



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÜRETEÇ FONKSİYONLARI İÇEREN BAZI İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA KEMAL ATALAR

**ÜRETEÇ FONKSİYONLARI İÇEREN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Mustafa Kemal ATALAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Mustafa Kemal ATALAR tarafından hazırlanan “ÜRETEÇ FONKSİYONLARI İÇEREN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK

MATEMATİK Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Dağlı

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 09/06/2023

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa Kemal ATALAR

09/05/2023

ÜRETEÇ FONKSİYONLARI İÇEREN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa Kemal ATALAR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAYIS -2023

ÖZET

Hermite polinomlarının oldukça önemli ve bilinen uygulamalarından biri kuantum mekaniğinin basit harmonik osilatörünün çözümlerini oluşturmalarıdır. Uygulamalardan elde edilen problemleri çözmek için önemli bir yöntem, üreteç fonksiyonlarının kullanımını içerir. Ayrıca, Fredholm integral denklemlerinin birçok farklı bilim dalında ortaya çıktığı da bilinmektedir. Fredholm integral denklemlerinin analitik veya sayısal olarak çözmeye olan ilgi son zamanlarda artmaktadır. Bu çalışmada, çekirdeği Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonunu içeren, genellikle iyi tanımlı olmayan bir problem olarak kabul edilen bir dizi tekil integral denklemi çözmek için bir yöntem tanıtmayı amaçlıyoruz.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

Danışman

: 27
: Hermite polinomları, Üreteç fonksiyonları, Fredholm integral denklemleri
: Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK

ON THE SOLUTIONS OF SOME INTEGRAL EQUATIONS INVOLVING
GENERATING FUNCTIONS

(M. Sc. Thesis)

Mustafa Kemal ATALAR

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May-2023

ABSTRACT

It is well-known that one of the important applications of the Hermite polynomials is that they constitute solutions of the simple harmonic oscillator of quantum mechanics. An important method for solving problems from applications involve the use of the generating functions. It is also known that Fredholm integral equations arise in many different branches of sciences. Interest in solving them analytically or numerically has been growing recently. In this study, we aim to introduce a method to solve a set of singular integral equations, usually considered as an ill-posed problem, whose kernel involve the generating function for Hermite polynomials.

Page Number : 27
Keywords : Hermite polynomials, Generating functions, Fredholm integral equations
Supervisor : Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi ve deneyimlerinin yanı sıra çok değerli moral desteğini de hiç eksik etmeyip yanımda olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Desteklerini esirgemeyip süreç boyunca yanımda olan arkadaşlarıma ve tüm aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
P_n	n. Legendre polinomu
L_n	n. Laguerre polinomu
$\mathcal{H}_n$	n. Hermite polinomu
$\mathcal{G}(x, t)$	Üreteç fonksiyonu
$w(t)$	Ağırlık fonksiyonu

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar, matematik, fizik, istatistik ve olasılık gibi birçok uygulamalı bilimde kullanışlı araçlar olarak bilimin klasik konuları arasında yerini almaktadır. Ortogonal polinomlar konusu 19. yüzyılın sonlarına doğru gelişmiş olup, Legendre, Laguerre ve Hermite polinomları gibi birçok klasik ortogonal polinomlar ailesi belirli fiziksel problemlerin çözümlerinde ortaya çıkmıştır. Yaklaşım teorisi ve yöntemlerinin özellikle son zamanlarda yoğun bir ilgiyle araştırmacıların çalışma konuları arasında yerini alması, ortogonal polinoma olan ilgiyi tekrar artırmıştır. Daha detaylı bilgi edinmek için (Chihara, 1978) ve (Rainville, 1960) kaynakları incelenebilir. Bu tezde özel olarak Hermite polinomları üzerinde durulacaktır.

Hermite polinomları ve onların üreteç fonksiyonu farklı bilim dallarında birçok uygulama alanı bulmuştur. Hermite polinomlarını önemli kılan olgulardan biri, kuantum mekaniğinin basit harmonik osilatörünün çözümlerinde ortaya çıkmalarıdır. Bunları tanımlamaya ve özelliklerini geliştirmeye yönelik bir yaklaşım olarak bu polinomların üreteç fonksiyonu işlevsel araçlar olarak kullanılmaktadır. Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağı şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_n(x)}{n!} t^n \quad (1.1)$$

Burada $\mathcal{G}(x, t)$ üreteç fonksiyonunu ve $\mathcal{H}_n(x)$ Hermite polinomlarını ifade etmektedir. Uygun referans için yineleme ilişkisini ve ilk birkaç Hermite polinomunu aşağıda listeliyoruz.

$$\mathcal{H}_{n+1}(x) = 2x\mathcal{H}_n(x) - 2n\mathcal{H}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

$\mathcal{H}_0(x) = 1$ ve $\mathcal{H}_1(x) = 2x$. Daha fazla bilgi ve bunların nasıl elde edildiğine ilişkin alternatif yaklaşımlar için (Weber ve Arfgen, 2003) ve (Rainville, 1960) kaynakları incelenebilir.

(Thakere ve Madhekar, 1982) birleştirici bir ilke kullanarak klasik ortogonal polinomların her biri için üreteç fonksiyonu elde etmek için dikkate değer bir yaklaşım olan Hermite yöntemi uygulanır. (Babusci, Datolli ve Quattromini, 2012) üreteç fonksiyon yönteminin ve çok değişkenli Hermite polinomlarının birlikte kullanılmasıyla, Gauss fonksiyonlarının ve birden fazla Hermite polinomlarının çarpımlarının integrallerini alabilmek için nasıl uygun olduğunu göstermişlerdir. (Kim ve diğerleri, 2012) Hermite polinomlarının diklik özelliklerini kullanarak önemli özdeşlikler geliştirmiş ve türetmişlerdir. (Belefhal ve diğerleri, 2020) fizikte karşılaşılan Hermite polinomlarının integralini içeren birçok problem için formüller türetmişlerdir.

(Savchenko, 2014) bu çalışmasında sayılabilir çoklukta A_n şeklinde eleman içeren fonksiyon kümelerinin özelliklerini incelemiştir. Burada, her A_n fonksiyonu n 'den küçük dereceli tüm polinomlara ortogonal olacak şekilde kısıtlanmıştır. Buna ek olarak, çekirdekleri bu fonksiyon kümeleri için üreteç fonksiyonu olan birinci türden Fredholm integral denklemleri çözmek için etkili bir yöntem önermiştir. Bu fonksiyonlar $L_2[a, b]$ 'deki birim ağırlık fonksiyonu ile iç çarpıma göre ortogonal olarak ele alınmıştır. Buna dayanarak, bazı eksenal simetrik fiziksel problemler çözülmüştür.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasındaki temel motivasyonumuz Savchenko'nun elde ettiği sonuçların birimden farklı bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan Hermite polinomları için incelemektir. Buna ek olarak, çekirdeği Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonunu içeren singüler Fredholm integral denklemlerin çözümleri için etkili algoritmalar elde etmek ve bazı alternatif kanıtlar vermektir (Wazwaz, 2011).

Bu çalışmamız 6 bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde ortogonal polinomlar ve literatür taraması yapılarak tez çalışmamıza giriş yapılmıştır. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde üreteç fonksiyonları ve klasik ortogonal polinomların üreteç fonksiyonları hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde integral denklemlerin sınıflandırılması ve türleri ifade edildi. Beşinci bölüm ise çalışmamızın temel sonuçlarını içermekle beraber örnekler yardımı ile teorik sonuçlar test edilmiştir. Son bölümde çalışmamız boyunca elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ortogonal polinomlar ile ilgili bazı temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Özellikle tezde kullanılan temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Burada verilen kavramlar ve daha fazlası hakkında detaylı çalışmalar için Andrews, Askey ve Roy (1999) ve Rainville (1960) kaynaklarına bakılabilir.

2.1. Ortogonal Polinomlar ve Özellikleri

2.1 Tanım Bir P polinomu, t noktasındaki değeri

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

olan bir fonksiyon olarak tanımlanır. Burada $0 \leq i \leq n$ için a_i sabit katsayıları polinomun katsayıları ve $n > 0$ için $a_n \neq 0$. Polinomda mevcut olan t 'nin en yüksek kuvvetine, polinomun derecesi denir.

2.2 Tanım Q_n derecesi n olan bir polinom ise $\{Q_n(t)\}, n = 0, 1, \dots$ polinomlar ailesine basit (simple) küme denir.

2.3 Tanım Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı $P_i(t)$ polinomları ve ağırlık fonksiyonu $w(t)$ verilsin. Eğer

$$\int_a^b w(t) P_i(t) P_j(t) dt = 0, \quad i \neq j$$

eşitliği sağlanırsa, $P_i(t)$ polinomları (a, b) aralığında $w(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır denir.

2.4 Tanım Eğer $P_i(t)$ polinomları (a, b) aralığında $w(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal ve

$$\int_a^b w(t) P_i^2(t) dt = 1, \quad i = j$$

eşitliği sağlanırsa, $P_i(t)$ polinomları (a, b) aralığında $w(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormaldir denir.

Ortogonalite şartına alternatif yeter bir şart aşağıdaki teoremden verilmiştir.

2.1 Teorem Derecesi n olan $Q_n(t)$ polinomlarının $[a, b]$ aralığında $w(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için yeter şart

$$\int_a^b w(t) Q_n(t) t^k dt = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Askey, 1999).

Uyarı Derecesi n olan P_n polinomlarının bir sonsuz dizisi $\{P_n\}$ olsun. Bu şekilde oluşturulan sonsuz $\{P_n\}$ dizisi tüm polinomlar ailesinin sonsuz boyutlu vektör uzayı için bir taban oluşturur. Bu taban Gram-Schmit ortogonalleştirme yöntemiyle kolaylıkla ortogonal bir tabana dönüştürülebilir. Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi için (Leon ve Pillis, 2019) ve (Anton, 2013) kaynakları incelenebilir.

2.2 Teorem $\{Q_n(t)\}$ polinomların bir basit kümesi ve $P(t)$ derecesi m olan bir polinom ise

$$P(t) = \sum_{k=1}^m c_k Q_k(t)$$

olacak şekilde c_k sabitleri mevcuttur (Rainville 1960).

Daha basit bir ifadeyle; derecesi m olan her polinom, $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_m\}$ şeklindeki polinomlardan oluşan basit kümenin elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

2.2. Klasik Ortogonal Polinomlar

Bu bölümde ortogonal polinomlar için örnekler vereceğiz. Bu örnekler Klasik ortogonal polinomlar olan Legendre, Laguerre ve Hermite polinomlarını içerecektir. Bu konularda daha detaylı bilgiye ulaşmak için (Bilgin, 2010) ve (Onbaşı, 2017) kaynaklarına bakılabilir.

2.2.1. Legendre polinomları

Legendre polinomları diğer klasik ortogonal polinom ailelerinde olduğu gibi birçok farklı matematiksel ve fiziksel olgularda ortaya çıkar. Bu polinomlar birçok farklı yöntemle edilebilirler. Burada en önemli birkaç yöntemden bahsedeceğiz. Kısaca ifade edecek olursak, Legendre polinomları $[-1, 1]$ aralığında ortogonal polinomlardır. Aşağıda verilen diferansiyel denklemin çözümleri olarak ortaya çıkarlar:

P_n polinomu n . Legendre polinomu olmak üzere

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

veya

$$\left[(1 - x^2) \frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

denklemleri Legendre adi diferansiyel denklemleri olarak bilinirler.

Ayrıca, aşağıda verilen Bonnet tekrarlama bağıntısı

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

ve $P_0 = 1$, $P_1 = x$ ile tüm $P_n(x)$ 'lerin nümerik değerlerine ulaşılabilir.

Alternatif bir formülde Rodrigess formülü olarak bilinen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n$$

eşitliğidir. Ortogonallik başta olmak üzere Legendre polinomları ile ilgili birçok özelliğin ispatlanmasında kullanılan bir formüldür.

2.2.2. Laguerre polinomları

Laguerre polinomları aşağıda verilen diferansiyel denklemin çözümleri olarak ortaya çıkarlar: L_n polinomu n . Laguerre polinomu olmak üzere

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

denklemleri Laguerre adi diferansiyel denklemi olarak bilinirler.

Ayrıca, aşağıda verilen tekrarlama bağıntısı

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

ve $L_0 = 1$, $L_1 = 1 - x$ ile tüm $L_n(x)$ 'lerin nümerik değerlerine ulaşılabilir.

Alternatif bir formülde Rodrigess formülü olarak bilinen

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) (x^n e^{-x})$$

eşitliğidir. Bu formül Laguerre polinomları ile ilgili birçok özelliğin ispatlanmasında kullanılan bir formüldür. Laguerre polinomları $[0, \infty)$ aralığında $w(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Daha açık bir ifadeyle,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

2.2.3. Hermite polinomları

Hermite polinomları aşağıda verilen diferansiyel denklemin çözümleri olarak ortaya çıkarlar:

$\mathcal{H}_n$ polinomu n . Hermite polinomu olmak üzere

$$\mathcal{H}_n''(x) - 2x\mathcal{H}_n'(x) + n\mathcal{H}_n(x) = 0$$

denklemleri Hermite adi diferansiyel denklemi olarak bilinirler.

Ayrıca, aşağıda verilen tekrarlama bağıntısı

$$\mathcal{H}_{n+1}(x) = 2x\mathcal{H}_n(x) - 2n\mathcal{H}_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

ve $\mathcal{H}_0 = 1$, $\mathcal{H}_1 = 2x$ ile tüm $\mathcal{H}_n(x)$ 'lerin nümerik değerlerine ulaşılabilir.

Alternatif bir formülde Rodrigess formülü olarak bilinen

$$\mathcal{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) (e^{-x^2})$$

eşitliğidir. Bu formül Hermite polinomları ile ilgili birçok özelliğin ispatlanmasında kullanılan bir formüldür. Hermite polinomları $(-\infty, \infty)$ aralığında $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Daha açık bir ifadeyle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathcal{H}_m(x) \mathcal{H}_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

eşitliği mevcuttur.

3. ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Üreteç fonksiyonları özellikle ayrık matematikte kombinatorik problemlerin çözümünde kullanılan oldukça önemli ve işlevsel araçlardır. Kabaca, dizilerin uyarlanarak özel fonksiyonlar olarak ifade edilmesi olarakta görülebilir. Bu konuda daha detaylı bilgiye ulaşmak için (Levin, 2021) ve (Wilf, 1993) kaynakları kullanılabilir.

3.1. Adi Üreteç Fonksiyonu

3.1 Tanım $a_0, a_1, a_2, \dots$ bir reel sayı dizisi olsun. Bu $\{a_n\}$ dizisinin adi üreteç fonksiyonu

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

şeklinde biçimsel bir kuvvet serisidir.

Örnek $\{a_n\} = (1, 1, 1, 1, \dots)$

dizisi için üreteç fonksiyonu

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Geometrik seri olduğundan $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

Örnek Fibonacci dizisini ele alalım.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 1, F_0 = 0, F_1 = 1$$

olmak üzere

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} F_nx^n = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \dots$$

ve buradan

$$\sum_{n \geq 1} F_{n+1}x^n = F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \dots = \frac{F(x) - x}{x}$$

yazılır. Buna göre gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\sum_{n \geq 1} F_n x^n = \sum_{n \geq 1} F_{n-1} x^n = F(x) + xF(x)$$

şeklinde olacağından

$$\frac{F(x) - x}{x} = F(x) + xF(x)$$

yazılır ve

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{\left(1 - x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(1 - x\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$$

elde edilir. Son ifadede x_n li terimin katsayısı

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

biçimindedir. Buradan üreteç fonksiyonlarının önemli bir özelliğine vurgu yapılabilir.

n büyüdükçe

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n > 1, \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n < 1$$

olduğundan (3) denklemindeki $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ terimi ihmal edilebilir. Yani

$$F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

olur.

Burada $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ değerini ihmal etmenin maliyeti 0.5'ten büyük değildir. Fibonacci terimleri tam sayı olduğundan sonuç değerimize en yakın tam sayı değeri gerçek değeri verecektir.

3.2. Üstel Üreteç Fonksiyonu

3.2 Tanım $a_0, a_1, a_2, \dots$ bir reel sayı dizisi olsun. Bu $\{a_n\}$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

şeklinde biçimsel bir kuvvet serisidir.

Örnek $\{a_n\} = (1, 1, 1, 1, \dots)$

dizisi için üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

3.3. Klasik Ortogonal Polinomların Üreteç Fonksiyonları

Bir önceki bölümde klasik ortogonal polinomların tanımları ve özelliklerinin elde edilişleri hakkında bir kaç yöntemden bahsettik. Bu polinomların üreteç fonksiyonları kullanılarak ta birçok özelliklerinin elde edilebileceğini biliyoruz. Bu bölümde kısaca Legendre, Laguerre ve Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonları tanıtılacaktır. Konuyu daha genel bir bakış açısıyla incelemek için Andrews, Askey ve Roy (1999) ve Rainville (1960) kaynakları incelenebilir.

3.3.1. Legendre üreteç fonksiyonu

Legendre polinomlarının birçok özelliği Legendre Üreteç Fonksiyonundan elde edilebilir. Legendre polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$$

şeklinde tanımlanır. P_n n. Legendre polinomu olmak üzere

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

eşitliği yeterince küçük $|t|$ değerleri için sağlanır.

3.3.2. Laguerre üreteç fonksiyonu

Laguerre polinomlarının birçok özelliği Laguerre üreteç fonksiyonundan elde edilebilir. Laguerre polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$L(x, t) = \frac{e^{-xt/1-t}}{1-t}$$

şeklinde tanımlanır. L_n n. Laguerre polinomu olmak üzere

$$L(x, t) = \frac{e^{-xt/1-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

eşitliği $|t| < 1$ değerleri için sağlanır.

3.3.3. Hermite üreteç fonksiyonu

Hermite polinomlarının birçok özelliği Hermite üreteç fonksiyonundan elde edilebilir. Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt - t^2}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathcal{H}_n$ n. Hermite polinomu olmak üzere

$$\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_n(x)}{n!} t^n$$

eşitliği $|t| < \infty$ değerleri için sağlanır.

Bu tez çalışmasında Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonlarını içeren bazı integral denklemlerin çözümleri üzerinde duracağız. Bir sonraki bölümde Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu ve uygulamaları üzerinde daha detaylı bilgi verilecektir.

4. İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemleri istenen (bilinmeyen) fonksiyonun integral sembolü altında olduğu denklemler olarak tanımlanabilir. Bu basit açıklama integral denklemler için belirleyici olsa da bu denklemlerin tüm türleri için kapsayıcı değildir. Bu sebepten farklı tür ve nitelikteki integral denklemleri için ayrı ayrı inceleme ihtiyacı oluşmuştur. Bu konuda ilk çalışmalara 19. yüzyılın birinci yarısında dağınık şekilde rastlanırken ikinci yarısında belirli bir zemine oturan belli başlı sonuçların elde edildiği sonuçlar olarak öne çıkmıştır. İntegral denklemin ilk ortaya çıktığı çalışmanın 1823 yılında Abel tarafından çalışılan mekanik bir problem olduğu bilinmektedir. "İntegral denklem" ifadesini Du Bois Reymond'un yine aynı yüzyılda yayınlanmış bir çalışmasında önerdiği de bilinmektedir (Coşgun 2015, Bocher 1913).

İntegral denklemin basit bir örneği aşağıdaki şekilde verilebilir:

y bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer çözümü

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt$$

biçiminde ifade edilir.

4.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

Bilinmeyen fonksiyonun denklemdaki yeri, çekirdek fonksiyonun özellikleri ve integral sınırlarına göre integral denklemler sınıflandırılır. İçinde $u(x)$ fonksiyonu bulunan standart biçimde verilen bir integral denklem

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (4.1)$$

şeklinde dir. ?? denkleminde $K(x, t)$ çekirdek fonksiyon, a ve x integral sınırları, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyondur.

4.2. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler lineer olan ve lineer olmayan olmak üzere iki sınıfa ayrılır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (4.2)$$

biçimindeki integral denklemde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun lineer olması durumunda integral denkleme lineer integral denklem denir. Diğer taraftan

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt \quad (4.3)$$

biçimindeki bir integral denklemde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun n . derece olduğundan bu integral denkleme lineer olmayan integral denklem denir.

4.3. Tekil (Singüler) İntegral Denklemler

İntegral denklemlerde bulunan $K(x,t)$ iki değişkenli bilinen fonksiyonun sürekliliği veya süreksizliği başka sınıflandırmalar yapılmasını mümkün kılar.

$K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu tanımlanan aralıkta sürekli değilse integral denklem tekil integral denklem olarak adlandırılır. İntegral sınırlarının en az birinin sonsuz olması durumunda da integral denklemi tekil denklem olarak adlandırılır.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.4)$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.5)$$

denklemleri tekil integral denklemlerdir. Bir başka örnek olarak ise

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-mt} u(t)dt \quad (4.6)$$

olarak verilebilir.

4.4. Tekil (Singüler) Olmayan İntegral Denklemler ve Sınıflandırılması

$K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu tanımlanan aralıkta sürekli ise integral denklem tekil olmayan integral denklem olarak adlandırılır.

$\phi(x)$ fonksiyonu, $K(x,t)$ iki değişkenli fonksiyonu ve $f(x)$ fonksiyonu bilinen fonksiyonlar, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve α, β sabitler olmak üzere

$$\phi(x) = \int_\alpha^\beta K(x,t)u(t)dt$$

veya

$$\phi(x) = f(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde verilen denklemler 1. tür integral denklemlerdendir. Başka bir ifadeyle, bilinmeyen fonksiyonunun sadece integral içinde yer aldığı denklemlere 1. tür integral denklem denir. Bir diğer örnek olarak ise

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

denklemini verilebilir.

Bilinmeyen fonksiyonun integralin hem içinde hem dışında yer aldığı

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt$$

biçimindeki denklemlere 2. tür integral denklemler denir. Bunlara örnek olarak ise

$$u(x) = 1 + x + \int_0^2 \sin(x+t)u(t)dt \quad (4.7)$$

denklemini verilebilir.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere 2. tür integral denklemler denir.

4.5. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İçerisinde $f(x)$ gibi bilinen bir fonksiyon bulundurmeyen integral denklemlere homojen integral denklem, $f(x)$ gibi bilinen bir fonksiyon bulunduran integral denklemlere ise homojen olmayan integral denklem denir.

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt \quad (4.8)$$

homojen integral denkleme,

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt \quad (4.9)$$

denklemini ise homojen olmayan integral denkleme örnektir.

4.6. Fredholm ve Volterra İntegral Denklemleri

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt \quad (4.10)$$

biçiminde integral sınırları sabit olan denklemlere Fredholm integral denklemi denir.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_{\alpha}^x K(x,t)u(t)dt \quad (4.11)$$

biçiminde integral sınırları değişken olan denklemlere ise Volterra integral denklemi denir. ?? ve ?? denklemlerinde $\phi(x) \equiv 0$ ise 1. tür, $\phi(x) \equiv 1$ ise 2. tür, farklı durumlarda ise 3. tür integral denklem olarak isimlendirilir.

Fredholm integral denklemlerinde de $f(x)$ ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu bilinen, $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyonu α, β sabitleri integral sınırlarını ifade eder.

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)u(t)dt, \quad x \in D \quad (4.12)$$

biçimindeki denklemlere 1. tür Fredholm integral denklemi denir. Burada D kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı ve sınırlı bir kümedir. Burada x için verilen tanım aralığı integrasyon aralığıyla çakışmaz (Delves, 1974).

1. tür Fredholm integral denklemleri genel olarak iyi tanımlı olmayan problemler olarak kabul görür. Bu tür problemlerin iyi tanımlı olup olmaması (Hadamard, 1923)'a göre bazı özelliklerin sağlanmasına bağlıdır. Bunlar çözümün varlığı, çözümün tekliği ve ?? denkleminde verilen $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu, $f(x)$ bilinen fonksiyonunun verilerine sürekli olarak bağımlılığını ve $f(x)$ bilinen fonksiyonun çözümünde küçük hataların $u(x)$ verilerindeki küçük hatalara bağlı olduğunu gösterir (Kress, 1999).

Bu özellikler sağlanıyorsa problem iyi tanımlı problem olarak adlandırılır. İyi tanımlı olmayan problemlerde çözüm varsa bu çözüm tek değildir. Elde edilen çözüm gözlenen veriye sürekli bağlı kalmayabilir. Bu sebeplerden dolayı 1. Tip Fredholm integral denklemi iyi tanımlı olmayan problemlerdir.

Diğer taraftan $u(x)$ fonksiyonu integral denklemde hem içinde hem de dışında varsa bu denklemlere 2. tür Fredholm denklemi denir.

5. HERMİTE POLİNOMLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONUN BİR UYGULAMASI

Bu bölüm çalışmamızda elde edilen sonuçları içermektedir. Öncelikle, çekirdeği Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonunu içeren bazı singüler Fredholm integral denklemlerinin çözümü için gerekli sonuçlar elde edilecektir. Daha sonra bu denklemlerin çözümleri için işlevsel bir yöntem ve algoritma verilecektir. Örneklerle elde edilen teorik sonuçlar desteklenecektir.

$(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre indisinden düşük dereceli polinomlara ortogonal olan Hermite polinomlar $\mathcal{H}_n$ kümesini ele alıyoruz. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{H}_n(x) x^k dx = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (5.1)$$

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında, aksi belirtilmedikçe,

$$w(x) = e^{-x^2} \text{ ve } \mathcal{G}(x, t) = e^{2xt-t^2}$$

olarak ele alınacaktır.

5.1 Teorem Aşağıdaki eşitlik, negatif olmayan her k tam sayısı için geçerlidir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) x^k dx = P_k(t), \quad (5.2)$$

burada $P_k(t)$ keyfi bir k . derece polinomudur.

Kanıt Burada

$$\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_n(x)}{n!} t^n,$$

olduğundan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) x^k dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) x^k dx \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. (??) eşitliği kullanılarak, denklem

$$\sum_{n=0}^k \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) x^k dx. \quad (5.4)$$

formuna getirilir. Aşağıdaki eşitlik kolaylıkla doğrulanabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) x^k dx = \begin{cases} 0 & , k < n, \\ \sqrt{\pi} k! & , k = n \end{cases} \quad (5.5)$$

Denklemleri daha sade bir şekilde ifade etmek için $k \geq n$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) x^k dx = C_n$$

biçimindedir. Böylece, (??) denklemleri aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) x^k dx = \sum_{n=0}^k C_n \frac{t^n}{n!}.$$

Burada $n = k$ için $C_n \neq 0$. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç Aşağıdaki özdeşlik, her A ve B sabiti için geçerlidir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) (A + Bx) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} x^k dx = P_k(t).$$

Burada k sayısı negatif olmayan herhangi bir sayıyı temsil etmektedir.

Kanıt Öncelikle $k = 0$ durumunu ele alalım. İşlem kolaylığı açısından, integrali parçalarsak

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dx &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} w(x) x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} dx &= \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. O halde bu integrallerin keyfi lineer kombinasyonları da sabittir. Diğer taraftan, (??) eşitliğinde her iki tarafın t değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) x^k dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} x^k dx = P_{k-1}(t).$$

eşitliği her pozitif k tamsayısı için sağlanır.

Eşitliğin son kısmı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left(x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right) x^{k-1} dx = P_{k-1}(t), \quad k \text{ pozitif tamsayı.}$$

Sonuç ispatı tamamlanmış olur. □

Sonuç $Q(x)$ polinomunun derecesinin alabileceği en büyük değer k ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)Q(x) \frac{\partial^k G}{\partial t^k} x^k dx = P_k(t)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt Bir önceki ispattaki adımlar takip edilerek sonuc kolaylıkla ispatlanabilir. $\square$

Uyarı $(A+Bx) \frac{\partial G}{\partial t}$ fonksiyonu da bir üreteç fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} (A+Bx) \frac{\partial G}{\partial t} &= (A+Bx) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} \\ &= (A+Bx) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n \\ H_n^{(1)}(x) &= (A+Bx)H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Böylece $(A+Bx) \frac{\partial G}{\partial t}$ fonksiyonu için üreteç fonksiyonu

$$(A+Bx) \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}(x)}{n!} t^n$$

şeklinde yazılabilir.

5.2 Teorem Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu $\mathcal{G}(x,t)$, ağırlık fonksiyonu $w(x)$ ve $f(t)$ sırasıyla aşağıdaki şekilde

$$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, w(x) = e^{-x^2} \text{ ve } f(t) = \sum_{n=0}^N b_n t^n$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x,t) u(x) dx = f(t) \quad (5.6)$$

integral denkleminin çözümü de $u(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k$ şeklinde bir polinom olur. Bu polinomun katsayıları $\mathbf{F}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eşitliğini sağlar. Burada

$$\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T, \mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_N]^T$$

ve $\mathbf{F}$ matrisinin girdileri

$$F_{nk} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x) w(x) x^{k-1} dx, \quad n, k = 1, 2, \dots, N+1. \quad (5.7)$$

Kanıt

$$f(t) = \sum_{k=0}^N c_k P_k(t).$$

Burada P_k derecesi k olan bir polinomdur ve bu gösterim tektir. $\square$

(??) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^N c_k P_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^N c_k \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) x^k dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) \left(\sum_{k=0}^N c_k x^k \right) dx. \end{aligned}$$

Elde edilen son eşitlik

$$u(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k$$

fonksiyonu (??) eşitliğini sağlar. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \right) \left(\sum_{k=0}^N c_k x^k \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\sum_{k=0}^N c_k \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \frac{H_n(x)}{n!} x^k dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^N b_n t^n \end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$b_n = \sum_{k=0}^N c_k \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \frac{H_n(x)}{n!} x^k dx, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Bu eşitlik aslında $\mathbf{F}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ nin girdilerini oluşturan eşitliktir.

$\mathbf{F}$ ile ilgili önemli bir kaç sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç $\mathbf{F}$ matrisinin köşegen girdileri eşittir.

?? ve ?? eşitliklerinden kolaylıkla görülebilir. Aslında bu girdi de $\sqrt{\pi}$ dir.

Sonuç $\mathbf{F}$ matrisi üst üçgenseldir.

?? ve ?? eşitliklerinden kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç $\mathbf{F}$ matrisinin tek sayılardaki köşegen girdileri sıfırdır. Başka bir deyişle, $n + k$ toplamı tek ise $F_{nk} = 0$.

Rodrigues formülünden Hermite polinomlarının simetri özelliğini kullanıyoruz. Bu formüller n değerine bağlı çift veya tek fonksiyonlar olduğu formüllerdir. Daha açık bir ifadeyle,

$$\mathcal{H}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{H}_n(x)$$

Bu özellik ve $n + k$ toplamının tek olması şartı ile birlikte ?? eşitliğindeki integralin tek olmasını sağlar.

Teorem ?? kullanılarak çözümler elde edildikten sonra, bu çözümlerin Hermite polinomları veya bunların bir kombinasyonu cinsinden ifade edilmesi mümkünken, bu işlem direkt olarak Teorem ?? yeniden ifade edilerek yapılabilir. Temel olarak Hermite polinomlarının ortogonalite özelliği kullanılarak çözüm Hermite polinomlarının kombinasyonu şeklinde de ifade edilebilir.

5.3 Teorem Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu $\mathcal{G}(x, t)$, ağırlık fonksiyonu $w(x)$ ve $f(t)$ sırasıyla aşağıdaki şekilde

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \quad \text{ve} \quad w(x) = e^{-x^2} \quad \text{ve} \quad f(t) = \sum_{n=0}^N b_n t^n,$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) u(x) dx = f(t) \quad (5.8)$$

integral denkleminin çözümü

$$u(x) = \sum_{k=0}^N c_k H_k(x)$$

şeklindedir. Burada

$$c_k = \frac{1}{2^k \sqrt{\pi}} b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Kanıt

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \right) \left(\sum_{k=0}^N c_k H_k(x) \right) dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_n(x) \left(\sum_{k=0}^N c_k H_k(x) \right) dx \\
 &= \sum_{n=0}^N c_n \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) [H_n(x)]^2 dx \\
 &= \sum_{n=0}^N c_n 2^n \sqrt{\pi} t^n
 \end{aligned}$$

Yukardaki son iki adım için aşağıdaki bağıntı kullanıldı.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & ,m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} n! & ,m = n \end{cases} \quad (5.9)$$

Buradan

$$c_n = \frac{b_n}{2^n \sqrt{\pi}}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

□

olduğu açıktır.

Örnek Aşağıdaki singüler integral denklemi inceleyelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) u(x) dx = 1 + t.$$

Burada $\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt-t^2}$ ve $w(x) = e^{-x^2}$ olarak alınacaktır.

c vektörünü elde etmek için $\mathbf{F}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ matris eşitliğinde değerler yerine yazıldığında

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_0(x) dx & \int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_0(x) x dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_1(x) dx & \int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_1(x) x dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\mathbf{b} = [1, 1]^T$$

Buradan

$$\mathbf{c} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} [1, 1] \implies u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} (1 + x)$$

elde edilir.

Alternatif olarak Teorem ?? kullanılırsa

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

ve

$$u(x) = \sum_{k=0}^1 c_k H_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2x = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} (1+x),$$

elde edilir. Böylece, her iki yöntemin aynı sonucu verdiği görülür.

Örnek Aşağıda verilen 1. tip Fredholm integral denklemini inceleyelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) u(x) dx = 1 + t + t^2,$$

Burada $\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt-t^2}$ ve $w(x) = e^{-x^2}$.

Öncelikle $\mathbf{F}$ matrisi girdileri hesaplanır ve $\mathbf{b}$ vektörü oluşturulur. Daha sonra $\mathbf{F}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ matris eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ 0 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$$

Buradan

$$\mathbf{c} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} [1/2, 1, 1] \implies u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + x + x^2 \right)$$

elde edilir. Diğer yandan, Teorem ?? kullanılırsa

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad c_2 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$$

ve

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^2 c_k H_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2x + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} (4x^2 - 2) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + x + x^2 \right), \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı sonucun elde edildiği görülür.

Örnek Aşağıda verilen denklemi inceleyelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathcal{G}(x, t) u(x) dx = 1 + t + t^2 + t^3,$$

Burada $\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt-t^2}$ ve $w(x) = e^{-x^2}$.

Yukardaki örneklerde takip edilen adımlar tekrarlanırsa,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} & 0 & \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{b} = [1, 1, 1, 1]^T$$

olur. Buradan

$$\mathbf{c} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} [1, -1, 2, 2] \implies u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} (1 - x + 2x^2 + 2x^3)$$

elde edilir. Alternatif olarak, Teorem ?? kullanılırsa

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad c_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad c_2 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}, \quad c_3 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}$$

ve

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^3 c_k H_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2x + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} (4x^2 - 2) + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} (8x^3 - 12x) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} (1 - x + 2x^2 + 2x^3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuçların aynı olduğu görülür.

Örnek Aşağıdaki integral denklemini inceleyelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) G(x, t) u(x) dx = 1 + t/2,$$

Burada $\mathcal{G}(x, t) = e^{2xt-t^2}$ ve $w(x) = e^{-x^2}$.

Benzer şekilde $\mathbf{F}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eşitliğinden

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{b} = [1, 1/2]^T$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{c} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} [1, 1/2] \implies u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} (2 + x)$$

olduğu aşıkardır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızın temel amacı çekirdeği Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonunu da içeren bazı singüler formdaki Fredholm integral denklemlerinin çözümleri için bir yöntem veya algoritma tanıtmak olarak hedeflenmiştir. Bu konuda yapılan en önemli araştırmalardan ve bu tez çalışmamızın temel dayanağı olan çalışma (Savchenko, 2014) tarafından yapılmıştır. İlgili makalede sayılabilir çoklukta A_n fonksiyonu içeren fonksiyonlar kümesinin özellikleri incelenmiştir. İlgili çalışmada özel olarak, A_n fonksiyonları derecesi n 'den küçük tüm polinomlara ortogonal olan fonksiyonlar olarak oluşturulmuştur. Burada ortogonalite $L_2[a, b]$ iç çarpım uzayında birim ağırlık fonksiyonuna göre tanımlanmıştır. Çekirdekleri bu fonksiyon kümelerinin üreteç fonksiyonlarını içeren Fredholm integral denklemlerin çözümleri için etkili bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem Fizikte bazı eksenel simetrik problemleri çözmek için kullanılmıştır.

Bu çalışmamızda Hermite polinomları ve onların üreteç fonksiyonu üzerinde durulmuştur. Çalışmamızı önemli kılan unsurlardan bazıları şöyle özetlenebilir. İnceledigimiz integral denklemleri singüler ve ortogonalite için $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonu kullanılmıştır. Bu ağırlık fonksiyonu Hermite polinomlarının ortogonalitesi için gereklidir. Çalışmamızın temel sonuçlarından biri Teorem ?? de verilmiştir. Bu teoremden data fonksiyonu polinom olan ve çekirdeği Hermite polinomunun üreteç fonksiyonunu içeren singüler integral denkleminin çözümü verilmiştir. Bunun yanı sıra Teorem ??'te çözümün direkt Hermite polinomları cinsinden ifade edilmesi için bir algoritma verilmiştir. Bu teoremlerin bazı önemli sonuçları da ayrıca not edilmiştir. Yeterli sayıda örneklerle sonuçlar test edilmiştir. Bu sonuçlarla literatüre katkı sunduğumuz düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Andrews, G. E., Askey, R., and Roy, R. (1999). *Special Functions*. Cambridge University Press, USA.
- Anton, H. (2013). *Elementary Linear Algebra*. New York: Wiley.
- Babusci, D., Datolli, G., and Quattromini, M. (2012). On integrals involving Hermite polynomials. *Applied Mathematics Letters* , 25, 1157–1160.
- Belefhal, A., Hricha, Z., Essakali, L. D., and Usman, T. (2020). A note on some integrals involving Hermite polynomials and their applications *Advanced Mathematical Models and Applications* , 5 3, 313–319.
- Bilgin, B. (2010). Generating Functions and Their Applications, Master of Science in Department of Cryptography, Middle Esat Technical University, Ankara. URL:<https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezDetay.jsp>.
- Bôcher, M. (1913). *An Introduction to the Study of Integral Equations*. 2nd ed. Cambridge University Press, London.
- Coşgun, T. (2015) Waveletlerle İntegral Denklemlerine Yaklaşım *Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi* , 61.
- Delves, L. M. and Walsh, J. (1974). *Numerical solution of integral equations*. Oxford University Press, London.
- Hadamard, J. (1923). *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Vol. 15), Yale University Press.
- Chihara, T. S. (1978). *An introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc.
- Kim, D. S., Kim, T., Rim, S.H., and Lee, S.H. (2012). Hermite polynomials and their applications associated with Bernoulli and Euler numbers *Discrete Dynamics in Nature and Society* , 13. <https://doi.org/10.1155/2012/974632>
- Kress, R. (1999). *Linear Integral Equations*, Berlin: Springer.
- Levin, O. (2021). *Discrete Mathematics, An Open Introduction* Independently published
- Leon, S. and Lisette, P. (2019). *Linear Algebra with Applications*, Pearson.

- Onbaşı, İ. (2017). Classical Orthogonal Polynomials and Differential Operators *Master of Science in Mathematics, Eastern Mediterranean University*, 71. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezDetay.jsp>
- Rainville, E. D. (1960). *Special Functions*. The Macmillan Company, New York.
- Savchenko, A. O. (2014). Functions orthogonal to polynomials and their application in axially symmetric problems in Physics. *Theoretical and Mathematical Physics* , 179, 574–587. <https://doi.org/10.1007/s11232-014-0163-0>
- Thakere, N.K. and Madhekar, H. C. (1982). Use of Hermite's method to obtain generating functions for classical orthogonal polynomials *Indian J. Pure Appl. Math.*, 13(2), 183–189. <http://users.dimi.uniud.it/giacomo.dellariccia/Table>
- Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations*. Springer-Verlag.
- Weber, H. J. and Arfgen, G. B. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press.
- Wilf, H.S. (1993). *generatingfunctionology*. Academic Press.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı Mustafa Kemal ATALAR

Eğitim Derecesi

Okul/Program

Mezuniyet Yılı

Lisans

Ondokuz Mayıs Üniversitesi /
Matematik Bölümü

2004

Yüksek Lisans (Tezsiz)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi /
Fen Bilimleri Enstitüsü

2009

İş Deneyimi/Yıl

Çalıştığı Yer

Görevi

2009 - 2012

MEB/Kolay Anadolu Lisesi

Matematik Öğretmeni

2012 - 2014

MEB/Bafra Atatürk Anadolu Lisesi

Matematik Öğretmeni

2014 - 2015

MEB/Hasan Çakın M.T.A.L

Matematik Öğretmeni

2015 -

MEB/Yaşar Doğu M.T.A.L

Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Atalar M. K. ve Altürk A. (2023). On an Application of the Hermite Polynomials.
International Asian Congress on Contemporary Sciences - VIII,
5-7 Mayıs 2023, Aksaray, Türkiye.

Altürk A ve Atalar M. K. (2023). A Note on the Generating Function for Hermite Polynomials
The 13th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and Their
Applications, 11-13 Mart 2023, Antalya, Türkiye.

Altürk A ve Atalar M. K. (2023). A Note on the Generating Function for Hermite Polynomials
The Proceedings Book of GFSNP 2023, ISBN: 978-625-00-1128-7, 121-123.