



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİYLE LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zafer ÖZTÜRK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Halis BİLGİL

AKSARAY, 2018

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342610 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, **Zafer ÖZTÜRK** tarafından hazırlanan "**ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİYLE LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**"adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Doç.Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi



Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Sezer SORGUN

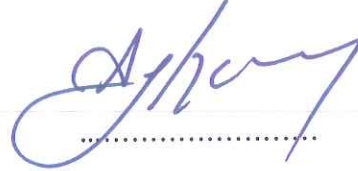
Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi



Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Doç.Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi



Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 22/06/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof.Dr. Engin DELİGÖZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zaman bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Zafer ÖZTÜRK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve çalışma süresince vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Halis BİLGİL'e, her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zafer ÖZTÜRK
AKSARAY, 2018

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Giriş.....	1
1.2. Genel Kavramlar	1
1.3. Kısmi Türevli Denklemlerin Elde Edilmesi.....	2
1.4. Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Denklemler	3
1.5. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....	5
1.6. Soliton Teorisine Fiziksel Bakış.....	7
2. ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ.....	10
2.1. Üstel Fonksiyon Yönteminin Yapısı.....	10
2.2. Üstel Fonksiyon Yöntemi ile İlgili Uygulamalar.....	12
2.2.1. Üstel Fonksiyon Yöntemi ile Fisher's Denkleminin Çözümü.....	12
2.2.2. Üstel Fonksiyon Yöntemi ile Gibbon Denkleminin Çözümü.....	15
2.2.3. Üstel Fonksiyon Yöntemi ile Camassa-Holm Denkleminin Çözümü.....	20
3. ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİNİN DENKLEM SİSTEMİ ÜZERİNE UYGULAMALARI	23
3.1. Üstel Fonksiyon Yönteminin Jaulent-Miodek Denklemini Üzerine Uygulaması.....	23
3.2. Üstel Fonksiyon Yönteminin Navier-Stokes Denklemini Üzerine Uygulaması.....	26
4. KESİRLİ MERTEBEDEN LINEER OLMAYAN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ İLE UYGULAMALARI.....	32
4.1. Kesirli Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yapısı.....	32
4.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemin Genel Şekli.....	33
4.3. Liouville Denklemini.....	34
4.4. Zoomeron Denklemini.....	38
5. SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİYLE LINEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Zafer ÖZTÜRK

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel kavramlar ve bununla birlikte, kısmi türevli denklemlerin elde edilmesi anlatılıp birinci basamaktan lineer olmayan denklemler verilmeye çalışılmıştır. Bu bölümde son olarak lineer olmayan oluşum denklemleri ile Soliton Teorisine fiziksel bakış üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada da lineer olmayan denklemlerin tam çözüm yollarından üstel fonksiyon yöntemi ve bu yöntemin çeşitli denklemlere uygulamaları yapılmıştır. Çalışmanın birinci bölümünde kısmi türevli diferansiyel denklemlere ilişkin genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise üstel fonksiyon yönteminin tanıtımı yapılmıştır. Üçüncü bölümde üstel fonksiyon yönteminin çeşitli boyutlardaki, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ve denklem sistemlerine uygulaması yapılmıştır. Dördüncü bölümde kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tanıtımı ve uygulamaları yapılmıştır. Son olarak da beşinci bölümde tezimizin genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Denklem, Kısmi Türevli Denklem, Tam Çözümler, Üstel Fonksiyon Yöntemi.

Haziran, 2018; 47 sayfa

M.Sc. THESIS

**EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS FOR EXPONENTIAL FUNCTION METHOD**

Zafer ÖZTÜRK

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Doç. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

This thesis consists of five parts. In the first chapter, basic concepts and together with obtaining partial differential equations are explained and first order nonlinear equations are tried to be given. In this section, non-linear equations of formation and physical view of Soliton Theory are emphasized. In this study, exponential function method is applied to exact equations of nonlinear equations and this equations are applied to various equations. In the first part of the work, general information on partial differential equations is given. In the second part, the exponential function method is introduced. In the third chapter, the exponential function method is applied to nonlinear partial differential equations and equation systems in various dimensions. In the fourth chapter, partial differential equations of fractional order are introduced and applied. Finally, in the fifth chapter, a general evaluation of the thesis was made.

Keywords: Differential Equations, Partial Differential Equations, Exact Solutions, Exponential Function Method.

June, 2018; 47 pages

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Bu bölümde kısmi türevli denklemlerle ilgili bazı tanım ve kavramlar verilecektir. Ayrıca lineer olmayan oluşum denklemleri tanımlanmış ve Soliton Teorisine fiziksel bir bakış yapılmıştır.

1.2 Genel Kavramlar

Tanım: İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) bir kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$P(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.2)$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.3)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.4)$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad (1.5)$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.7)$$

ve

$$u = u(x) \quad (1.8)$$

olmak üzere

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.9)$$

şeklindedir.

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bağımsız değişkenleri, (u) ise bağımlı değişkeni göstermekte,

Öte yandan $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ ise;

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (1.10)$$

$$u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.11)$$

olarak ifade edilir.

1.3 Kısmi Türevli Denklemlerin Elde Edilmesi

Kısmi türevli denklemlerin çoğu fiziksel olayların analizinden ortaya çıkmıştır. Örnek olarak belli bir ortamda kararlı ısı denilen zamandan bağımsız ısı dağılımı, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar kısmi türevli denklemler yardımıyla kolayca incelenebilmektedir.

Fiziksel bir olayı matematiksel ifadelerle modelleyerek bir kısmi türevli denklem elde etmek mümkün olabilir. Ancak bu tip denklemlerin elde ediliş şekli üzerinde değil de bu denklemlerin çözümleri üzerinde durulacaktır. Bu kesimde verilen bir yüzey ailesinin sağladığı en küçük basamaktan kısmi türevli denklemin nasıl elde edildiği görülecektir.

Bunun için verilen yüzey ailesindeki bağımlı değişken, bağımsız değişkenlere göre yeterince türetilip verilen yüzey ile hesaplanan türevler arasında keyfi fonksiyonlar ve bunların türevleri yok edilir. Verilen yüzey ailesi, bu denklemin genel çözümü olabileceği gibi, genel çözümün parametrelere bağlı bir alt sınıfı da olabilir. Bu durumda verilen yüzeyle türevler arasında keyfi parametreler yok edilir. Bu yüzey aileleri keyfi sabitlerin yok edilmesi, keyfi fonksiyonların yok edilmesi, geometrik problemler şeklinde çözümleri bulunur.

1.4 Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Denklemler

Bu kısımda;

$$p = u_x, \quad (1.12)$$

$$q = u_y, \quad (1.13)$$

olmak üzere

$$P(x, y, u, p, q) = 0 \quad (1.14)$$

birinci basamaktan genel kısmi türevli denklem incelenecektir. Burada P 'nin p ve q 'a göre lineer olması gerekmemektedir.

Tanım:

$$G(x, y, u, a, b) = 0 \quad (1.15)$$

iki parametrelili bir yüzey ailesi, birinci basamaktan (1.14) denklemini sağlıyorsa bu yüzey ailesine (1.14)'ün tam integrali denir.

Tanım: Her noktasında, $G(x, y, u, a, b) = 0$ iki parametrelili yüzey ailesindeki her bir yüzeye teğet olan diğer bir yüzeye (1.15) yüzey ailesinin bir zarfı denir.

Zarf yüzeyi, (1.15) yüzey ailesini sağladığı denklemi sağlar. Dolayısıyla zarf yüzeyi (1.14) denkleminin bir çözümüdür. Zarf yüzeyi, (1.15) denklemindeki a ve b parametrelerine özel değerler verilerek elde edilmez.

Şimdi a ve b parametreleri arasında:

$$\phi(a) = b \quad (1.16)$$

şeklinde bir fonksiyonel bağıntının olduğu varsayılırsa;

$$G(x, y, u, a, \phi(a)) = 0 \quad (1.17)$$

Bir parametrelili yüzey ailesi elde edilir. (1.16) ailesinin bir zarfı bulunursa, bulunan bu değer (1.14) denklemini sağlar. (1.16) ailesindeki fonksiyon keyfi olduğundan (1.16)'ya (1.14)'ün genel integrali denir. (1.16) ailesinin bir zarfı;

$$\begin{aligned} G(x, y, u, a, \phi(a)) &= 0 \\ \frac{\partial G(x, y, u, a, \phi(a))}{\partial a} &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

a parametresinin yok edilmesi ile bulunur.

(1.15) yüzey ailesinin zarfını bulmak için

$$G(x, y, u, a, b) = 0 ,$$

$$\frac{\partial G(x, y, u, a, \phi(a))}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial G(x, y, u, a, \phi(a))}{\partial b} = 0$$

denklemleri arasında a ve b parametreleri yok edilir. Bu şekilde elde edilen zarfa verilen denklem için bir singüler integral veya singüler çözüm (tekil çözüm) denir.

Teorem: n . mertebeden bir kısmi türevli denklemlerin genel çözümünde n -tane keyfi fonksiyon bulunur. n . mertebeden bir kısmi türevli denklemin genel çözümünde en fazla $\frac{n(n+3)}{2}$ tane keyfi sabit bulunur.

Birinci mertebeden ve yüksek mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemler için genel çözümler farklı yöntemlerle elde edilebilir.

Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümlerini bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri

Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilir. Fakat yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümünün bulunması için belli bir yöntem yoktur. Bu nedenle lineer olmayan kısmi türevli denklemleri sağlayan çözümler tam çözümler olarak adlandırılır.

1.5 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri t zaman olan kısmi türevli diferansiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri $K[u]$; u ve u 'nun x değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere:

$$U_t = K[u] \quad (1.19)$$

formundadır. Eğer $K[u]$, u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve $K[u]$, u terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denir. Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok daldaki problemlerde gözlenmektedir. Bu tip denklemlere birkaç örnek verilmek istenirse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.20)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda $u(x,t)$, t zamanında x konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.20) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için bir model denklem olarak da kullanılmaktadır.

İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferi incelenirse,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} (k \nabla u) + f(u) \quad (1.21)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denklemine ulaşılır. Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alınırsa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) \quad (1.22)$$

formundaki lineer olmayan dalga denklemine ulaşılır.

Kuantum mekaniğinde, aşağıdaki formlarda lineer olmayan oluşum denklemleri ile karşılaşılabılır.

Sine-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0, \quad (1.23)$$

Klein-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0, \quad (1.24)$$

Kübik Schrödinger denklemi:

$$iu_t - \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1.25)$$

İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabılır. Örneğin polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denklemine ulaşılır.

$$u_t + \xi \Delta^2 u = \Delta \Phi(u), \quad (1.26)$$

Bu denklemde ξ belirli bir küçük sabit ve genellikle $\Phi(u) = u^3 - u$ olarak alınmaktadır. (1.26) denklemi dördüncü mertebeden bir oluşum denklemdir. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.27)$$

şeklindeki KdV (Korteweg-de Vries) denklemi verilebilir.

1.6 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özellikleri gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar.

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır.

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilirler. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır. Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir:

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir. Ayrıca solitary dalgalarının özellikleri hakkında Russel adlı bilim insanı tarafından aşağıdaki önemli bilgilere ulaşılmıştır. Bunlar:

- i) Solitary dalgaları $\text{sech}^2(k(x-vt))$ şekline sahiptir.
- ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.
- iv) g yerçekimi ivmesi olmak üzere h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası:

$$v = \sqrt{g(d + h)}, \quad (1.28)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulak her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesin daha önce duyulması gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalarla yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağı ele alındığında sıcaklık kademeli olarak hissedilirken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırına el yaklaştırıldığında, sıcaklık hemen hissedilir ve el geriye çekilir. Dolayısıyla sinirler bir nevi solitary dalgası oluşturarak beyine bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

Önceki yıllarda sonuçlar deneysel olarak kalmış ve bir denklem çözümü için solitary dalgaları elde edilememiştir. Bununla birlikte bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri araştırma konusu olmuştur. Ünlü matematikçi Korteweg-de Vries tarafından

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mathcal{L} \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \gamma u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \quad (1.29)$$

formundaki sıg su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerinde çalışmaya başlanılmıştır. Denklemden;

$u(x,t)$, dalga genliğine

$c = \sqrt{gd}$, küçük genlikli dalganın hızına,

$e = c\left(\frac{d^2}{6} - \frac{T}{2pg}\right)$, Dağılma parametresine

γ , lineer olmayan parametreyi

T , yüzey gerilimine

p , suyun yoğunluğuna

karşılık gelmektedir. (1.29) denkleminin

$$u(x,t) = \tilde{u}(x-vt) , \quad (1.30)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğu gösterilmiştir. Burada (1.30) ifadesi önceki kısımlarda belirtilen Russel'in solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece solitary dalgaların varlığı Korteweg - de Vries tarafından kanıtlanmıştır. Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki solitary dalganın çarpışma sonrası oluşan şekillerin değişip değişmediği konusu netlik kazanmamıştır. Netlik kazanmayan konu ile ilgili çalışmalar Kruskal ve Zabusky tarafından incelenmiş, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, solitary dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara soliton adı verilmiştir. Sonraki yıllarda konu ile ilgili Gardner, Greene, Kruskal ve Miura ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir.

Soliton çözümleri, hem analitik hem de sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerinde çalışmalar hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası soliton olarak; akışkanlık mekaniği, temel parçacıklar fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanında kullanılmaktadır.

Solitonlar tarafından uzun mesafelerde yol alınabildiği için; teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde kayıp olmaksızın büyük miktarda bilgi binlerce kilometre boyunca taşınılabilecektir. Bu sebeple, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık kullanılmaktadır. Yakın gelecekte ilerleyen çalışmalar neticesinde radar ve iletişim sektörü gibi birçok yerde solitonların kullanılması beklenmektedir.

2. ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ

2.1 Üstel Fonksiyon Yönteminin Yapısı

Doğa bilimleri ve mühendislikte önemli bir yere sahip olan ve fiziksel olayların bir modellenmesi olarak elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklemlerin integrallenebilirliği 1960'lerden günümüze kadar uygulamalı matematiğin temel konularından biri olmuştur. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi her zaman mümkün olamamaktadır. Bu zorluktan dolayı öncelikli olarak bu tip denklemlerin integrallenebilirliği üzerinde çalışılmıştır. Bununla birlikte integrallenebilir lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Son on yılda bu yöntemler daha da geliştirilerek uygulama alanları genişletilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları tanjant hiperbolik yöntemi, sinüs-cosinüs yöntemi, genişletilmiş tanjant hiperbolik yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi, kudryashov yöntemi, ilk integral yöntemi ve G'/G -açılım yöntemidir.

Üstel fonksiyon yöntemi ilk olarak He tarafından tanımlanmış ve birçok bilim insanı tarafından çeşitli uygulamaları verilmiştir.[He JH., Wu XH., 2006. Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations, Chaos, Solitonand Fractals, 30,3, 700-708]

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümü üstel fonksiyon yöntemiyle elde edilecektir. Öncelikle kısmi türevli diferansiyel denklemi adi diferansiyel denkleme indirgenecek ve üstel fonksiyon yöntem ile tam çözümü bahsedilecektir. Uygulama olarak da Riccati denklemi üstel fonksiyon yöntemiyle çözülecektir.

Genel olarak

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

şeklindeki lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denkleme

$$\xi = kx + wt \quad (2.2)$$

k, w keyfi sabitler olmak üzere verilen benzerlik dönüşümü (hareketli dalga dönüşümünü) uygulayalım. Burada k dalga sayısı, w ise dalganın hızını göstermektedir. İfadenin (2.2)'ye göre türevi alınır ve aşağıdaki gibi dönüşümler yapılır.

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = w \frac{\partial u}{\partial \xi} = wu' \quad (2.3)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = k \frac{\partial u}{\partial \xi} = ku' \quad (2.4)$$

$$u_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = k^2 u'' \quad (2.5)$$

$$u_{xxx} = k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = k^3 u''' \quad (2.6)$$

Bulunan ifadeler (2.1) denkleminde yerine yazılır ve

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (2.7)$$

şeklinde denklem elde edilir. Böylece verilen kısmi türevli diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme dönüşür. Dönüşümün çözülebilir olması için adi diferansiyel denklemin lineer kısmının en yüksek mertebelisi ile lineer olmayan kısmının en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır.

Üstel fonksiyon yönteminde, c, d, p ve q pozitif tamsayılar, a_n ve b_m daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\xi)}} \quad (2.8)$$

eşitliği $u(\xi)$ 'ye eşitlenip çözüm aranır.

Lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesinden $c = p$ ve $d = q$ elde edilir. c, d, p ve q 'nun durumlarına göre tam çözümler elde edilebilir. Örneğin, kolaylık olsun diye $c = p = 1, d = q = 1$ alınırsa çözüm:

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + b_1e^{\xi}} \quad (2.9)$$

şeklinde bulunur. Burada $u(x,t) = u(\xi)$ ifadesi indirgenmiş denklemde yerine yazılarak, $e^{n\xi}$ ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$)'in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden a_n ve b_m değerleri bulunarak hareketli dalga çözümleri elde edilebilir.

2.2 Üstel Fonksiyon Yöntemi İle İlgili Uygulamalar

2.2.1 Üstel fonksiyon yöntemi ile Fisher's denkleminin çözümü

$$u_{tt} = u_{xx} + u(1-u) \quad (2.10)$$

Fisher's denklemini ele alalım.

Benzerlik dönüşümü ,

$$\xi = kx + wt \quad (2.11)$$

olarak ifade edilir. Gerekli dönüşüm gerçekleştirildiğinde,

$$-w^2 u'' + k^2 u'' + u(1-u) = 0 \quad (2.12)$$

haline dönüşür. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli ile lineer kısmın en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli u'' özel olarak

$$u'' = \frac{c_1 e^{(-3p-c)\xi} + \dots + d_1 e^{(3q+d)\xi}}{c_2 e^{(-4p)\xi} + \dots + d_2 e^{(4q)\xi}} \quad (2.13)$$

olarak açılır. Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli u^2 ise özel olarak

$$u^2 = \frac{c_3 e^{(-2p-2c)\xi} + \dots + d_3 e^{(2q+2d)\xi}}{c_4 e^{(-4p)\xi} + \dots + d_4 e^{(4q)\xi}} \quad (2.14)$$

olarak açılır. Bu ifadelerin ilk ve son terimlerinin dengelenmesine bakılır, şayet dengelenme sağlanıyorsa, ifadelerin geneli hakkında dengelenme sağlanıyordur sonucu çıkarılabilir.

$$-3p - c = -2c - 2p, \quad (2.15)$$

$$p = c, \quad (2.16)$$

benzer şekilde

$$3q + d = 2q + 2d, \quad (2.17)$$

$$q = d, \quad (2.18)$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için $p = c = q = d = 1$ ve özel olarak $b_1 = 1$ alınır. Çünkü b_{-1} , b_0 ve b_1 'in tamamının 0 olması durumunda çözüm tanımsızlığa ulaşabilir. Bu nedenle rasgele seçim olarak $b_1 = 1$ olarak alındı.

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (2.19)$$

şeklinde çözüm aranır. u'' ve u^2 hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazılır, $e^{n\xi}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve Maple kullanarak hesaplama yapılır.

$$\frac{-1}{A} [C_3e^{3\xi} + C_2e^{2\xi} + C_1e^{\xi} + C_0 + C_{-1}e^{-\xi} + C_{-2}e^{-2\xi} + C_{-3}e^{-3\xi}] = 0 \quad (2.20)$$

$A = (b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi})^3$ olmak üzere ,

$$C_3 = -a_1 + a_1^2 \quad (2.21)$$

$$C_2 = -a_0 - k^2a_0 - wa_0 + 2a_0a_1 - 2a_1b_0 + k^2a_1b_0 + w a_1b_0 + a_1^2b_0 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} C_{-1} = & -a_{-1} - 4k^2a_{-1} - 2wa_{-1} + a_0^2 + 2a_{-1}a_1 - 2a_1b_{-1} + 4k^2a_1b_{-1} + 2wa_1b_{-1} \\ & + a_1^2b_{-1} - 2a_0b_0 + k^2a_0b_0 - w a_0b_0 + 2a_0a_1b_0 - a_1b_0^2 - k^2a_1b_0^2 + w a_1b_0^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} C_0 = & 2a_{-1}a_0 - 2a_0b_{-1} + 6k^2a_0b_{-1} + 2a_0a_1b_{-1} - 2a_1b_0 - 3k^2a_{-1}b_0 - 3wa_{-1}b_0 \\ & + a_0^2b_0 + 2a_{-1}a_1b_0 - 2a_1b_{-1}b_0 - 3k^2a_1b_{-1}b_0 + 3wa_1b_{-1}b_0 - a_0b_0^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
C_{-1} = & a_{-1}^2 - 2a_{-1}b_{-1} + 4k^2a_{-1}b_{-1} - 2wa_{-1}b_{-1} + a_0^2b_{-1} + 2a_{-1}a_1b_{-1} - a_1b_{-1}^2 \\
& - 4k^2a_1b_{-1}^2 + 2wa_1b_{-1}^2 + 2a_{-1}a_0b_0 - 2a_0b_{-1}b_0 + k^2a_0b_{-1}b_0 + \\
& wa_0b_{-1}b_0 - a_{-1}b_0^2 - k^2a_{-1}b_0^2 - wa_{-1}b_0^2
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
C_{-2} = & 2a_{-1}a_0b_{-1} - a_0b_{-1}^2 - k^2a_0b_{-1}^2 + wa_0b_{-1}^2 + a_{-1}^2b_0 - 2a_{-1}b_{-1}b_0 \\
& + k^2a_{-1}b_{-1}b_0 - wa_{-1}b_{-1}b_0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$C_{-3} = -a_{-1}^2b_{-1} - a_{-1}b_{-1}^2 \tag{2.27}$$

Maple yardımıyla, cebirsel denklem sisteminden,

$$\text{1. Durum: } k = \frac{-1}{\sqrt{6}}, w = \frac{5}{6}, a_{-1} = \frac{b_0^2}{4}, a_0 = 0, a_1 = 0, b_{-1} = \frac{b_0^2}{4}$$

$$\text{2. Durum: } k = \frac{1}{\sqrt{6}}, w = \frac{5}{6}, a_{-1} = \frac{b_0^2}{4}, a_0 = 0, a_1 = 0, b_{-1} = \frac{b_0^2}{4}$$

$$\text{3. Durum: } k = \frac{1}{\sqrt{6}}, w = \frac{-5}{6}, a_{-1} = 0, a_0 = 0, a_1 = 1, b_{-1} = \frac{b_0^2}{4}$$

$$\text{4. Durum: } k = \frac{-1}{\sqrt{6}}, w = \frac{-5}{6}, a_{-1} = \frac{b_0^2}{4}, a_0 = 0, a_1 = 1, b_{-1} = \frac{b_0^2}{4}$$

değerleri bulunur ve (2.19)'da yerine yazılırsa

$$\text{1. Duruma Ait Çözüm: } u_1(x, t) = \frac{b_0^2}{(2e^{\frac{-\sqrt{6}x+5t}{6}} + b_0)^2}$$

$$\text{2. Duruma Ait Çözüm: } u_2(x, t) = \frac{b_0^2}{(2e^{\frac{\sqrt{6}x+5t}{6}} + b_0)^2}$$

$$3. \text{ Duruma Ait Çözüm: } u_3(x, t) = \frac{4e^{2\left(\frac{\sqrt{6}x-5t}{6}\right)}}{(2e^{\frac{\sqrt{6}x-5t}{6}} + b_0)^2}$$

$$4. \text{ Duruma Ait Çözüm: } u_4(x, t) = \frac{4e^{2\left(\frac{-\sqrt{6}x-5t}{6}\right)}}{(2e^{\frac{-\sqrt{6}x-5t}{6}} + b_0)^2}$$

çözümleri elde edilir.

2.2.2 Üstel fonksiyon yöntemi ile Gibbon denkleminin çözümü

$$u_t + u_{xxxx} + 30uu_{xxx} + 30u_x u_{xx} + 180u^2 u_x = 0$$

Gibbon denklemini ele alalım.

Benzerlik dönüşümü ,

$$\xi = kx + wt \quad (2.28)$$

olarak ifade edilir. Gerekli dönüşüm gerçekleştirildiğinde,

$$wu' + k^4 u^{(iv)} + 30k^3 uu''' + 30k^3 u' u'' + 180ku^2 u' = 0 \quad (2.29)$$

haline dönüşür. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli ile lineer kısmın en yüksek mertebeliinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli $u^{(iv)}$ özel olarak

$$u^{(iv)} = \frac{c_1 e^{(-15p-c)\xi} + \dots + d_1 e^{(15q+d)\xi}}{c_2 e^{(-16p)\xi} + \dots + d_2 e^{(16q)\xi}} \quad (2.30)$$

olarak açılır. Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli uu''' ise özel olarak

$$uu''' = \frac{c_3 e^{(-7p-2c)\xi} + \dots + d_3 e^{(7q+2d)\xi}}{c_4 e^{(-9p)\xi} + \dots + d_4 e^{(9q)\xi}} \quad (2.31)$$

olarak açılır. Bu ifadelerin ilk ve son terimlerinin dengelenmesine bakılır, şayet dengelenme sağlanıyorsa, ifadelerin geneli hakkında dengelenme sağlanıyordur sonucu çıkarılabilir.

$$-15p - c = -14p - 2c, \quad (2.32)$$

$$p = c, \quad (2.33)$$

benzer şekilde

$$15q + d = 14q + 2d, \quad (2.34)$$

$$q = d, \quad (2.35)$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için $p = c = q = d = 1$ ve özel olarak $b_1 = 1$ alınır.

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (2.36)$$

şeklinde çözüm aranır. $u^{(iv)}$ ve uu''' hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazılır, $e^{n\xi}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve Maple kullanarak hesaplama yapılır.

$$\frac{-1}{A} [C_5e^{5\xi} + C_4e^{4\xi} + C_3e^{3\xi} + C_2e^{2\xi} + C_1e^{\xi} + C_0 + C_{-1}e^{-\xi} + C_{-2}e^{-2\xi} + C_{-3}e^{-3\xi} + C_{-4}e^{-4\xi} + C_{-5}e^{-5\xi}] = 0 \quad (2.37)$$

$A = (b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi})^6$ olmak üzere

$$C_5 = -k^4a_0 - wa_0 - 30k^2a_0a_1 - 180a_0a_1^2 + k^4a_1b_0 + wa_1b_0 + 30k^2a_1^2b_0 + 180a_1^3b_0 \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} C_4 = & -32k^4a_{-1} - 2wa_{-1} - 60k^2a_0^2 - ka_0^2 - 240k^2a_{-1}a_1 - 360a_0^2a_1 - 360a_{-1}a_1^2 \\ & + 32k^4a_1b_{-1} + 2wa_1b_{-1} + 240k^2a_1^2b_{-1} + 360a_1^3b_{-1} + 26k^4a_0b_0 + 360a_1^3b_0^2 \\ & - 26k^4a_1b_0^2 - 120k^2a_1^2b_0^2 + 180k^2a_1a_0b_0 + 4wa_1b_0^2 - 4wa_0b_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & -9w a_{-1} - 288 k^4 a_{-1} - 540 a_{-1} a_1^2 b_0 + 237 k^4 a_0 b_{-1} + 540 a_0 a_1^2 b_{-1} \\
& + 51 k^4 a_{-1} b_0 - 180 a_0^3 - 180 k^2 a_{-1} a_1 b_0 - 540 a_0^2 a_1 b_0 + 540 a_0 a_1^2 b_0^2 - 90 k^2 a_1^2 b_0^3 \\
& - 66 k^4 a_0 b_0^2 + 1080 a_1^3 b_0 b_{-1} - 1080 a_{-1} a_1 a_0 + 1080 k^2 a_1 a_0 b_{-1} - 450 k^2 a_{-1} a_0 \\
& - 450 k^2 a_1^2 b_0 b_{-1} + 66 k^4 a_1 b_0^3 - 3w a_0 b_{-1} + 6w a_1 b_0^3 + 90 k^2 a_0^2 b_0 \\
& + 12w a_1 b_0 b_{-1} + 180 a_1^3 b_0^3 - 6w a_0 b_0^2
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & -8w a_{-1} b_{-1} - 360 a_0^3 b_0 + 24w a_1 b_{-1} b_0^2 + 26 k^4 a_0 b_0^3 + 8w a_1 b_{-1}^2 \\
& - 540 k^2 a_{-1} a_0 b_0 - 120 k^2 a_{-1} a_1 b_0^2 + 720 a_1^3 b_{-1}^2 + 420 k^2 a_0 a_1 b_0 b_{-1} \\
& + 840 k^2 a_0^2 b_{-1} - 600 k^2 a_1^2 b_0^2 b_{-1} + 1440 k^2 a_{-1} a_1 b_{-1} - 832 k^4 a_1 b_{-1}^2 \\
& - 180 k^2 a_0 a_1 b_0^3 + 360 a_0 a_1^2 b_0^3 - 720 a_{-1} a_0^2 - 720 a_{-1}^2 a_1 + 720 a_1^3 b_{-1} b_0^2 \\
& - 46 k^4 a_{-1} b_0^2 - 428 k^4 a_0 b_0 b_{-1} - 960 k^2 a_1^2 b_{-1}^2 + 474 k^4 a_1 b_{-1} b_0^2 \\
& - 2160 a_{-1} a_1 a_0 b_0 - 26 k^4 a_1 b_0^4 - 16w a_{-1} b_0^2 + 120 k^2 a_0^2 b_0^2 + 60 k^2 a_1^2 b_0^4 \\
& + 832 k^4 a_{-1} b_{-1} + 2160 a_0 a_1^2 b_0 b_{-1} - 8w a_0 b_0 b_{-1} + 4w a_1 b_0^4 - 4w a_0 b_0^3 - 480 k^2 a_{-1}^2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & -14 w a_{-1} b_0^3 - 930 k^2 a_{-1}^2 b_0 + 1080 a_{-1} a_1^2 b_0 b_{-1} - 1140 k^2 a_0 a_1 b_{-1}^2 \\
& - 1620 a_{-1}^2 a_1 b_0 + 1050 k^2 a_0^2 b_0 b_{-1} + 1290 k^4 a_1 b_0 b_{-1}^2 - 1470 k^2 a_1^2 b_0 b_{-1}^2 \\
& + 1620 a_0 a_1^2 b_{-1}^2 + 1620 a_0 a_1^2 b_0^2 b_{-1} - 2w a_0 b_{-1}^2 - 240 k^2 a_{-1} a_0 b_0^2 \\
& - 960 k^2 a_1 a_0 b_0^2 b_{-1} - 160 k^4 a_1 b_{-1} b_0^3 + 1800 k^2 a_{-1} a_0 b_{-1} - 1682 k^4 a_0 b_{-1}^2 \\
& + 392 k^4 a_{-1} b_0 b_{-1} + 330 k^2 a_1^2 b_0^3 b_{-1} + 20w a_1 b_{-1} b_0^3 \\
& + 1740 k^2 a_{-1} a_1 b_0 b_{-1} + 900 a_1^3 b_{-1}^2 b_0 - 14 k^4 a_{-1} b_0^3 - k^4 a_0 b_0^4 + k^4 a_1 b_0^5 \\
& - 30 k^2 a_0^2 b_0^3 - 1080 a_{-1} a_0 a_1 b_{-1} - 1080 a_{-1} a_0 a_1 b_0^2 - 28w a_{-1} b_0 b_{-1} \\
& - 1620 a_{-1} a_0^2 b_0 - 180 a_0^3 b_{-1} - 6w a_0 b_{-1} b_0^2 - 180 k^2 a_{-1} a_1 b_0^3 + 180 a_0^2 a_1 b_0^3 \\
& - w a_0 b_0^4 + w a_1 b_0^5 + 30 k^2 a_0 a_1 b_0^4 - 180 a_0^3 b_0^2 + 30w a_1 b_{-1}^2 b_0 \\
& - 900 a_{-1}^2 a_0 + 1080 a_0^2 a_1 b_0 b_{-1} + 174 k^4 a_0 b_0^2 b_{-1} + 180 a_{-1} a_1^2 b_0^3
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & -12wa_{-1}b_{-1}^2 - 6wa_{-1}b_0^4 + 12w a_1b_{-1}^3 + 1080 a_0^2a_1b_{-1}b_0^2 - 1080 a_{-1}^2a_1b_0^2 \\
& -6 k^4a_{-1}b_0^4 - 360a_{-1}^3 + 180 k^2a_0a_1b_0^3b_{-1} + 1080 a_{-1}a_1^2b_{-1}^2 - 36w a_{-1}b_{-1}b_0^2 \\
& +1080 a_0^2a_1b_{-1}^2 + 36w a_1b_{-1}^2b_0^2 + 6w a_1b_{-1}b_0^4 + 1080 a_{-1}a_1^2b_{-1}b_0^2 \\
& +2160 a_0a_1^2b_{-1}b_0 - 720 k^2a_{-1}^2b_0^2 + 3060 k^2a_{-1}a_0b_0b_{-1} + 6 k^4a_1b_{-1}b_0^4 \\
& +414 k^4a_{-1}b_{-1}b_0^2 - 414k^4b_{-1}^2b_0^2 - 720 k^2a_1^2b_{-1}^3 - 3060k^2a_0a_1b_0b_{-1}^2 \\
& +720k^2a_{-1}^2b_{-1} - 1080 a_{-1}a_0^2b_0^2 - 2160 a_{-1}^2a_0b_0 + 360 a_1^3b_{-1}^3 - 1080 a_{-1}^2b_{-1} \\
& -1080 a_{-1}a_0^2b_{-1} - 180 k^2a_{-1}a_0b_0^3 + 720 k^2a_1^2b_{-1}^2b_0^2 - 2112 k^4a_{-1}b_0^2 + 2112k^4a_1b_{-1}^3
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1} = & -20w a_{-1}b_{-1}b_0^3 - 900 a_{-1}^3b_0 - 1050 k^2a_0^2b_0b_{-1}^2 - 1740 k^2a_{-1}a_1b_0b_{-1}^2 \\
& +1140k^2a_{-1}a_0b_{-1}^2 - 1080 a_{-1}^2a_1b_0b_{-1} - 392 k^4a_1b_{-1}^3b_0 - 1800k^2a_0a_1b_{-1}^3 \\
& -1620 a_{-1}^2a_0b_0^2 + 180 k^2a_{-1}a_1b_{-1}b_0^3 + 14 k^4a_1b_{-1}^2b_0^3 - 1620a_{-1}^2a_0b_{-1} \\
& +1080 a_{-1}a_0a_1b_{-1}b_0^2 + 1080 a_{-1}a_0a_1b_{-1}^2 + 1620 a_0^2a_1b_{-1}^2b_0 + 160 k^4a_{-1}b_{-1}b_0^3 \\
& +960 k^2a_{-1}a_0b_{-1}b_0^2 + 1682 k^4a_0b_{-1}^3 + 28w a_1b_{-1}^3b_0 + 2w a_0b_{-1}^3 + w a_0b_{-1}b_0^4 \\
& -k^4a_{-1}b_0^5 - 330k^2a_{-1}^2b_0^3 - 30w a_{-1}b_{-1}^2b_0 + 180 a_0^3b_{-1}^2 + 1620 a_{-1}a_1^2b_0b_{-1}^2 + \\
& 930k^2a_1^2b_{-1}^3b_0 - 180a_{-1}^2a_1b_0^3 + 900a_0a_1^2b_{-1}^3 - 174 k^4a_0b_{-1}^2b_0^2 + 6w a_0b_{-1}^2b_0^2 \\
& -180 a_0^2a_{-1}b_0^3 + 180 a_0^3b_{-1}b_0^2 - w a_{-1}b_0^5 + 30 k^2a_0^2b_{-1}b_0^3 - 30 k^2a_{-1}a_0b_0^4 \\
& +14w a_1b_{-1}^2b_0^3 - 1290 k^4a_{-1}b_0b_{-1}^2 + k^4a_0b_{-1}b_0^4 + 1470 k^2a_{-1}^2b_0b_{-1} \\
& -1080 a_{-1}a_0^2b_0b_{-1} + 240k^2a_0a_1b_{-1}^2b_0^2
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
C_{-2} = & -720 a_{-1}^3b_0^2 - 720a_{-1}^3b_{-1} + 540 k^2a_0a_1b_{-1}^3b_0 + 46 k^4a_1b_{-1}^3b_0^2 \\
& +2160 a_{-1}a_0a_1b_{-1}^2b_0 - 420 k^2a_{-1}a_0b_0b_{-1}^2 + 600 k^2a_{-1}^2b_0^2b_{-1} + 4w a_0b_{-1}^2b_0^3 \\
& +428k^4a_0b_{-1}^3b_0 - 120 k^2a_0^2b_{-1}^2b_0^2 - 2160 a_{-1}^2a_0b_0b_{-1} - 1440 k^2a_{-1}a_1b_{-1}^3 \\
& +120k^2a_{-1}a_1b_{-1}^2b_0^2 - 24w a_{-1}b_{-1}^2b_0^2 - 26 k^4a_0b_{-1}^2b_0^3 + 180k^2a_{-1}a_0b_0^3b_{-1} \\
& -4wa_{-1}b_{-1}b_0^4 - 474k^4a_{-1}b_{-1}^2b_0^2 + 16wa_1b_{-1}^3b_0^2 + 26 k^4a_{-1}b_{-1}b_0^4
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
& +8w a_0 b_0 b_{-1}^3 - 840 k^2 a_0^2 b_{-1}^3 + 832 k^4 a_{-1} b_{-1}^3 - 8w a_{-1} b_{-1}^3 + 960 k^2 a_{-1}^2 b_{-1}^2 \\
& -60 k^2 a_{-1}^2 b_0^4 + 480 k^2 a_1^2 b_{-1}^4 + 720 a_0^2 a_1 b_{-1}^3 - 832 k^4 a_1 b_{-1}^4 + 720 a_{-1} a_1^2 b_{-1}^3 \\
& +360 a_0^3 b_0 b_{-1}^2 - 360 a_{-1}^2 a_0 b_0^3 + 8w a_1 b_{-1}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-3} = & 180 a_0^3 b_{-1}^3 - 180 a_{-1}^3 b_0^3 - 540 a_{-1}^2 a_0 b_{-1} b_0^2 - 12w a_{-1} b_0 b_{-1}^3 \\
& +288 k^4 a_{-1} b_0 b_{-1}^3 + 540 a_{-1}^2 a_1 b_0 b_{-1}^2 + 66 k^4 a_0 b_{-1}^3 b_0^2 + 90 k^2 a_{-1}^2 b_0^3 b_{-1} \\
& -6w a_{-1} b_{-1}^2 b_0^3 - 90 k^2 a_0^2 b_0 b_{-1}^3 + 180 k^2 a_{-1} a_1 b_0 b_{-1}^3 + 9w a_1 b_0 b_{-1}^4 \\
& +450 k^2 a_{-1}^2 b_0 b_{-1}^2 - 51 k^4 a_1 b_0 b_{-1}^4 + 1080 a_{-1} a_0 a_1 b_{-1}^3 + 6w a_0 b_0^2 b_{-1}^3 \\
& +450 k^2 a_0 a_1 b_{-1}^4 - 1080 k^2 a_{-1} a_0 b_{-1}^3 + 540 a_{-1} a_0^2 b_0 b_{-1}^2 - 66 k^4 a_{-1} b_{-1}^2 b_0^3 \\
& -237 k^4 a_0 b_{-1}^4 - 1080 a_{-1}^3 b_0 b_{-1} + 3w a_0 b_{-1}^4 - 540 a_{-1}^2 a_0 b_{-1}^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
C_{-4} = & -2w a_{-1} b_{-1}^4 + 2w a_1 b_{-1}^5 + 360 a_{-1}^2 a_1 b_{-1}^3 - 32 k^4 a_{-1} b_{-1}^4 + 60 k^2 a_0^2 b_{-1}^4 \\
& -360 a_{-1}^3 b_0^2 b_{-1} - 240 k^2 a_{-1}^2 b_{-1}^3 + 32 k^4 a_1 b_{-1}^5 + 360 a_{-1} a_0^2 b_{-1}^3 - 4w a_{-1} b_0^2 b_{-1}^3 \\
& +26 k^4 a_{-1} b_0^2 b_{-1}^3 - 26 k^4 a_0 b_0 b_{-1}^4 + 120 k^2 a_{-1}^2 b_0^2 b_{-1}^2 - 180 k^2 a_{-1} a_0 b_0 b_{-1}^3 \\
& +4w a_0 b_0 b_{-1}^4 + 240 k^2 a_{-1} a_1 b_{-1}^4 - 360 a_{-1}^3 b_{-1}^2
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
C_{-5} = & -k^4 a_{-1} b_0 b_{-1}^4 + 30 k^2 a_{-1} a_0 b_{-1}^4 - 30 k^2 a_{-1}^2 b_0 b_{-1}^3 - w a_{-1} b_0 b_{-1}^4 \\
& -180 a_{-1}^3 b_0 b_{-1}^2 + k^4 a_0 b_{-1}^5 + w a_0 b_{-1}^5 + 180 a_{-1}^2 a_0 b_{-1}^3
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Maple yardımıyla, cebirsel denklem sisteminden,

$$\mathbf{1. Durum:} \quad a_{-1} = 0, a_0 = \pm k^2 \sqrt{b_{-1}}, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 2 \sqrt{b_{-1}}, \quad w = -k^4, \quad k \neq 0$$

$$\mathbf{2. Durum:} \quad a_0 = 0, a_1 = -\frac{k^2}{2}, \quad b_{-1} = -\frac{2a_{-1}}{k^2}, \quad b_0 = \pm 2 \sqrt{b_{-1}}, \quad w = -31k^4, \quad k \neq 0$$

değerleri bulunur ve (2.19)'da yerine yazılırsa

1. Duruma Ait Çözüm: $u_1(x, t) = \frac{\pm k^2 \sqrt{b_{-1}}}{e^{kx-k^5 t} + 2\sqrt{b_{-1}} + b_{-1} e^{-(kx-k^5 t)}}$

2. Duruma Ait Çözüm:

$$u_2(x, t) = \frac{-k^2(2a_{-1}e^{-2k(x-31k^4 t)} - k^2 e^{2k(x-31k^4 t)})}{2(k^2 e^{2k(x-31k^4 t)} - \sqrt{-2k^2 a_{-1}} - 2a_{-1} e^{-2k(x-31k^4 t)})}$$

çözümleri elde edilir.

2.2.3 Üstel fonksiyon yöntemi ile Camassa-Holm denkleminin çözümü

The Camassa-Holm Denklemleri

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x + 2au_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, x \in R, t > 0$$

denklemini ele alalım.

Benzerlik dönüşümü ,

$$\xi = kx + wt \quad (2.49)$$

olarak ifade edilir. Gerekli dönüşüm gerçekleştirildiğinde ,

$$wu' - wk^2 u''' + 3kuu' + 2aku' - 2k^3 u' u'' - k^3 uu''' = 0 \quad (2.50)$$

haline dönüşür. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeliği ile lineer kısmın en yüksek mertebeliğinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeliği u''' özel olarak

$$u''' = \frac{c_1 e^{(-7p-c)\xi} + \dots + d_1 e^{(7q+d)\xi}}{c_2 e^{(-8p)\xi} + \dots + d_2 e^{(8q)\xi}} \quad (2.51)$$

olarak açılır. Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeliği uu''' ise özel olarak;

$$uu''' = \frac{c_3 e^{(-7p-2c)\xi} + \dots + d_3 e^{(7q+2d)\xi}}{c_4 e^{(-9p)\xi} + \dots + d_4 e^{(9q)\xi}} \quad (2.52)$$

olarak açılır. Bu ifadelerin ilk ve son terimlerinin dengelenmesine bakılır, şayet dengelenme sağlanıyorsa, ifadelerin geneli hakkında dengelenme sağlanıyordur sonucu çıkarılabilir.

$$-8p - c = -2c - 7p, \quad (2.53)$$

$$p = c, \quad (2.54)$$

Benzer şekilde

$$8q + d = 7q + 2d, \quad (2.55)$$

$$q = d, \quad (2.56)$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için $p = c = q = d = 1$ ve özel olarak $b_1 = 1$ alınır.

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (2.57)$$

şeklinde çözüm aranır. u''' ve uu''' hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazılır, $e^{n\xi}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve Maple kullanarak hesaplama yapılır.

$$\frac{-1}{A} [C_4e^{4\xi} + C_3e^{3\xi} + C_2e^{2\xi} + C_1e^{\xi} + C_0 + C_{-1}e^{-\xi} + C_{-2}e^{-2\xi} + C_{-3}e^{-3\xi} + C_{-4}e^{-4\xi}] = 0$$

$$\text{i)} \quad a_{-1} = a_1b_{-1}, \quad a_0 = a_1b_0, \quad w = 0, \quad k = 0$$

$$\text{ii)} \quad a_{-1} = a_0b_0 - a_1b_0^2, \quad w = \sqrt{3}(6a_1 + 2a - 3), \quad k = \sqrt{3}, \quad b_{-1} = 0$$

durumları elde edilir.

1. Duruma Ait Çözüm:

$$a_{-1} = a_1b_{-1}, \quad a_0 = a_1b_0, \quad w = 0, \quad k = 0$$

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} = \frac{a_1b_{-1}e^{-\xi} + a_1b_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} = \frac{a_1(b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi})}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} = a_1$$

elde edilir. Denklemden u yerine a_1 yazıldığında a_1 sabit olduğundan türevleri 0 geleceği için $0 = 0$ aşıkâr çözüm elde edilir.

2. Duruma Ait Çözüm:

$$a_{-1} = a_0 b_0 - a_1 b_0^2, \quad w = \sqrt{3} (6a_1 + 2a - 3), \quad k = \sqrt{3}, \quad b_{-1} = 0$$

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1 e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} = \frac{(a_0 b_0 - a_1 b_0^2) e^{-(\sqrt{3}x + \sqrt{3}(6a_1 + 2a - 3)t)} + a_0 + a_1 e^{(\sqrt{3}x + \sqrt{3}(6a_1 + 2a - 3)t)}}{b_0 + e^{(\sqrt{3}x + \sqrt{3}(6a_1 + 2a - 3)t)}}$$

çözümü elde edilir.

3. ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİNİN DENKLEM SİSTEMİ ÜZERİNE UYGULAMALARI

3.1 Üstel Fonksiyon Yönteminin Jaulent-Miodek Denklemi Üzerine Uygulaması

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2} v v_{xxx} + \frac{9}{2} v_x v_{xx} - 6uu_x - 6uvv_x - \frac{3}{2} u_x v^2 = 0$$

$$v_t + u_{xxx} - 6u_x v - 6uv_x - \frac{15}{2} v_x v^2 = 0$$

denklem sistemini ele alalım.

Benzerlik dönüşümü ,

$$\xi = kx + wt + \varphi \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Gerekli dönüşüm gerçekleştirildiğinde,

$$wu' + k^3 u''' + \frac{3}{2} k^3 v v''' + \frac{9}{2} k^3 v' v'' - 6kuu' - 6kuvv' - \frac{3}{2} ku'v^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$wv' + k^3 v''' - 6kuv' - \frac{15}{2} kv'v^2 = 0 \quad (3.3)$$

(3.3) denkleminde

$$u = \frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \quad (3.4)$$

c_1 integral sabiti olmak üzere u çözülür. Bulunan u (3.2) denkleminde yerine yazılırsa:

$$w \left(\frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \right)' + k^3 \left(\frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \right)''' + \frac{3}{2} k^3 v v''' + \frac{9}{2} k^3 v' v'' -$$

$$6k \left(\frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \right) \left(\frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \right)' \quad (3.5)$$

$$- 6k \left(\frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \right) v v' - \frac{3}{2} k \left(\frac{w}{6k} + \frac{k^2 v''}{6v} - \frac{5}{4} v^2 + \frac{c_1}{v} \right)' v^2 = 0$$

elde edilir.

Üstel Fonksiyon yöntemini (3.5) denkleminde uygulayalım. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli ile lineer kısmın en yüksek mertebeli dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli $\frac{v^{(5)}}{v}$ özel olarak ,

$$\frac{v^{(5)}}{v} = \frac{c_1 e^{(-32p-c)\xi} + \dots + d_1 e^{(32q+d)\xi}}{c_2 e^{(-33p)\xi} + \dots + d_2 e^{(33q)\xi}} \quad (3.6)$$

olarak açılır. Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli $v^3 v'$ ise özel olarak

$$v^3 v' = \frac{c_3 e^{(-29p-4c)\xi} + \dots + d_3 e^{(31q+2d)\xi}}{c_4 e^{(-33p)\xi} + \dots + d_4 e^{(33q)\xi}} \quad (3.7)$$

Bu ifadelerin ilk ve son terimlerinin dengelenmesine bakılır, şayet dengelenme sağlanıyorsa, ifadelerin geneli hakkında dengelenme sağlanıyordur sonucu çıkarılabilir.

$$32p + c = 29p + 4c , \quad (3.8)$$

$$p = c , \quad (3.9)$$

benzer şekilde

$$31q + 2d = 32q + d , \quad (3.10)$$

$$q = d , \quad (3.11)$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için $p = c = q = d = 1$ ve özel olarak $b_1 = 1$ alınır.

$$u(x,t) = \frac{a_{-1} e^{-\xi} + a_0 + a_1 e^{\xi}}{b_{-1} e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (3.12)$$

şeklinde çözüm aranır. $\frac{v^{(5)}}{v}$ ve $v^3 v'$ hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazılır , $e^{n\xi}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve Maple kullanarak hesaplama yapılır.

$$\frac{1}{B^4 A^5} [C_8 e^{8\xi} + C_7 e^{7\xi} + C_6 e^{6\xi} + C_5 e^{5\xi} + C_4 e^{4\xi} + C_3 e^{3\xi} + C_2 e^{2\xi} + C_1 e^{\xi} + C_0 + C_{-1} e^{-\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-3} e^{-3\xi} + C_{-4} e^{-4\xi} + C_{-5} e^{-5\xi} + C_{-6} e^{-6\xi} + e^{-\xi} + C_{-8} e^{-8\xi}] = 0 \quad (3.13)$$

Katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle

$$a_0 = 3a_1 b_0 \frac{k^2 + a_1^2}{3a_1^2 + k^2}, \quad b_{-1} = \frac{1}{4} b_0^2 \frac{9a_1^4 + 10k^2 a_1^2 + k^4}{(3a_1^2 + k^2)^2},$$

$$a_{-1} = \frac{1}{4} a_1 b_0^2 \frac{9a_1^4 + 10k^2 a_1^2 + k^4}{(3a_1^2 + k^2)^2}, \quad c_1 = \frac{5}{12} k^2 a_1 + \frac{5}{12} a_1^3, \quad (3.14)$$

$$w = \frac{k}{8a_1^2} (15a_1^4 + 3k^4 + 10k^2 a_1^2)$$

değerleri bulunur ve (3.12)'de yerine yazılırsa,

$$u(x,t) = \frac{\frac{1}{4} a_1 b_0^2 \frac{9a_1^4 + 10k^2 a_1^2 + k^4}{(3a_1^2 + k^2)^2} e^{-\xi} + 3a_1 b_0 \frac{k^2 + a_1^2}{3a_1^2 + k^2} + a_1 e^{\xi}}{\frac{1}{4} b_0^2 \frac{9a_1^4 + 10k^2 a_1^2 + k^4}{(3a_1^2 + k^2)^2} e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (3.15)$$

$\xi = kx + wt + \varphi$ ve a_1, b_0 keyfi parametrelerdir.

$$\xi = Kx + \Omega t + \varphi,$$

$$e^{\xi} = \cos(\xi) + i \sin(\xi),$$

$$e^{-\xi} = \cos(\xi) - i \sin(\xi), \quad \text{dönüşümleri yapılarak } k = iK, K \text{ reel sayı olmak üzere (3.13)' te}$$

yerine yazılırsa

$$u(x,t) = a_1 - \frac{3a_1 b_0 \frac{-K^2}{3a_1^2 - K^2}}{(1+C)\cos(\xi) + b_0 + i(1-C)\sin(\xi)} \quad (3.16)$$

$C = \frac{1}{4} b_0^2 \frac{9a_1^4 - 10K^2 a_1^2 + K^4}{(3a_1^2 - K^2)^2}$ olarak belirlenir. Eğer kompakt bir çözüm isteniyorsa (3.14)'teki

sanal ifadenin katsayısı sıfıra eşitlenir.

$$1 - C = 1 - \frac{1}{4} b_0^2 \frac{9a_1^4 - 10K^2 a_1^2 + K^4}{(3a_1^2 - K^2)^2} = 0 \quad (3.17)$$

(3.17) denkleminde

$$b_0 = \pm \frac{-3a_1^2 + K^2}{\sqrt{9a_1^4 - 10K^2 a_1^2 + K^4}} \quad (3.18)$$

elde edilir ve (3.16)'da yerine yazılırsa

$$v = a_1 \pm \frac{3a_1 \frac{K^2}{\sqrt{9a_1^4 - 10K^2 a_1^2 + K^4}}}{2 \cos(\xi) \pm \frac{-3a_1^2 + K^2}{\sqrt{9a_1^4 - 10K^2 a_1^2 + K^4}}} \quad (3.19)$$

a_1 ve K keyfi parametreler olmak üzere çözüm bulunur.

3.2 Üstel Fonksiyon Yönteminin Navier-Stokes Denklemi Üzerine Uygulaması

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.22)$$

u ve v x ve y 'ye bağlı hız bileşenleri, p basınç, ρ akışkan yoğunluğu ve ν kinematik akışkan katsayısı olup pozitif bir sabit olmak üzere Navier-Stokes Denklem Sistemini ele alalım.

Benzerlik dönüşümü ,

$$\xi = kx + wt + sy \quad (3.23)$$

olarak ifade edilir. Gerekli dönüşüm (3.20) ve (3.22) denklemlerinde gerçekleştirildiğinde,

$$ku' + sv' = 0 , \quad (3.24)$$

$$wu' + kuu' + svu' + \frac{k}{\rho} p' - v(k^2 u'' + s^2 u'') = 0 , \quad (3.25)$$

$$wv' + kuv' + svv' + \frac{s}{\rho} p' - v(k^2 v'' + s^2 v'') = 0 , \quad (3.26)$$

elde edilir.

$$u(\xi) = \frac{a_c e^{c\xi} + \dots + a_{-d} e^{-d\xi}}{b_p e^{p\xi} + \dots + b_{-q} e^{-q\xi}} = \frac{\sum_{k=-d}^c a_k e^{(k\xi)}}{\sum_{k=-q}^p b_k e^{(k\xi)}} , \quad (3.27)$$

$$v(\xi) = \frac{a_m' e^{m\xi} + \dots + a_{-n}' e^{-n\xi}}{b_l' e^{l\xi} + \dots + b_{-r}' e^{-r\xi}} = \frac{\sum_{k=-n}^m a_k' e^{(k\xi)}}{\sum_{k=-r}^l b_k' e^{(k\xi)}} , \quad (3.28)$$

$$p(\xi) = \frac{a_i'' e^{i\xi} + \dots + a_{-h}'' e^{-h\xi}}{b_j'' e^{j\xi} + \dots + b_{-f}'' e^{-f\xi}} = \frac{\sum_{k=-h}^i a_k'' e^{(k\xi)}}{\sum_{k=-f}^j b_k'' e^{(k\xi)}} , \quad (3.29)$$

şeklinde çözüm arayalım. (3.20) ve (3.22) denklemlerinde yerine yazılırsa ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebelisi ile lineer kısmın en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır. Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebelisi özel olarak ,

$$uu' = \frac{c_1 e^{(p+2c)\xi} + \dots}{c_2 e^{3p\xi} + \dots} = \frac{c_1 e^{(p+2c+2j)\xi} + \dots}{c_2 e^{(3p+2j)\xi} + \dots} , \quad (3.30)$$

$$uu' = \frac{c_3 e^{(p+c+m)\xi} + \dots}{c_4 e^{(2p+l)\xi} + \dots} , \quad (3.31)$$

ve lineer kısmın en yüksek mertebelisi özel olarak u'

$$u' = \frac{c_7 e^{(p+c)\xi} + \dots}{c_8 e^{2p\xi} + \dots} = \frac{c_7 e^{(p+c+l)\xi} + \dots}{c_8 e^{(2p+l)\xi} + \dots} = \frac{c_1 e^{(2p+c)\xi} + \dots}{c_2 e^{3p\xi} + \dots} , \quad (3.32)$$

Bu ifadelerin ilk ve son terimlerinin dengelenmesine bakılır, şayet dengelenme sağlanıyorsa, ifadelerin geneli hakkında dengelenme sağlanıyordur sonucu çıkarılabilir.

$$p + 2c = 2p + c, p + c + m = p + c + l, p + 2c + 2j = k + j + 3p$$

$$p = c, m = l, j = k$$

elde edilir. Benzer şekilde $d = q, n = r, h = f$ elde edilir.

Çözüm aranırken işlem kolaylığı için

$$p = c = 1, q = d = 1, m = l = 1, n = r = 1, j = k = 1 \text{ ve } h = f = 1$$

alınır.

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}}, \quad (3.33)$$

$$v(\xi) = \frac{a_1' e^\xi + a_0' + a_{-1}' e^{-\xi}}{e^\xi + b_0' + b_{-1}' e^{-\xi}}, \quad (3.34)$$

$$p(\xi) = \frac{a_1'' e^\xi + a_0'' + a_{-1}'' e^{-\xi}}{e^\xi + b_0'' + b_{-1}'' e^{-\xi}}, \quad (3.35)$$

olmak üzere (3.27) ve (3.29) ifadeleri (3.24) ve (3.26)'de yerine yazılıp Maple kullanarak hesaplama yapılır.

1. Durum:

$$a_{-1}' = b_{-1} a_1' + i(a_1 b_{-1} - a_{-1}), a_0' = a_1' b_0'',$$

$$a_0'' = a_1'' b_0'', b_{-1}' = b_{-1}, b_{-1}'' = b_{-1}, k = is, \quad (3.36)$$

$$a_{-1}'' = \frac{sa_1'' b_{-1} - spa_1 a_{-1} + spa_1^2 b_{-1} + i(-sa_1 a_1' p b_{-1} + a_1' p s a_{-1} - w p a_1 b_{-1} + w p a_{-1})}{s}$$

$i^2 = 1$ olmak üzere (3.27) ve (3.29)'da yerine yazılırsa

1. Duruma Ait Çözüm :

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_1' b_0'' + a_{-1} e^{-\xi}}{e^\xi + b_0'' + b_{-1} e^{-\xi}}, \quad (3.37)$$

$$v(\xi) = \frac{a_1' e^\xi + a_1' b_0'' + b_{-1} a_1' + i(a_1 b_{-1} - a_{-1}) e^{-\xi}}{e^\xi + b_0'' + b_{-1}' e^{-\xi}}, \quad (3.38)$$

$$p(\xi) = \frac{\left[a_1'' e^\xi + s a_1'' b_0'' + ((s a_1'' b_{-1} - s p a_1 a_{-1} + s p a_1^2 b_{-1}) + i(-s a_1 a_1' p b_{-1} + a_1' p s a_{-1} - w p a_1 b_{-1} + w p a_{-1}) e^{-\xi} \right]}{s(e^\xi + b_0'' + b_{-1}' e^{-\xi})}, \quad (3.39)$$

$$\xi = isx + sy + wt$$

2. Durum: $a_0 = \frac{a_{-1} + a_1 b_0^2}{b_0}, b_{-1} = 0, a_0' = \frac{a_1' b_0 b_0' - i a_{-1}}{b_0}, a_{-1}' = \frac{-i b_0' a_{-1}}{b_0},$

$$b_{-1}' = 0, b_{-1}'' = 0, b_0'' = 0, a_0'' = -\frac{a_{-1} p(-wi - a_1' si + s a_1)}{s b_0} \quad (3.40)$$

$$k = is$$

ifadeleri (3.27) ve (3.29)'da yerine yazılırsa

2. Duruma Ait Çözüm :

$$u(\xi) = \frac{a_1 b_0 e^\xi + a_{-1} + a_1 b_0^2 + a_{-1} b_0 e^{-\xi}}{b_0 (e^\xi + b_0)}, \quad (3.41)$$

$$v(\xi) = \frac{a_1' b_0 e^\xi + a_1' b_0 b_0' - i a_{-1} - i b_0' a_{-1} e^{-\xi}}{b_0 (e^\xi + b_0')}, \quad (3.42)$$

$$p(\xi) = \frac{a_1'' s b_0 e^\xi + a_{-1} p(wi + a_1' si - s a_1)}{s b_0 e^\xi}, \quad (3.43)$$

$$\xi = isx + sy + wt$$

3. Durum:

$$a_0 = \frac{a_{-1} + a_1 b_0^2}{b_0}, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0' = \frac{b_0^2 - i a_{-1}}{b_0}, \quad a_{-1}' = -i a_{-1},$$

$$b_0' = b_0, \quad b_{-1}' = 0, \quad b_{-1}'' = 0, \quad k = is, \quad (3.44)$$

$$a_{-1}'' = -\frac{a_{-1} p b_0'' (-w i - a_1' s i + s a_1)}{s b_0}, \quad a_{-1}'' = -\frac{s a_0'' b_0 b_0'' - i (-w p a_{-1} - a_1' p s a_{-1})}{s b_0}$$

ifadeleri (3.27) ve (3.29)'da yerine yazılırsa

3. Duruma Ait Çözüm :

$$u(\xi) = \frac{a_1 b_0 e^\xi + a_{-1} + a_1 b_0^2 + a_{-1} b_0 e^{-\xi}}{b_0 (e^\xi + b_0)}, \quad (3.45)$$

$$v(\xi) = \frac{a_1' b_0 e^\xi + a_1' b_0^2 - i a_{-1} - i b_0 a_{-1} e^{-\xi}}{b_0 (e^\xi + b_0')}, \quad (3.46)$$

$$p(\xi) = \frac{\left[a_1'' s b_0 e^\xi + s a_1'' b_0 b_0'' + i w p a_{-1} + i a_1' p s a_{-1} - s a_1 p a_{-1} + \right. \\ \left. (i a_{-1} p b_0'' w + i a_{-1} p b_0'' a_1' s - s a_1 p a_{-1} b_0'') e^{-\xi} \right]}{s b_0 (e^\xi + b_0'')}, \quad (3.47)$$

$$\xi = isx + sy + wt$$

4. Durum:

$$a_0 = \frac{a_{-1} + a_1 b_0^2}{b_0}, \quad b_{-1} = -2b_0^2, \quad a_{-1}' = 0, \quad a_0'' = s a_1'' b_0''$$

$$a_0' = \frac{2b_0^2 a_1' + 2i a_1 b_0^2 + i a_{-1}}{b_0}, \quad a_{-1}'' = a_1'' b_{-1}'', \quad b_0' = 2b_0 \quad (3.48)$$

$$b_{-1}' = 0, \quad w = -s a_1' - i s a_1$$

ifadeleri (3.27) ve (3.29)'da yerine yazılırsa

4. Duruma Ait Çözüm :

$$u(\xi) = \frac{-a_1 b_0 e^\xi + a_{-1} + a_1 b_0^2 + a_{-1} b_0 e^{-\xi}}{b_0 (-e^\xi - b_0 + 2b_0^2 e^{-\xi})}, \quad (3.49)$$

$$v(\xi) = \frac{a_1' b_0 e^\xi + 2b_0^2 a_1' + 2ia_1 b_0^2 + ia_{-1}}{b_0 (e^\xi + 2b_0)}, \quad (3.50)$$

$$p(\xi) = a_1'', \quad (3.51)$$

$$\xi = isx + sy + (-s a_1' - isa_1)t$$

olarak elde edilir.

4. KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ İLE UYGULAMALARI

4.1 Kesirli Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yapısı

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, ... mertebeden türevlerini kolayca hesaplayabiliriz ancak örneğin $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini klasik yollarla hesaplayamayız.

Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevi, $x = a$ noktasından geçen teğetin eğimini verir. Bu eğim pozitif ise fonksiyondaki değişimin artma, negatif ise azalma şeklinde olduğunu yorumlarız. Elbette bunun için fonksiyonun o noktada türevlenebilir olması gerekir. $x = a$ noktasında türev yoksa, $x = a$ noktası civarındaki değişimi bulabilmek için işte kesir mertebeden türev devreye girer.

$x = a$ noktasındaki 0,8. mertebeden türev, birinci mertebeden türevden bulunan teğetin sağa biraz yatık halini verir. Birçok alanda problemi modelleyebilmek için kesir mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Hesaplamaların nasıl yapılacağını gösterelim.

$$D^{1,5}f(x) = D^2 J^{0,5}f(t) \quad (4.1)$$

yada

$$D^{1,5}f(x) = J^{0,5}D^2f(t) \quad (4.2)$$

ile hesaplanabilir. D türev, J ise integral operatörüdür. Görüldüğü gibi D^2 leri hesaplamak kolay olup asıl iş $J^{0,5}$ integrallerini hesaplamaktır. (4.1)' deki gibi önce kesirli integral uygulanırsa $D^{1,5}$ e Riemann-Liouville kesirli türevi, (4.2)'deki gibi önce türev sonra kesirli integral uygulanırsa $D^{1,5}$ e Capata türevi denir. Şimdi $J^{0,5}$ in nasıl hesaplanacağını gösterelim.

Cauchy's tekrarlı integrali

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n &= \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

ile verilir. $(n-1)! = r(n)$ olacaktır.

(4.3)'ten

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{r(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (4.4)$$

olur. $x \in (0,1)$ için bu,

$$J^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{r(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (4.5)$$

dir. Burada n , α 'dan büyük en yakın tamsayıdır.

Tanım (Riemann-Liouville Kesirli Türevi):

(4.1) ve (4.5)'den,

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} J^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{r(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (4.6)$$

Burada sadece sabitin türevi sıfır çıkmalıyken (4.4)'den veya (4.6)'dan $\frac{Kx^\alpha}{r(1-\alpha)}$ olur. Bundan kurtulmak için bu tanım modifiye edilmiştir.

Tanım :

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{r(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} (f(t) - f(0)) dt, \alpha < 0 \quad (4.7)$$

$$f^{(\alpha)}(x) = \left(f^{(\alpha-1)}(x) \right)' = \frac{1}{r(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} (f(t) - f(0)) dt, 0 < \alpha < 1 \quad (4.8)$$

4.2 Kesir Mertebeden Diferensiyel Denklemin Genel Şekli

$$F(u, D_t^{\alpha_1} u, D_{x_1}^{\alpha_2} u, D_{x_2}^{\alpha_3} u, \dots, D_{x_n}^{\alpha_{n+1}}, D_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} u, D_t^{\alpha_1} D_{x_1}^{\alpha_2} u, \dots) = 0$$

$$u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ve } 0 < \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq 1$$

Kompleks Dönüşüm $u = u(\xi)$ şeklindedir.

$$\xi = \frac{ct^{\alpha_1}}{r(1+\alpha_1)} + \frac{k_1 x_1^{\alpha_2}}{r(1+\alpha_2)} + \frac{k_2 x_2^{\alpha_3}}{r(1+\alpha_3)} + \dots + \frac{k_n x_n^{\alpha_{n+1}}}{r(1+\alpha_{n+1})} \quad (4.9)$$

olarak seçilirse

$$D_t^{\alpha_1} u = \partial_t \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dt^{\alpha_1}}$$

$$D_x^\alpha u = \partial_x \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx^\alpha} \quad (4.10)$$

olup (4.9) ve (4.10)'dan hep sabit çıkar. (4.10)'deki ∂ lar indekslerdir. Çünkü normal zincir kuralı işlemez arada bir fark olur. ∂ bunu dengeler. ∂ nın nasıl bulunacağını göstereyim.

$D_t^\alpha u = \frac{du}{d\xi} \frac{d^\alpha \xi}{dt^\alpha}$ olması isteniyor. $\frac{du}{d\xi}$ olmasının nedeni ise $(\frac{d^\alpha u}{d\xi^\alpha})$ yerine kesir mertebeden kurtulmaktır. Normalde,

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} \neq \frac{du}{d\xi} \frac{d^\alpha \xi}{dt^\alpha}$$

Ancak

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = \partial_t \frac{du}{d\xi} \frac{d^\alpha \xi}{dt^\alpha}$$

olması için $\partial_t = r(1 + \alpha)$ bulundu.

Böylece ξ dönüşümü ile denklem $Q(u, u', u'', \dots) = 0$ adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$u' = \frac{du}{d\xi}$ dir.

Üstel Fonksiyon Methodu (Exp-FunctionMethod)

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\xi)}}$$

dönüşümü uygulanır.

4.3 Liouville Denklemleri:

$$\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial X^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\beta} u}{\partial Y^{2\beta}} = e^{2u} \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \quad (4.11)$$

$$\xi = \frac{X^\alpha}{r(1+\alpha)}, \quad q = \frac{Y^{\alpha\beta}}{r(1+\beta)} \quad (4.12)$$

dönüşümü yapalım.

Biliyoruz ki,

$$D_x^\alpha x^\gamma = \frac{r(1+\gamma)}{r(1+\gamma-\alpha)} x^{\gamma-\alpha} \quad \beta > 0 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x^{2\alpha}} &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right] \\
&= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d^\alpha \xi}{dx^\alpha} \right] \\
&= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{r(1+\alpha)}{r(1+\alpha)} \right] \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial^\alpha \xi}{\partial x^\alpha} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{r(1+\alpha)}{r(1+\alpha)r(1)} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\frac{\partial^{2\beta} u}{\partial y^{2\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

elde edilir. Yani (4.11) denklemi ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = e^{2u} \quad (4.14)$$

olur. $v = e^u$ dönüşümüyle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v} v_x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{v} v_x \right) = -\frac{v_x^2}{v^2} + \frac{v_{xx}}{v}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{v_y^2}{v^2} + \frac{v_{yy}}{v} \text{ olup (4.4)'den}$$

$$(v_x)^2 + (v_y)^2 - v v_{xx} - v v_{yy} + v^4 = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir.

$$v(x,y) = V(\xi), \quad \xi = x + cy \quad (4.16)$$

dalga dönüşümüyle,

$$-(1+c^2)(v')^2 + (1+c^2)vv' - v^4 = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir.

$V(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\xi)}}$ eşitliği $V(\xi)$ ye eşitlenip çözüm aranır. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli ile lineer kısmın en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli v^4 özel olarak,

$$v^4 = \frac{d_1 e^{(-4c)\xi} + \dots + c_1 e^{(4d)\xi}}{d_2 e^{(-4p)\xi} + \dots + c_2 e^{(4q)\xi}}, \quad (4.18)$$

ve lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli vv'' özel olarak:

$$vv'' = \frac{d_3 e^{(-2c-3p)\xi} + \dots + c_3 e^{(3q+2d)\xi}}{d_4 e^{(-5p)\xi} + \dots + c_2 e^{(5q)\xi}}, \quad (4.19)$$

(4.18) ve (4.19)'daki en yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan en yüksek mertebeden terimleri dengelenir.

$$-p - 4c = -2c - 3p$$

$$2p = 2c$$

$$p = c$$

$$4d + q = 3q + 2d$$

$$q = d$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için $p = c = q = d = 1$ alınır.

$$v(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (4.20)$$

şeklinde çözüm aranır. v^4 ve vv'' hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazılır, $e^{n\xi}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve Maple kullanarak hesaplama yapılır.

$$\frac{-1}{A} [C_4 e^{4\xi} + C_3 e^{3\xi} + C_2 e^{2\xi} + C_1 e^\xi + C_0 + C_{-1} e^{-\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-3} e^{-3\xi} + C_{-4} e^{-4\xi}] = 0 \quad (4.21)$$

$A = (b_{-1} e^{-\xi} + b_0 + e^\xi)^4$ olmak üzere

$$C_4 = -a_1^4 \quad (4.22)$$

$$C_3 = -4a_1^3 a_0 - c^2 a_1^2 b_1 b_0 + c^2 a_0 b_1^2 a_1 - a_1^2 b_1 b_0 + a_0 b_1^2 a_1 \quad (4.23)$$

$$C_2 = -4a_1^3 a_{-1} - 6a_1^2 a_0^2 + 4c^2 a_{-1} b_1^2 a_1 - 4c^2 a_1^2 b_1 b_{-1} - 4a_1^2 b_1 b_{-1} + 4a_{-1} b_1^2 a_1 \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & 6c^2 a_1 b_0 a_{-1} b_1 - 6c^2 a_1 b_{-1} a_0 b_1 - 4a_1 a_0^3 + c^2 a_1 b_0^2 a_0 - 6a_1 b_{-1} a_0 b_1 \\ & - c^2 a_1^2 b_0 b_{-1} + 6a_1 b_0 a_{-1} b_1 - c^2 a_0^2 b_1 b_0 + c^2 a_{-1} b_1^2 a_0 + a_1 b_0^2 a_0 + a_{-1} b_1^2 a_0 \\ & - a_1^2 b_0 b_{-1} - 12a_1^2 a_0 a_{-1} - a_0^2 b_1 b_0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} C_0 = & -6a_1^2 a_{-1}^2 + 4c^2 a_1 b_0^2 a_{-1} - 4c^2 a_0^2 b_1 b_{-1} - a_0^4 - 4a_0^2 b_1 b_{-1} + 4a_1 b_0^2 a_{-1} \\ & - 12a_0^2 a_1 a_{-1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} C_{-1} = & -4a_0^3 a_{-1} + 6c^2 a_1 b_{-1} a_{-1} b_0 - 6c^2 a_{-1} b_1 a_0 b_{-1} + c^2 a_{-1} b_0^2 a_0 \\ & + 6a_1 b_{-1} a_{-1} b_0 - c^2 a_{-1}^2 b_1 b_0 - c^2 a_0^2 b_0 b_{-1} + c^2 a_1 b_{-1}^2 a_0 - \\ & 6a_{-1} b_1 a_0 b_{-1} - 12a_1 a_0 a_{-1}^2 - a_0^2 b_{-1} b_0 + a_1 b_{-1}^2 a_0 + a_{-1} b_0^2 a_0 - a_{-1}^2 b_0 b_1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} C_{-2} = & -4a_1 a_{-1}^3 - 6a_0^2 a_{-1}^2 + 4c^2 a_1 b_{-1}^2 a_{-1} - 4c^2 a_{-1}^2 b_1 b_{-1} - 4a_{-1}^2 b_1 b_{-1} \\ & + 4a_1 b_{-1}^2 a_{-1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$C_{-3} = -4a_0 a_{-1}^3 + c^2 a_0 b_{-1}^2 a_{-1} - c^2 a_{-1}^2 b_0 b_{-1} - a_{-1}^2 b_0 b_{-1} + a_0 b_{-1}^2 a_{-1} \quad (4.29)$$

$$C_{-4} = -a_{-1}^4 \quad (4.30)$$

Maple yardımıyla, cebirsel denklem sisteminden,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_0 = a_0, a_{-1} = 0 \\ b_1 &= \frac{-a_0^2}{4b_{-1}(1+c^2)}, b_0 = 0, b_{-1} = b_{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$c = c$$

a_0 ve $b_{-1} \neq 0$ keyfi parametreler olmak üzere (4.20)'da yerine yazılırsa

Çözüm:

$$u(x,y) = \ln \left[\frac{a_0}{\frac{-a_0^2}{4b_{-1}(1+c^2)} e^{(-x-cy)} + b_{-1} e^{(x+cy)}} \right] \quad (4.32)$$

Eğer (4.21)'de $a_0 = 2$ ve $b_{-1} = 1$ alınırsa

$$u(x,y) = \ln \left[\frac{2(1+c^2)}{(1+c^2)e^{(x+cy)} - e^{(-x-cy)}} \right] \quad (4.33)$$

çözümleri elde edilir.

4.4 Zoomeron Denklemi:

$$D_{tt}^{2\alpha} \left[\frac{u_{xy}}{u} \right] + \left[\frac{u_{xy}}{u} \right]_{xx} + 2D_t^\alpha [u^2]_x = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.34)$$

$$u(x,y,t) = u(\xi), \quad \xi = lx + cy + \frac{wt^\alpha}{r(1+\alpha)} \quad (4.35)$$

dönüşümüyle

$$lcw^2 \left(\frac{u''}{u} \right)'' - cl^3 \left(\frac{u''}{u} \right)'' - 2lw(u^2)'' = 0 \quad (4.36)$$

ifadesi iki kez integrallenerek

$$lc(w^2 - l^2) u'' - 2lw u^3 - ku = 0 \quad (4.37)$$

elde edilir.

$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}}$ eşitliği $u(\xi)$ 'ye eşitlenip çözüm aranır. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli ile lineer kısmın en yüksek mertebeli dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli u^3 özel olarak,

$$u^3 = \frac{d_1e^{(-3c)\xi} + \dots + c_1e^{(3d)\xi}}{d_2e^{(-3p)\xi} + \dots + c_2e^{(3q)\xi}} \quad (4.38)$$

ve lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli u'' özel olarak:

$$u'' = \frac{d_3e^{(-c-3p)\xi} + \dots + c_3e^{(3q+d)\xi}}{d_4e^{(-4p)\xi} + \dots + c_2e^{(4q)\xi}} \quad (4.39)$$

(4.38) ve (4.39)'daki en yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan en yüksek mertebeden terimleri dengelenir.

$$-3p - c = -3c - p$$

$$2p = 2c$$

$$p = c$$

$$3d + q = 3q + d$$

$$2q = 2d$$

$$q = d$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için $p = c = q = d = 1$ alınır.

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (4.40)$$

şeklinde çözüm aranır. u^3 ve u'' hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazılır, $e^{n\xi}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve Maple kullanarak hesaplama yapılır.

$$\frac{-1}{A} [C_3 e^{3\xi} + C_2 e^{2\xi} + C_1 e^\xi + C_0 + C_{-1} e^{-\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-3} e^{-3\xi}] = 0 \quad (4.41)$$

$A = (b_{-1} e^{-\xi} + b_0 + e^\xi)^3$ olmak üzere

$$C_3 = -k a_1 b_1^2 - 2lw a_1^3 \quad (4.42)$$

$$C_2 = -lcw^2 a_1 b_1 b_0 - k a_0 b_1^2 - l^3 c a_0 b_1^2 - 6lwa_1^2 a_0 - 2ka_1 b_1 b_0 + \quad (4.43)$$

$$l^3 c a_1 b_1 b_0 + lcw^2 a_0 b_1^2$$

$$C_1 = -l^3 c a_1 b_0^2 - 6lwa_1 a_0^2 - 2ka_0 b_1 b_0 - lcw^2 a_0 b_1 b_0 - \quad (4.44)$$

$$4lcw^2 a_1 b_1 b_{-1} - ka_1 b_0^2 - ka_{-1} b_1^2 - 4l^3 c a_{-1} b_1^2 - 6lwa_1^2 a_{-1} -$$

$$2ka_1 b_1 b_{-1} + l^3 c a_0 b_1 b_0 + lcw^2 a_1 b_0^2 + 4lcw^2 a_{-1} b_1^2 + 4l^3 c a_1 b_1 b_{-1}$$

$$C_0 = -2ka_{-1} b_1 b_0 - 3l^3 c a_{-1} b_1 b_0 + 6l^3 c a_0 b_1 b_{-1} - 12lwa_1 a_0 a_{-1} \quad (4.45)$$

$$+ 3lcw^2 a_1 b_{-1} b_0 + 3lcw^2 a_{-1} b_1 b_0 - 6lcw^2 a_0 b_1 b_{-1} -$$

$$3l^3 c a_1 b_{-1} b_0 - 2ka_1 b_{-1} b_0 - 2ka_0 b_1 b_{-1} - 2lw a_0^3 - ka_0 b_0^2$$

$$C_{-1} = -l^3 c a_{-1} b_0^2 - 6lwa_0^2 a_{-1} - 2ka_0 b_0 b_{-1} - lcw^2 a_0 b_0 b_{-1} \quad (4.46)$$

$$- 4lcw^2 a_{-1} b_1 b_{-1} - ka_{-1} b_0^2 - ka_1 b_{-1}^2 - 4l^3 c a_1 b_{-1}^2 - 6lwa_1 a_{-1}^2 -$$

$$2ka_{-1} b_1 b_{-1} + l^3 c a_0 b_0 b_{-1} + lcw^2 a_{-1} b_0^2 + 4lcw^2 a_1 b_{-1}^2 + 4l^3 c a_{-1} b_1 b_{-1}$$

$$C_{-2} = -lcw^2 a_{-1} b_0 b_{-1} - ka_0 b_{-1}^2 - l^3 c a_0 b_{-1}^2 - 6lwa_1 a_{-1}^2 \quad (4.47)$$

$$- 2ka_{-1} b_0 b_{-1} + l^3 c a_{-1} b_0 b_{-1} + lcw^2 b_{-1}^2 a_0$$

$$C_{-3} = -k a_{-1} b_{-1}^2 - 2lwa_{-1}^3 \quad (4.48)$$

Maple yardımıyla, cebirsel denklem sisteminden,

$$\begin{aligned}
 \text{1. Durum:} \quad & a_1 = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_{-1} = 0, \\
 & b_1 = b_1, \quad b_0 = 0, \quad b_{-1} = b_{-1}, \\
 & c = \frac{kla_0^4}{l^4a_0^4 - 16k^2b_1^2b_{-1}^2}, \quad w = \frac{-4kb_1b_{-1}}{la_0^2}, \quad l = l
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

b_1, b_{-1} ve a_0 keyfi parametreler ve $l^3a_0^2 \neq \pm 4kb_1b_{-1}$ olmak üzere (4.40)'de yerine yazılırsa

1. Duruma Ait Çözüm :

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, t) = & a_0(b_1 e^{\left(lx + \frac{kla_0^4}{l^4a_0^4 - 16k^2b_1^2b_{-1}^2}y + \frac{4kb_1b_{-1}}{la_0^2} \frac{t^\alpha}{r(1+\alpha)} \right)} + \\
 & b_{-1} (e^{-\left(lx + \frac{kla_0^4}{l^4a_0^4 - 16k^2b_1^2b_{-1}^2}y + \frac{4kb_1b_{-1}}{la_0^2} \frac{t^\alpha}{r(1+\alpha)} \right)})^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Eğer (4.50)'de $b_1 = 1$ ve $b_{-1} = 1$ alınırsa

$$u_2(x, y, t) = \frac{a_0}{2 \cosh \left(lx + \frac{kla_0^4}{l^4a_0^4 - 16k^2b_1^2b_{-1}^2}y + \frac{4kb_1b_{-1}}{la_0^2} \frac{t^\alpha}{r(1+\alpha)} \right)} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
 \text{2. Durum:} \quad & a_1 = 0, \quad a_0 = \frac{-a_{-1}b_0}{b_{-1}}, \quad a_{-1} = a_{-1}, \\
 & b_1 = b_1, \quad b_0 = b_0, \quad b_{-1} = b_{-1}, \\
 & c = \frac{8kla_{-1}^4}{4l^4a_{-1}^4 - k^2b_{-1}^4}, \quad w = \frac{-kb_{-1}^2}{2la_{-1}^2}, \quad l = l
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

a_{-1}, b_{-1} ve b_0 keyfi parametreler ve $2l^2 a_{-1}^2 \neq \pm kb_{-1}^2$ olmak üzere (4.40)'de yerine yazılırsa

2. Duruma Ait Çözüm :

$$u_3(x, y, t) = \frac{\frac{-a_{-1}b_0+a_{-1}}{b_{-1}}e^{(-\left(lx+\frac{8kla_{-1}^4}{4l^4a_{-1}^4-k^2b_{-1}^4}y+\frac{kb_{-1}^2}{2la_{-1}^2}t^\alpha\right))}}{b_0+b_{-1}e^{(-\left(lx+\frac{8kla_{-1}^4}{4l^4a_{-1}^4-k^2b_{-1}^4}y+\frac{kb_{-1}^2}{2la_{-1}^2}t^\alpha\right))}} \quad (4.53)$$

Eğer (4.53)'de $a_{-1} = 1$ ve $b_{-1} = 1$ alınırsa

$$u_4(x, y, t) = \frac{b_0+cosh\left(lx+\frac{8kl}{4l^4-k^2}y+\frac{kt^\alpha}{2lr(1+\alpha)}\right)-sinh\left(lx+\frac{8kl}{4l^4-k^2}y+\frac{kt^\alpha}{2lr(1+\alpha)}\right)}{b_0-cosh\left(lx+\frac{8kl}{4l^4-k^2}y+\frac{kt^\alpha}{2lr(1+\alpha)}\right)+sinh\left(lx+\frac{8kl}{4l^4-k^2}y+\frac{kt^\alpha}{2lr(1+\alpha)}\right)} \quad (4.54)$$

çözümleri elde edilir.

5. SONUÇLAR

Nikolai A. Kudryashov, He ve Wu'nun Üstel Fonksiyon Yöntemiyle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümleri yöntemini araştırmıştır. Bu metot, çok popüler olup yaygın bir şekilde uygulaması yapılmaktadır. Bu metodun çok sayıda olasılıklar belirttiğini tespit etmiştir. Üstel Fonksiyon Yönteminin genel olarak sinh fonksiyonu ile tanh fonksiyonuna genel çözüm bulduğunu ifade etmiştir.

Üstel Fonksiyon Yöntemi, matematiksel fizikte ortaya çıkan lineer olmayan evrim denkleminde kolay, sade ve etkili bir metot olarak kullanılmaktadır.

Bu metotla bulunan çözümler kolayca diğer lineer olmayan evrim denklemlerine uygulanabilir. Üstel Fonksiyon Yöntemiyle bütün uygulamalar basit, sade ve etkili bir şekilde doğrulanarak genelleştirilmiş tek çözümler ve lineer olmayan evrim denkleminin periyodik çözümleri elde edilir. Bu metodun diğer metotlardan ayrılan başlıca tarafı keyfi parametrelere bağlı çok sayıda genel çözüm bulmasıdır.

Lineer olmayan denklemlerde ilk olarak uyguladığımız Üstel Fonksiyon Yöntemi çeşitli tip lineer olmayan denklemlere de uygulanabilir. Üstel Fonksiyon Yönteminin yeterli olduğu umulmaktadır. Son zamanlarda yapılan bu analizin amacı başlıca Üstel Fonksiyon Yönteminin uygulamalarını ve eksikliklerini tartışmaktır. Bu metodun diğer yöntemlerden ayrılan noktası lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmasıdır.

Üstel Fonksiyon Yöntemi çok basittir fakat sonuçları çok uzundur. Bu da bulunan tam çözümlerin kontrol edilmesini zorlaştırmaktadır. Sonuç olarak uygulama yaparken Üstel Fonksiyon Yöntemi genellikle basitçe tam çözüm bulur. Fakat bazen uzun ifadelerle uygulamaların basitçe çözümü yapılamaz. Üstel Fonksiyon Yönteminin uygulaması yapılırken elde edilen tam çözümlerin indirgenebilirliği ile ilgili eksiklikler göstermek istenmektedir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler üç tipe ayrılmıştır.

Birinci tip olanı integrallenebilir kısmi diferansiyel denklemdir. Kısmi diferansiyel denklemlerin bu tipinin tam çözümleri sonsuz miktardadır. Bu tipin en iyi bilinen denklemleri Korteweg-de Vries denklemi, Sine-Gordon denklemi, lineer olmayan Schrodinger denklemi, değiştirilmiş Korteweg - de Vries denklemi, Boussinesq denklemi ve Kadomtsev-Petviashvili denklemidir. Bu denklemlerdeki Cauchy problemleri ters dağılma dönüşümleri kullanılarak çözülmüştür. Dalga çözümlerinin bu denklemlerle birlikte Hirota metodu ile ele alınması düşünülmektedir.

Burgers denklemi ve diğer lineerleştirilmiş diferansiyel denklemleri birinci tip olarak niteleyebiliriz. Cole-Hopf dönüşümü kullanılarak diğer dönüşümlerden daha fazla sayıda bu denklemlerin tam çözümü bulunabilir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ikinci tiplerinin tam çözümlerini inceleyecek olursak burada çok sayıda denklem örneği vardır fakat biz genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemini ele alacağız.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \alpha u = 0 \quad (5.1)$$

Biz bu metotla bu denklemin tam çözümlerini bulamayız.

Üçüncü tip lineer olmayan diferansiyel denklemler integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklemlerdir. Kuramoto-Sivashinsky denklemi, Ginzburg-Landau denklemi, Korteweg-de Vries-Burgers denklemi, Fisher denklemi, Fitzhugh-Nagumo denklemi ve Burgers-Huxley denklemi en çok bilinen üçüncü tip denklemlerdir.

Bu denklemlerin tam çözümleri bulunurken çok farklı metotlar kullanılır. Bu tip denklemlerin çözümlerine ilişkin son yıllarda birkaç gelişme görülmektedir. Biz çeşitli singüler (tekil) metodu, tanh-fonksiyon metodu ve basit denklem metodundan bahsedeceğiz. Elbette bahsedilen metotlar ile lineer olmayan integrallenebilir diferansiyel denklemlerin uygulaması yapılabilir. Üçüncü tip lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunurken uygulanabilecek en iyi metot Üstel Fonksiyon Yöntemi değildir. Araştırmacılar diferansiyel denklemlerle ilgili metotları incelemektedir fakat lineer olmayan diferansiyel denklemlere bağlı metotları seçmektedirler.

Üçüncü tip lineer olmayan diferansiyel denklemleri sınıflandırırken uygulanacak en etkili metot Üstel Fonksiyon Yöntemidir. Bu sınıflandırma ile birinci dereceden tam çözümler bulunur. Fitzhugh-Nagumo denklemi, Burgers-Huxley denklemi ve bazı diğer denklemler bu sınıftaki denklemleri içermektedir.

KAYNAKLAR

1. Koca, K., 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Yayıncılık.
2. Taşcan, F., 2002. İntegrallenebilen Hamiltoniyen Sistemler ve Perturbasyon (Bozulma) Teori, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Eskişehir
3. Fisher, RA., 1937. Ann, Eugen ,7 , 335.
4. He, JH., ve Wu, XH., 2006. Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations, Chaos, Soliton and Fractals, 30, 3, 700-708.
5. Wu, XH., ve He, JH., 2008. Exp-Function Method and its Application to Nonlinear Equations, Chaos, Solitons and Fractals, 38, 3, 903-910.
6. Xu, YG., Zhou, XW., ve Yao, L., 2008. Solving the fifth order Caudrey–Dodd–Gibbon (CDG) equation using the Exp-function method, 206, 70-73.
7. Camassa, R., ve Holm, D., 2008. Theoretical and Center for Nonlinear Studies Los Alamos
8. He, JH., ve Zhang, LN., 2008. Generalized solitary solution and compacton-like solution of the Jaulent-Miodek equations using the Exp-function Method, 1044-1047.
9. Ghogdi, S., Ghomanjani, F., ve Saberi-Nadjafi, J., 2015. Expansion of the Exp-function Method for solving systems of two-dimensional Navier-Stokes equations, 121-125.
10. Guner O., Bekir A., ve Bilgil H., 2015. A Note on Exp-function method combined with Complex transform method applied to fractional differential equations, 1-8.
11. Kudryashov A., Nadejda B., 2009. Be careful with Exp-function method, 2-15.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Zafer ÖZTÜRK

Doğum Tarihi ve Yeri : 20.11.1986 Zara/Sivas

E-posta adresi : umutzafer58@hotmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2007

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2018