frac{y_1F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r})y_2 + (1-\nu^2)\bar{r}\bar{\sigma}_0 C_2 + (1-\nu^2)\bar{r}\bar{\sigma}_0 \int \frac{y_1F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\ & + (1-\nu^2)\bar{\rho}_0 e^{\bar{\gamma}\bar{r}\bar{r}^{-2}} \omega^2 b^2 \bar{r}^{-2} \frac{E_0}{\sigma_0} + (1+\nu)\bar{T}e^{\bar{a}\bar{r}} - \nu\bar{\varepsilon}_0 \end{aligned} \quad [2.83]$$

Teğetsel genlemenin normalize edilmiş denklemi aşağıdaki şekilde olmaktadır.

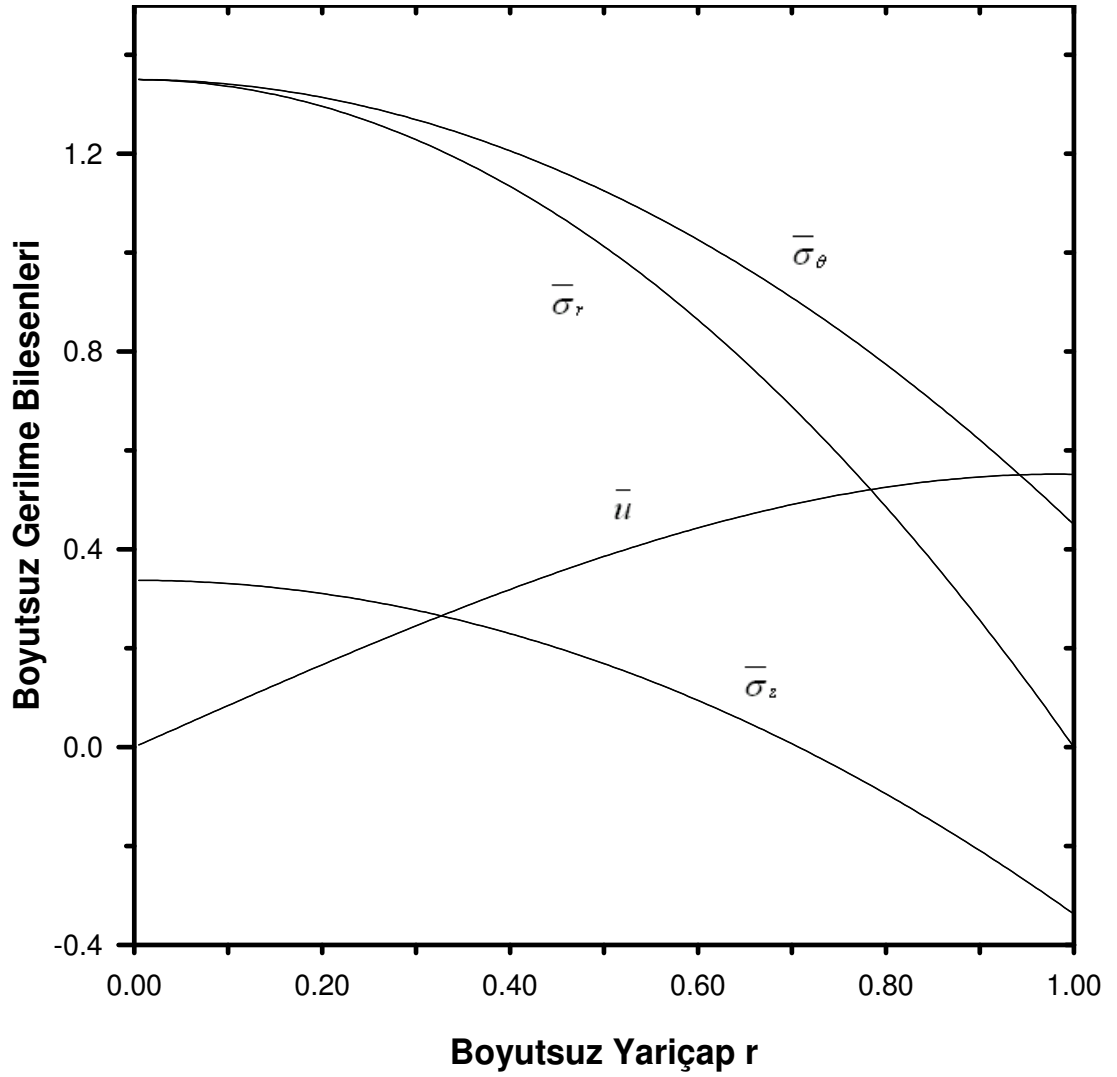
$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\theta = & e^{-\bar{\beta}\bar{r}} ((-\bar{r}(1-\nu^2)\bar{r} \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\bar{r} \int -\frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r})y_1 \\ & - (1-\nu^2)\bar{r} \int \frac{y_2(\bar{r})F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_1}{d\bar{r}} + (1-\nu^2)\bar{r} \frac{y_1F(\bar{r})}{W(\bar{r})} + (1-\nu-2\nu^2)\bar{r} C_2 \\ & + (1-\nu-2\nu^2)\bar{r} \int \frac{y_1F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r})y_2 + (1-\nu^2)\bar{r} C_2 + (1-\nu^2)\bar{r} \int \frac{y_1F(\bar{r})}{W(\bar{r})} d\bar{r} \frac{dy_2}{d\bar{r}} \\ & + (1-\nu^2)\bar{\Omega}e^{\bar{\gamma}\bar{r}\bar{r}^{-2}}+(1+\nu)\bar{T}e^{\bar{a}\bar{r}}-\nu\bar{\varepsilon}_0 \end{aligned} \quad [2.84]$$

ε_0 sabit genlemesi bulunduktan sonra $\bar{\sigma}_r$ ve $\bar{\sigma}_\theta$ ile beraber $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\varepsilon}_r$, $\bar{\varepsilon}_\theta$ ve $\bar{u}$ deplasmanına ait grafikler aşağıdaki şekilde görülmektedir.



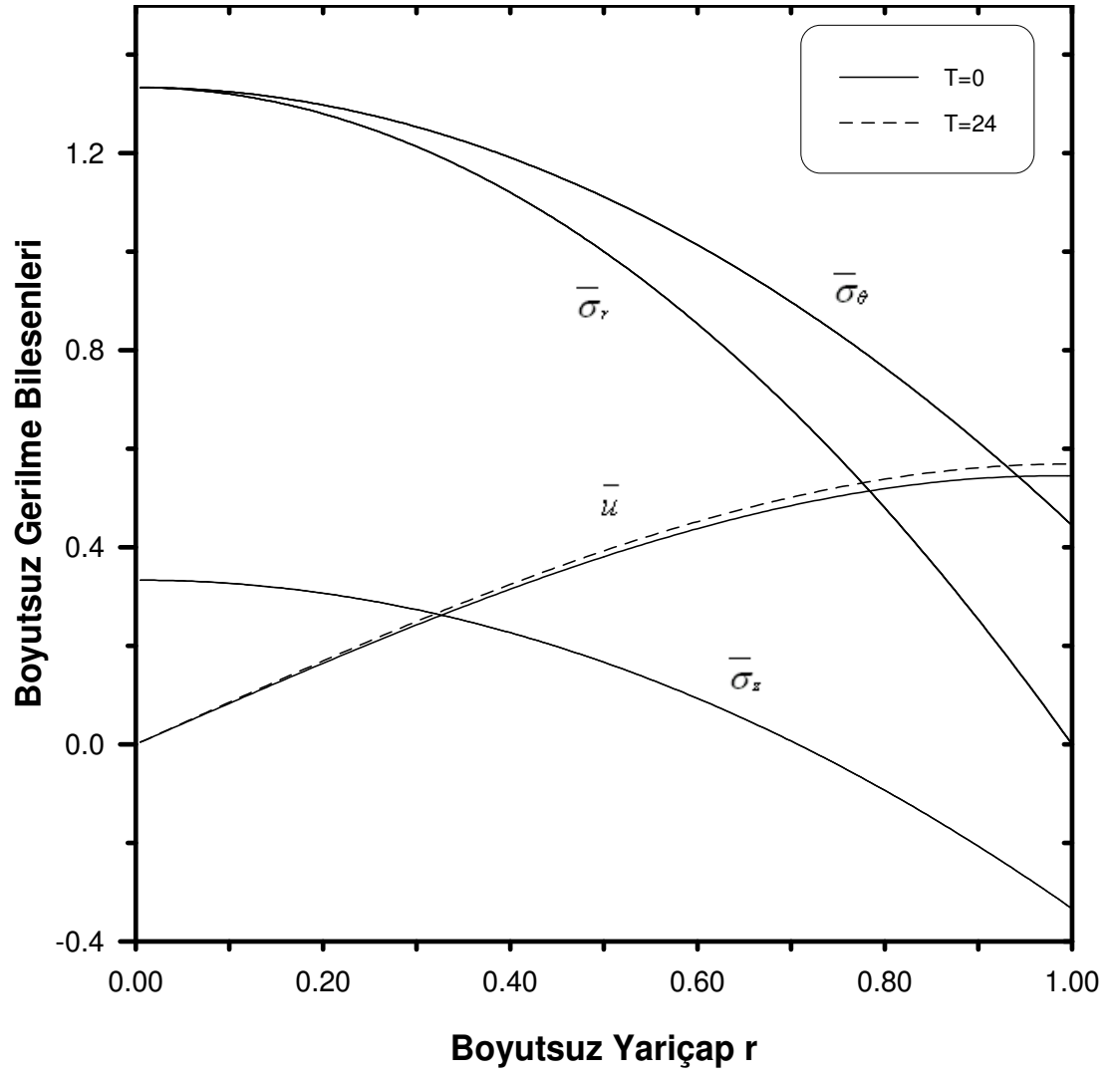
Şekil 2.6. Uçları serbest üniform şaftta gerilmeler, genlemeler ve $\bar{u}$ deplasmanı

$\bar{\Omega} = 3,15$ limit hızda üniform şaftta gerilmelerin ve radyal deplasmanın dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir. Bu durum, [18] çalışmasındaki sonuçla örtüşmektedir.



Şekil 2.7. Uçları serbest üniform şaftta gerilmeler ve $\bar{u}$ deplasmanı

Sıcaklığın, serbest uçlu üniform şaftta olan etkisi aşağıdaki grafikte gösterilmeye çalışılmıştır. Görüldüğü gibi gerilme bileşenleri üzerinde sıcaklığın hiçbir etkisi görülmez iken radyal deplasman üzerindeki sıcaklığın etkisi çok azdır. Çok büyük bir sıcaklık farkı uygulanmasına rağmen radyal deplasman üzerinde çok küçük bir fark oluşmuştur.



Şekil 2.8. Uçları serbest üniform şaftta değişik sıcaklıklarda gerilmeler ve $\bar{u}$ deplasmanı

3. FGM ŞAFTTA SICAKLIK, BASINÇ, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ VE $\bar{a}$ PARAMETRELERİNİN GERİLMELER VE DEPLASMANA ETKİSİ

3.1. Uçları Sabit Dönen FGM Şaftta Sıcaklık, Basınç, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ Parametrelerinin Gerilmeler ve Deplasmana Etkisi

Sabit sıcaklık ve basınç altında dönen (uçları sabit ya da serbest) FGM shaftın üzerinde oluşan gerilmelerin bulunması probleminde sonuca etki eden parametre sayısı oldukça fazladır. Bu parametreler shaftın döndüğü ortama ait sabit sıcaklık ve basıncın yanı sıra, metal ve seramik malzemenin özelliklerine ve karışım oranlarının taban fonksiyonu ile ifade edilen değişimine bağlı olan $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerleridir. Bu bölümde, bu parametrelerin shaft üzerinde oluşan gerilme bileşenleri üzerinde ne şekilde etki ettiklerinin anlaşılabilmesi için her birinin değişik değerleri için diğer değerler sabit tutularak grafikleri elde edilmiştir.

Değişik sıcaklıklar için $\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$ değerleri alınarak $\bar{\sigma}_r$ eğrileri Şekil 3.1'deki gibi elde edilmiştir.

Grafikte görülebileceği gibi, sıcaklık değeri arttıkça shaftın iç kısmında, özellikle merkezinde radyal gerilmede artış olduğu görülmektedir. Başka bir ifade ile, değişik sıcaklık değerleri için bulunan radyal gerilmeye ait eğriler, sıcaklık arttıkça yukarı doğru yönelmektedir. En dış yüzeyde alınan sınır şartı (Basıncın eksi değeri) radyal gerilmeye eşit olduğu için bütün eğriler bu değerde birleşmektedirler.

Aynı sıcaklık değerlerinde $\bar{a}$ 'nın -0.1 değeri için $\bar{\sigma}_r$ 'a ait grafikler Şekil 3.2'deki gibidir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$)

$\bar{a}$ 'nın -0.1 değeri için Şekil 3.2'de belirtilen eğilim ters yönde oluşmaktadır. Sıcaklık arttıkça shaftın iç kısımlarında radyal gerilme azalmaktadır. Yarıçap boyunca radyal gerimeyi ifade eden eğriler, sıcaklık arttıkça aşağı doğru yönelmektedir. Sonuçta, $\bar{a}$ 'nın negatif değer alması sıcaklığın $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisini değiştirmektedir.

Değişik sıcaklık değerlerinin $\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$ için $\bar{\sigma}_\theta$ eğrileri Şekil 3.3'deki gibi değişmektedir.

Sıcaklığın teğet gerilme üzerine etkisi radyal gerilmeden farklı olarak, sıcaklık arttıkça teğet gerilme merkezde artar iken dış yüzeyde azaldığı görülmektedir. Ayrıca değişik sıcaklık değerleri için elde edilen teğet gerilme eğrilerinin bir noktada kesiştiği görülmekte. Sonuçta, sıcaklık artıkça teğet gerilmenin daha geniş bir aralığa yayıldığı görülmektedir.

$\bar{a}$ ' -0,1 değeri aldığı anda $\bar{T}$ 'nin $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi Şekil 3.4'deki gibi olmaktadır. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$)

Şekil 3.4 grafiğine bakıldığında $\bar{a}$ ' -0,1 değeri için de tüm eğrilerin bir noktada kesiştiği görülmekle beraber sıcaklık artışı, teğet gerilmenin merkezde azalmasına neden olurken, dış yüzeyde artmasına neden olmaktadır.

Değişik sıcaklık değerlerinde $\bar{\sigma}_z$ gerilmesine ait eğrinin nasıl bir değişim gösterdiği Şekil 3.5'deki grafikte görülebilir. Değerler; $\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$ olarak alınmıştır.

Değişik sıcaklık değerlerinin eksenel gerilme üzerindeki etkisi oldukça fazla olduğu görülmektedir. Sıcaklığın sabit uçlu şafttaki eksenel gerilme üzerindeki etkisi, şaftın uçlarında baskı kuvveti yarattığı için azalma yönündedir.

Isıl genleşme katsayısı şaftın merkezinden dışa doğru azalma gösterdiğinde yani $\bar{a}$ eksi değere sahip olduğunda bu değişim nasıl gerçekleşmektedir? $\bar{a}$, -0,1 değerini alınca Eksenel Gerilmenin sıcaklığa göre değişimi Şekil 3.6'da görüldüğü gibi olmaktadır. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$)

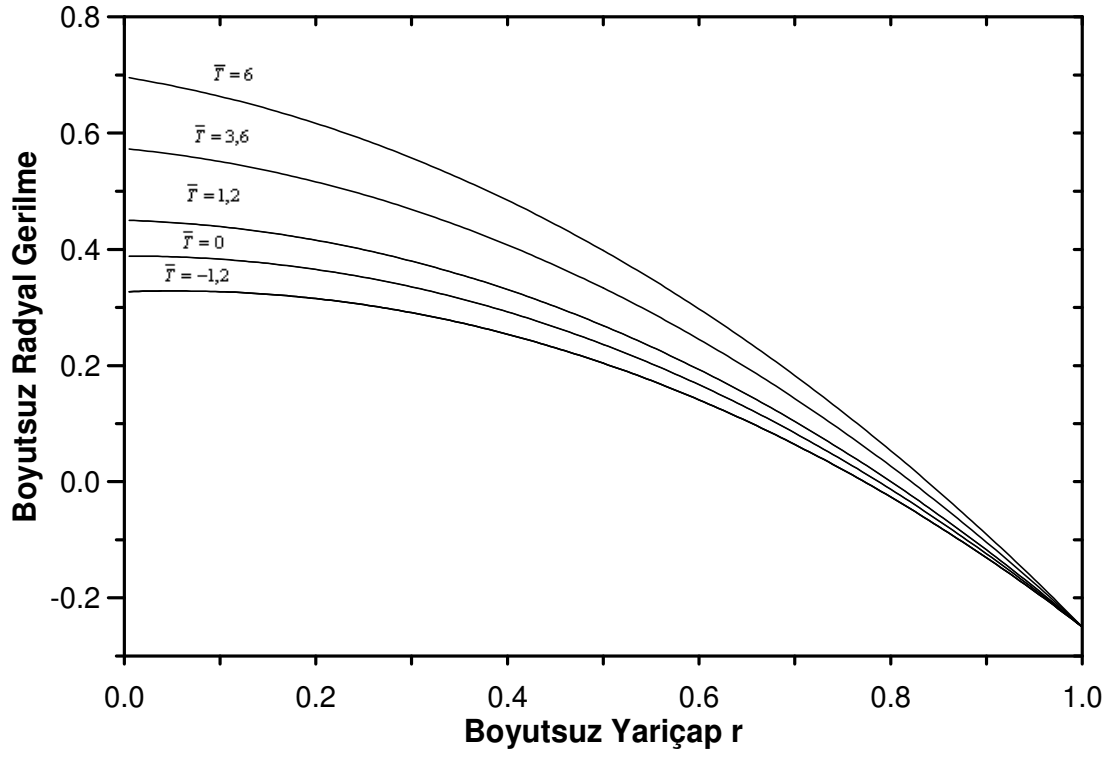
$\bar{a}$, negatif değer aldığı anda da sıcaklığın etkisi ile sabit uçlu şaftın üzerinde aksel bası kuvveti oluşmakta ve bu kuvvet aksel gerilme eğrilerini aşağıya doğru çekmektedir.

Sıcaklığın aksel gerilme üzerinde bu etkisini fazla göstermesi, aksel gerilmenin radyal ve teğet gerilme ile olan farkı artırmakta ve malzemenin tahammül gösterebileceği mukavemetin daha çabuk aşılmasına neden olmaktadır.

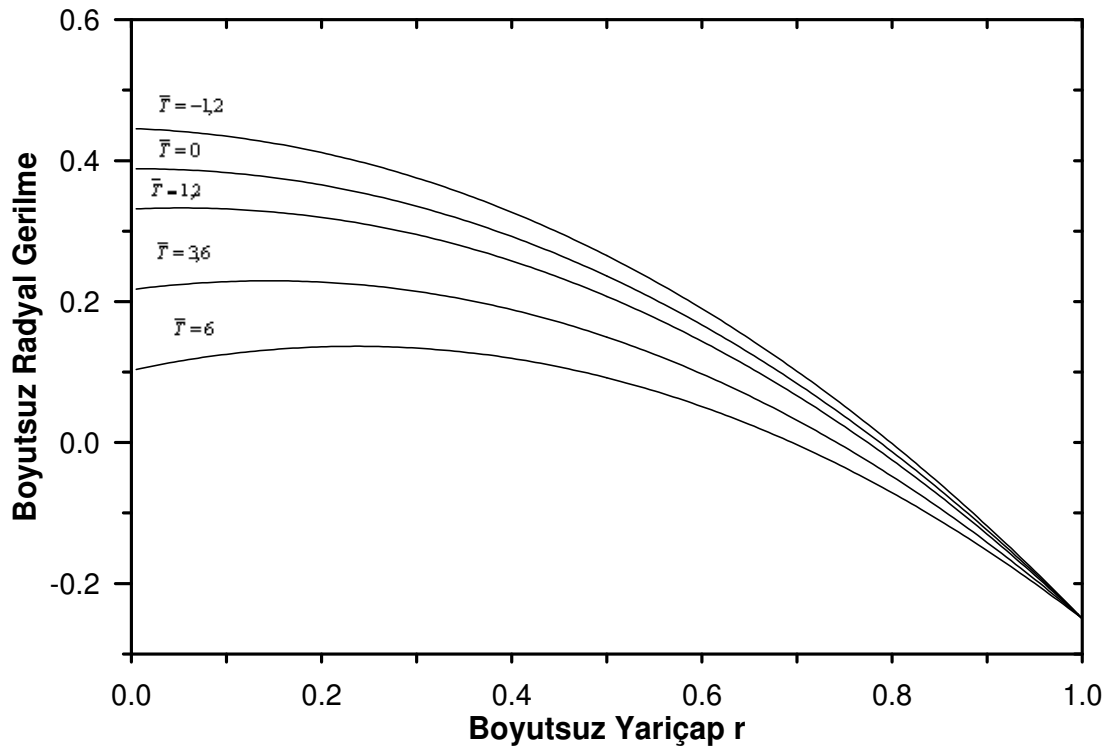
Değişik sıcaklık değerlerinin radyal deplasman üzerinde nasıl bir değişim meydana getirdiği Şekil 3.7'deki grafiklerde görülebilir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$)

Aşağıdaki iki grafikte (Şekil 3.7 ve Şekil 3.8) açıkça görüleceği gibi, radyal deplasman için sıcaklığın etkisi $\bar{a}$ 'nın hem negatif değeri hem de pozitif değeri için artış yönündedir.

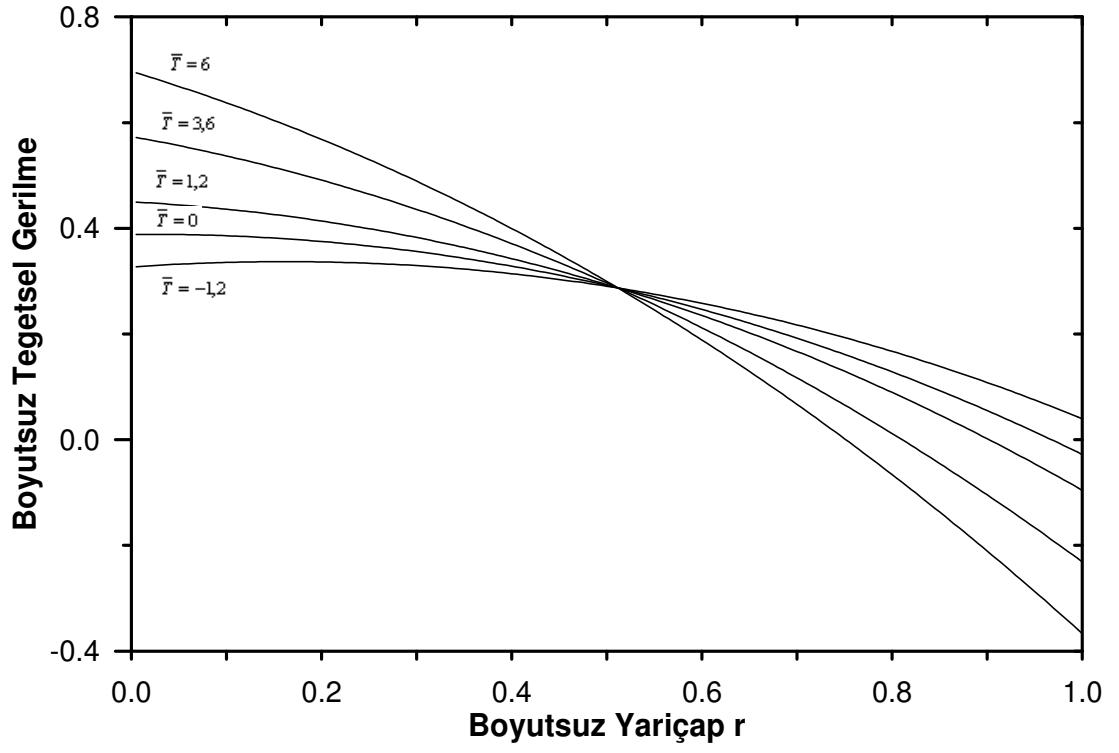
$\bar{a}$, 0,1 yerine -0,1 değeri aldığı anda radyal deplasmanın sıcaklığa göre davranışı aşağıdaki gibi değişmektedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{P} = 0,25$). Bu değişim sıcaklıkla beraber artış yönünde olmasına rağmen, $\bar{a}$ 'nın negatif değer alması radyal deplasman üzerinde bir azalmaya neden olmaktadır.



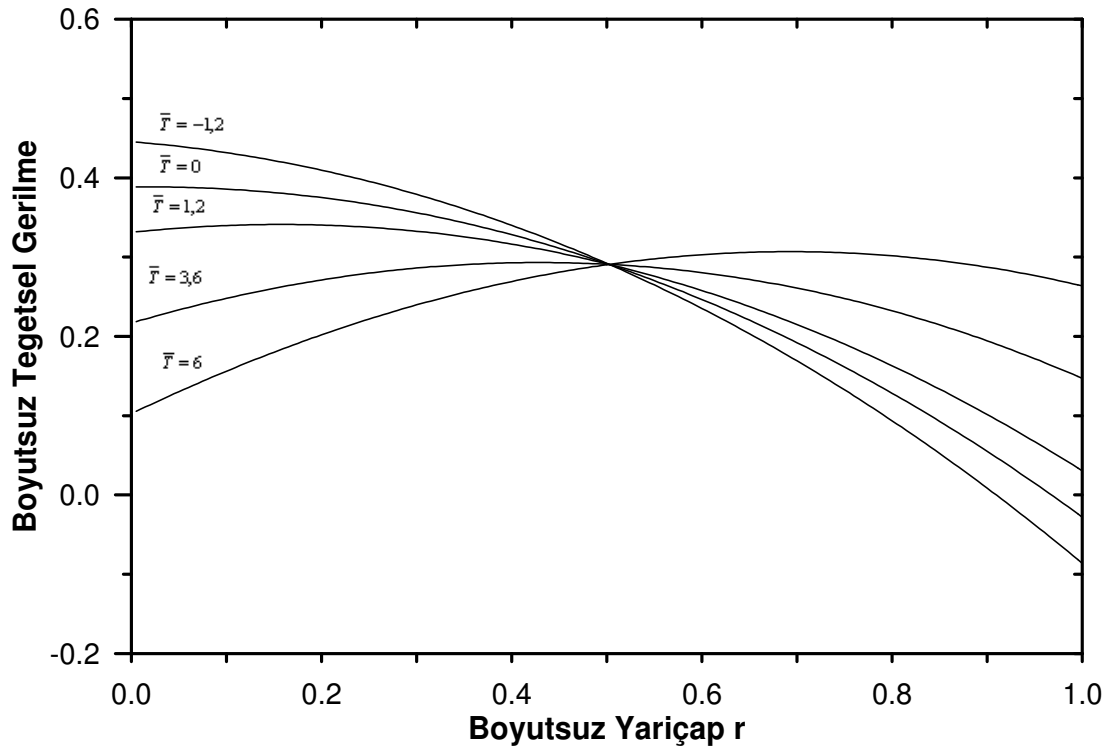
Şekil 3.1. Değişik sıcaklık değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi



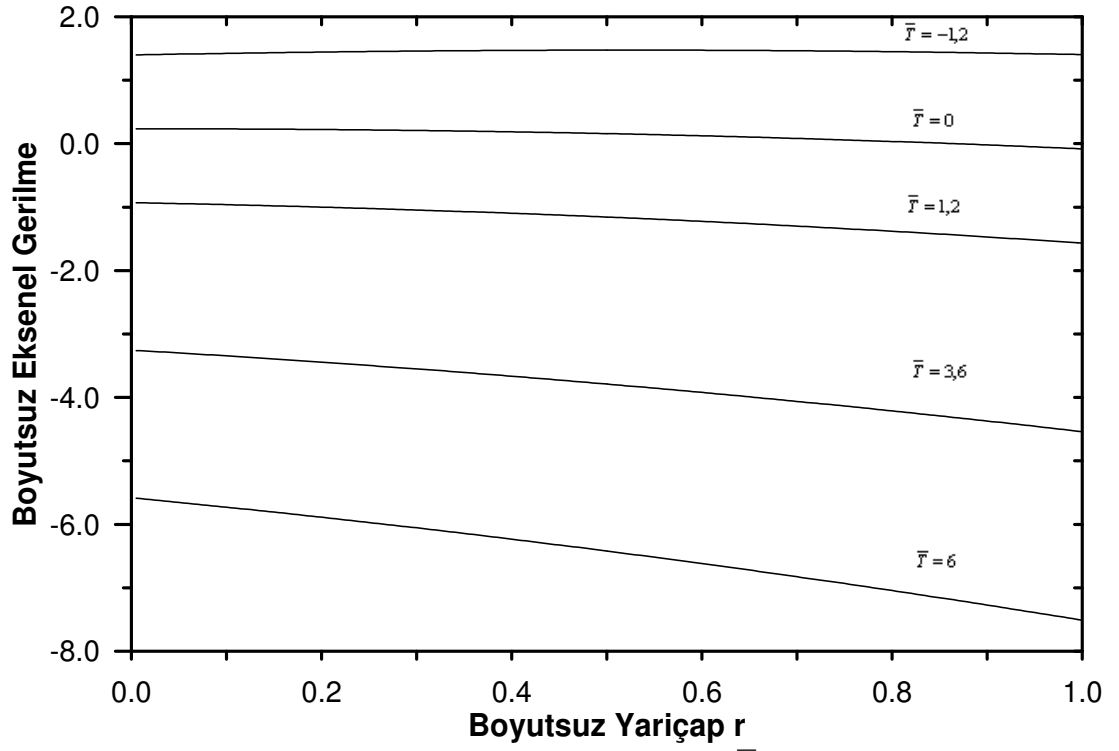
Şekil 3.2. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_r$ 'a etkisi



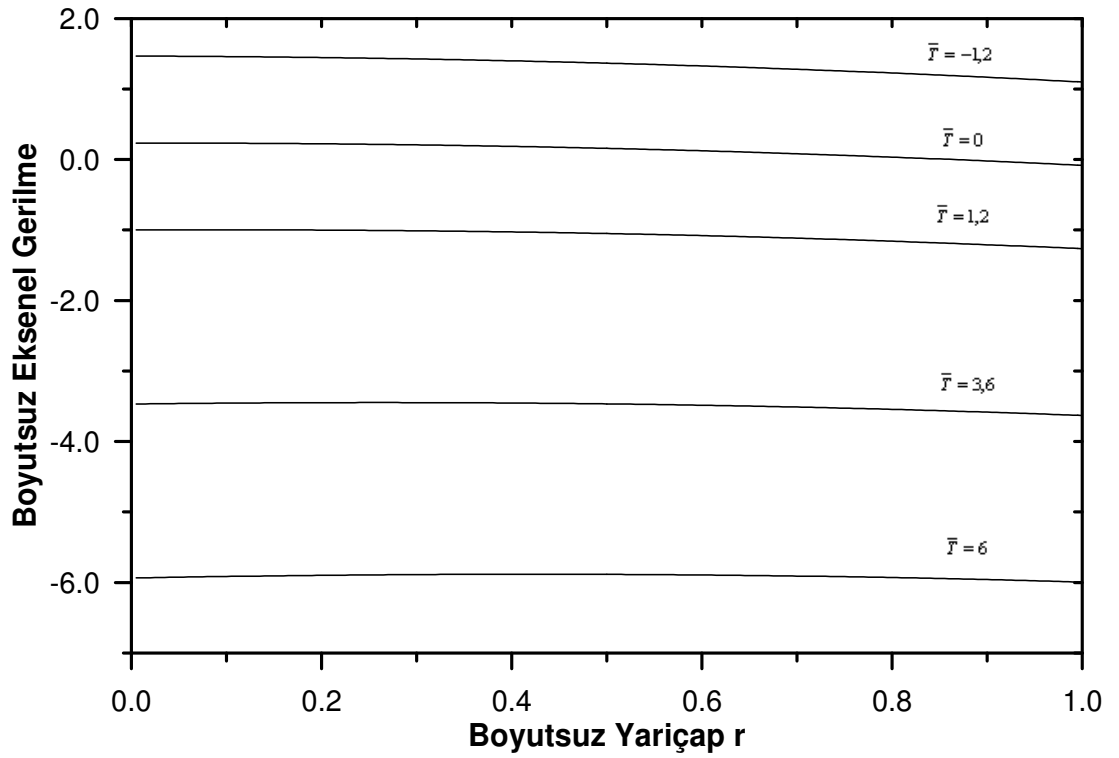
Şekil 3.3. Değişik sıcaklık değerlerinin açısall gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi



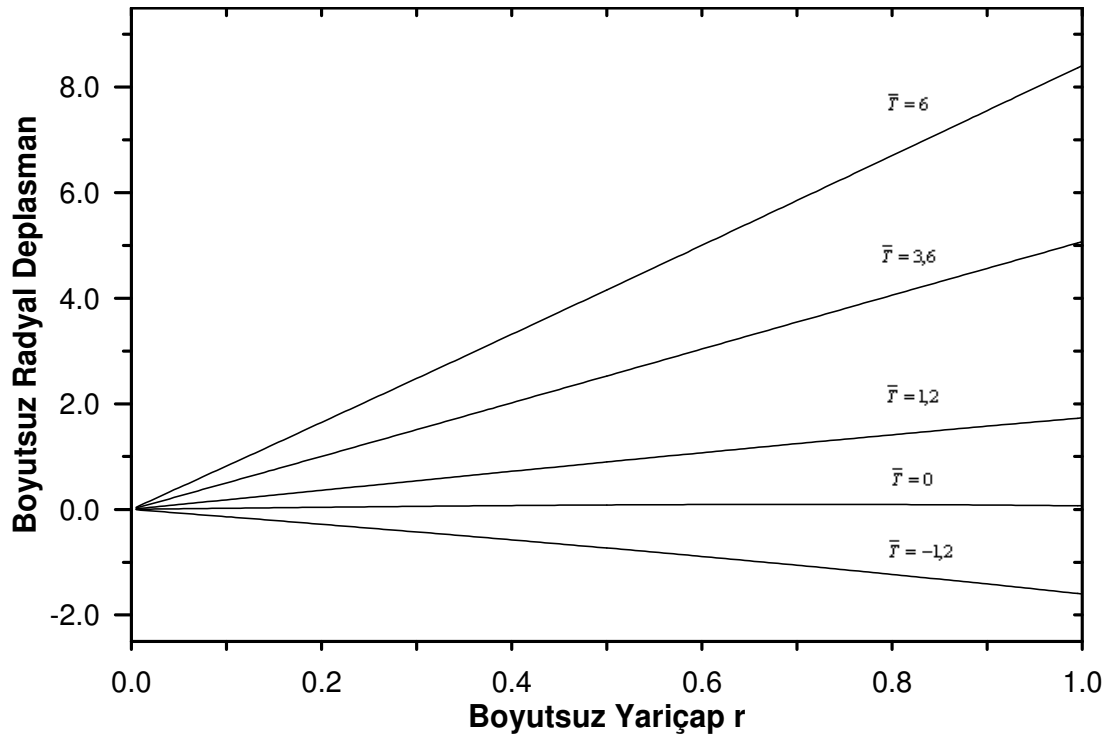
Şekil 3.4. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_\theta$ 'a etkisi



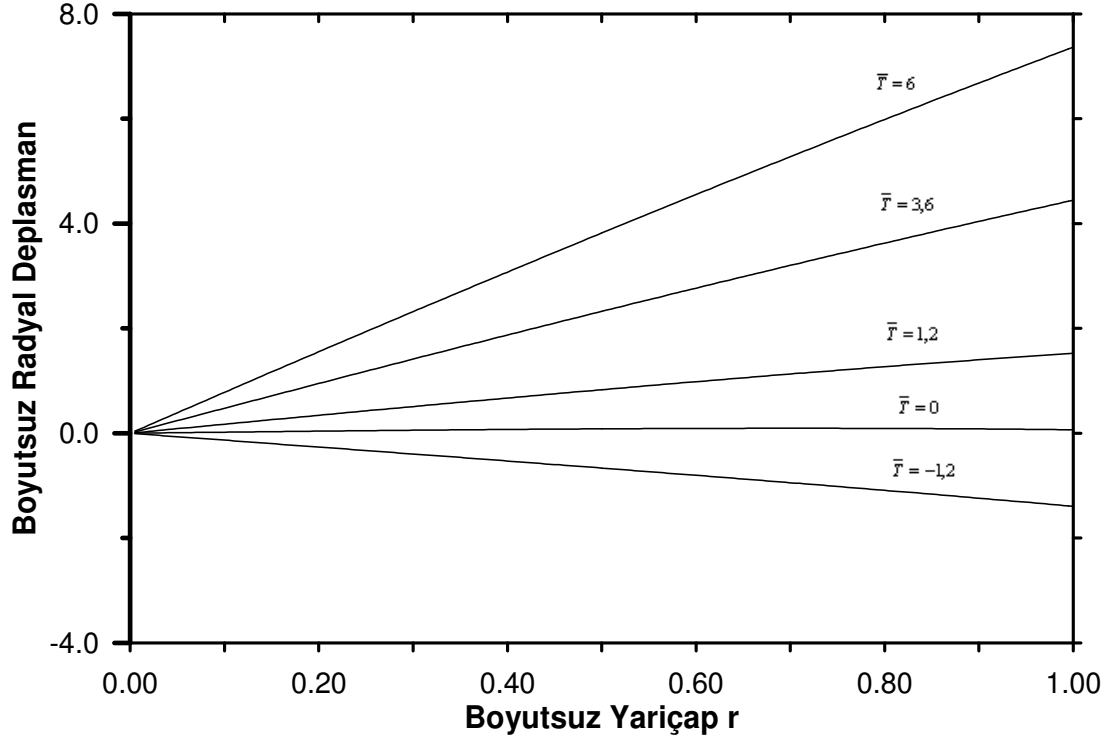
Şekil 3.5. Değişik sıcaklık değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.6. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_z$ 'a etkisi



Şekil 3.7. Değişik sıcaklık değerlerinin radyal deplasman u üzerindeki etkisi



Şekil 3.8. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{u}$ 'ya etkisi

Üniform bir özelliğe sahip olmayan bir çalışma elemanı için en önemli etmenlerden birisi sıcaklık faktörüdür. Sıcaklığın shaft üzerinde hangi bileşenler için daha önemli

olduğu, hangileri için daha az değişime neden olduğunu, yukarıdaki grafiklerle anlaşılmaya çalışılmıştır.

Değişik sıcaklık değerlerinde şaftın uçlarında oluşan aksenal kuvvetler hesaplanmış ve aşağıda tablo olarak verimiştir. ($\nu=0,3$, $\bar{\beta}=0,1$, $\bar{\Omega}=1,4$, $\bar{\gamma}=0,1$, $\bar{a}=0,1$, $\bar{P}=0,25$)

Uçları sabit olan şaftta, sıcaklığın en önemli etkisi uçlarında aksenal bası kuvvetinin oluşmasına neden olmasıdır.

Çizelge 3.1. Değişik sıcaklıklarda oluşan aksenal kuvvetler

Boyutsuz Sıcaklık	Eksenal Kuvvet (şaft uçlarına etki eden kuvvet) $\times (\sigma_0 \times r^2)$ N
-2.4	8,87
-1.2	4,56
0	0,25
1.2	-4,07
3.6	-12,69
6	-21,32

Çizelge 3.2. $\bar{a} = -0,1$ için değişik sıcaklıklarda oluşan aksenal kuvvet

Boyutsuz Sıcaklık	Eksenal Kuvvet (şaft uçlarına etki eden kuvvet) $\times (\sigma_0 \times r^2)$ N
-2.4	7,79
-1.2	4,02
0	0,25
1.2	-3,52
3.6	-11,06
6	-18,60

Sıcaklıkla beraber çalışma koşullarını temsil eden diğer bir etmen ise basınçtır. Problem içersinde yer alan tüm değerler sabit tutulurken değişik basınç değerlerinin şaft üzerinde oluşan gerilmeler ve deplasman üzerinde nasıl değişik sonuçlar çıkardığı grafikler elde ederek incelenmiştir.

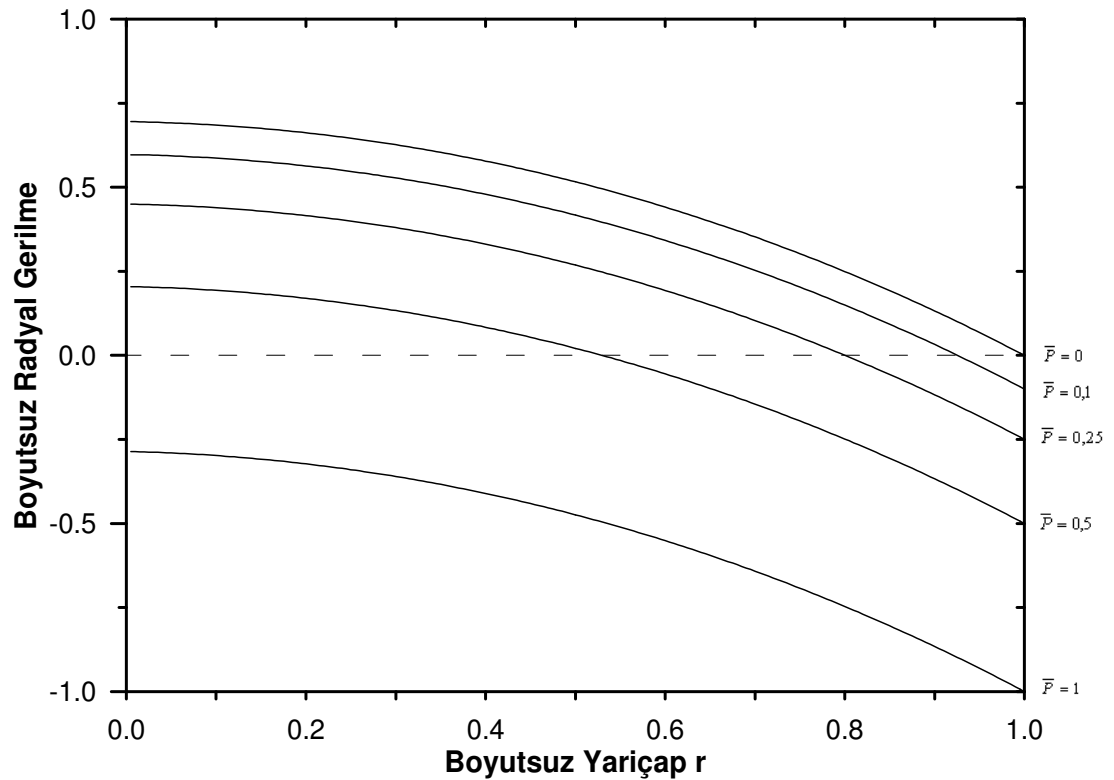
$\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 1,2$, $\bar{a} = 0,1$ değerleri kullanılarak değişik basınçlarda gerilmelerin, radyal deplasmanın nasıl değiştiği aşağıdaki grafiklerde görülmektedir.

Şekil 3.9’de görüldüğü üzere, basıncın artması ile beraber radyal gerilmeye ait eğriler paralel olarak aşağı doğru kaymaktadır.

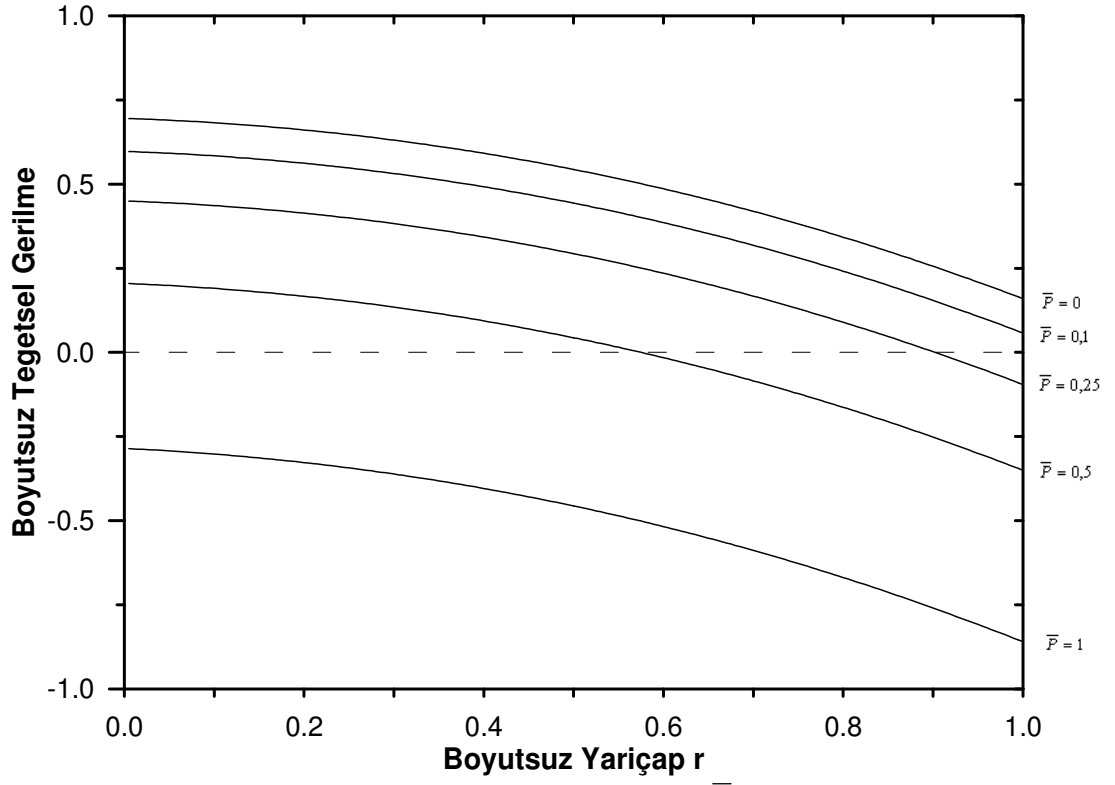
Radyal gerilmede görülen değişim aynı şekilde ve miktarda teğet gerilmede de görülmekte (Şekil 3.10).

Sabit uçlu dönen FGM shaft için basıncın gerilmeye ait eğriyi aşağı doğru kaydırma özelliği aksenal gerilme için de geçerlidir. Bu durum Şekil 3.11’de görülmektedir.

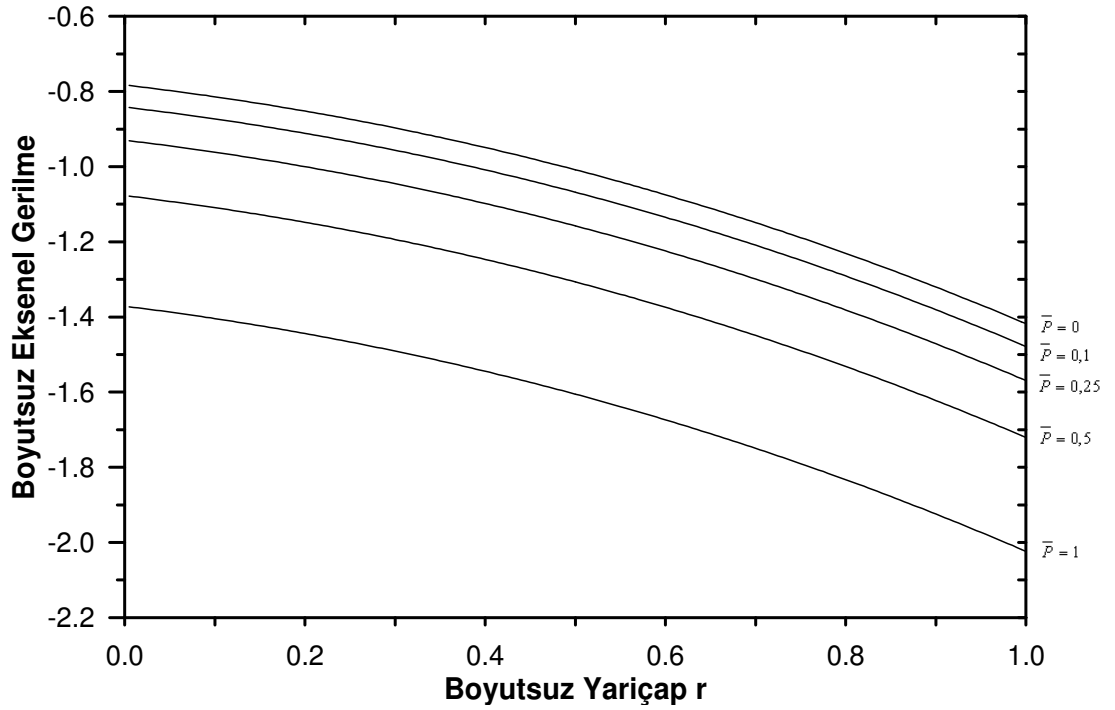
Basıncın radyal deplasman üzerindeki etkisi azaltma yönündedir. Basıncın, radyal deplasmanın dışa doğru yönelmesine engellemeye çalışmaktadır. (Şekil 3.12)



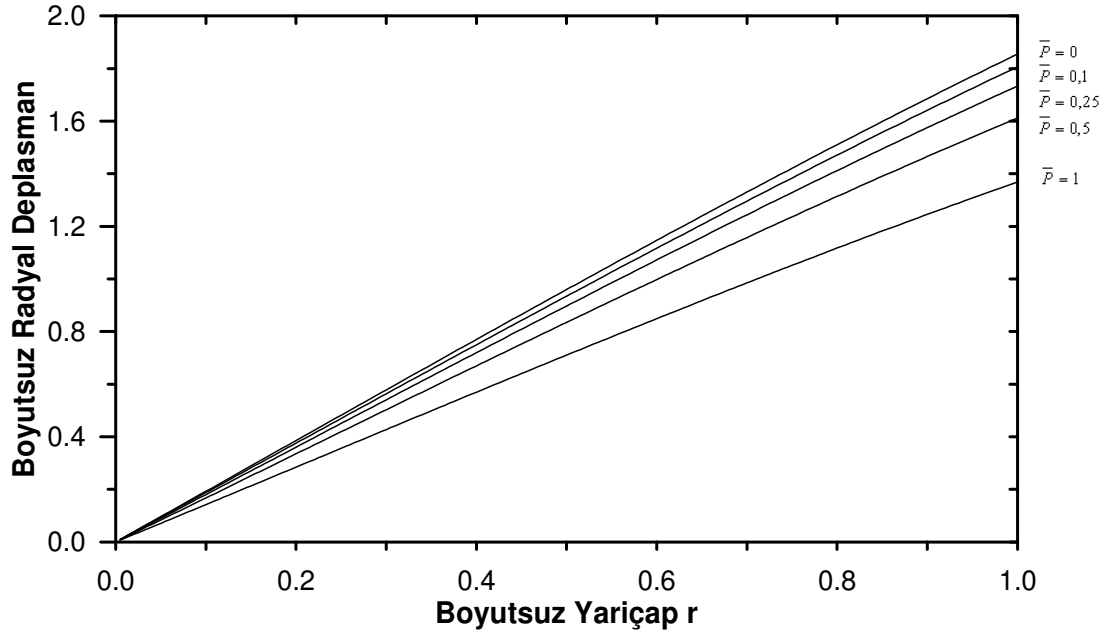
Şekil 3.9. Değişik basınç değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.10. Değişik basınç değerlerinin açısıl gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.11. Değişik basınç değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.12. Değişik basınç değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi

Basınç arttıkça eksenel kuvvet üzerinde bası yönünde artırıcı etki yaptığı değişik basınç değerlerinde eksenel kuvvetlerin hesaplanan değerleri gösteren aşağıdaki çizelgede görülmektedir.

Çizelge 3.3. Değişik basınçlarda oluşan eksenel kuvvetler

Boyutsuz Basınç (σ_0)	Eksenel Kuvvet (şaft uçlarına etki eden kuvvet) x ($\sigma_0 \times r^2$) N
0	-3,6
0.1	-3,78
0.25	-4,07
0.5	-4,54
1	-5,48

($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 1,2$, $\bar{a} = 0,1$)

Şafta ait elastisite modülün dağılımını belirten $\bar{\beta}$ 'nin değişik değerler alması, gerilme bileşenleri ve radyal deplasman üzerine etkimektedir. Bu etkinin ne şekilde gerçekleşebileceği aşağıda incelenmiştir.

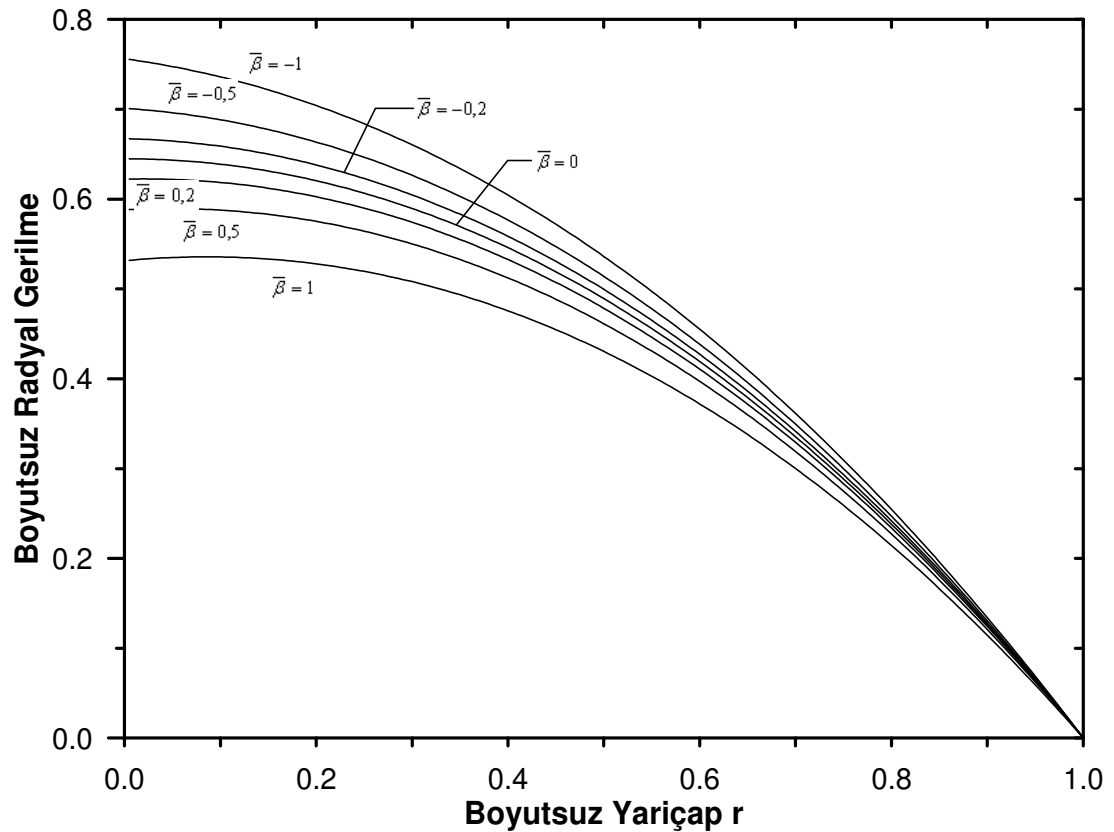
$\nu = 0,3$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 0$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0$ değerleri kullanılarak değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal gerilmeyi nasıl değiştirdiği Şekil 3.13'deki grafikte görülmektedir.

Grafikte görüldüğü gibi, $\bar{\beta}$ değeri arttıkça radyal gerilme eğrisi merkeze doğru gidildikçe artma eğilimi göstermektedir. En dış yüzeyde ise sınır şartı radyal gerilmeye eşit olduğu için eğriler aynı noktada birleşmektedir.

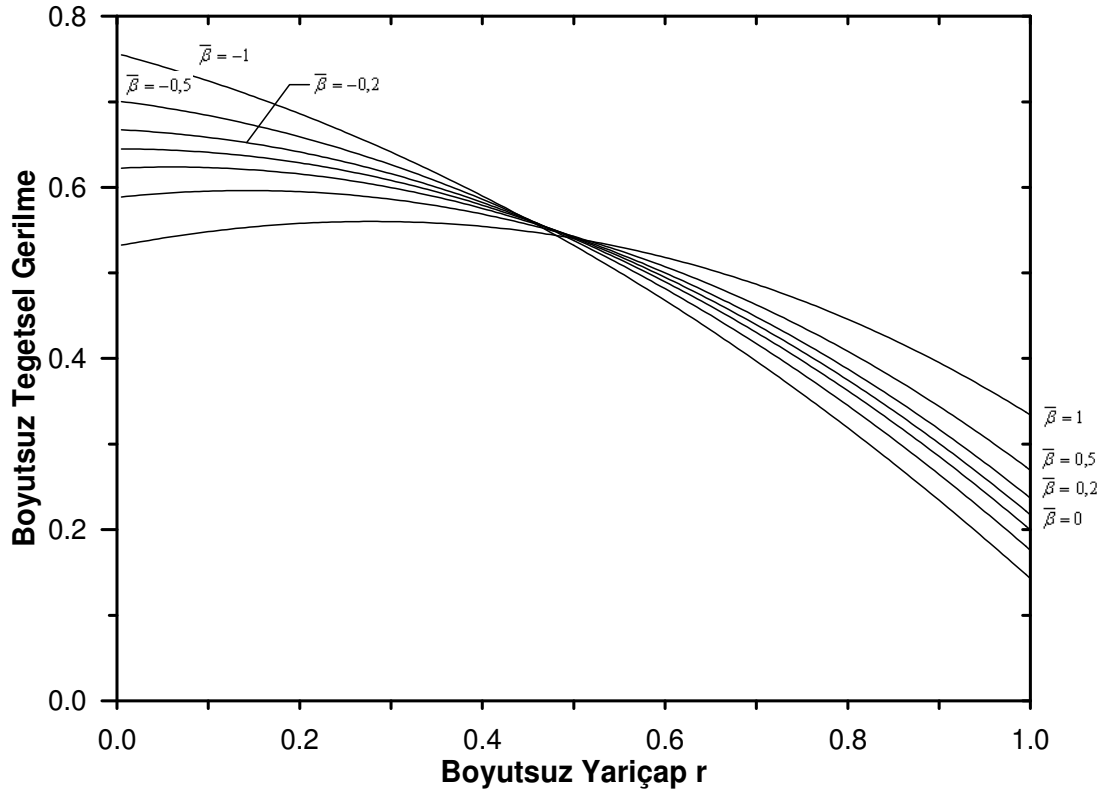
Şekil 3.14'de görüldüğü üzere $\bar{\beta}$ değerinin artması teğetsel gerilmeyi merkezde azaltırken dış yüzeyde artırmaktadır. Eğrilerin karşılıklı geçişmeleri hemen hemen bir noktada kesişmeleri ile sonuçlanmaktadır.

$\bar{\beta}$ 'nin değişik değerleri için elde edilen aksenal gerilmeye ait eğriler aşağıdaki Şekil 3.15'de görülmektedir. $\bar{\beta}$ değeri arttıkça merkezde aksenal gerilme artış yönünde hareket ederken dış yüzeyde azalmaktadır.

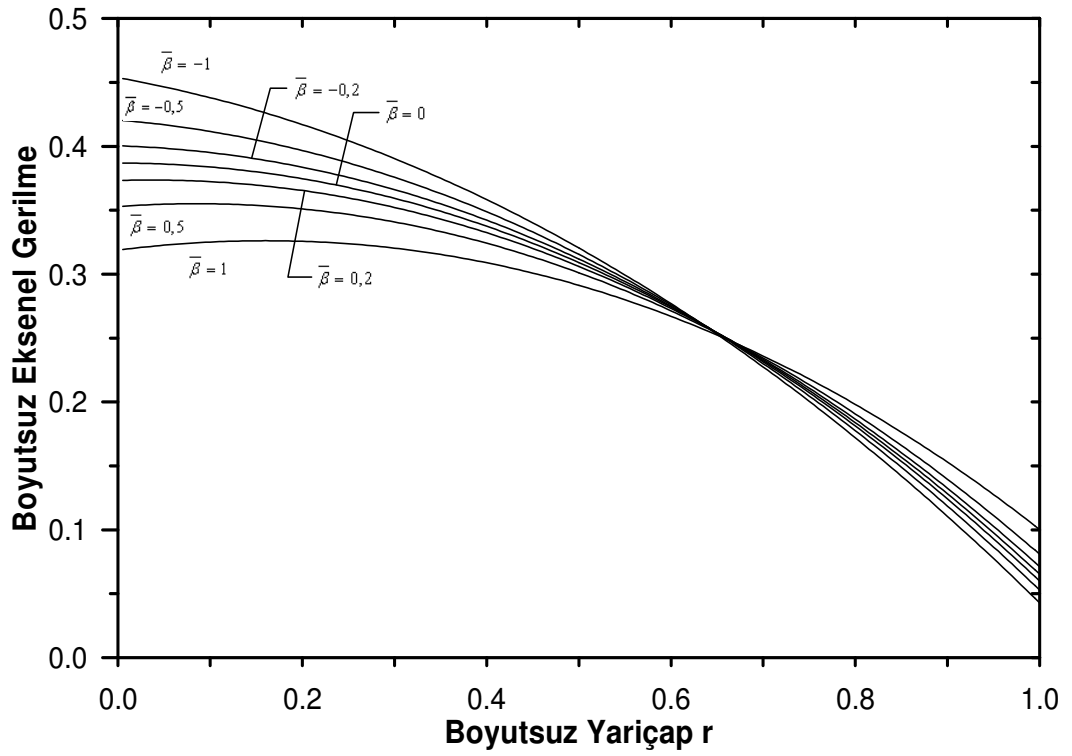
$\bar{\beta}$ 'nin artan değerleri radyal deplasmanın baskı altına alınmasına neden olmaktadır. Bu durum Şekil 3.16'da görülebilmektedir.



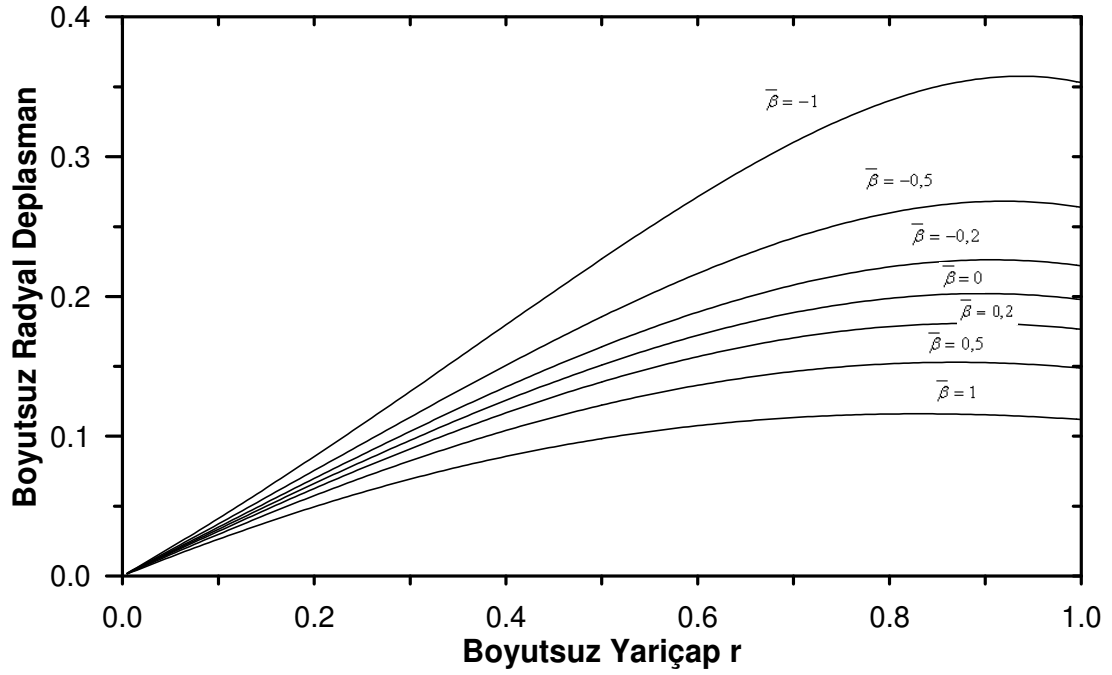
Şekil 3.13. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.14. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin teğet gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.15. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.16. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi

$\bar{\beta}$ değerinin artış göstermesi eksenel kuvvetin bası yönünde artmasına neden olmaktadır. Bu durum aşağıdaki çizelgede görülmekte.

Çizelge 3.4. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinde oluşan eksenel kuvvetler

$\bar{\beta}$ Katsayısı	Eksenel Kuvvet (şaft uçlarına etki eden kuvvet) x ($\sigma_0 \times r^2$) N
-1	-1,40
-0,5	-2,18
-0,2	-2,81
0	-3,31
0,2	-3,90
0,5	-4,96
1	-7,39

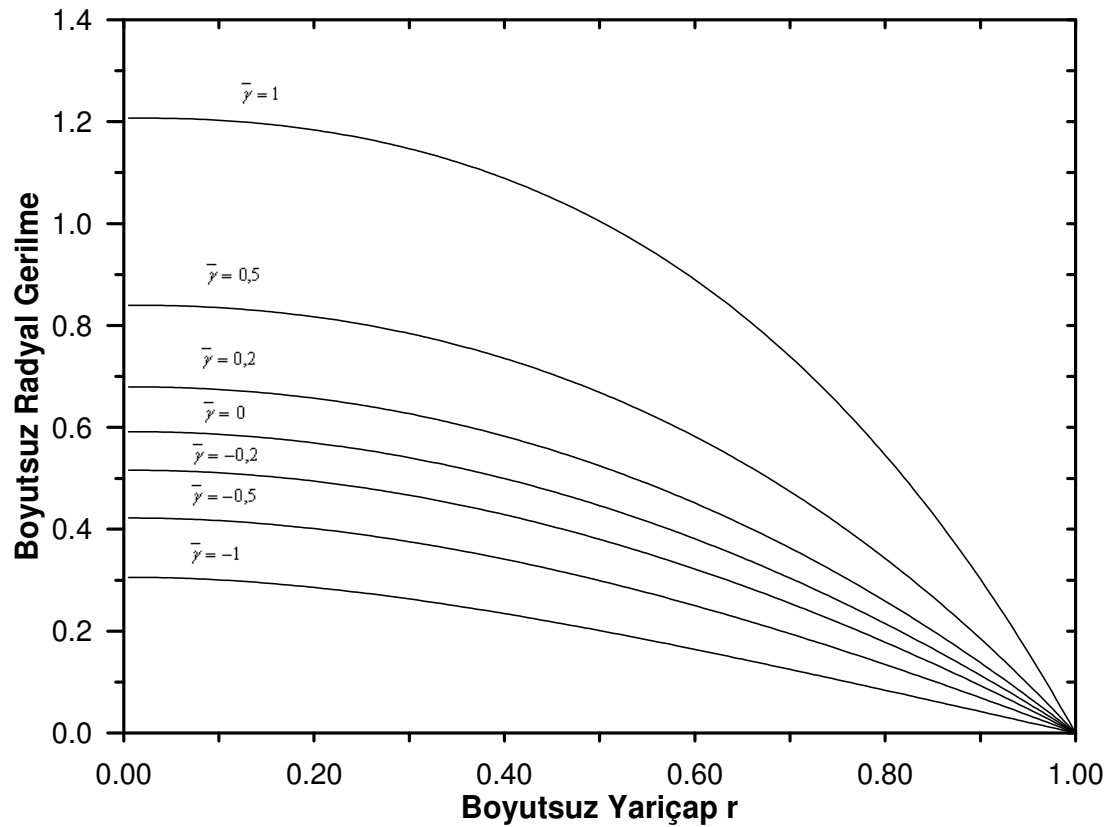
FGM şaft farklı iki malzemenin karışımından elde edilen bir malzemeye sahip olduğu için özgül ağılıkta bir dağılım söz konusu olmaktadır. Bu dağılımı da ifade eden $\bar{\gamma}$ değeridir. $\nu=0,3$, $\bar{\beta}=0,1$, $\bar{\Omega}=1,4$, $\bar{T}=0$, $\bar{a}=0,1$, $\bar{P}=0$ değerleri kullanılarak, $\bar{\gamma}$ değerinin değişik değerler almasının gerilmeleri ve radyal deplasmanı ne şekilde etkilediği aşağıda incelenmiştir.

$\bar{\gamma}$ değerinin artması, radyal gerilmenin merkeze doğru gidildikçe Şekil 3.17’de görüldüğü gibi artış göstermesine neden olmaktadır.

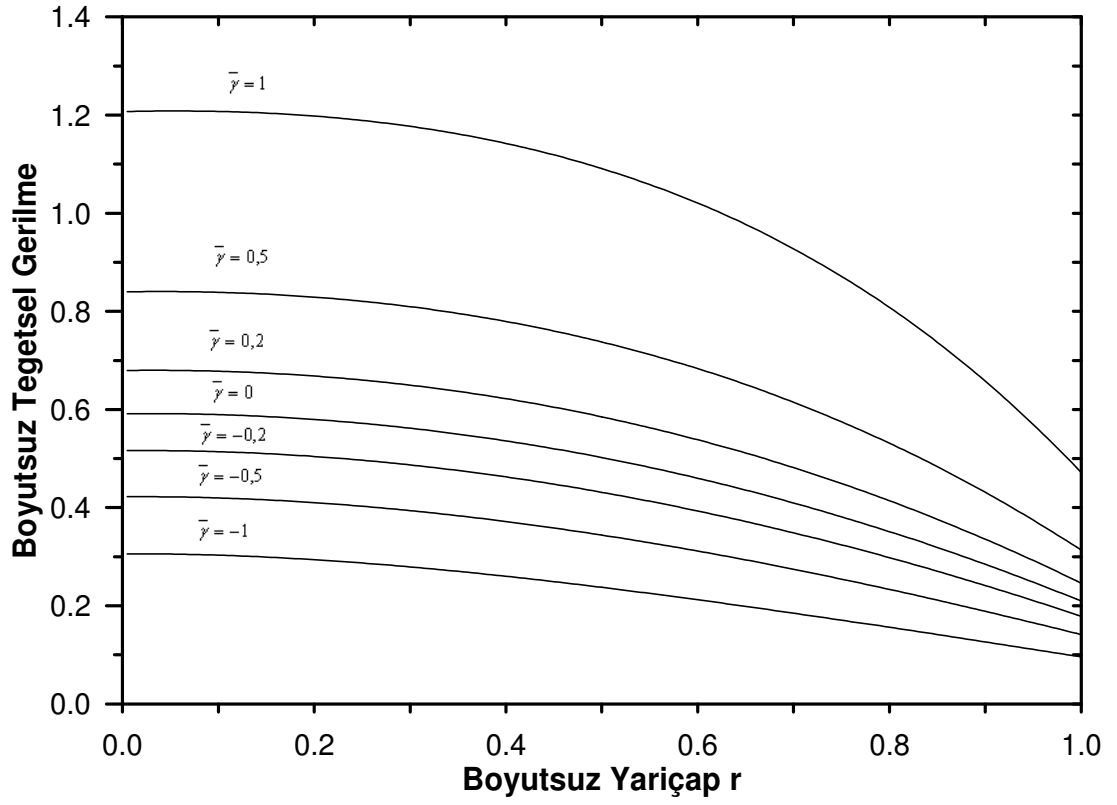
$\bar{\gamma}$ değerindeki artış teğet gerilmeye ait eğrilerde yukarı doğru harekete neden olmaktadır. Artış yönündeki bu hareket şaftın merkezinde daha fazla görülmektedir (Şekil 3.18).

Eksenel gerilmedeki değişim teğetsel gerilmeye benzer şekilde oluştuğu görülmektedir (Şekil 3.19).

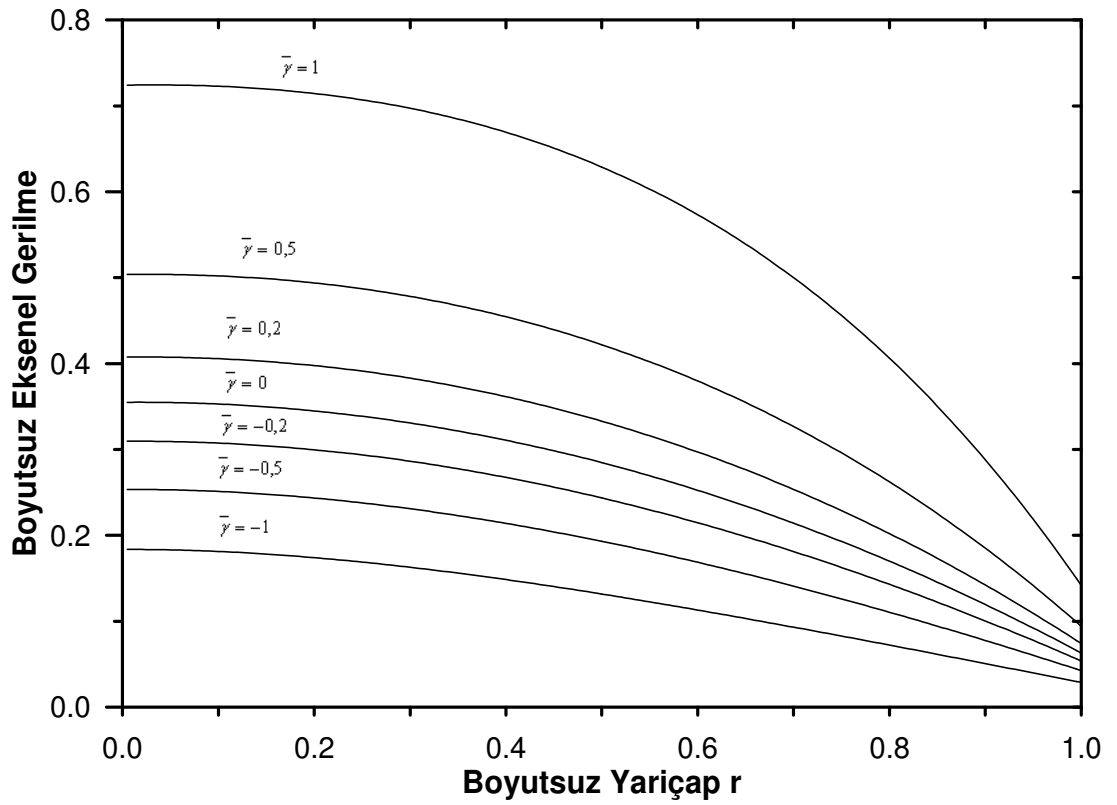
$\bar{\gamma}$ değerindeki artış Şekil 3.20’ye göre radyal deplasmanın yukarı doğru artış göstermesine neden olmaktadır.



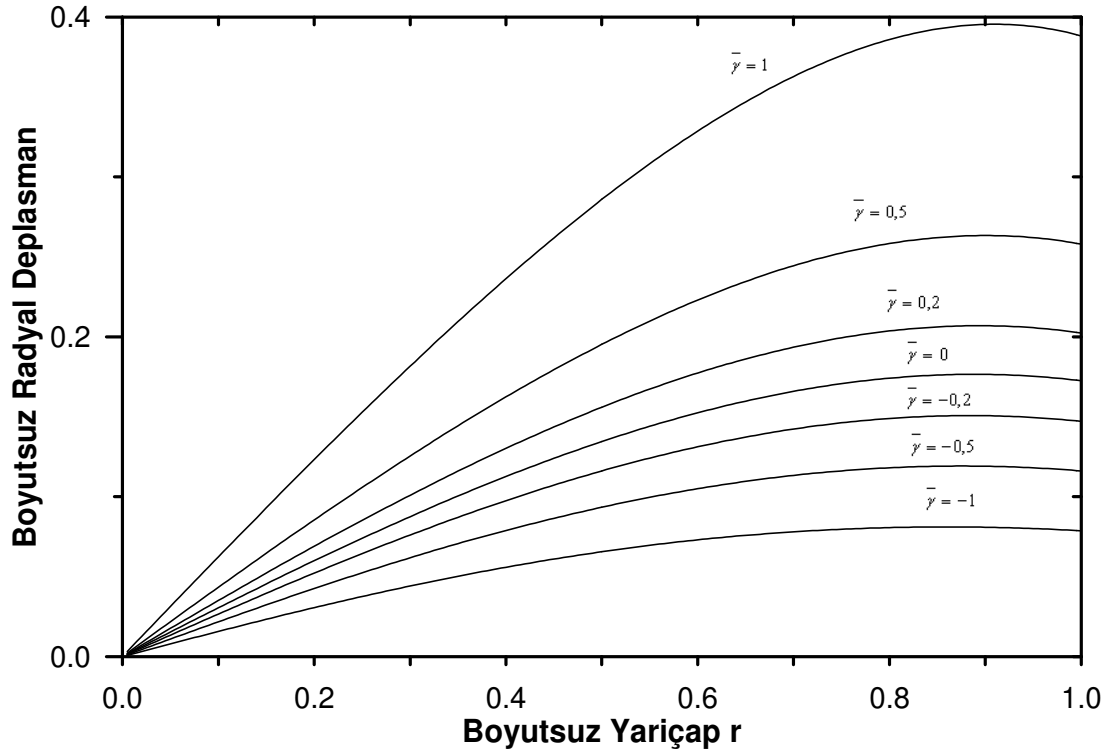
Şekil 3.17. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.18. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin teğet gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.19. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.20. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi

Aşağıdaki çizelgede $\bar{\gamma}$ değerinin artması ile bası yönündeki eksenel kuvvetin azaldığı görülmektedir.

Çizelge 3.5. Değişik γ değerlerinde oluşan eksenel kuvvetler

$\bar{\gamma}$ Katsayısı	Eksenel Kuvvet (şaft uçlarına etki eden kuvvet) $\times (\sigma_0 \times r^2)$ N
-1	-4,01
-0,5	-3,87
-0,2	-3,75
0	-3,65
0,2	-3,54
0,5	-3,32
1	-2,82

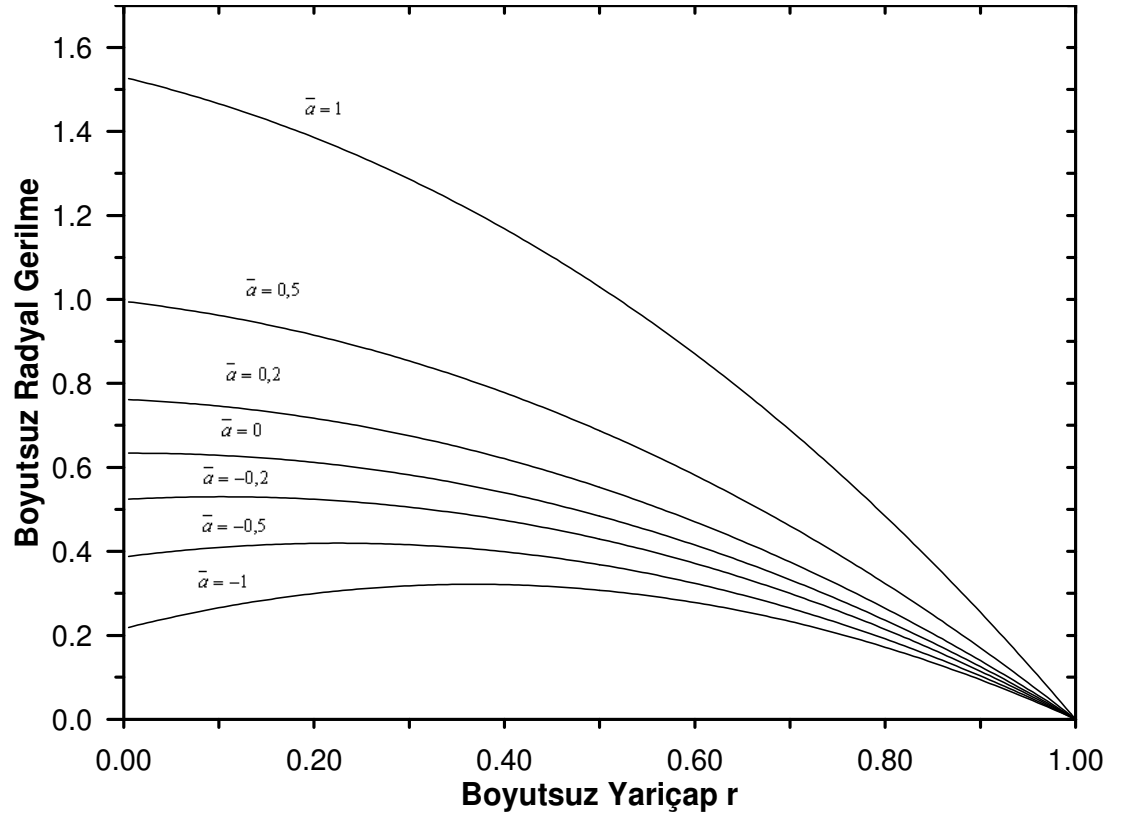
Termal genleşme katsayısına ait dağılımı belirten $\bar{a}$ değeri malzemenin sıcaklığa karşı hassasiyetini ortaya koymaktadır. $\bar{a}$ 'nın değişik değerler almasının beraberinde

getirdiği etkiler aşağıda grafikler elde edilerek incelenmiştir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 1,2$, $\bar{P} = 0$)

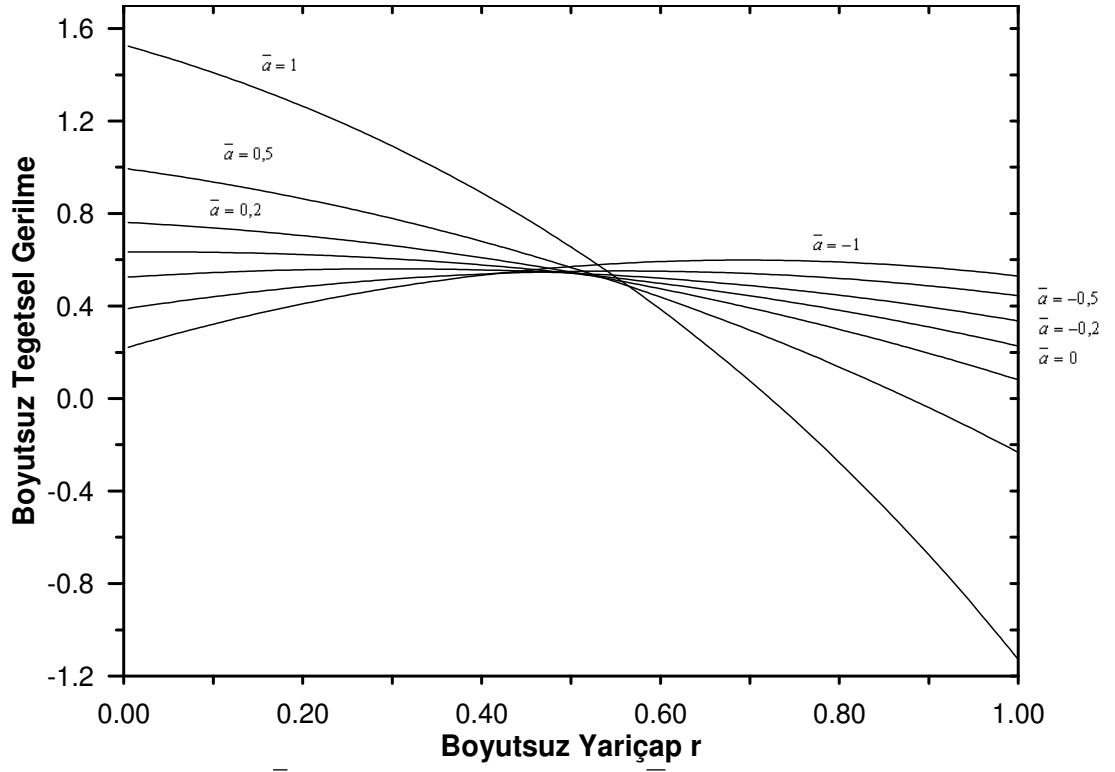
$\bar{a}$ değerinin artış göstermesi teğet gerilmenin daha geniş bir aralıkta dağılım göstermesine neden olmaktadır. Teğet gerilme, merkezde artarken dış yüzeye doğru azalma eğilimi göstermektedir (Şekil 3.21).

$\bar{a}$ değerindeki artış eksenel gerilmenin de daha geniş bir aralıkta dağılım göstermesine neden olmaktadır. Teğet gerilme üzerinde görülen etki aynı şekilde eksenel gerilme üzerinde de görülmekte. Ancak eksenel gerilme eğrilerinin birbirleri ile kesiştikleri bölge merkeze daha yakındır (Şekil 3.22).

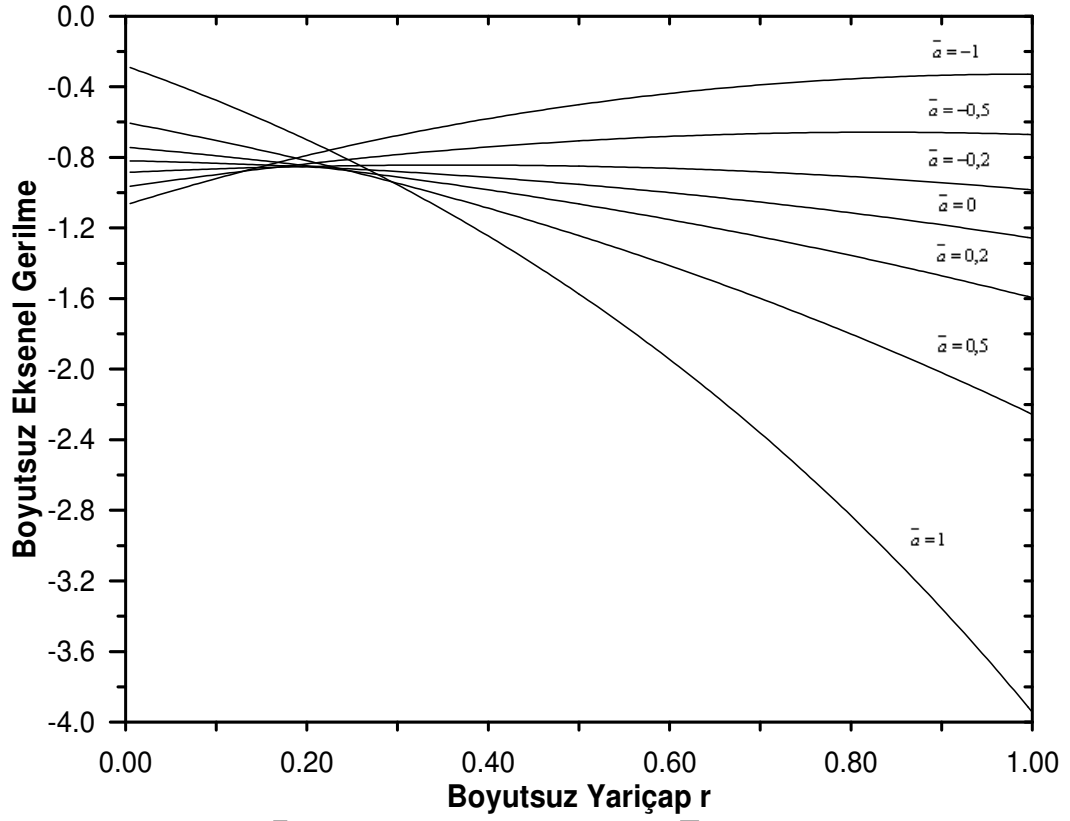
Şekil 3.23’de, $\bar{a}$ değerindeki artışın radyal deplasmandaki eğilimi yukarı doğru gerçekleştirdiği görülmekte.



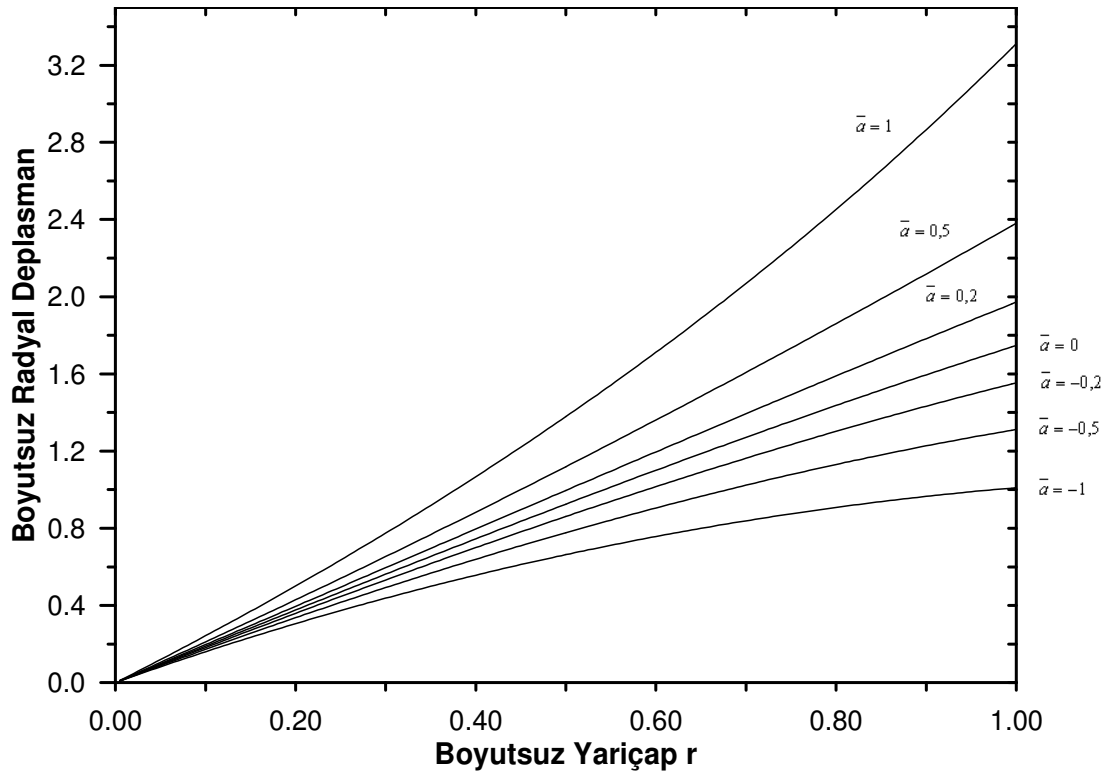
Şekil 3.21. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin radyal gerilme $\bar{\sigma}_r$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.22. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin teğet gerilme $\bar{\sigma}_\theta$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.23. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.24. Değişik $\bar{a}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi

$\bar{a}$ değerindeki artışın aksenal kuvvetin bası kuvveti olarak artışına neden olduğu aşağıdaki çizelgede görülmektedir.

Çizelge 3.6. Değişik $\bar{a}$ değerlerinde oluşan aksenal kuvvetler

$\bar{a}$ Katsayısı	Eksenal Kuvvet (şaft uçlarına etki eden kuvvet) x $(\sigma_0 \times r^2)$ N
-1	-1,40
-0,5	-2,18
-0,2	-2,81
0	-3,31
0,2	-3,90
0,5	-4,96
1	-7,37

FGM şaftın mekanik özelliklerinin yarıçap boyunca dağılımın belirleyen $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin, şaftın sahip olduğu mukavemetin tahammül edebileceği maksimum hızı artırma yönünde etkilerinin olup olmadığı şaftın merkezinde Treca akma kriteri dikkate alınarak incelenmiştir.

Sıcaklık ve basınç FGM şaftın çalışma koşullarını belirtmektedir. $\bar{T} = 0,36$ ve $P = 0,1$ olduğu bir ortamda $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin şaftın performansına (şaft hızı) olan etkileri aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 3.7. $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin sabit uçlu şaftın hızına etkisi

$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{a}$	$\bar{\Omega}_{\max}$
0	0	0	3,97
1	0	0	4,76
0	1	0	7,68
0	0	1	4,25
1	1	1	10,08

(Poisson oranı 0,3 alınmıştır)

Yukarıdaki tabloda $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerine atfedilen 1 değeri mutlak bir değer olmayıp, bu değerlerin alabilecekleri pozitif değerlerin şaft hızını artırıcı yönde etkiye sahip olduğunu göstermektedir. Sözkonusu 1 değerinin -1 olması durumunda ise $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin alacakları negatif değerleri işaret etmektedir.

Yukarıdaki çizelgede, sabit uçlu dönen şaft için $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ 'nın pozitif değerler alması şaft merkezindeki akmanın daha yüksek hızlarda oluşmasını sağladığı görülmektedir.

3.2. Uçları Serbest Dönen FGM Şaftta Sıcaklık, Basınç, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ Parametrelerinin Gerilmeler ve Deplasmana Etkisi

Bu bölümde, sıcaklığın, basıncın, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin uçları serbest olarak dönen FGM şaft üzerinde oluşan gerilmeleri ne yönde etkilediği ve bu etkilerin uçları sabit olarak dönen şaftta olan etkilerden farklı olup olmadığı grafikler çizerek incelenmiştir. Yine aynı yöntem kullanılmış olup, tüm değerler sabit tutulurken sisteme etkisi araştırılan veri değişik değerlerde alınmış ve grafikler elde edilmiştir.

Serbest uçlu şaft ve sabit uçlu şaft için bulunan, σ_r 'ın çözümünü veren diferansiyel denklemin aynı olması nedeni ile serbest uçlu dönen şaftta radyal gerilmenin çözümü sabit uçlu dönen şafttaki ile aynıdır. Bu durum aynı şekilde Teğetsel gerime (σ_θ) için de geçerli olduğundan; bu bölümde sadece yukarıda adı geçen parametrelerin aksel gerilme ve radyal deplasmana olan etkileri incelenmiştir.

Eksenel gerilme için elde edilen eğriler sabit uçlu dönen şafttan farklı olarak birbirleri ile bir noktada kesişmektedir. Sabit uçlu şaftta sıcaklığın aksel gerilmeye olan etkisi daha fazla olmakta ve aksel gerilmenin bası kuvveti yönünde gelişmesine neden olmaktadır. Serbest uçlu şaftta ise aksel gerilme aksel kuvvet sıfır olacak şekilde dağılım göstermektedir.

Şekil 3.25'de sıcaklık artışı aksel gerilmenin dağılımını artırmaktadır. Bu dağılım merkezde artış, şaft yüzeyine doğru azalma yönündedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0$)

Şekil 3.26'da, $\bar{a}$ 'nın negatif değer alması, sıcaklığın aksel gerilme üzerindeki etkisini merkeze yakın yerlerde azalma, şaft yüzeyine doğru yerlerde artma yönünde değiştirmektedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{P} = 0$)

Şekil 3.27'de, sıcaklığın radyal deplasman üzerindeki etkisinin azaltıcı yönde olduğu görülmektedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0$)

Şekil 3.28'e göre, $\bar{a}$ 'nın negatif değer alması ile beraber sıcaklığın radyal deplasman üzerindeki azaltıcı etkisi tersine dönmekte ve artış yönünde gerçekleşmektedir.

Şekil 3.29'da basıncın aksel gerilme üzerinde çok az bir etkisi olduğu görülmekte. Şaftın uçlarının serbest olması nedeni ile basınç şafttaki aksel gerilme üzerinde bası yönünde etki oluşturmadağı görülmekte. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 1,2$, $\bar{a} = 0,1$)

Basınç radyal deplasmanın tersi yönünde etki ettiği için basınçtaki artış radyal deplasmana ait eğrilerin aşağı doğru hareketine neden olmaktadır. Bu durum Şekil 3.30'da açıkça görülmektedir.

$\bar{\beta}$ 'nin artışı ile beraber eksenel gerilme üzerinde oluşan değişimler Şekil 3.31'de görülmektedir.

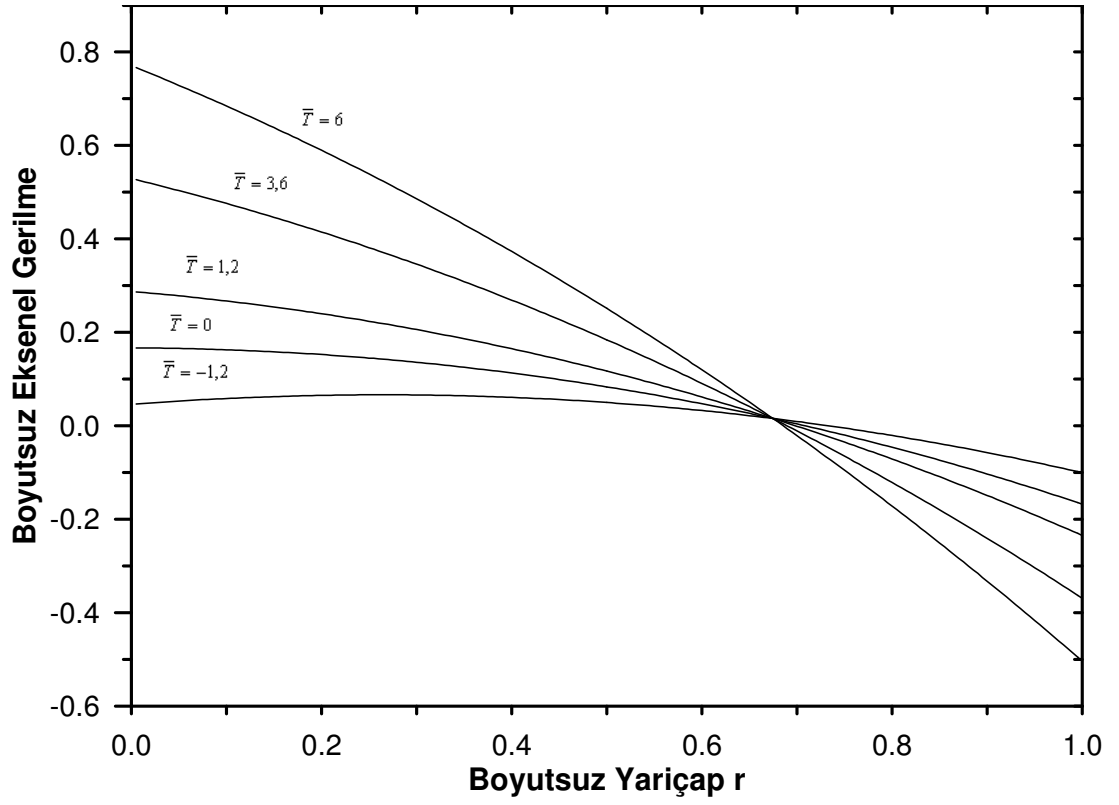
Radyal deplasmanın $\bar{\beta}$ 'nin artışı ile beraber azalma gösterdiği Şekil 3.32'de görülmektedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 0$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0$)

Şekil 3.33'de, $\bar{\gamma}$ değeri arttıkça, shaft yüzeyinin altında bir noktada kesişen eksenel gerilmeye ait eğriler, merkeze doğru gidildikçe artış gösterirken, shaft yüzeyine doğru azalma göstermektedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{T} = 0$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0$)

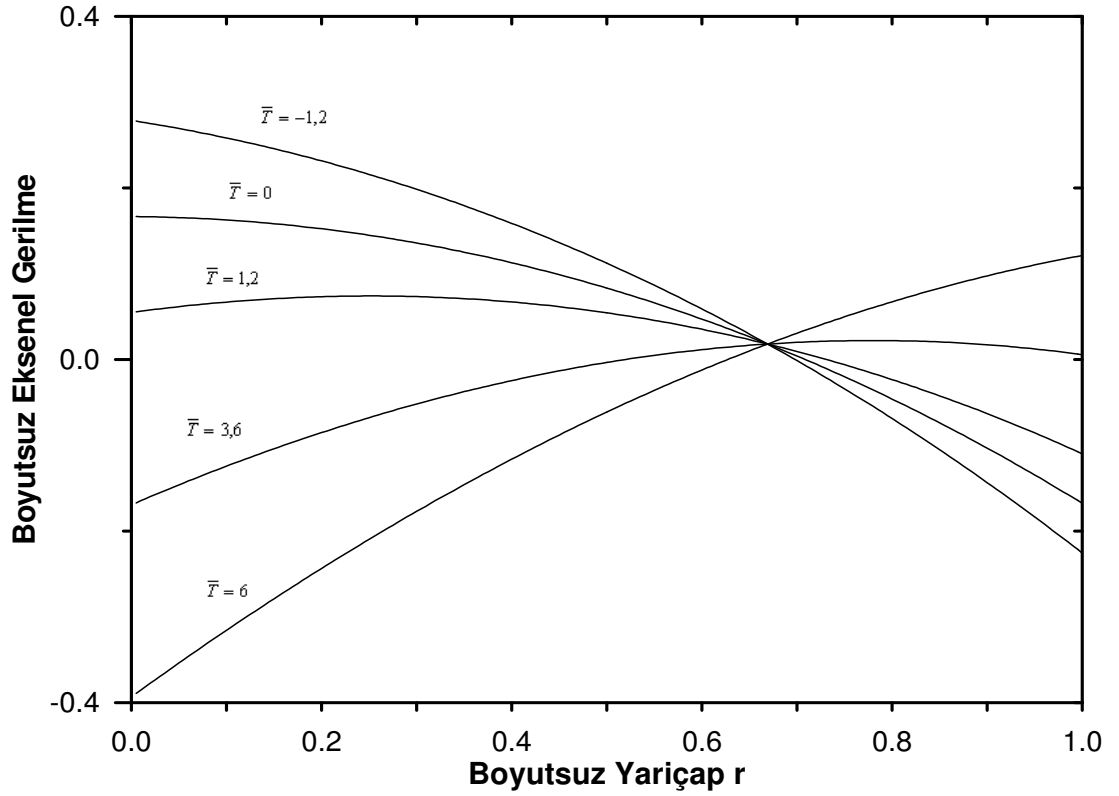
Şekil 3.34'de, Radyal deplasman, $\bar{\gamma}$ 'nin artması ile artış göstermektedir. $\bar{\gamma}$ değeri arttıkça radyal deplasmana ait eğriler grafiğin daha üst kısımlarından geçmektedir. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{T} = 0$, $\bar{a} = 0,1$, $\bar{P} = 0$)

Şekil 3.35'de, $\bar{a}$ değerindeki artışın merkezde eksenel gerilmeyi artırırken, bu değişim shaft yüzeyine yakın yerlerde azalma yönündedir. Sonuçta gerilmenin dağılım gösterdiği aralık genişlemektedir.

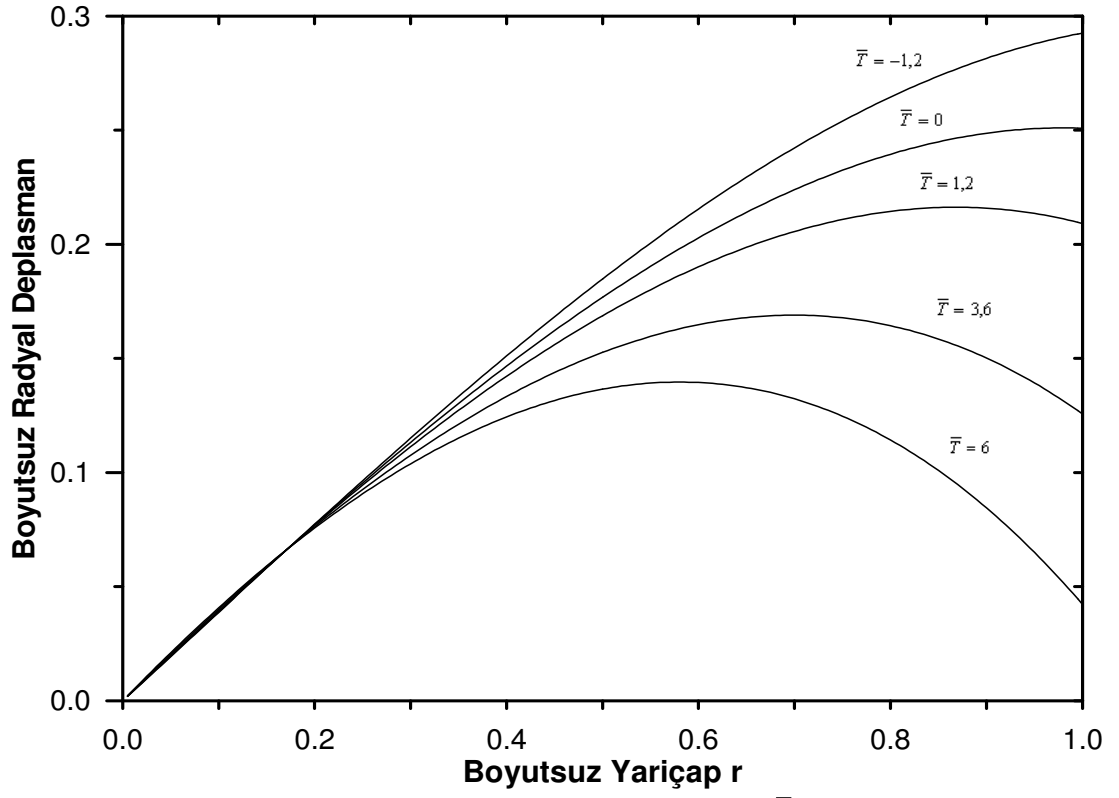
Şekil 3.36'da $\bar{a}$ değeri arttıkça radyal deplasman eğrileri aşağı doğru eğilim gösterdiği görülmekte. ($\nu = 0,3$, $\bar{\beta} = 0,1$, $\bar{\Omega} = 1,4$, $\bar{\gamma} = 0,1$, $\bar{T} = 1,2$, $\bar{P} = 0$)



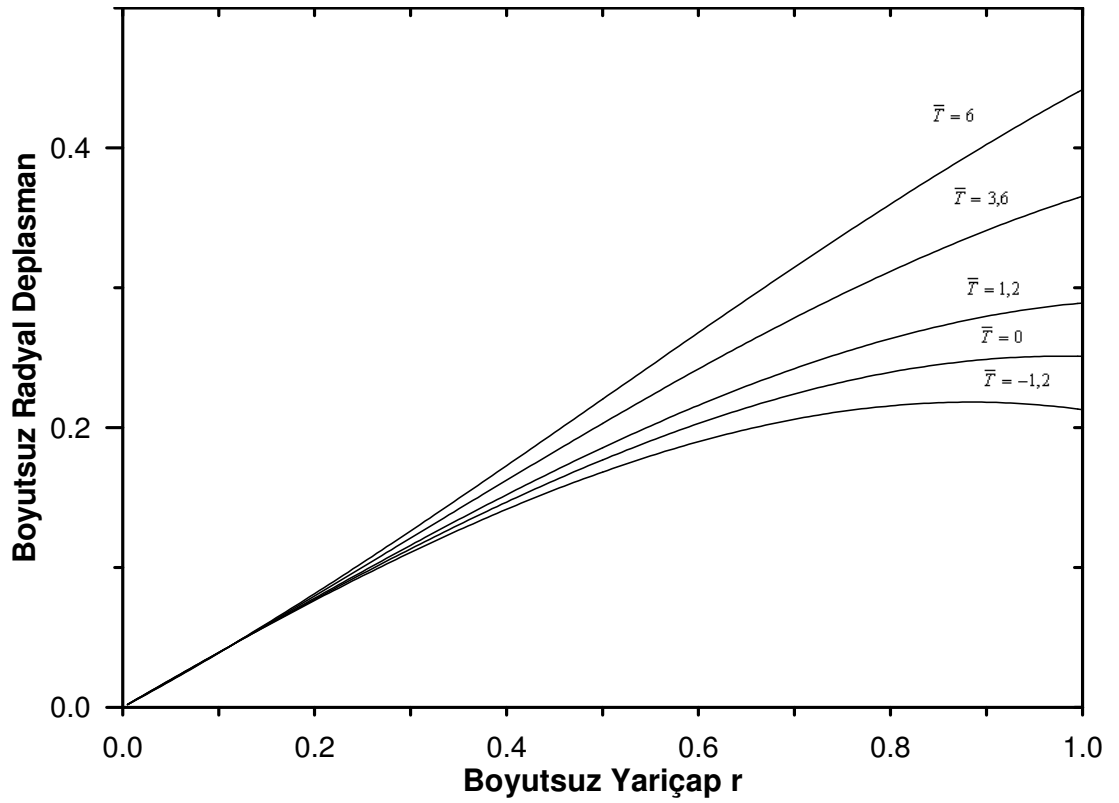
Şekil 3.25. Değişik sıcaklık değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



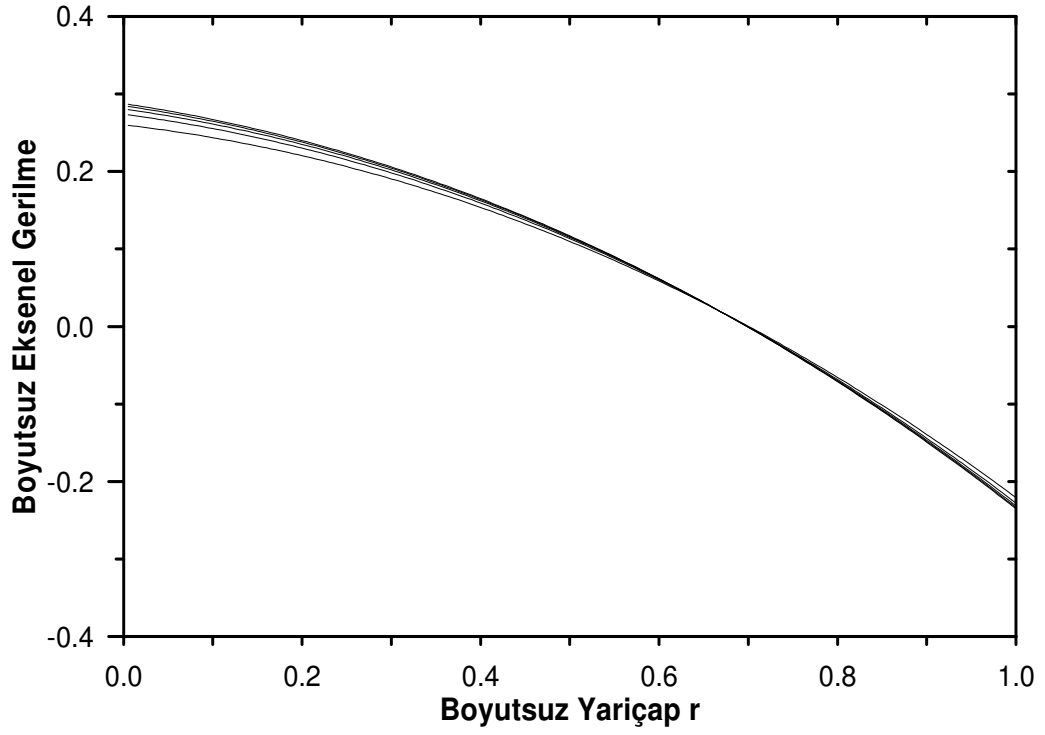
Şekil 3.26. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{\sigma}_z$ 'a etkisi



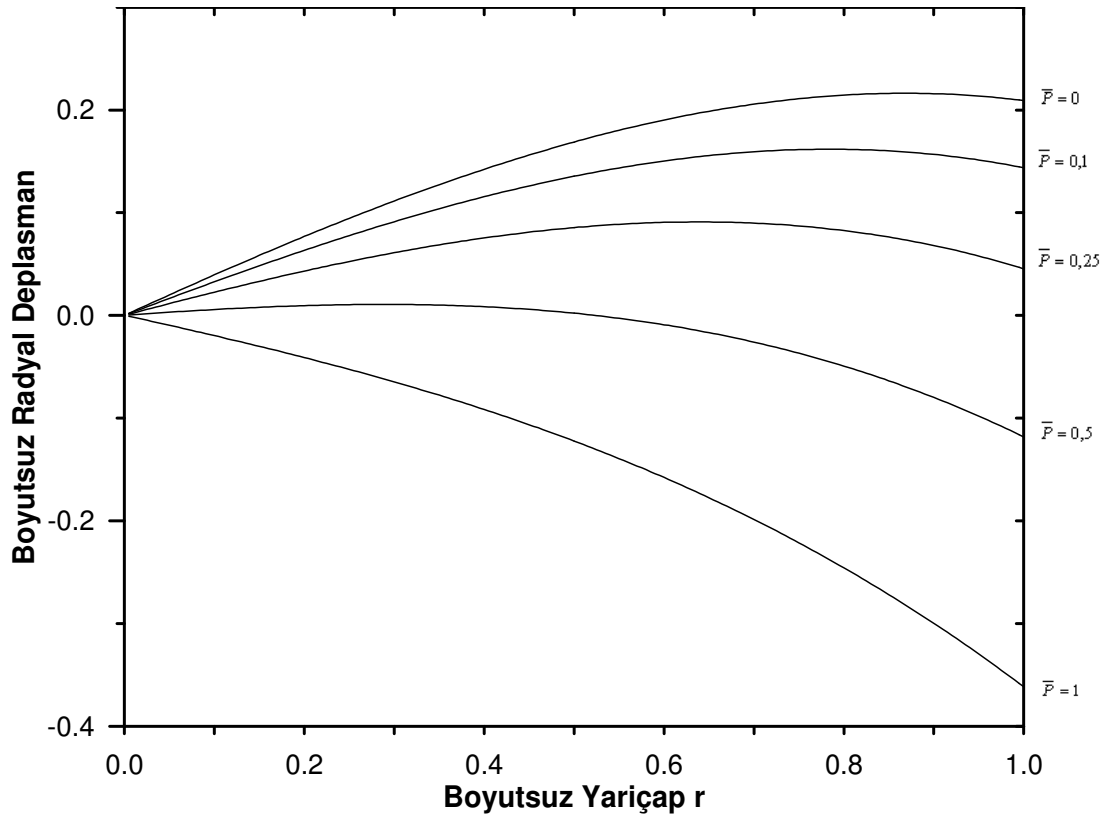
Şekil 3.27. Değişik sıcaklık değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi



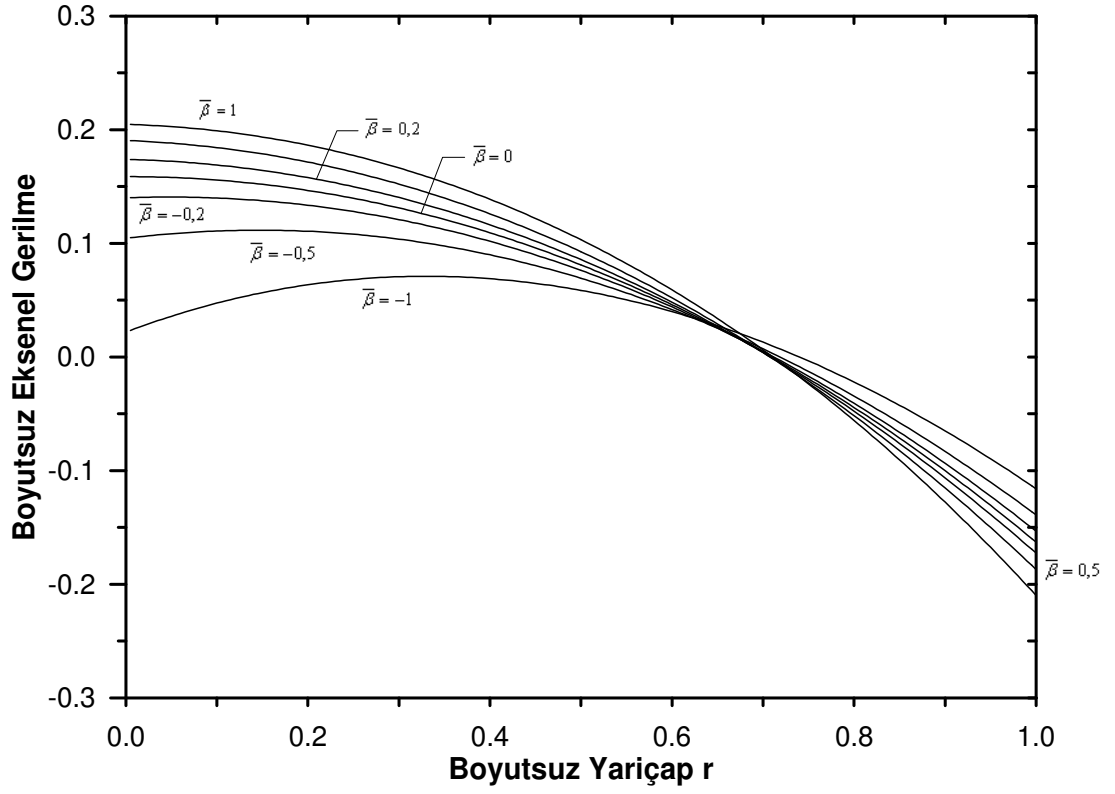
Şekil 3.28. $\bar{a}$ 'nın negatif değeri için sıcaklığın $\bar{u}$ 'a etkisi



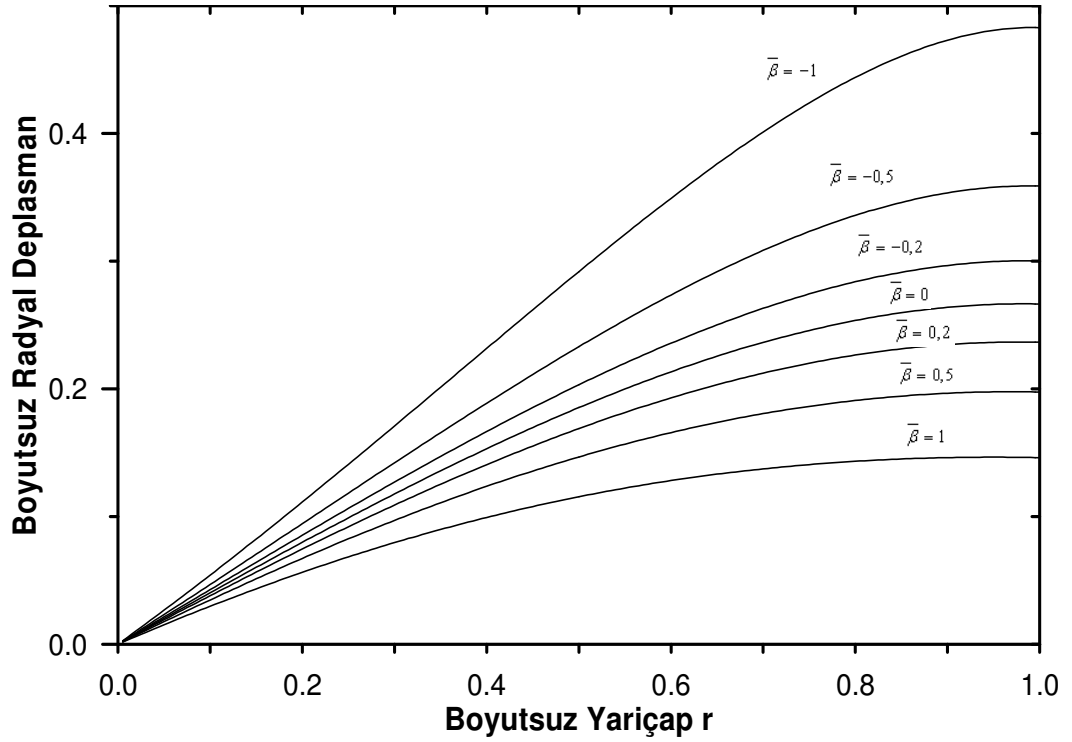
Şekil 3.29. Değişik basınç değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



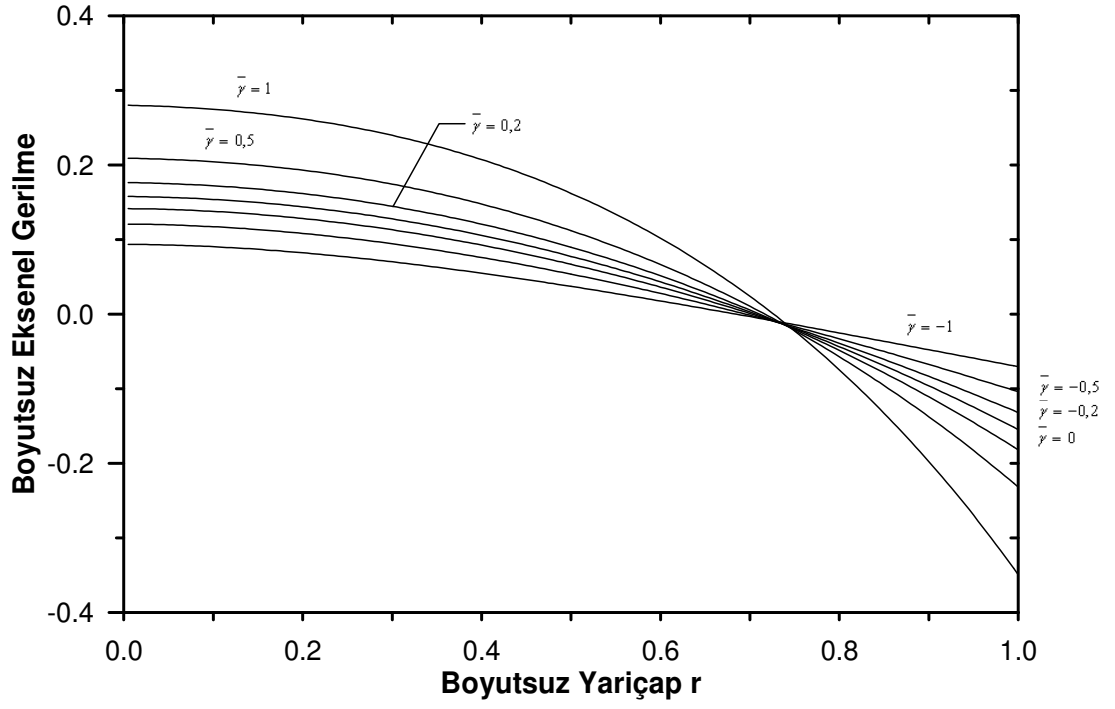
Şekil 3.30. Değişik basınç değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi



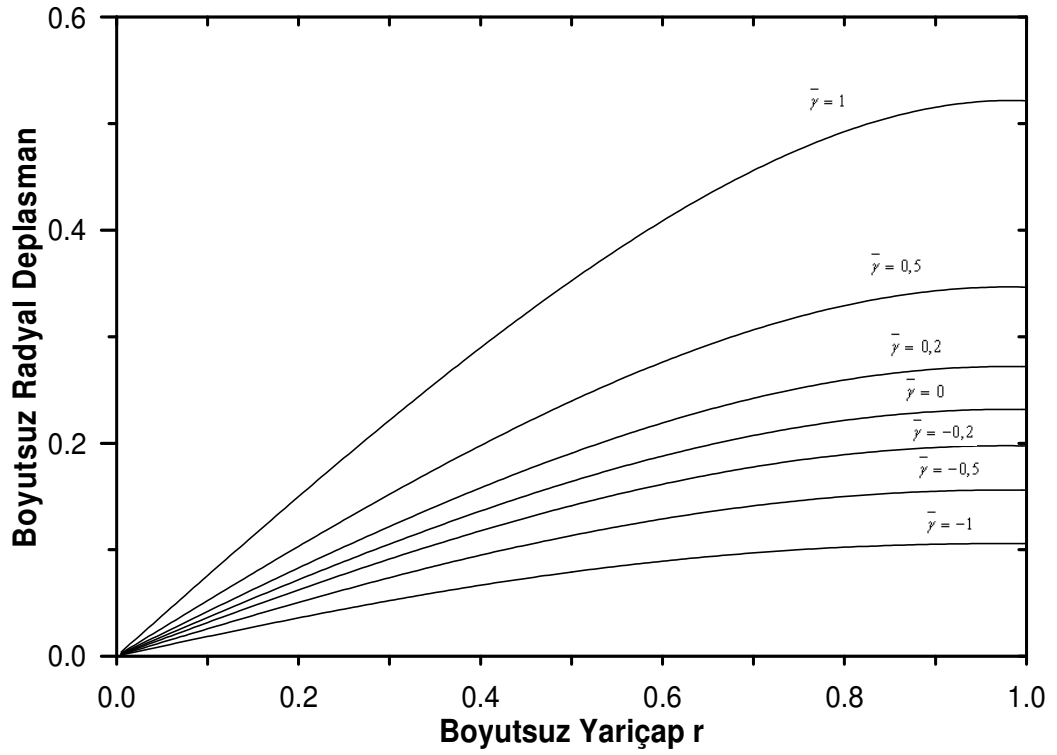
Şekil 3.31. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin eksenel gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



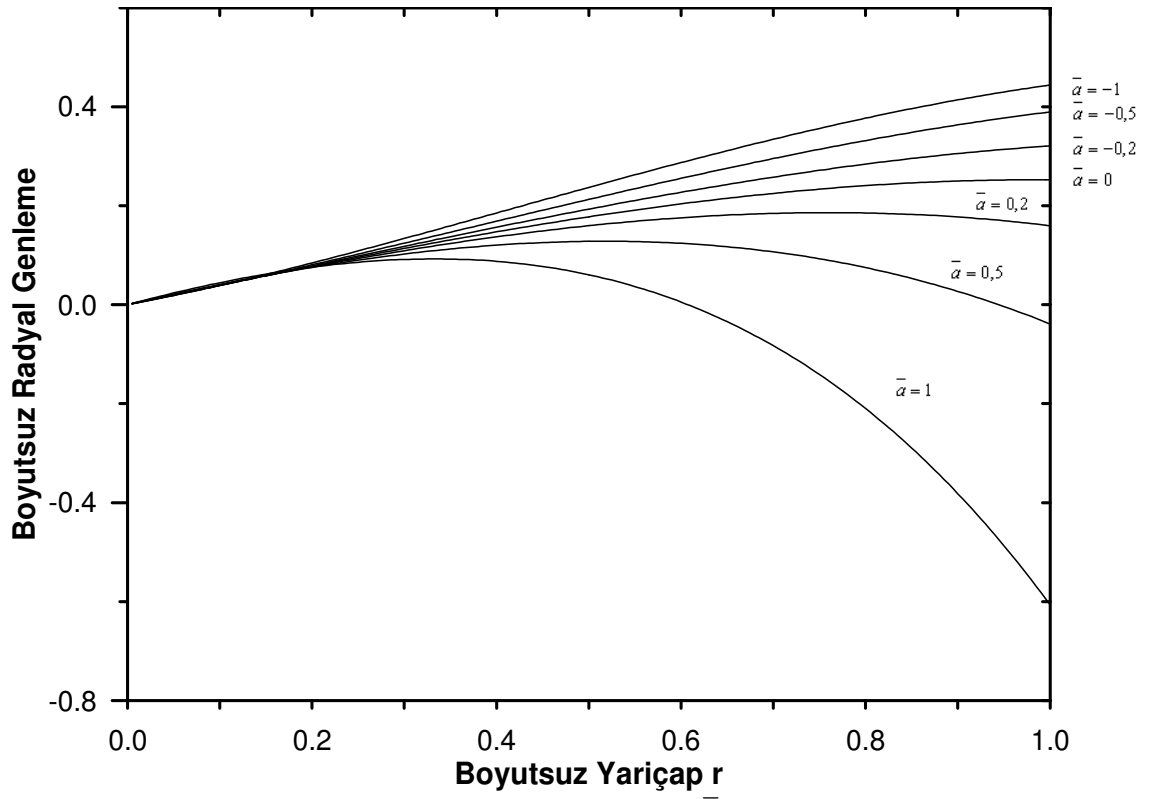
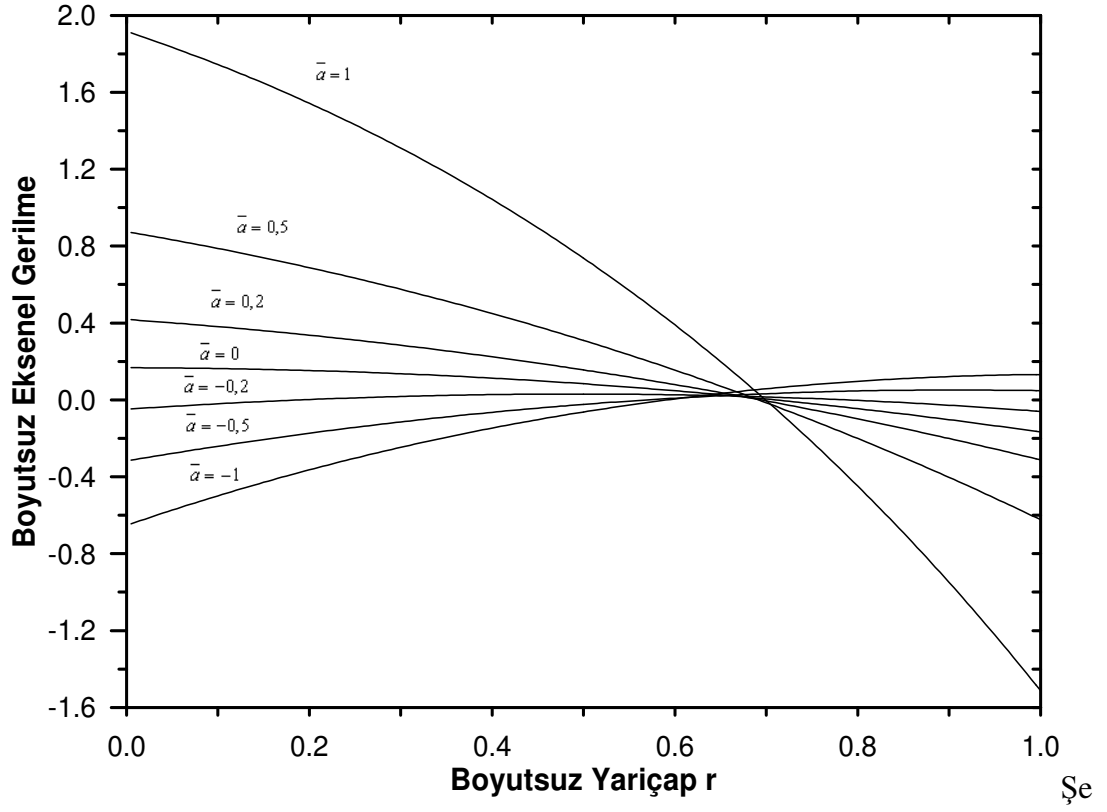
Şekil 3.32. Değişik $\bar{\beta}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.33. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin aksenal gerilme $\bar{\sigma}_z$ üzerindeki etkisi



Şekil 3.34. Değişik $\bar{\gamma}$ değerlerinin radyal deplasman $\bar{u}$ üzerindeki etkisi



Serbest uçlu olarak dönen FGM şaft için $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin, sırası ile 1, -1 ve 1 değerleri ve katlarını aldığı anda $\bar{T} = 0.6$ ve $\bar{P} = 0.1$ olduğu bir ortamda şaftın dayanım gösterdiği hızın üniform şaftta göre daha fazla olduğu hesaplanarak, aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. (Şaftın merkezinde, Tresca akma kriteri dikkate alınmıştır.)

Çizelge 3.8. $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ değerlerinin serbest uçlu şaftın hızına etkisi

$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{a}$	$\bar{\Omega}_{\max}$
0	0	0	3,42
1	0	0	4,94
0	-1	0	7,02
0	0	1	4,75
1	-1	1	13,56

Bu durumda $\bar{\gamma}$ negatif değerler, $\bar{\beta}$ ve $\bar{a}$ ise pozitif değerler aldığı anda şaft hızında artış sağlanabilmektedir. Bu $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ve $\bar{a}$ için elde edilebilecek değişik değerler, şaft içerisinde oluşan gerilme bileşenlerinin birbirlerine göre olan durumlarının kontrol edilmesine imkan verebilir. Ancak üç farklı malzeme özelliğinin istenen ölçülerde tutturulabilmesi sadece iki farklı malzeme seçeneği ile oldukça kısıtlanmaktadır.

Şekil 3.29'da görüldüğü üzere; basıncın serbest uçlu şaftta eksenel gerilme üzerindeki etkisi çok az iken, bu durum radyal ve teğet gerilme için farklıdır. Artan basınç, radyal ve teğet gerilme eğrilerini aşağıya çekerek, eksenel gerilme eğrisine yaklaştırmaktadır. Bu etki, şaftın merkezinde akma olayının daha yüksek hızlarda gerçekleşmesine neden olur. Dolayısı ile basıncın serbest uçlu FGM şaftta şaft hızını artırıcı yönde etki ettiği anlaşılmaktadır. Ancak, bu çalışmada basınç ortam koşullarına ait bir özellik olarak düşünülmüştür. Bu nedenle şaft hızını artırmak için basıncın kullanılması ele alınmamıştır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, içi dolu bir FGM silindirin mekanik özellikleri fonksiyonel olarak ifade edilerek, sabit hızla dönmekte olan bir şaft gibi düşünülüp, üzerinde oluşan gerilmeler teorik olarak hesaplanmıştır. Şaftın üniform bir sıcaklık ve basınç altında olduğu düşünülerek, homojen olmayan bir yapı ile beraber şaft problemine daha genel bir durum kazandırılmıştır.

Genellikle ısı nedenleriyle, sıcaklık farklarının çok olduğu ortamlar için tasarlanan FGM malzeme, burada tamamen şaft gibi bir mekanik eleman için uygulanmıştır. Şaftın çalışma ortamında sabit bir sıcaklığa maruz kalacağı öngörülmüştür. Buna karşın şaft için bir soğutma mekanizması yardımı ile bir sıcaklık dağılımı önerilmesi durumunda, aynı yöntem kullanılarak bu problemin de çözümü sağlanabilir.

Çözümü yarı analitik yarı nümerik olarak elde edilen bu çalışmada, Poisson oranının sabit olduğu kabul edilmiştir. Poisson oranının değişken olduğu kabul edilip, fonksiyonel olarak ifade edilmesi durumunda, homojen denklemin çözümüne ait fonksiyonlar elde edilememektedir. Böyle bir durumda çözüm için literatürde örnekleri görülen layer yöntemine benzer, tamamen nümerik yöntemlere başvurulması kaçınılmaz hale gelmektedir.

İki farklı malzeme karışımı olan, FGM türü bir malzemenin Elastisite Modülü, Isıl Genleşme Katsayısı ve Özgül Ağırlığına ait parametrelerin şaft içinde oluşan gerilmelerin birbirlerine göre olan durumlarında etkili oldukları görülmektedir. Tresca akma kriteri dikkate alındığında, gerilme bileşenleri arasında oluşan farklar akmanın oluşmasına neden olmaktadır. Bu akma olayı gerilme bileşenlerinin birbirlerine yaklaştırılmaya çalışılması ile şaftın dayanım gösterebildiği limit hızın daha yukarılara taşınabileceği görülmektedir. Paratikte böyle bir uygulamaya rastlanılmamasına rağmen, gelecekte değişik malzeme dağılımları kullanılarak, şafta uygulanacak hızın artırılması yönünde daha avantajlı bir durumun oluşturulması düşünülebilir.

KAYNAKLAR

1. Awaji, H., Sivakumar, R., "Temperature and stress distribution in a hollow cylinder of functionally graded material: The case of temperature-independent material properties.", *J Am. Ceram. Soc.*, 84 (5): 1059-65 (2001).
2. Liew, K.M., Kitipornchai, S., Zhang, X.Z., Lim, C.W., "Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders.", **International Journal of Solids and Structures**, 40 (10): 2355-2380 (2003).
3. Yang, Y.Y., "Time dependent stress analysis in functionally graded materials.", **International Journal of Solids and Structures**, 37: 7593-7608 (2000).
4. Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami, M.R., "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads.", **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, 29: 493-497 (2002).
5. Arai, Y., Kobayashi, H., Tamura, M., "Residual stress analysis and optimal design of FGM.", *The 3rd FGM Symposium (FGM'89)*, 83-89 (1989).
6. Liu, W., DuPont, J.M., "Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by laser engineered net shaping.", *Scripta Materialia*, 48: 1337-1342 (2003).
7. Koizumi, M., "FGM activities in Japan.", *Composite Part B*, 28 B: 1-4 (1997).
8. Kogure, Y., Doyama, M., "Computer simulation of functionally graded materials.", FY 1997 Grant-in-Aid for Scientific Research on Priority Area. No. 274 *Physics and Chemistry of Functionally Graded Materials Research Report* 97-100 (1998).
9. Tamura, M., "Fabrication of FGM by particle thin-film lamination method.", *FGM News*, 3: 20-21 (1998).
10. Tanigawa, Y., Oka, N., Akai, T., Kawamura, R., "One dimensional transient thermal stress problem for non homogeneous hollow circular cylinder and its optimization of material composition for thermal stress relaxation.", *Series A*, 40 (2): (1997).
11. Obata, Y., Noda, N., Tsuji, T., "Steady thermal stresses in a plate of functionally graded material.", *The 4th FGM Symposium (FGM'91)*, 215-222 (1991).
12. Taki, M., Fujisawa, Y., Sofue, Y., Yoshida, T., "Study on evaluation test in a simulated high-speed spinning heating field.", *The 3rd FGM Symposium (FGM'89)*, 149-153 (1989).
13. Noda, N., "Thermal stress in functionally graded materials.", *Journal of Thermal Stresses*, 22: 477-512 (1999).

14. Yamada, Y., Shimojima K., "Study on the coating of oxidation resistant layer with FGM.", FY 1998 *Proceedings Functionally Gradient Materials (FGM'98)*, 161-166 (1999).
15. Hoshino, T., Eguchi, K., "Performance analysis of FGM based hybrid energy conversion system for space applications.", FY 1994 *Proceedings of Functionally Gradient Materials (FGM'94)*, 147-152 (1995).
16. Moriya, S., Tadano, M., Sato, M., Kuroda, Y., Niino, M., Amamoto, Y., Omori, M., "Investigation of thermal barrier coatings to rocket engine combustors.", *Functionally Graded Materials*, 13: 95-100 (2000).
17. Gamer, U., Mack, W., Varga, I., "Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends.", *Int.J. Engng Sci.*, 35 : (3) 253-267 (1997).
18. Eraslan, A.N., "On the linearly hardening rotating solid shaft.", *European Journal of Mechanics A/ Solid* : 22: 295-307 (2003).
19. Mack, W., "The rotating elastic plastic solid shaft with free ends.", *Technische Mechanik*, 12: 119-124 (1991).
20. Eraslan, A.N., "Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shaft.", *Acta Mechanica*, 168: 129-144 (2004).
21. Eraslan, A.N., "Von Mises yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion.", *Mechanics Research Communications* 29: 339-350 (2002).
22. Orcan, Y., Eraslan, A.N., "Elastic plastic stresses in linearly hardening rotating solid disks of variable thickness.", *Mechanics Research Communications*, 29: 269-281 (2002).
23. Eraslan, A.N., Orcan, Y., "Elastic plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness.", *Mechanics of Materials*, 34: 423-432 (2002).
24. Orcan, Y., Eraslan, A.N., "On the rotating elastic plastic solid disks of variable thickness having concave profiles.", *International Journal of Mechanical Sciences*, 44: 1445-1466 (2002).
25. Eraslan, A.N., Argeso, H., "Limit angular velocities of variable thickness rotating disks.", *International Journal of Solids and Structures*, 39: 3109-3130 (2002).
26. Eraslan, A.N., "Elastic plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions.", *International Journal of Mechanical Sciences*, 45: 643-667 (2003).

27. Eraslan, A.N., “Elastoplastic deformations of rotating parabolic solid disks using Tresca’s yield criterion.”, *European Journal of Mechanics A Solids*, 22 : 861-874 (2003).
28. Eraslan, A.N., Orcan, Y., Güven, U., “Elastoplastic analysis of nonlinearly hardening variable thickness annular disks under external pressure.”, *Mechanics Research Communications*, 32: 306-315 (2004).
29. Güven, U., Altay, O., “Linear hardening solid disk with rigid casing subjected to a uniform heat source.”, *Mechanics Research Communications*, 25 (6): 679-684 (1998).
30. Mack, W., “Rotating elastic plastic tube with free ends.”, *International Journal of Solids and Structures*, 27: 1461-1476 (1991).
31. Gülgeç, M., Orcan, Y., “Elastoplastic deformation of a heat generating tube with temperature dependent yield stress.”, *International Journal of Engineering Science*, 38: 89-106 (2000).
32. Orcan, Y., Gülgeç, M., “Influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a heat generating tube with free ends.”, *Journal of Thermal Sciences*, 23: 529-547, (2000).
33. Eraslan, A.N., Sener, E., Argeso, H., “Stress distributions in energy generating two layer tubes subjected to free and radially constrained boundary conditions.”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45: 469-496 (2003).
34. O’Neil, P.V., “Advanced Engineering Mathematics 5th ed.”, *Thomson Brooks/Cole*, CA USA, 87-89, (2003).

ÖZGEÇMİŞ

Nihat ÖZKAN 1974 yılında Samsun ilinin Havza ilçesinde doğdu. İlkokul, Ortaokul ve Lise eğitimini aynı ilçede sırası ile Karşıyaka İlkokulu, 25 Mayıs Ortaokulu ve Havza Lisesi'nde tamamladı. Daha sonra üniversite eğitimine Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nin Makina Mühendisliği Bölümünde devam etti. Mühendislik Eğitimini tamamladıktan sonra iş hayatına Türkiye Halk Bankasının Akdeniz Bölge Müdürlüğüne bağlı İstihbarat ve Proje Değerlendirme Müdürlüğünde Makina Mühendisi olarak başladı. Şu an çalışma hayatını Karayolları Genel Müdürlüğünde Etüt İmalat Mühendisi olarak devam ettirmektedir. Gazi Üniversitesi Mimarlık ve Mühendislik Fakültesinin Makina Mühendisliği Bölümünde Lisansüstü Programına 2002-2003 öğretim yılında güz döneminde başlayan Nihat ÖZKAN programı başarı ile tamamlaması durumunda Lisansüstü eğitime devam etmeyi düşünmektedir.