

**UYUM İYİLİĞİ İÇİN DAMICO TEK-ÖRNEK TESTİ
VE DİĞER UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ
İLE KARŞILAŞTIRILMASI**

Burçin Gonca OKATAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AĞUSTOS 2007
ANKARA**

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Burçin Gonca OKATAN

Burçin Gonca OKATAN tarafından hazırlanan UYUM İYİLİĞİ İÇİN DAMICO TEK-ÖRNEK TESTİ VE DİĞER UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Hamza GAMGAM

Tez Yöneticisi

Bu alışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek lisans/Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof.Dr.Semra ERBAŞ

Üye : Prof.Dr.Hamza GAMGAM

Üye : Prof.Dr.Müslim EKNİ

Üye : Prof.Dr.Hülya BAYRAK

Üye : Yrd.Doç.Dr.İhsan KARABULUT

Tarih :19/07/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

**UYUM İYİLİĞİ İÇİN DAMICO TEK-ÖRNEK TESTİ VE DİĞER UYUM İYİLİĞİ
TESTLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Burçin Gonca OKATAN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2007**

ÖZET

Bu çalışmanın amacı uyum iyiliği için Damico Tek-Örnek Testini tanıtmak ve bu testin diğer uyum iyiliği testleri ile karşılaştırmasını yapmaktır. Bu kapsamda, ilk olarak Uyum İyiliği Testi ile ilgili çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde Ki-Kare Uyum İyiliği Testi, Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi, Lilliefors Uyum İyiliği Testi, Uyum İyiliği için Anderson-Darling' in D Testi ve Watson' in U_n^2 Testi kısaca tanıtılmıştır. Uyum İyiliği için Damico Tek-Örnek Testi üçüncü bölümde ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. Son bölümde ise bir simülasyon çalışması ile Damico' nun A testi ve ikinci bölümdeki testlerin bazıları için gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranı ve gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranı bakımından karşılaştırmalar yapılmıştır.

Sonuç olarak, Damico' nun A testi hem gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranı hem de gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red

etme oranı bakımından birçok durumda diğer testlerden biraz daha iyi sonuçlar vermiştir.

Bilim Kodu :205.1.066
Anahtar Kelimeler :Uyum İyiliği Testleri, Parametresiz İstatistikler, Kolmogorov-Smirnov Testi, Ki-Kare Testi, Lilliefors Testi, Anderson-Darling Testi, Watson Testi.
Sayfa Adedi :78
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Hamza GAMGAM

**DAMICO ONE-SAMPLE TEST FOR GOODNESS OF FIT AND A
COMPARISON WITH OTHER GOODNESS OF FIT TESTS
(M.Sc.Thesis)**

Burçin Gonca OKATAN

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

August 2007

ABSTRACT

The purpose of this study is to introduce Damico One-Sample Test for Goodness of Fit and compare it with other Goodness of Fit tests. In this scope, firstly, studies about Goodness of Fit tests are mentioned. Secondly, Chi-Square Goodness of Fit test, Kolmogorov-Smirnov Goodness of Fit Test, Lilliefors Goodness of Fit Test, Anderson-Darling's D Test and Watson's U_n^2 Test for Goodness of Fit are discussed briefly. Damico One-Sample Test for Goodness of Fit is discussed throughly in the third section. In the last part, Damico's A Test and some other tests from the second part are compared with a simulation study with respect to the reject rates for null hypothesis when it true and the reject rates for the null hypothesis when it false.

As a result, Damico's A test gives beter results than other tests with respect to both reject rates for null hypothesis that is true and reject rates for the null hypothesis that is false in many situations.

Bilim Kodu :205.1.066
Anahtar Kelimeler :Goodness Of Fit Tests, Nonparametric Statistics, Kolmogorov-Smirnov Test, Ki-Kare Test, Lilliefors Test, Anderson-Darling Test, Watson Test.
Sayfa Adedî :78
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Hamza GAMGAM

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana sonsuz sabır gösteren, her zaman anlayışlı davranarak bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren, çalışmalarının yoğunluğuna rağmen zaman ayırarak her konuda yardımını esirgemeyen Sayın Prof.Dr.Hamza GAMGAM' a ve sevgili kardeşim Bilal OKATAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiv
1. GİRİŞ	1
2. BAZI UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ	4
2.1. Ki-Kare Uyum İyiliği Testi.....	4
2.2. Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi.....	15
2.2.1. Kolmogorov-Smirnov testi için uygulamalar.....	26
2.3. Lilliefors Uyum İyiliği Testi	29
2.4. Uyum İyiliği İçin Anderson-Darling' in D Testi	35
2.5. Uyum İyiliği İçin Watson' ın U_n^2 Testi	39
3. UYUM İYİLİĞİ İÇİN DAMICO' NUN TEK ÖRNEK TESTİ	42
3.1. Damico' nun A İstatistiğinin Tanımı	42
3.2. A İstatistiğinin Dağılımı ve Kritik Değerleri	46
3.3. A İstatistiği İçin Güç Karşılaştırması.....	54
3.4. A İstatistiğinin İki Bağımsız Örnek İçin Tanımı	57
4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI	59
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	72

Sayfa

KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ.....	78

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Her biri 13' er birimlik örneklerin kusurlu ürün sayısına göre dağılımı.....	11
Çizelge 2.2. Poisson dağılımına uygunluk testi için Q istatistiğinin hesaplanması işlemleri	12
Çizelge 2.3. Binom dağılımına uygunluk testi için Q istatistiğinin hesaplanması işlemleri.....	14
Çizelge 2.4. $D_{n,\alpha} = \frac{d_\alpha}{\sqrt{n}}$ ' e asimptotik yaklaşımlar	21
Çizelge 2.5. $\alpha=0,01$ ve $0,05$ için $P(D_n > D_{n,\alpha}) = \alpha$ olmasını sağlayan $D_{n,\alpha}$ ' nın tam olasılık ve asimptotik değerleri	22
Çizelge 2.6. Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi için kritik değerler	25
Çizelge 2.7. (0,1) aralığında, sürekli Tekdüze dağılımdan 20 gözlem değeri	27
Çizelge 2.8. 20 gözlemden D_n istatistiğinin değerini bulmak için yapılan hesaplamalar	28
Çizelge 2.9. D_n^* istatistiğinin kritik değer çizelgesi	32
Çizelge 2.10. Örnek çapı 20 iken D_n^* istatistiği ve Ki-Kare istatistiği ile normalliği red etme oranları.....	33
Çizelge 2.11. 10 çaplı 500 örnek için yokluk hipotezini red etme oranları....	33
Çizelge 2.12. 12 birimlik rassal bir örnek için kazanç verileri	34
Çizelge 2.13. Lilliefors testi için hesaplamalar.....	35
Çizelge 2.14. Üst kuyruk için Y kritik değerleri	38
Çizelge 2.15. Pearson yöntemi ve simülasyon yoluyla elde edilen kritik değerler	39

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.16. U_n^2 istatistiği için tam olasılık dağılımı ile kritik değerler	40
Çizelge 2.17. U_n^2 istatistiği için üst kuyruk yüzdelik noktaları	41
Çizelge 3.1. Z değerleri ve normal dağılımdan birikimli olasılık değerleri ...	43
Çizelge 3.2. Birikimli olasılık değerlerinin aralıklara dağılımı	44
Çizelge 3.3. Her kutuda sadece bir top üretmek için yapılan hamleler.....	44
Çizelge 3.4. A istatistiğinin birikimli tam olasılık dağılımı ($n = 2(1)7$ için $P(A \geq A_c^*) = a$ değerleri)	46
Çizelge 3.5. A_c^* kritik değerleri	47
Çizelge 3.6. Simülasyon ile oluşturulan A istatistiğinin dağılımına ilişkin kritik değerler	48
Çizelge 3.7. A istatistiği için birikimli olasılık değerleri ve bu değerleri sağlayan A_c^* değerleri	51
Çizelge 3.8. α anlamlılık düzeylerinde kritik değer formülleri.....	53
Çizelge 3.9. α anlamlılık düzeylerinde kritik değer formüllerinden hesaplanan A_c^* kritik değerleri	53
Çizelge 3.10. Kolmogorov-Smirnov D_n , Kuiper V , Watson U_n^2 , Cramer von Misses W^2 , Anderson-Darling D , $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$ ve Ki-Kare testlerinin güç karşılaştırması sonuçları	55
Çizelge 3.11. Kolmogorov-Smirnov D_n , Kuiper V , Watson U_n^2 , Cramer von Misses W^2 , Anderson-Darling D , $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$, Ki-Kare testleri ile Damico (2004)' nun A testinin güç karşılaştırması sonuçları	56
Çizelge 3.12. X yığınının 4 çaplı ve Y yığınının da 6 çaplı örnekler için gözlem değerlerive r sıra sayıları	58

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.13. İki-örnek test istatistiği için birikimli dağılım fonksiyonu.....	58
Çizelge 4.1. $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları	60
Çizelge 4.2. $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları	66

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
n	Örnek çapı
k	Örnek sayısı
μ	Yığın ortalaması
$\hat{\mu}$	Yığın ortalamasının tahmini
σ^2	Yığın varyansı
f_{bj}	Beklenen frekans
f_{gj}	Gözlenen frekans
X_i	i ' nci örnek gözlemi
$X_{(i)}$	i ' nci sıralı istatistik
α	I ' inci tip hata olasılığı
$F_X(x)$	Yığının birikimli dağılım fonksiyonu
$F_0(x)$	Yokluk hipotezinde belirtilen birikimli dağılım fonksiyonu
$S_n(x)$	Gözlenen birikimli dağılım fonksiyonu
$F^*(x)$	Birikimli Normal dağılım fonksiyonu
$Gif()$	En büyük tam sayı fonksiyonu
$D_{n,\alpha}$	Kolmogorov-Smirnov istatistiği için kritik değer
$D_{n,\alpha}^+$	Kolmogorov-Smirnov testi için üst kuyruk kritik değeri
$D_{n,\alpha}^-$	Kolmogorov-Smirnov testi için alt kuyruk kritik değeri
$D_{n,\alpha}^*$	Lilliefors testi için kritik değer

Simgeler $C\alpha$ A_c^* **Açıklama**Watson' ın U_n^2 testi için kritik değerDamico' nun A testi için kritik değer**Kısaltmalar** Q Z D_n D_n^+ D_n^- D_n^* D Y U^2 A A_2 V t **Açıklama**

Ki-Kare Test İstatistiği

Z Dağılımı

Kolmogorov-Smirnov Test İstatistiği

Kolmogorov-Smirnov Üst Kuyruk Test
İstatistiğiKolmogorov-Smirnov Alt Kuyruk Test
İstatistiği

Lilliefors Test İstatistiği

Anderson-Darling Test İstatistiği

 D Test İstatistiğinin Standartlaştırılmış Biçimi

Watson Test İstatistiği

Damico Tek-Örnek Test İstatistiği

Damico İki-Örnek Test İstatistiği

Kuiper Test İstatistiği

t Dağılımı

1. GİRİŞ

İstatistiksel çıkarsamalarda (hipotez testleri ve güven aralıkları), örnek(ler)in geldikleri yığın(lar)ın dağılım biçimlerinin bilinmesi önemlidir. Örnek(ler)in geldikleri yığın(lar)ın dağılımlarının normal olması parametrik testler için önemli bir varsayımdır. Diğer bir ifade ile “normallik” varsayımı sağlanmıyorsa, özellikle küçük hacimli örnek(ler) durumunda, parametrik testlerin kullanılması doğru olmaz. Bu durumda parametrik olmayan testlerin kullanımı önerilmektedir.

Bu nedenle, istatistiksel analizlerde, n hacimli bir örneğin öngörülen bir yığından gelip gelmediğini belirlemek için yapılacak test oldukça önemlidir. n hacimli bir örneğin bir normal dağılımdan gelip gelmediğini belirlemek için yapılacak bir testte hipotezler,

H_0 : n hacimli örnek bir normal dağılımdan gelmiştir.

ve

H_1 : n hacimli örnek bir normal dağılımdan gelmemiştir.

biçiminde ifade edilir. H_0 hipotezinin alternatifi olan H_1 hipotezine karşı testi “ Uyum İyiliği (Goodness of Fit) Testi ” olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile Uyum İyiliği Testlerinde n hacimli örneğin H_0 ’ da belirtilen dağılımdan gelip gelmediği araştırılır.

1930’ lardan başlayarak, deneysel birikimli dağılım fonksiyonları üzerine birçok test istatistiği önerilmiştir. Bunlardan en yaygın olarak kullanılan iki test Ki-Kare ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleridir. Lilliefors (1967), yığın ortalaması ve varyansı örnekten tahmin edildiğinde, Ki-Kare ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri yerine kullanılabilir başka bir test önermiştir.

Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Watson U^2 ve Kuiper V testlerinin yanı sıra Cramer (1928) ve Von Mises (1931), Anderson ve Darling (1952) Uyum iyiliği testi üzerine çalışmışlardır [Damico, 2004].

Gibbons ve Chakraborti (1985) Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors testlerinin Ki-Kare testinden biraz daha güçlü olduklarını, fakat yığın tamamen bilinmediğinde ve/veya bir ya da daha fazla parametrenin örnekten tahmin edilmesi gerektiğinde bu testlerin dezavantajlı olduklarını, halbuki bu durumun veriden tahmin edilen herbir parametre için bir serbestlik derecesi çıkararak Ki-Kare ile kolayca çözülebileceğini, ancak bunun deneysel birikimli dağılım fonksiyonunun kullanıldığı testlerde oldukça zor olduğunu ifade etmiştir.

Bu testler için kritik değerler yığının dağılımı tamamen bilindiği zaman dağılımdan bağımsızdır, bir ya da daha fazla parametrenin veriden tahmin edilmesi gerektiğinde ise bu durum geçerliliğini kaybeder ve dağılımdan bağımsız olduğu düşünülemez [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Çalışmanın ikinci bölümünde, yukarıda bahsedilen uyum iyiliği testlerinden sık kullanılan Ki-Kare uyum iyiliği testi, Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi, Lilliefors uyum iyiliği testi, Anderson-Darling uyum iyiliği testi ve Watson uyum iyiliği testi tanıtılacaktır.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, uyum iyiliği için Damico (2004)' nun A istatistiği tanıtılmıştır. Bu test istatistiğinin dağılımı teste konu olan yığının dağılımına bağlı değildir. Damico (2004), genel bir formül kullanarak küçük örnek çapları için A istatistiğinin belli anlamlılık düzeylerinde, kritik değerlerini veren çizelgeler oluşturmuştur. Büyük örnek çapları için de simülasyon yöntemi kullanarak, kritik değer çizelgelerini elde etmiştir. Damico (2004) yaptığı simülasyon çalışmasında A testi ile, Kolmogorov-Smirnov testi, Cramer-von Mises testi, Kuiper' ın V testi, Watson'ın U^2 testi,

Anderson-Darling' in D testi, $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$ testi ve Ki-Kare testlerinin güç karşılaştırması sonuçlarını vermiştir.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde Damico (2004)' nun A testi ile Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors testlerinin simülasyon yöntemi kullanılarak gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranı ve gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranı bakımından karşılaştırmaları yapılmıştır. [Damico, 2004]

Son bölüm olan beşinci bölümde ise, dördüncü bölümde yapılan karşılaştırmalardan elde edilen sonuçların değerlendirmesi yapılmıştır ve elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak önerilerde bulunulmuştur.

2. BAZI UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ

Bu bölümde Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Anderson-Darling D ve Watson U^2 Uyum İyiliği Testleri ayrıntıya girilmeden tanıtılacaktır.

2.1. Ki-Kare Uyum İyiliği Testi

Birikimli dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ olan bir yığından n hacimli bir rassal örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. Öngörülen (belirtilen) dağılıma ilişkin birikimli dağılım fonksiyonu $F_0(x)$ olmak üzere, Ki-Kare uyum iyiliği testinde hipotezler,

$$H_0: F_X(x) = F_0(x), \quad \text{bütün } x \text{'ler için}$$

ve

$$H_1: F_X(x) \neq F_0(x), \quad \text{bazı } x \text{'ler için}$$

biçiminde ifade edilir.

Ki-Kare Uyum İyiliği Testi için, önce n hacimli rassal örnekten derlenen veri bir frekans dağılımına dönüştürülmelidir. Bu amaçla ilgili değişken sürekli ise bu değişkenin aldığı değerlerin değer aralığı uzunlukları birbirine eşit ve sınıf olarak adlandırılan alt aralıklara bölünerek her sınıfa ait gözlenen frekanslar kaydedilir. Sınıf sayısının kaç olacağı konusunda kesin bir kural olmamakla beraber 5-15 arasında olabileceği ifade edilmektedir. Kesikli değişkenler için frekans dağılımının oluşturulmasının daha kolay olduğu açıktır. Örneğin her biri 10'ar birimlik 100 kolinin kusurlu ürün sayısına göre dağılımının oluşturulması gibi [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

n hacimli bir örnekten oluşturulan frekans dağılımının sınıf sayısı k olsun, $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere, j 'nci sınıfın frekansı f_{g_j} ile gösterilsin. Bu frekans, f_{g_j} , j 'nci sınıf için gözlenen frekans olarak adlandırılır.

Yokluk hipotezinin doğruluğu altında, herhangi bir birimin j ' nci sınıfa düşmesi, ya da j ' nci sınıfta olması, olasılığının hesaplanması kolaydır. Bu olasılığı, yani H_0 doğru iken herhangi bir birimin değişkenin j ' nci sınıfında olması olasılığı, P_j ile gösterilsin. Örneğin Binom dağılımı için bu olasılık,

$$P_j = P(X = x) = \binom{n}{x} (p)^x (q)^{n-x}$$

ile kolayca hesaplanır.

H_0 hipotezi doğru iken hesaplanan bu olasılıklar, P_j ' ler, örnek hacmi olan n ile çarpılırsa her bir sınıf için beklenen frekansları verir. Yokluk hipotezi doğru iken j ' nci sınıf için beklenen frekans f_{b_j} ile gösterilsin. Buna göre,

$$f_{b_j} = nP_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

olur.

Eğer örnek verisi H_0 hipotezinde belirtilen $F_0(x)$ dağılımından gözlemlendiyse gözlenen frekanslar ile beklenen frekanslar arasında uyum beklenir. Diğer bir ifade ile $\forall j$ için f_{g_j} ile f_{b_j} frekanslarının birbirine yakın olması beklenir. Gözlenen ve beklenen frekanslar arasındaki uyum bir histogram, bir diyagram ya da bir çubuk grafiği ile görsel olarak karşılaştırılabilir. Uyumsuzluk kuşkusu varsa, karşılaştırma ve karar verme için Ki-Kare uyum iyiliği testi bir olasılık temelini verir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Uyum iyiliği ile ilgili karar $(f_{g_j} - f_{b_j})$ sapmalarına dayanır. $\sum_{j=1}^k (f_{g_j} - f_{b_j}) = 0$

olduğundan, Pearson (1900) tarafından önerilen test istatistiği f_{g_j} ile f_{b_j}

farklarının karesinin f_{b_j} ' ye bölünmelerinin toplamına dayanır. [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Buna göre Ki-Kare uyum iyiliği test istatistiği,

$$Q = \sum_j \frac{(f_{g_j} - f_{b_j})^2}{f_{b_j}} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Gözlenen frekans ile beklenen frekanslar uyumlu ise Q istatistiği oldukça küçük, tersine bu frekanslar uyumsuz ise Q istatistiği oldukça büyük değer alır. Bu nedenle Q istatistiğinin yeteri kadar büyük değerleri yokluk hipotezinin reddini gerektirir.

Gibbons ve Chakraborti (1985) Q istatistiğinin tam olasılık dağılımının oldukça karmaşık olduğunu, ancak büyük hacimli örnekler için Q istatistiğinin dağılımının yaklaşımının Pearson (1900) tarafından çıkarıldığını belirtmiştir.

k sayılı sınıflar için;

Sınıf frekansları : $F_1, F_2, \dots, F_k$

ve

Sınıf olasılıkları : $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$

olsun. n hacimli rassal örnek için,

Sınıfların gözlenen frekansları : $f_1, f_2, \dots, f_k$

olmak üzere Olabilirlik Fonksiyonu,

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{j=1}^k \theta_j^{f_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^k f_j = n, \quad \sum_{j=1}^k \theta_j = 1 \quad (2.2)$$

biçiminde yazılabilir.

Yokluk hipotezi yığın dağılımının belirlendiğini varsayar ve parametrelerin değerleriyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$H_0 : \theta_j = \frac{F_j}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Eş. 2.2 parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\theta}_j = \frac{f_j}{n}$ olarak ifade edilir.

Bu hipotez için olabilirlik oranı istatistiği,

$$T = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{L(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_k^0)}{L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\theta_j^0}{\hat{\theta}_j} \right)^{f_j}$$

dir.

T rassal değişkeninin dağılımı Ki-Kare olduğundan $-2 \ln T$ tahmin edilebilir

[Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Ω 'daki $k-1$ sayıdaki parametre, $\sum_{j=1}^k \theta_j = 1$

kısıtlamasından çıkarıldığında, bağımsızca tahmin edilir ve serbestlik derecesi $k-1$ ' dir. Bazı istatistikçiler

$$-2 \ln T = -2 \sum_{j=1}^k f_j \left(\ln \theta_j^0 - \ln \frac{f_j}{n} \right) \quad (2.3)$$

ifadesini uyum iyiliği için bir test kriteri olarak kullanmayı savunurlar. Bunun Q istatistiği için Eş. 2.1' de verilen ifadeye asimptotik olarak eşit olduğu gösterilebilir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Değişken terimlerin toplamı ε olmak üzere, $\hat{\theta}_j = \frac{f_j}{n}$ için $\ln \theta_j$ 'nin Taylor açılımı,

$$\ln \theta_j = \ln \hat{\theta}_j + (\theta_j - \hat{\theta}_j) \frac{1}{\hat{\theta}_j} + \frac{(\theta_j - \hat{\theta}_j)^2}{2!} \left(-\frac{1}{\hat{\theta}_j^2} \right) + \varepsilon$$

$$\ln \theta_j^0 - \ln \frac{f_j}{n} = \left(\theta_j^0 - \frac{f_j}{n} \right) - \left(\theta_j^0 - \frac{f_j}{n} \right)^2 \frac{n^2}{2f_j^2} + \varepsilon$$

$$= \frac{(n\theta_j^0 - f_j)}{f_j} - \frac{(n\theta_j^0 - f_j)^2}{2f_j^2} + \varepsilon$$

dir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

$$\varepsilon = \sum_{l=3}^{\infty} (-1)^{l+1} \left(\theta_j^0 - \frac{f_j}{n} \right)^l \frac{n^l}{l! f_j^l} \quad (2.4)$$

Eş. 2.4, Eş. 2.3' de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} -2 \ln T &= -2 \sum_{j=1}^k (n\theta_j^0 - f_j) + \sum_{j=1}^k \frac{(n\theta_j^0 - f_j)^2}{f_j} + \sum_{j=1}^k \varepsilon' \\ &= 0 + \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - e_j)^2}{f_j} + \varepsilon'' \end{aligned}$$

elde edilir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Büyük sayılar kanunu ile $\frac{f_j}{n}$, θ_j için tutarlı bir tahmin edicidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} P(|f_j - n\theta_j| > \varepsilon) \right] = 0, \quad \varepsilon > 0$$

Böylece Q istatistiğinin olasılık dağılımının $k-1$ serbestlik derecesi ile Ki-Kare dağılılan $-2 \ln T$ 'nin dağılımına yakınsaklığı görülür.

Bu yaklaşım sadece ve sadece beklenen her frekansın 5' ten büyük veya 5' e eşit olması durumunda güvenle kullanılabilir. Herhangi bir $f_j < 5$ ise, kısıtlama sağlanana kadar, çoğunlukla en yakın grupla bu grubu birleştirmek uygun görülür. Bu durumda, analizde azalan sınıf sayısına uygun olarak serbestlik derecesi de küçültülür [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Yokluk hipotezi altında beklenen frekansları hesaplamak için μ ve σ bilinmelidir. θ_j yokluk hipotezi tarafından belirlenmiş olmak üzere, μ ve σ verilmediğinde ve bir örneğin bazı normal yığınlardan çekilip çekilmediği araştırılmak istenildiğinde, eğer beklenen frekanslar, $j = 1, 2, \dots, k$ için, $n\hat{\theta}_j^0$ ile örnekten tahmin edilirse Eş. 2.1' deki uyum iyiliği için test istatistiği aşağıdaki gibi olur.

$$Q = \sum_{j=1}^k \frac{\left(f_j - n\hat{\theta}_j^0 \right)^2}{n\hat{\theta}_j^0} \quad (2.5)$$

Q istatistiğinin asimptotik dağılımı, tahmin için kullanılan yöntemle bağlı olabilir. Gruplandırılmış veriler için En Çok Olabilirlik Yöntemiyle tahminler bulunduğunda, yokluk hipotezi altında θ_j^0 ' in en çok olabilirlik tahminleri $\hat{\theta}_j^0$

olmak üzere, $L(\hat{\omega})$, olabilirlik oranı test istatistiği T' dir. T' nin dağılımının kaynağı ve bundan dolayı w uzayının boyutunun arttırılmış olması hariç Q istatistiği doğrudan önceki gibi yazılır. θ_j^0 ' ların hepsini tahmin etmek amacıyla, frekans dağılımına dönüştürülmüş gözlemlerden tahmin edilen $F_0(x)$ ' deki bağımsız parametrelerin sayısı s olmak üzere, Q istatistiği için serbestlik derecesi $k-1-s$ ' dir. Normal dağılıma uyum iyiliğinin testinde, örneğin, μ ve σ parametrelerinin tahminleri frekans dağılımına dönüştürülmüş veriden hesaplanacaktır ve $n\hat{\theta}_j^0$ ' i bulmak için normal dağılım çizelgeleri kullanılacaktır, bu durumda k sınıf için serbestlik derecesi $k-3$ olur. n hacimli bir rassal örnekten derlenen veri frekans dağılımına dönüştürülmediğinde ve en çok olabilirlik tahminleri bütün gözlemlerin olabilirlik fonksiyonu ile bulunduğu Q istatistiği Ki-Kare dağılmaz. Bu durumda Q istatistiğinin limit dağılımı Chernoff ve Lehmann (1954) tarafından gösterilmiştir. O halde bu test mantıklı değildir. Chernoff ve Lehmann (1954)' ın araştırmaları hatanın normal dağılım için Poisson dağılımından çok daha önemli olduğunu göstermiştir. Mümkün bir düzeltme Ki-Kare Uyum İyiliği çalışmalarında tartışılmıştır. Ancak uygulamada Eş. 2.5' deki istatistik çoğunlukla zaten bir Ki-Kare değişkeniymiş gibi ele alınır. Aşağıda Ki-Kare uyum iyiliği testi için bir örnek verilmiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Örnek : Bir kalite kontrol mühendisi tarafından bir üretim sürecinden herbiri 13 çaplı 50 örnek çekilmiştir. Bu örneklerin içindeki kusurluların sayısına göre dağılımı aşağıda verilmiştir. 0,05 anlamlılık düzeyinde bu örneklerin Poisson dağılımından ve Binom dağılımından geldiğini belirten yokluk hipotezleri test edilsin [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Çizelge 2.1. Her biri 13' er birimlik örneklerin kusurlu ürün sayısına göre dağılımı

x_j : Kusurlu Ürün Sayısı	f_j : Örnek Sayısı
0	10
1	24
2	10
3	4
4	1
5	1
6+	+0
	50

Her biri 13 çaplı 50 örnek frekans dağılımına dönüştürülmüş ve değişken kesikli olduğundan Ki-Kare uyum iyiliği testi kullanılmıştır. Dağılım Parametresi bilinmediğinden, Poisson ve Binom dağılımına uygunluğun her ikisi için de testlerin yapılabilmesi için parametrenin veriden tahmin edilmesi gerekmektedir. Önce Poisson dağılımına uygunluk testini yapalım.

H_0 : Örnek, Poisson dağılımına sahip olan bir yığından seçilmiştir.

H_1 : Örnek, Poisson dağılımına sahip olan bir yığından seçilmemiştir.

Kusurlu sayısının ortalaması μ olmak üzere, Poisson Dağılımının olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad \text{için}$$

μ ' nün en çok olabilirlik tahmini 50 örnekteki kusurlu sayısının ortalamasıdır.

$$\hat{\mu} = \frac{0(10) + 1(24) + 2(10) + 3(4) + 4(1) + 5(1)}{50} = \frac{65}{50} = 1,3$$

$\hat{\mu}$ değeri $f(x)$ ' deki $\hat{\theta}_j$ olasılıklarını bulmak ve $f_{b_j} = 50 \hat{\theta}_j$ ' yi hesaplamak için kullanılır.

Bir örnekte hiç kusurlu olmaması olasılığı olan $\hat{\theta}_0$,

$$P(X = 0) = \frac{e^{-1,3} (1,3)^0}{0!} = 0,2725$$

olarak hesaplanır ve beklenen frekans,

$$f_{b_1} = 50 \times \hat{\theta}_j = 50 \times 0,2725 = 13,625$$

olur. Diğer sınıflar için benzer hesaplamalar yapılarak $\hat{\theta}_j$ istatistiğinin değerlerinin bulunması ve diğer işlemler Çizelge 2.2' de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Poisson dağılımına uygunluk testi için Q istatistiğinin hesaplanması işlemleri

x_j : Kusurlu Ürün Sayısı	f_j	$\hat{\theta}_j$	f_{b_j}	$(f_{g_j} - f_{b_j})^2 / f_{b_j}$
0	10	0,2725	13,625	0,9644
1	24	0,3543	17,715	2,2298
2	10	0,2303	11,515	0,1993
3	4	0,0998	4,990	0,1964
4	1	0,0324	1,620	0,0111
5+	1	0,0107	0,535	+
		1,0000	50	3,6010

Son f_{b_j} değeri 1' den küçüktür, dolayısıyla bir önceki sınıfla birleştirilmiştir.

Çizelge 2.2' deki sonuçlara göre 3 serbestlik derecesi ile $Q = 3,6010$ elde edilmiştir. Serbestlik derecesi başlangıçta $k - 1 = 5$ idi ve μ tahmini için biri ve son iki kategoriye birleştirmek için biri daha çıkarılırsa $k - 1 - 1 - 1 = 3$ olur.

Ki-Kare dağılımının tam olasılık dağılımı çizelgesinden 0,05 anlamlılık düzeyi için 3 serbestlik derecesiyle kritik değerinin 7,81 olduğu görülür. $Q = 3,6010$ bu değerden küçüktür, dolayısıyla yokluk hipotezi red edilemez. Q istatistiği, 3 serbestlik derecesiyle bir Ki-Kare dağılımına uygun olmak üzere, tahmini P değeri, $P(Q \geq 3,6010)$ olasılığıdır. EXCEL kullanarak P -değeri $P(Q \geq 3,6010) = 0,3078$ olarak bulunur. Ki-Kare dağılımının çizelgesine bakıldığında da P değerinin 0,25 ve 0,50 arasında olduğu görülür. Böylece yokluk hipotezinin red edilemeyeceği sonucuna varılır [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Şimdi de Çizelge 2.1' deki veriyi kullanarak,

H_0 : Örnekler Binom dağılımından gelmiştir.

hipotezini test edelim. Yokluk hipotezi bu örneklerin n ve p parametreleri ile Binom Dağılımına uyduğudur. p ' nin en çok olabilirlik tahmin edicisi kusurluların toplam sayısının toplam ürün sayısına bölümüdür. Kusurluların toplam sayısı daha önce 65 olarak bulunmuştu, toplam ürün sayısı $50 \times 13 = 650$ olduğundan, $\hat{p} = 65/650 = 0,1$ olarak elde edilir.

$$f(x) = \binom{13}{x} (0,9)^x (0,1)^{13-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 13$$

Bir örnekte hiç kusurlu olmaması olasılığı olan $\hat{\theta}_0$,

$$\hat{\theta}_0 = P(X = 13) = \binom{13}{13} (0,9)^{13} (0,1)^0 = 0,254187$$

bulunur ve beklenen frekans değeri,

$$f_{b_1} = 50 \times \hat{\theta} = 50 \times 0,2542 = 12,70$$

olarak hesaplanır. Diğer $\hat{\theta}_j$ ve f_{b_j} değerleri de benzer yolla hesaplanmış ve Q istatistiğinin değerinin hesaplanması işlemleri ile beraber aşağıda verilmiştir.

Çizelge 2.3. Binom dağılımına uygunluk testi için Q istatistiğinin hesaplanması işlemleri

x_j : Kusurlu Ürün Sayısı	f_j	$\hat{\theta}_j$	f_{b_j}	$(f_{g_j} - f_{b_j})^2 / f_{b_j}$
0	10	0,2542	12,710	0,5778
1	24	0,3671	18,355	1,7361
2	10	0,2448	12,240	0,4099
3	4	0,0997	4,986	0,1950
4	1	0,0227	1,385	0,0492
5+	1	0,0065	0,325	+
		1,0000	50	2,9680

3 serbestlik dereceli Q istatistiğinin değeri 2,9680 bulunmuştur. Bu istatistik için 0.05 anlamlılık düzeyinde kritik değer 7.81' dir. P değeri, $P(Q \geq 2,9680)$ olasılığıdır. EXCEL kullanarak P değeri $P(\chi^2_3 \geq 2,9680) = 0,3966$ olarak bulunur. Binom Dağılımıyla ilgili sonuç, yokluk hipotezinin red edilemeyeceğidir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Bu örnek Ki-Kare uyum iyiliği testiyle ilgili çok yaygın bir sonucu göstermiştir. İki veya daha fazla sayıdaki farklı yokluk hipotezlerinin her biri aynı veri seti için kabul edilmiş olabilir. Gerçek dağılım aynı anda hem Binom hem de Poisson olamaz. Böylece, Ki-Kare uyum iyiliği testi üzerindeki tahmini sonuç, bu iki dağılım arasındaki farkı görmek için yeterli bilgiye sahip olunmadığıdır. Böylece Ki-Kare uyum iyiliği testinin bu iki dağılımı her zaman ayırtedemediği sonucu çıkarılacaktır.

2.2. Kolmogorov–Smirnov Uyum İyiliği Testleri

Ki-Kare uyum iyiliği testinde gözlenen ve beklenen sınıf frekansların karşılaştırması k sınıf için yapılır. $k \leq n$ olmak üzere, n gözlem olmasına rağmen sadece k karşılaştırma yapılır. Eğer n örnek gözlemleri bir sürekli rassal değişkenin değerleri ise, farklı gözlem değerlerinin her biri için gözlenen ve beklenen birikimli oransal frekanslar arasında karşılaştırmalar yapılabilir. Birçok uyum iyiliği test istatistiği gözlenen birikimli dağılım ile yokluk hipotezinin doğruluğu altında beklenen birikimli dağılım arasındaki sapmaların fonksiyonudur. Bir test kriteri bu sapmaların bir fonksiyonu, sapmaların en büyüğü, sapmaların mutlak değeri ya da sapmaların kareleri toplamı olabilir.

Oranlama ya da eşit aralıklı düzeyde ölçülen değişkenler için uyum iyiliği testi, 1933’ de Rus matematikçi A.N. Kolmogorov tarafından önerilmiştir. Kolmogorov tek örnek için uyum iyiliği testini önerdikten sonra 1939 yılında yine bir Rus matematikçisi olan N.V. Smirnov iki bağımsız örnek için uyum iyiliği testini önermiştir. Kolmogorov testi ve Smirnov testi benzerlik nedeniyle uygulamada Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri olarak bilinirler [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Gibbons ve Chakraborti (1985) bilinen en iyi uyum iyiliği testinin Kolmogorov-Smirnov Tek-Örnek Testi olduğu sonucuna varmıştır.

Kolmogorov-Smirnov Tek-Örnek İstatistiği H_0 ’ da öngörülen birikimli dağılım fonksiyonu olan $F_0(x)$ ve tüm x ’ ler için gözlenen birikimli dağılım fonksiyonu olan $S_n(x)$ arasındaki farklara dayanır. Birikimli dağılım fonksiyonu veya deneysel dağılım fonksiyonu yığının birikimli dağılım fonksiyonunun bir tahminidir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. n hacimli örneğin seçildiği yığının bilinmeyen birikimli dağılım fonksiyonu $F_x(x)$ olmak üzere, Kolmogorov-Smirnov Tek-Örnek Testinde hipotezler,

$H_0: F_X(x) = F_0(x), \quad \text{bütün } x \text{'ler için}$

ve

$H_1: F_X(x) \neq F_0(x), \quad \text{bazı } x \text{'ler için}$

olarak ifade edilir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Kolmogorov-Smirnov tek-örnek testi hipotezde belirtilen birikimli dağılım fonksiyonu ile tüm x ler için örneğin birikimli dağılım fonksiyonu olan $S_n(x)$ arasındaki farklara dayanır. Örneğin birikimli dağılım fonksiyonu olan $S_n(x)$, tüm gerçek x sayıları için x' e eşit ya da daha küçük olan örnek gözlemlerinin sayısının n ' e bölümü olarak tanımlanır. $S_n(x)$ fonksiyonunun yığının birikimli dağılım fonksiyonu olan $F_X(x)$ için tutarlı nokta tahmin edicisi olduğu bilinen bir özelliktir. Ayrıca, Glivenko-Cantelli teoremine göre, n artarken, bir örnek için $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ sıralı istatistiklerinin değerlerinde oluşan sıçrama(atlama)lar ile $S_n(x)$ fonksiyonunun tüm x değerleri için yığının birikimli dağılım fonksiyonu olan $F_X(x)$ fonksiyonuna yaklaştığı bilinir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Buna göre, büyük n değerleri için, yığının birikimli dağılım fonksiyonu ve bunun istatistiksel görüntüsü arasındaki sapmaların, yani $|S_n(x) - F_0(x)|$ ' in, tüm x değerleri için küçük olması beklenir. Buna göre Kolmogorov-Smirnov tek-örnek test istatistiği,

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_0(x)| \quad (2.6)$$

olarak önerilmiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Bu istatistik $F_X(x)$ için bulunan tahminin, yani $S_n(x)$ ' in, doğruluğunun uygun bir ölçüsünü verir.

Kolmogorov-Smirnov tek-örnek test İstatistiği olarak adlandırılan D_n istatistiği özellikle parametre dışı istatistiksel çıkarımlarda kullanılır. Çünkü D_n ' in olasılık dağılımı, birikimli dağılım fonksiyonu sürekli olduğu müddetçe, $F_X(x)$ ' e bağlı değildir. Bu nedenle, D_n dağılıma bağlı olmayan bir istatistik olarak adlandırılır.

$$D_n^+ = \sup_x [S_n(x) - F_0(x)]$$

ve

$$D_n^- = \sup_x [F_0(x) - S_n(x)] \quad (2.7)$$

olarak tanımlanan yönlü sapmalar tek-yönlü Kolmogorov-Smirnov istatistikleri olarak adlandırılırlar. Bu ölçüler aşağıda gösterildiği gibi dağılımdan bağımsız ve

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_0(x)| = \max_x (D_n^+, D_n^-)$$

olduğunu gösterelim. $X_{(0)} = -\infty$ ve $X_{(n+1)} = \infty$ ile gösterilen ek sıralı istatistikleri tanımlansın. x değerine eşit ya da daha küçük değerli örnek birimlerinin sayısı i ve örnek hacmi n olmak üzere,

$$S_n(x) = \frac{i}{n}$$

ve

$$X_{(0)} \leq x \leq X_{(n+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad \text{için}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
D_n^+ &= \sup_x [S_n(x) - F_X(x)] = \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)}} [S_n(x) - F_X(x)] \\
&= \max_{0 \leq i \leq n} \sup_{X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)}} \left[\frac{i}{n} - F_X(x) \right] \\
&= \max_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - \inf_{X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)}} F_X(x) \right] \\
D_n^+ &= \sup_x [S_n(x) - F_X(x)] = \max_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right] \\
&= \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right], 0 \right\} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$D_n^- = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq n} \left[F_X(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right], 0 \right\}$$

ve

$$D_n = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right], \max_{0 \leq i \leq n} \left[F_X(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right], 0 \right\} \tag{2.9}$$

bulunur [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

O halde, D_n , D_n^+ ve D_n^- 'nin olasılık dağılımları sadece $F_0(X_{(i)})$, $i = 0, 1, \dots, n$ rassal değişkenlerine bağlıdır. $F_0(x)$ 'in sürekli olup olmaması dikkate alınmayarak $F_0(X_{(i)})$ istatistikleri (0,1) aralığında Tekdüze dağılımdan sıralı istatistiklerdir. Böylece, D_n , D_n^+ ve D_n^- istatistikleri $F_0(x)$ 'den bağımsız dağılımlara sahip oldukları gösterilmiştir.

İstatistiksel sonuç çıkarma işlemlerinde Kolmogorov-Smirnov istatistiğinin kullanımı için bu istatistiklerin örnekleme dağılımlarının bilinmesi gerekir. Bu dağılımlar $F_X(x)$ ' den bağımsız olduklarından genelliği yitirmeksizin $F_X(x)$ ' in $(0,1)$ aralığında düzgün dağılım gösterdiğini varsayabiliriz. D_n istatistiğinin dağılımının çıkartılması zahmetlidir. Bununla beraber aşağıdaki yaklaşım sıralı istatistiklerin özelliklerine dayanarak geliştirilmiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Herhangi bir sürekli birikimli dağılım fonksiyonu $F_0(x)$ olsun.

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_0(x)|$$

ve

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{cases} n! & , 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1 \\ 0 & , dh. \end{cases}$$

olmak üzere,

$$P\left(D_n < \frac{1}{2n} + v\right) = \begin{cases} 0 & , v \leq 0 \\ \int_{\frac{1}{2n}-v}^{\frac{1}{2n}+v} \int_{\frac{1}{3n}-v}^{\frac{1}{3n}+v} \dots \int_{\frac{2n-1}{2n}-v}^{\frac{2n-1}{2n}+v} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \dots du_1 & , 0 < v < \frac{2n-1}{2n} \\ 1 & , v \geq \frac{2n-1}{2n} \end{cases}$$

olur [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Gibbons ve Chakraborti(1985) gerekli ispatları yaparak $n = 2$ için,

$$P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = \begin{cases} 0 & , v \leq 0 & ise \\ 2(2v)^2 & , 0 < v < 1/4 & ise \\ -2v^2 + 3v - 0,125 & , 1/4 \leq v < 3/4 & ise \\ 1 & , v \geq 3/4 & ise \end{cases}$$

olarak elde etmiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Verilen herhangi bir v ve n için, $P\left(D_n < \frac{1}{2n} + v\right)$ hesaplanabilir ya da bu amaçla geliştirilen Birnbaum (1952)' un Çizelge 1' i kullanılabilir ya da bunun tersi olarak, $P(D_n > D_{n,\alpha}) = \alpha$ olmasını sağlayan $D_{n,\alpha}$ değeri bulunabilir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. $n = 2$, $\alpha = 0,05$ ile sayısal örneğimizde,

$$P\left(D_2 > \frac{1}{4} + v\right) = 0,05 \quad \text{veya} \quad P\left(D_2 < \frac{1}{4} + v\right) = 0,95$$

ve

$$D_{2,0,05} = \frac{1}{4} + v$$

olmasını sağlayan v değeri bulunabilir. D_2 istatistiğinin örnekleme dağılımının yukarıda elde edilen özelliklerinden

$$2(2v)^2 = 0,95 \quad , \quad 0 < v < \frac{1}{4}$$

veya

$$-2v^2 + 3v - 0,125 = 0,95 \quad , \quad \frac{1}{4} \leq v < \frac{3}{4}$$

elde edilir. İlk eşitlikten çözüm elde edilemez, fakat ikincisinden $v = 0,5919$ çözümüne ulaşılır. Bu nedenle, $D_{2,0,05} = 0,8419$ olur.

Gibbons ve Chakraborti (1985) $n \leq 40$ ve seçilmiş α olasılıkları için $D_{n,\alpha}$ 'nın sayısal değerlerini ve daha büyük n değerleri için yaklaşık değerleri

vermiştir. $n \leq 100$ için daha detaylı çizelgeler Dunston, Nix ve Reynolds (1979) tarafından çıkartılmıştır [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Büyük örnekler için, D_n istatistiğinin örnekleme dağılımı için aşağıdaki yaklaşımları Kolmogorov (1933) elde etmiştir ve Smirnov (1939) bununla ilgili basit bir ispat vermiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Bu sonuç burada ispatlanmaksızın kısaca verilmiştir.

Teorem 1 : Eğer $F_X(x)$ herhangi bir sürekli dağılım fonksiyonu ise, her $d > 0$ için,

$$L(d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 d^2} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(D_n \leq \frac{d}{\sqrt{n}}\right) = L(d)$$

olur.

$L(d)$ fonksiyonu Smirnov (1948) tarafından çizelgeleştirilmiştir. $D_{n,\alpha} = \frac{d_\alpha}{\sqrt{n}}$, e asimptotik yaklaşımlar için bazı sonuçlar Çizelge 2.4' de verilmiştir.

Çizelge 2.4. $D_{n,\alpha} = \frac{d_\alpha}{\sqrt{n}}$, e asimptotik yaklaşımlar

$P\left(D_n > \frac{d_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
d_α	1,07	1,14	1,22	1,36	1,63

$n \geq 35$ olduğu sürece pratik uygulamalar için bu yaklaşım oldukça uygun bulunmuştur. $\alpha = 0,01$ ve $0,05$ için $D_{n,\alpha}$ ' nın asimptotik değerlerinin ve tam

olasılık değerlerinin bir karşılaştırması Çizelge 2.5' de verilmiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985]. Bu çizelgenin son sütunundan da anlaşıldığı gibi asimptotik yaklaşım tam değerine n artarken yaklaşmaktadır.

Çizelge 2.5. $\alpha = 0,01$ ve $0,05$ için $P(D_n > D_{n,\alpha}) = \alpha$ olmasını sağlayan $D_{n,\alpha}$ 'nın tam olasılık ve asimptotik olasılık değerleri

n	Tam Olasılık Değeri		Asimptotik Olasılık Değeri		Asimp.Ol.Değ./Tam Ol. Değ.	
	α		α		α	
	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
2	0,8419	0,9293	0,9612	1,1509	1,142	1,238
3	0,7076	0,8290	0,7841	0,9397	1,108	1,134
4	0,6239	0,7341	0,6791	0,8138	1,088	1,109
5	0,5633	0,6685	0,6074	0,7279	1,078	1,089
10	0,4087	0,4864	0,4295	0,5147	1,051	1,058
20	0,2939	0,3524	0,3037	0,3639	1,033	1,033
30	0,2417	0,2898	0,2480	0,2972	1,026	1,025
40	0,2101	0,2521	0,2147	0,2574	1,022	1,021
50	0,1884	0,2260	0,1921	0,2302	1,019	1,018

Tek-yönlü Kolmogorov-Smirnov istatistikleri dağılımdan bağımsız olduklarından bunların örnekleme dağılımlarının bilinmesi parametre dışı istatistiksel sonuç çıkarmada bu istatistikleri yararlı kılar. Bu istatistiklerin örnekleme dağılımlarının çıkarılması D_n için olan işlemlere göre daha kolaydır. D_n^+ istatistiğinin dağılımı aşağıdaki teoremde açıklanmıştır ve simetri nedeniyle D_n^+ ile D_n^- benzer dağılımlara sahiptirler [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Teorem 2 : $F_X(x)$ herhangi bir sürekli birikimli dağılım fonksiyonu olsun.

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_X(x)|$$

ve

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{cases} n! & , 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$P(D_n^+ < c) = \begin{cases} 0 & , c \leq 0 \\ \int_{\frac{1-c}{n-c}}^1 \int_{\frac{2}{n-c}}^{U_n} \dots \int_{\frac{1}{n-c}}^{U_3} \int_{\frac{1}{n-c}}^{U_1} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \dots du_1 & , 0 < c < 1 \\ 1 & , c \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Bu teoremin ispatı Gibbons ve Chakraborti (1985) tarafından yapılmıştır. Bu sonucun bir başka biçimini Birnbaum ve Tingey (1951)

$$P(D_n^+ > c) = (1-c)^n + c \sum_{j=1}^{n(1-c)} \binom{n}{j} \left(1-c-\frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(c+\frac{j}{n}\right)^{j-1} \quad (2.10)$$

olarak vermiştir. Bu eşitlik hesaplamalar bakımından daha uygundur.

Tümevarımla iki formülün eşitliği gösterilebilir. n' in seçilmiş değerleri ve $\alpha=0,01; 0,05; 0,10$ için $P(D_n > D_{n,\alpha}^+)$ ' yı sağlayan $D_{n,\alpha}^+$ değerlerinin bir çizelgesini Birnbaum ve Tingey (1952) vermiştir.

Teorem 3 : Eğer $F_X(x)$ herhangi bir sürekli dağılım fonksiyonu ise, her $d \geq 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(D_n^+ < \frac{d}{\sqrt{n}}\right) = 1 - e^{-2d^2}$$

dir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Bu yaklaşımın bir sonucu olarak ve aynı zamanda aşağıdaki sonuçtan dolayı $D_{n,\alpha}^+$ 'nın bir fonksiyonunun dağılımı için Ki-Kare çizelgeleri kullanılabilir. [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Eğer $F_X(x)$ herhangi bir sürekli dağılım fonksiyonu ve her $d \geq 0$ ise, $n \rightarrow \infty$, $v = 4nD_n^{+2}$ ' nin limitsel dağılımı 2 serbestlik derecesi ile bir Ki-Kare dağılımıdır.

Sadece ve sadece $4nD_n^{+2} < 4d^2$ veya $v < 4d^2$ ise $D_n^+ < d$ ' dir. Bu nedenle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(v < 4d^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(D_n^+ < \frac{d}{\sqrt{n}}\right) = 1 - e^{-2d^2} = 1 - e^{-4d^2/2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(v < c) = 1 - e^{-c/2}, \text{ bütün } c > 0 \text{ için}$$

olur.

Sağ taraf 2 serbestlik derecesi ile bir Ki-Kare dağılımının birikimli dağılım fonksiyonudur.

Bu sonucun aşağıda verilen bir sayısal örneği $D_{n,\alpha}^+$ ' ya yaklaşımı ortaya koyar. 2 serbestlik derecesi ile Ki-Kare dağılımının $\alpha=0,05$ için kritik değeri 5,99' dur. Yöntem

$4D_{n,0.05}^{+2} = 5,99$ alınarak uygulanır. Buna göre,

$$D_{n,0.05}^+ = \sqrt{\frac{1.4975}{n}} = \frac{1.22}{\sqrt{n}}$$

elde edilir. Buradan da Teorem 1' deki $D_{n,\alpha} = \frac{d_\alpha}{\sqrt{n}}$ sonucu doğrulanmış olur.

D_n istatistiğinin yokluk dağılımından kritik değerler $n \leq 40$ için Çizelge 2.6' da verilmiştir. Uygun kritik bölge D_n ' in büyük değerleridir.

Çizelge 2.6. Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi için kritik değerler

n	α				
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	0,684	0,776	0,842	0,900	0,929
3	0,565	0,636	0,708	0,785	0,829
4	0,493	0,565	0,624	0,689	0,734
5	0,447	0,509	0,563	0,627	0,669
6	0,410	0,468	0,519	0,577	0,617
7	0,381	0,436	0,483	0,538	0,576
8	0,358	0,410	0,454	0,507	0,542
9	0,339	0,387	0,430	0,480	0,513
10	0,323	0,369	0,409	0,457	0,489
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	0,296	0,338	0,375	0,419	0,449
13	0,285	0,325	0,361	0,404	0,432
14	0,275	0,314	0,349	0,390	0,418
15	0,266	0,304	0,338	0,377	0,404
16	0,258	0,295	0,327	0,366	0,392
17	0,250	0,286	0,318	0,355	0,381
18	0,244	0,279	0,309	0,346	0,371
19	0,237	0,271	0,301	0,337	0,361
20	0,232	0,265	0,294	0,329	0,352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	0,221	0,253	0,281	0,314	0,337
23	0,216	0,247	0,275	0,307	0,330
24	0,212	0,242	0,269	0,301	0,323
25	0,208	0,238	0,264	0,295	0,317
26	0,204	0,233	0,259	0,290	0,311
27	0,200	0,229	0,254	0,284	0,305
28	0,197	0,225	0,250	0,279	0,300
29	0,193	0,221	0,246	0,275	0,295
30	0,190	0,218	0,242	0,270	0,290
31	0,187	0,214	0,238	0,266	0,285
32	0,184	0,211	0,234	0,262	0,281
33	0,182	0,208	0,231	0,258	0,277
34	0,179	0,205	0,227	0,254	0,273
35	0,177	0,202	0,224	0,251	0,269
36	0,174	0,199	0,221	0,247	0,265
37	0,172	0,196	0,218	0,244	0,262
38	0,170	0,194	0,215	0,241	0,258
39	0,168	0,191	0,213	0,238	0,255
40	0,165	0,189	0,210	0,235	0,252
40+	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

2.2.1 Kolmogorov-Smirnov Testi için uygulamalar

Burada bir problem üzerinde Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testinin uygulaması gösterilmiştir. n hacimli $X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal örneğimiz olsun. Bu örneğin seçildiği yığının bilinmeyen birikimli dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ ve yokluk hipotezinde belirtilen (öngörülen) birikimli dağılım fonksiyonu da $F_0(x)$ olmak üzere, bütün x 'ler için,

$$H_0: F_X(x) = F_0(x)$$

biçiminde ifade edilir.

$F_X(x)$ yığın dağılımının istatistiksel görüntüsü $S_n(x)$ olduğundan, yokluk hipotezi doğru ise, $S_n(x)$ ve $F_0(x)$ arasındaki farklar örnekleme varyansı hariç bütün x 'ler için küçük olmalıdır. Çoğunlukla iki-yönlü uyum iyiliği için alternatif hipotez aşağıdaki gibi yazılır.

$$H_1: F_X(x) \neq F_0(x), \quad \text{bazı } x\text{'ler için}$$

Bu sapmaların mutlak değerce büyük olanları yokluk hipotezine şüpheyle bakılmasını sağlayabilecektir. Bu nedenle, $D_n > D_{n,\alpha}$ olduğunda Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi α anlamlılık düzeyinde H_0 'ı red eder. Glivenko-Cantelli teoremi $S_n(x)$ 'in $F_X(x)$ 'e 1 olasılıkla yakınsar olduğunu gösterdiğinden bu testin gücünün 1'e yakınsaması demektir. Yani, test alternatifine karşı tutarlıdır.

Eş. 2.6' daki Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği istatistiğinin değeri D_n istatistiği, eğer bütün n gözlemleri farklı sayısal değerlere sahipse, Eş. 2.6 kullanılarak hesaplanabilir. Ancak, aşağıdaki ifade cebirsel hesaplama ve uygulama için çok kolaydır ve aynı değerli gözlemler varsa kolaylık sağlar.

ε herhangi bir küçük pozitif sayı olmak üzere,

bu formül

$$D_n = \sup_x |S_n(x) - F_0(x)| = \max_x [|S_n(x) - F_0(x)|, |S_n(x - \varepsilon) - F_0(x)|]$$

olarak verilmiştir [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Örnek : Aşağıdaki 20 gözlem (0,1) aralığında sürekli Tekdüze dağılımdan rassal olarak seçilmiş, küçükten büyüğe doğru yeniden düzenlenmiş ve 4 ondalık basamağa göre kaydedilmiştir. Buna göre bu sayıların kare köklerinin (0,1) aralığında sürekli Tekdüze dağılımdan geldiğini belirten H_0 hipotezi test edilsin [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Çizelge 2.7. (0,1) aralığında, sürekli Tekdüze dağılımdan 20 gözlem değeri

0,0123	0,1039	0,1954	0,2621	0,2802
0,3217	0,3645	0,3919	0,4240	0,4814
0,5139	0,5846	0,6275	0,6541	0,6889
0,7621	0,8320	0,8871	0,9249	0,9634

D_n istatistiğinin değerini bulmak için gereken hesaplamalar Çizelge 2.8' de gösterilmiştir.

Çizelge 2.8. 20 gözlemden D_n istatistiğinin değerini bulmak için yapılan hesaplamalar

x	$S_n(x)$	$F_0(x)$	$S_n(x) - F_0(x)$	$ S_n(x) - F_0(x) $
0,11	0,05	0,11	-0,06	0,06
0,32	0,10	0,32	-0,22	0,22
0,44	0,15	0,44	-0,29	0,29
0,51	0,20	0,51	-0,31	0,31
0,53	0,25	0,53	-0,28	0,28
0,57	0,30	0,57	-0,27	0,27
0,60	0,35	0,60	-0,25	0,25
0,63	0,40	0,63	-0,23	0,23
0,65	0,45	0,65	-0,20	0,20
0,69	0,50	0,69	-0,19	0,19
0,72	0,55	0,72	-0,17	0,17
0,76	0,60	0,76	-0,16	0,16
0,79	0,65	0,79	-0,14	0,14
0,81	0,70	0,81	-0,11	0,11
0,83	0,75	0,83	-0,08	0,08
0,87	0,80	0,87	-0,07	0,07
0,91	0,85	0,91	-0,06	0,06
0,94	0,90	0,94	-0,04	0,04
0,96	0,95	0,96	-0,01	0,01
0,98	1,00	0,98	0,02	0,02

İlk sütundaki değerler, yukarıdaki gözlemler değildir, fakat onların kare kökleridir. Çünkü yokluk hipotezi onların kare kökleri ile ilgilidir.

$S_n(x)$ her bir farklı x gözlemine eşit veya daha küçük değerli gözlem sayısının n 'e oranıdır. H_0 hipotezi, Çizelge 2.7' de verilen sayıların kare köklerinin (0,1) aralığında sürekli tekdüze dağılımdan geldiğini belirttiğinden $F_0(x)$ değerleri x değerlerine eşittir. Dolayısıyla 3. sütun ilk sütunun tamamen aynısıdır. 4. sütun ise $S_n(x) - F_0(x)$ farkıdır. Son olarak 5. sütun 4. sütunun mutlak değeridir.

Çizelge 2.8' den $D_n = 0,31$ olarak elde edilir. Çizelge 2.6' dan $n = 20$ için 0,01 düzeyinde red bölgesinin $D_n \geq 0,352$ olduğu görülür. Buna göre,

$D_n = 0,31 < 0,352$ olduğundan bu sayıların kare köklerinin (0,1) aralığında sürekli tekdüze dağılımdan geldiğini belirten yokluk hipotezi red edilemez.

2.3. Lilliefors Uyum İyiliği Testi

Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği istatistiği bir gözlem setinin yokluk hipotezinde belirtilen sürekli dağılım, $F_0(x)$ 'den, gelip gelmediğini belirlemek amacıyla kullanılır. Çoğunlukla alternatifi bir test de Ki-Kare testidir. David ve Johnson (1948) ile Massey (1951)' e göre Kolmogorov-Smirnov testinin

- Küçük örnek çaplarında Ki-Kare testinin geçerliliğinin şüpheli olması,
- Herhangi bir örnek hacmi için çoğunlukla Ki-Kare' den daha güçlü bir test olması,

gibi en az iki büyük avantajı vardır [Lilliefors, 1967].

Bir gözlem setinin yokluk hipotezinde belirtilen sürekli dağılımdan gelip gelmediğini belirlemek için test yapılırken Kolmogorov-Smirnov testi için standart çizelgeler kullanılır. Eğer bir ya da daha fazla parametre örnekten tahmin edilmek zorunda kalırsa, Kolmogorov-Smirnov testi için kullanılan çizelgeler artık kullanılamaz. Bu durumda Kolmogorov-Smirnov testi kullanılırsa, Massey (1951) sonucun güvenilir olmayacağını ve doğru olan H_0 hipotezini red etme olasılığının Kolmogorov-Smirnov istatistiğinin çizelgesinde verilenden daha büyük olacağı sonucunu göstermiştir [Lilliefors, 1967]. Aşağıda anlatılacak olan Lilliefors (1967)' un uyum iyiliği testinin sonuçlarının oldukça güvenilir olduğu görülmektedir.

Lilliefors (1967), dağılımın parametreleri örnekten tahmin edildiğinde, Kolmogorov-Smirnov testinin kullanımının uygun olmadığını ve özellikle kritik değer çizelgesinin kullanılamayacağını ifade etmiştir [Lilliefors, 1967].

Ortalama ve varyans örnekten tahmin edildiğinde bir gözlem setinin normal dağılımdan gelip gelmediğini belirlemek amacıyla yapılacak test işleminde Kolmogorov-Smirnov istatistiği ile birlikte kullanılabilecek bir çizelgeyi Lilliefors (1967) Monte Carlo hesaplamalarından elde etmiştir. Aşağıda yöntemin sonuçlarının oldukça güvenilir olduğuna ilişkin bulgular verilmiştir [Lilliefors, 1967].

Eğer tahmin edilen parametreler konum veya ölçüm parametreleri ise, David ve Johnson (1948) belirli bir dağılım için Kolmogorov-Smirnov istatistiği ile birlikte kullanılacak çizelgelerin oluşturulmasının uygun olacağını ifade etmişlerdir [Lilliefors, 1967].

Lilliefors (1967), çok küçük örnek çaplarıyla kullanılabilen bir test önermiştir. Kac ve diğerleri (1955) de bunun Ki-Kare testinden asimptotik olarak daha güçlü olduğunu ifade etmişlerdir [Lilliefors, 1967].

Şimdi Lilliefors test istatistiğinin tanımını verelim. n hacimli bir rassal örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun.

Örneğin birikimli dağılım fonksiyonu, $S_n(x)$

ve

μ ve σ^2 parametrelerinin yerine tahmin edicileri $\bar{x}$ ve s^2 , nin yer aldığı birikimli normal dağılım fonksiyonu $F^*(x)$ olmak üzere,

Lilliefors test istatistiği

$$D_n^* = \max_x |F^*(x) - S_n(x)|$$

olarak tanımlanır. Eğer D_n^* istatistiğinin değeri çizelgedeki kritik değeri aşarsa, gözlemlerin bir normal yığından geldiğini ifade eden H_0 hipotezi red edilir.

Lilliefors (1967) Çizelge 2.9' daki kritik değerleri bir Monte Carlo yöntemiyle elde etmiştir. n ' in herbir değeri için 1000 veya daha fazla örnek çekilmiş ve D_n^* istatistiğin dağılımı böylece tahmin edilmiştir.

Gibbons ve Chakraborti (1985) Çizelge 2.9' daki değerler ile Kolmogorov-Smirnov testinin standart dağılım çizelgesindekileri karşılaştırarak, Lilliefors (1967)' un Monte Carlo yöntemiyle elde ettiği kritik değerlerin Kolmogorov-Smirnov testinin kritik değerlerine yakınsak olduğunu ifade etmiştir. Gibbons ve Chakraborti (1985) büyük örnek çapları için Monte Carlo kritik değerlerinin Kolmogorov-Smirnov kritik değerlerinin $1/\sqrt{n}$ ' i kadar azaldığını saptamıştır [Gibbons ve Chakraborti, 1985].

Bu durumda $n = 40$ alınırsa, Monte Carlo yöntemiyle elde edilecek olan kritik değer Kolmogorov-Smirnov Kritik değerinin $1/\sqrt{40}$ ' ı kadar azalacaktır. Yani Kolmogorov-Smirnov' a göre rededilemeyen Lilliefors' a göre rededilebilecektir.

Çizelge 2.9. D_n^* istatistiğinin kritik değer çizelgesi

n	α				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
4	0,300	0,319	0,352	0,381	0,417
5	0,285	0,299	0,315	0,337	0,405
6	0,265	0,277	0,294	0,319	0,364
7	0,247	0,258	0,276	0,300	0,348
8	0,233	0,244	0,261	0,285	0,331
9	0,223	0,233	0,249	0,271	0,311
10	0,215	0,224	0,239	0,258	0,294
11	0,206	0,217	0,230	0,249	0,284
12	0,199	0,212	0,223	0,242	0,275
13	0,190	0,202	0,214	0,234	0,268
14	0,183	0,194	0,207	0,227	0,261
15	0,177	0,187	0,201	0,220	0,257
16	0,173	0,182	0,195	0,213	0,250
17	0,169	0,177	0,189	0,206	0,245
18	0,166	0,173	0,184	0,200	0,239
19	0,163	0,169	0,179	0,195	0,235
20	0,160	0,166	0,174	0,190	0,231
25	0,149	0,153	0,165	0,180	0,203
30	0,131	0,136	0,144	0,161	0,187
30+	$\frac{0.736}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.768}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.805}{\sqrt{n}}$	$\frac{0.886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.031}{\sqrt{n}}$

Massey (1951), Kolmogorov-Smirnov testi için kritik değerler ile Çizelge 2.9' u karşılaştırdığında, n ' in her bir değeri için, Çizelge 2.9' un 0,01 anlamlılık düzeyindeki kritik değerlerinin, Kolmogorov-Smirnov testinin ancak 0,20 anlamlılık düzeyindeki kritik değerlerine yakınsak olduğunu saptamıştır. Bu durumda, parametreler örnekten tahmin edildiğinde Kolmogorov-Smirnov testi için dağılım çizelgesi kullanılarak güvenilir bir test yapılamaz [Lilliefors, 1967].

Çizelge 2.9' da verilen D_n^* istatistiğinin değerleri n ' in belli değerleriyle ilişkilendirilmiş kritik değerlerdir. Hesaplanan D_n^* değeri Çizelge 2.9' daki $D_{n,\alpha}^*$ değerine eşit veya daha büyük olursa, yokluk hipotezi red edilir. Buradaki D_n^*

değeri, her n değeri için 1000 veya daha fazla örnek kullanarak Monte Carlo hesaplamalarından elde edilmiştir.

Farklı dağılımların her birinden 20 çaplı 500 örnek alınmış ve Lilliefors uyum iyiliği testi için yapılan Monte Carlo simülasyon sonuçları için aşağıdaki Çizelge 2.10 oluşturulmuştur.

Çizelge 2.10. Örnek hacmi 20 iken D_n^* istatistiği ve Ki-Kare istatistiği ile normalliği red etme oranları

Dağılım	Kolmogorov-Smirnov Testi		Ki-Kare Testi	
	α		α	
	0,05	0,10	0,06	0,12
Normal	0,06	0,10	0,06	0,12
Ki-Kare, 3 sd.	0,44	0,55	0,20	0,27
t, 3 sd.	0,50	0,58	0,40	0,52
Üstel	0,61	0,72	0,29	0,41
Tekdüze	0,12	0,22	0,10	0,18

Çizelge 2.10' da Kolmogorov-Smirnov testi ve Ki-Kare testi ile normallik için yokluk hipotezini red etme oranları verilmiştir.

Lilliefors Testi ile örneğin bir normal dağılımdan geldiğini belirten yokluk hipotezini red etme oranı, 10 çaplı 500 örnek için Gibbons ve Chakraborti (1985) tarafından bir Monte Carlo simülasyonu ile elde edilmiştir. Bu sonuçlar Çizelge 2.11' de verilmiştir.

Çizelge 2.11. 10 çaplı 500 örnek için yokluk hipotezini red etme oranları.

Dağılım	Lilliefors Testi Monte Carlo Değerleri ile	
	α	
	0,05	0,10
Normal	0,05	0,10
Ki-Kare, 3 sd.	0,23	0,35
t, 3 sd.	0,28	0,36
Üstel	0,34	0,46
Tekdüze	0,07	0,13

Ayrıca Gibbons ve Chakraborti (1985) μ ve σ bilinmediği için genel bir normal dağılımın varsayıldığını ve yokluk hipotezinin yığın parametrelerini (olasılık fonksiyonunu) belirttiğini ifade etmiştir, yani yokluk hipotezinin bileşik olduğunu belirtmiştir.

Bileşik uyum iyiliği hipotezleri söz konusu iken Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri ancak bilinmeyen parametreler tahmin edildikten sonra uygulanabilir. Fakat parametreler örnekten tahmin edildiğinde Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi yerine Lilliefors (1967) uyum iyiliği testinin kullanılmasının uygun olacağı belirtilmiştir. Bu durumda, Lilliefors (1967), herhangi bir ekstra bilgi yokken, yani yığın parametreleri bilinmiyorken, yaklaşık P değerini ve kritik değeri bulmak için, Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testinin çizelgelerinin kullanılmasını önermiştir.

Aşağıda verilen örnek ile “Lilliefors uyum iyiliği testi”nin kullanımı gösterilmiştir.

Örnek : Ekonomik olarak gelişmemiş belli bir şehirde yıllık ortalama brüt kazancı tahmin etmek için 12 birimlik rassal bir örnek ile mülakat yapılmış ve kazanç verileri aşağıda verilmiştir. Bu verilerin bir normal dağılımdan geldiğini belirten yokluk hipotezinin testi yapılmak istenmektedir [Lilliefors, 1967].

Çizelge 2.12. 12 birimlik rassal bir örnek için kazanç verileri

9800	10200	9300	8700	15200	6900
8600	9600	12200	15500	11600	7200

Ortalama ve varyans belirtilmediğinden en uygun test Lilliefors testidir. Bu durumda öncelikle $\bar{x}$ ve s hesaplanmalıdır.

$$\bar{x} = 10400 \text{ ve } s = 2773,25$$

elde edilir.

$$z_j = (x_j - 10400) / 2773,25$$

ile uygun standart değerler elde edilir. D_n^* için gereken hesaplamalar Çizelge 2.13' te görülmektedir.

Çizelge 2.13. Lilliefors testi için hesaplamalar

x	Z	$S_n(x)$	$F_X(x)$	$ S_n(x) - F_X(x) $
6900	-1,26	0,0833	0,1038	0,0205
7200	-1,15	0,1667	0,1251	0,0416
8600	-0,65	0,2500	0,2578	0,0078
8700	-0,61	0,3333	0,2709	0,0624
9300	-0,40	0,4167	0,3446	0,0721
9600	-0,29	0,5000	0,3859	0,1141
9800	-0,22	0,5833	0,4129	0,1704
10200	-0,07	0,6667	0,4721	0,1946
11600	0,43	0,7500	0,6664	0,0836
12200	0,65	0,8333	0,7422	0,0911
15200	1,73	0,9167	0,9582	0,0415
15500	1,82	1,0000	0,9671	0,0329
			1,0000	

Böylece, $D_n^* = 0,1946$ olarak elde edilir ve Çizelge 2.9.' dan $\alpha = 0,05$ için $D_{n,\alpha}^* = 0,242$ ' dir. Dolayısıyla kazanç verilerinin bir normal dağılımdan geldiğini belirten yokluk hipotezi red edilemez.

2.4. Uyum İyiliği İçin Anderson-Darling D Testi

n hacimli bir rassal örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. Bu rassal örnek için sıralı istatistikler,

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$$

ile gösterilsin.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$S^2 = \sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

ve

$$T = \sum_{i=1}^n \left\{ i - \frac{1}{2}(n+1) \right\} X_{(i)}$$

olmak üzere, normallik için uyum iyiliği ölçüsü olan D test istatistiği,

$$D = \frac{T}{n^2 S} \quad (2.11)$$

olarak önerilmiştir [D'Agostino, 1972]. Örnek hacminin 50 ya da daha büyük olduğu durumlar için D'Agostino (1972) D istatistiğinin standartlaştırılmış biçimi olan

$$Y = \frac{n^{1/2}(D - 0.28209479)}{0.02998598} \quad (2.12)$$

için yüzdelerik noktaları (kritik değerler) ile beraber D istatistiğine dayalı olan normallik için bir test sunmuştur. Bu D istatistiği, standart sapmanın Downton (1966)' ın doğrusal tahmin edicisinin standart hatasına oranına eşittir.

$n \geq 50$ için hem D hem de Y istatistiklerinin daha ayrıntılı çizelgeleri yayınlanmamış raporda verilmiştir [D'Agostino, 1972]. Bu yüzdelerik noktalar (kritik değerler) Cornish-Fisher açılımlarını kullanarak türetilmiştir ve simülasyon çalışması belirli anlamlılık düzeyleri için bu değerlerin uygun olduklarını göstermiştir.

$n \leq 50$ için Cornish-Fisher açılımları özellikle üst kuyruk kritik değerleri için yetersizdir. Bununla beraber iyi sonuçlar elde etmek için Pearson eğrileri yöntemi uygundur. Bu nedenle, D'Agostino (1972) D ve Y istatistiklerinin yüzdelik noktalarını (kritik değerlerini) Johnson, Nixon, Amos ve Pearson (1963)' ın çizelgelerindeki karesel enterpolasyonu kullanarak hesaplamışlardır. Yapılan simülasyon çalışması, Pearson eğrileri yönteminin $n \geq 10$ iken alt kuyruklar (alt kritik değerler) için iyi sonuçlar verdiğini, ancak özellikle %99 ve daha büyük yüzdelikler için Pearson eğrileri yönteminin üst kuyruklar (kritik değerler) için iyi sonuçlar vermediğini göstermiştir. Üst kuyruk değerlerini (üst kuyruk kritik değerlerini) elde etmek için yoğun bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu çalışmanın ayrıntıları Çizelge 2.14' de verilmiştir. Pearson eğrileri yöntemi ve simülasyon çalışmasının sonuçlarının birleştirilmesi ile Çizelge 2.14' deki kritik değerler elde edilmiştir. Bu çizelge, $n = 10(2)50(10)100$ için Y istatistiğinin çok sayıda olasılık noktalarını (kritik değerlerini) kapsamaktadır.

D'Agostino (1972) $n = 50(10)100$ için Cornish-Fisher yaklaşımıyla olasılık noktalarını (kritik değerleri) vermiştir. Bu değerler Çizelge 2.14' deki kritik değerlerle uyumludur.

Çizelge 2.14. Üst kuyruk için Y kritik değerleri

n	Y ' nin yüzdelikleri									
	0,5	1,0	2,5	5,0	10	90	95	97,5	99	99,5
10	-4,66	-4,06	-3,25	-2,62	-1,99	0,149	0,235	0,299	0,356	0,385
12	-4,63	-4,02	-3,20	-2,58	-1,94	0,237	0,329	0,381	0,440	0,479
14	-4,57	-3,97	-3,16	-2,53	-1,90	0,308	0,399	0,460	0,515	0,555
16	-4,52	-3,92	-3,12	-2,50	-1,87	0,367	0,459	0,526	0,587	0,613
18	-4,47	-3,87	-3,08	-2,47	-1,85	0,417	0,515	0,574	0,636	0,667
20	-4,41	-3,83	-3,04	-2,44	-1,82	0,460	0,565	0,628	0,690	0,720
22	-4,36	-3,78	-3,01	-2,41	-1,81	0,497	0,609	0,677	0,744	0,775
24	-4,32	-3,75	-2,98	-2,39	-1,79	0,530	0,648	0,720	0,783	0,822
26	-4,27	-3,71	-2,96	-2,37	-1,77	0,559	0,682	0,760	0,827	0,867
28	-4,23	-3,68	-2,93	-2,35	-1,76	0,586	0,714	0,797	0,868	0,910
30	-4,19	-3,64	-2,91	-2,33	-1,75	0,610	0,743	0,830	0,906	0,941
32	-4,16	-3,61	-2,88	-2,32	-1,73	0,631	0,770	0,862	0,942	0,983
34	-4,12	-3,59	-2,86	-2,30	-1,72	0,651	0,794	0,891	0,975	1,02
36	-4,09	-3,56	-2,85	-2,29	-1,71	0,669	0,816	0,917	1,00	1,05
38	-4,06	-3,54	-2,83	-2,28	-1,70	0,686	0,837	0,941	1,03	1,08
40	-4,03	-3,51	-2,81	-2,26	-1,70	0,702	0,857	0,964	1,06	1,11
42	-4,00	-3,49	-2,80	-2,25	-1,69	0,716	0,875	0,986	1,09	1,14
44	-3,98	-3,47	-2,78	-2,24	-1,68	0,730	0,892	1,01	1,11	1,17
46	-3,95	-3,45	-2,77	-2,23	-1,67	0,742	0,908	1,02	1,13	1,19
48	-3,93	-3,43	-2,75	-2,22	-1,67	0,754	0,923	1,04	1,15	1,22
50	-3,91	-3,41	-2,74	-2,21	-1,66	0,765	0,937	1,06	1,18	1,24
60	-3,81	-3,34	-2,68	-2,17	-1,64	0,812	0,997	1,13	1,26	1,34
70	-3,73	-3,27	-2,64	-2,14	-1,61	0,849	1,05	1,19	1,33	1,42
80	-3,67	-3,22	-2,60	-2,11	-1,59	0,878	1,08	1,24	1,39	1,48
90	-3,61	-3,17	-2,57	-2,09	-1,58	0,902	1,12	1,28	1,44	1,54
100	-3,57	-3,14	-2,54	-2,07	-1,57	0,923	1,14	1,31	1,48	1,59

D'Agostino (1972) yaptığı simülasyon çalışması ile alt kuyruk değerleri (alt kuyruk kritik değerleri) için Pearson eğrileri yönteminin sağladığı değerlerin simülasyon ile bulunan değerlerle oldukça uyumlu olduğunu göstermiştir.

Bununla beraber, yapılan bu simülasyon çalışması, Pearson eğrileri yöntemi ile bulunan üst kuyruk olasılık noktalarının (kritik değerlerinin) simülasyon yoluyla bulunan kritik değerlerden biraz farklı sapmalı olduğunu ortaya

koymuştur. Örneğin, $n = 28(2)36$ için Pearson eğrileri yöntemi ve simülasyon yoluyla bulunan kritik değerler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 2.15. Pearson yöntemi ve simülasyon yoluyla elde edilen kritik değerler

n	Üst kuyruk % 95 olasılık değerleri	
	Pearson Eğrileri Yöntemi ile	Simülasyon ile
28	0.713	0.715
30	0.742	0.744
32	0.769	0.772
34	0.793	0.795
36	0.816	0.816

2.5. Uyum iyiliği için Watson' ın U_n^2 Testi

n birimlik gözlemler birikimli dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ olan yığından gelsin. Yokluk hipotezini test etmek için Watson (1961,1962) bir uyum iyiliği test istatistiği önermiştir. Bu istatistiğin dağılımı $F_X(x)$ dağılımından bağımsızdır. Küçükten büyüğe doğru sıralanmış gözlemler $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $y_i = F_X(x_i)$ olsun.

$$\bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n} \right)$$

olmak üzere,

U_n^2 istatistiği

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{2-i}{2n} \right)^2 - n \left(\bar{y} - 1/2 \right)^2 + \frac{1}{12n} \quad (2.13)$$

olarak tanımlanmıştır [Stephans, 1964].

U_n^2 istatistiğinin oldukça küçük değerleri uyumun oldukça iyi olduğunu, tersine bu istatistiğin oldukça büyük değerleri de uyumun oldukça zayıf olduğunu ifade eder.

$n = 2,3,4$ iken U_n^2 istatistiğinin tam olasılık dağılımlarını Watson (1961,1962) elde etmiş ve $P(U_n^2 > C_\alpha) = \alpha$ olmasını sağlayan C_α kritik değerlerini vermiştir. $n = 4$ iken U_4^2 istatistiğinin tam olasılık dağılımından hesaplanan C_α kritik değerleri aşağıda verilmiştir [Stephans, 1964].

Çizelge 2.16. U_n^2 İstatistiği için tam olasılık dağılımı ile kritik değerler

Anlamlılık Düzeyi, α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
C_α	0,146	0,176	0,202	0,233	0,252

n oldukça küçük olmadıkça U_n^2 istatistiğinin tam olasılık dağılımının oluşturulması çok karmaşıktır. Bu nedenle Watson (1961,1962) U_n^2 istatistiğinin dağılımlarını uygun Pearson eğrileri yöntemiyle yaklaşık olarak bulmuştur. Tam olasılık dağılımından elde edilen C_α değerleri ile Pearson eğrileri yaklaşımı ile bulunan C_α değerleri hemen hemen eşit çıkmıştır [Stephans, 1964].

Çizelge 2.17. U_n^2 istatistiği için üst kuyruk yüzdelik noktaları (kritik değerleri)

n	Anlamlılık düzeyi, α				
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
2	0,143	0,155	0,161	0,164	0,165
3	0,147	0,173	0,194	0,213	0,224
4	0,146	0,176	0,202	0,233	0,252
5	0,148	0,177	0,205	0,238	0,262
6	0,149	0,179	0,208	0,243	0,269
7	0,149	0,180	0,210	0,247	0,274
8	0,150	0,181	0,211	0,250	0,278
9	0,150	0,182	0,212	0,252	0,281
10	0,150	0,182	0,213	0,254	0,283
12	0,150	0,183	0,215	0,256	0,287
14	0,151	0,184	0,216	0,258	0,290
16	0,151	0,184	0,216	0,259	0,291
18	0,151	0,184	0,217	0,259	0,292
20	0,151	0,185	0,217	0,261	0,293
25	0,151	0,185	0,218	0,262	0,295
30	0,152	0,185	0,219	0,263	0,296
40	0,152	0,186	0,219	0,264	0,298
50	0,152	0,186	0,220	0,265	0,299
100	0,152	0,186	0,221	0,266	0,301

n örnek hacmi için bu çizelge α anlamlılık düzeyinde $P(U_n^2 > C_\alpha) = \alpha$ olmasını sağlayan C_α değerlerini verir.

U_n^2 istatistiğinin örnekten hesaplanan değeri U_n^2 ve α anlamlılık düzeyinde kritik değer çizelgesinden, Çizelge 2.17' den, bulunan değer C_α olmak üzere,

$$U_n^2 \geq C_\alpha$$

ise yokluk hipotezi α anlamlılık düzeyinde red edilir, tersine

$$U_n^2 < C_\alpha$$

ise α anlamlılık düzeyinde yokluk hipotezi red edilmez.

3. UYUM İYİLİĞİ İÇİN DAMICO' NUN TEK-ÖRNEK TESTİ

Damico (2004) uyum iyiliği için bir istatistik önermiştir. Bu istatistiğin tanımlanması ve hesaplanması kolaydır, ayrıca öğretim aracı olarak oldukça yararlıdır. Bu istatistik, dağılıma bağlı değildir ve dağılımı çarpıktır. Genel bir formül kullanarak n ' in herhangi bir değeri için 0,01; 0,05; 0,10; 0,20 anlamlılık düzeyinde kritik değerler kolayca bulunabilir. Ayrıca bu istatistiğin tanımı iki-örnek durumuna genişletilebilir. Testin gücü bakımından iyi özelliklere sahip bir testtir [Damico, 2004].

3.1. Damico' nun A İstatistiğinin Tanımı

$X_i, i = 1, 2, \dots, n$, bir P_x yığınının gözlemleri gösterebilir. Bu X_i 'ler bağımsız ve aynı dağılımlı olsunlar.

$H_0 : P_x$ belirtilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ile bir yığındır.

hipotezi

$H_1 : P_x$ yığını belirtilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip değildir.

hipotezine karşı test edilmek istenmektedir.

Damico (2004) A istatistiğinin tanımı için önce olasılık yoğunluk fonksiyonunu eşit ve çakışmayan n sayıda aralığa bölmüştür (Yani, olasılık yoğunluk fonksiyonunun bu aralıkların her biri üzerine integrali $\frac{1}{n}$, dir.).

Yokluk hipotezi altında, örnekten bir gözlemin bu n aralığın birinde olması

beklenir (Sıralı istatistiklerin beklenen değeri $\frac{i}{(n+1)}$, burada i indisi 1 ile

n aralığında bir tam sayıdır ve 1 ile n 'i de kapsar.). Tek-örnek A istatistiği bu beklentiden kaç gözlemin saptığının bir ölçüsüdür [Damico, 2004].

Topların sayısı olan n kutu sayısına eşit olmak üzere, bu durum herbiri 0'dan n' e kadar top içerebilen kutuların bir dizisi olarak düşünülürse, bu istatistik her bir kutuda sadece ve sadece 1 top olan kutuların bir dizisini elde etmek için gerekli olan hamlelerin minimum sayısını hesaplamaya eşit olarak düşünülebilir. Burada bir “hamle” bir kutudan bitişik bir kutuya sadece bir topun hareketi şeklinde tanımlanır [Damico, 2004]. Aşağıda Damico (2004)' nun A istatistiği için bir örnek verilmiştir.

Örnek : Aşağıdaki yedi değeri içeren rasgele bir örneğin olduğu kabul edilsin.

90,88; 93,28 ; 93,51 ; 102,3 ; 104,4 ; 104,8 ; 105,3

Bu yedi değerin ortalaması 100 ve standart sapması 5 olan bir normal dağılımdan çekildiğini belirten yokluk hipotezi test edilmek istensin. Öncelikle her bir değer için Z değeri ve normal dağılımdan birikimli olasılık değeri hesaplanır. Aşağıda ilk değer için Z değeri ve normal dağılımdan birikimli olasılık değeri

$$P(X \leq 90,88) = P\left(Z \leq \frac{90,88 - 100}{5}\right) = P(Z \leq -1,824) = 0,0344$$

olarak hesaplanır. Diğerleri için de aynı işlemler yapılmış ve aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.1. Z değerleri ve normal dağılımdan birikimli olasılık değerleri

Z Değerleri	Birikimli Olasılık Değerleri
-1,824	0,034
-1,344	0,089
-1,298	0,097
0,46	0,678
0,88	0,811
0,96	0,832
1,06	0,855

0,034 ile 0,855 aralığındaki bu 7 tane ondalıklı sayının (0,00 ile 1,00) aralığında Düzgün (Tekdüze) dağılımdan geldiğini belirten yokluk hipotezi test edilmek isteniyormuş gibi ilerlenir [Damico, 2004]. $\frac{1}{n}$ ile yukarıda bahsedilen n aralık elde edilir ve Çizelge 3.1' deki birikimli olasılık değerleri bu aralıklara dağıtılır. Bu yedi aralık ve her birindeki gözlemlerin sayısı aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.2. Birikimli olasılık değerlerinin aralıklara dağılımı

Aralıklar	Frekanslar
[0,000 , 0,143]	3
(0,143 , 0,286]	0
(0,286 , 0,429]	0
(0,429 , 0,571]	0
(0,571 , 0,714]	1
(0,714 , 0,857]	3
(0,857 , 1,000]	0

Her kutuda sadece 1 top üretmek için yapılan hamleler aşağıdaki çizelgede görülmektedir. Burada Hamleler altında yer alan sütun i . Hamle sonunda her aralıkta bulunan gözlem sayısını göstermektedir.

Çizelge 3.3. Her kutuda sadece bir top üretmek için yapılan hamleler

	Başlangıç	Hamleler					
Aralıklar		1.	2.	3.	4.	5.	6.
(0.000 , 0.143)	3	2	2	1	1	1	1
(0.143 , 0.286)	0	1	0	1	1	1	1
(0.286 , 0.429)	0	0	1	1	1	1	1
(0.429 , 0.571)	0	0	0	0	0	1	1
(0.571 , 0.714)	1	1	1	1	2	1	1
(0.714 , 0.857)	3	3	3	3	2	2	1
(0.857 , 1.000)	0	0	0	0	0	0	1

Buna göre A istatistiğinin hesaplanan değeri 6 olur. Yokluk hipotezi altında, A istatistiğinin 6 değerine eşit ya da daha büyük değer alması olasılığı

Çizelge 3.4' den 0.3868 olarak bulunur. Bu α düzeyi genellikle önemli bulunmaz ve böylece yokluk hipotezi red edilemez.

İstatistiğin matematiksel tanımı, basitçe, terimlerin sayısının bir toplamıdır. Gözlem sayısı arttıkça her aralıkta tek gözlem olacak şekilde gerekli en küçük hamle sayısını bulmak güçleşir. X_i , $i=1,2,\dots,n$, bir P_x yığınınından gözlemleri gösterebilir ve $X_{(i)}$, $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere, sıralı istatistikleri belirtir. $F(X_{(i)})$, i 'nci sıralı istatistik için birikimli dağılım fonksiyonunun değeri olsun. Son olarak, $Gif()$ en büyük tam sayı fonksiyonunu gösterebilir. A istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır [Damico, 2004].

$$A = \sum_{i=1}^n |Gif(n * F(X_{(i)}) + 1) - i| \quad (3.1)$$

Böylece bu örnek için,

$$\begin{aligned} Gif(7*0,034+1) &= 1 & : & \quad |1-1| = 0 \\ Gif(7*0,089+1) &= 1 & : & \quad |1-2| = 1 \\ Gif(7*0,097+1) &= 1 & : & \quad |1-3| = 2 \\ Gif(7*0,678+1) &= 5 & : & \quad |5-4| = 1 \\ Gif(7*0,812+1) &= 6 & : & \quad |6-5| = 1 \\ Gif(7*0,834+1) &= 6 & : & \quad |6-6| = 0 \\ Gif(7*0,855+1) &= 6 & : & \quad |6-7| = 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Buna göre A istatistiğinin değeri $0+1+2+1+1+0+1 = 6$ olur, böylece gerçekten yukarıda hesaplanan 7 farkın mutlak değerlerinin, n sıralı istatistiğin herbirinin kendi uygun kutusu içinde yer alması için gereken

hamlelerin sayısına uygun olduğu açıktır. Böylece başlangıçta kutu 1' de olan 3. sıralı istatistik sonunda kutu 3' de olmak için 2 kez hamle yapmaktadır [Damico, 2004].

3.2. A İstatistiğinin Dağılımı ve Kritik Değerler

Örnek hacmi $n = 2, \dots, 7$ için A istatistiğinin Damico (2004) tarafından elde edilen birikimli tam olasılık dağılımları Çizelge 3.4' de verilmiştir.

Çizelge 3.4. A İstatistiğinin birikimli tam olasılık dağılımı
($n = 2(1)7$ için $P(A \geq A_c^*) = a$ değerleri)

A	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
	a					
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,0000000
1	0,50000	0,77778	0,90625	0,96160	0,98457	0,99388
2		0,33333	0,62500	0,80800	0,90741	0,95716
3		0,07407	0,31250	0,55840	0,74280	0,86026
4			0,12500	0,32800	0,53704	0,70265
5			0,03906	0,17440	0,35528	0,53744
6			0,00781	0,08480	0,22239	0,38682
7				0,03648	0,13297	0,26869
8				0,01344	0,07562	0,18155
9				0,00384	0,04055	0,11947
10				0,00064	0,02010	0,07634
11					0,00904	0,04711
12					0,00360	0,02792
13					0,00120	0,01577
14					0,00030	0,00840
15					0,00004	0,00419
16						0,00193
17						0,00080
18						0,00029
19						0,00009
20						0,00002
21						0,00000

$n = 2(1)7$ iken 0,01; 0,05; 0,10 ve 0,20 anlamlılık düzeyleri için bulunan A_c^* kritik değerleri aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.5. A_c^* kritik değerleri

α	n					
	2	3	4	5	6	7
0,20	1	2	3	5	6	8
0,10		3	4	6	8	9
0,05			5	7	9	11
0,01			6	8	11	14

Buna göre A istatistiğinin hesaplanan değeri A_h olmak üzere $A_h \geq A_c^*$ olursa H_0 red edilir.

Yukarıdaki örnekte $n = 7$ için A istatistiğinin hesaplanan değeri 6 olarak bulunmuştu, bu durumda 0,01 anlamlılık düzeyinde A_c^* kritik değeri 14 olur. $A_h \geq A_c^*$ eşitsizliği sağlanmadığı için H_0 hipotezi red edilemez, yani örnekteki 7 değerlerin ortalaması 100 ve standart sapması 5 olan bir normal dağılımdan çekildiğini belirten yokluk hipotezi red edilemez.

0,05; 0,10 ve 0,20 anlamlılık düzeyleri için sırasıyla kritik değerler 11, 9 ve 8' dir. Bu anlamlılık düzeylerinin hepsinde $A_h \geq A_c^*$ eşitsizliği sağlanmadığı için H_0 hipotezi red edilemez.

Çizelge 3.6. $n = 8(1)40(10)100$ için seçilen N tekrar sayısına göre simülasyon yöntemi kullanılarak A istatistiğinin dağılımından hesaplanan bazı birikimli olasılık değerleriyle A_c^* kritik değerlerini içermektedir. Bu A_c^* kritik değerleri 0,01; 0,05; 0,10 ve 0,20 anlamlılık düzeyleri için $P(A \geq A_c^*) = \alpha$ kriterine göre hesaplanmışlardır.

Çizelge 3.6. Simülasyon ile oluşturulan A istatistiğinin dağılımına ilişkin kritik değerler

N	n	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$		N	n	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$
10000	8	9	0,2267		1000	18	32	0,1960
		11	0,1183				38	0,1010
		13	0,0543				44	0,0490
		17	0,0089				57	0,0090
10000	9	11	0,2074		1000	19	33	0,2040
		13	0,1176				40	0,1020
		15	0,0462				48	0,0490
		20	0,0106				63	0,0100
10000	10	13	0,2008		10000	20	37	0,1973
		16	0,0972				45	0,0993
		19	0,0406				53	0,0477
		24	0,0090				66	0,0092
10000	11	15	0,2018		1000	21	40	0,1970
		19	0,0860				49	0,0950
		21	0,0522				56	0,0510
		27	0,0111				75	0,0090
10000	12	17	0,2015		1000	22	43	0,2000
		20	0,1162				51	0,1000
		24	0,0507				59	0,0490
		30	0,0090				77	0,0100
10000	13	19	0,2056		1000	23	47	0,1980
		23	0,1038				56	0,1000
		27	0,0484				66	0,0490
		35	0,0097				83	0,0100
10000	14	22	0,1909		1200	24	48	0,2008
		27	0,0945				58	0,0983
		31	0,0497				67	0,0492
		40	0,0085				87	0,0092
10000	15	23	0,2125		10000	25	51	0,1991
		29	0,0972				61	0,1031
		34	0,0468				72	0,0515
		43	0,0089				93	0,0107
1000	16	26	0,1920		1600	26	53	0,2031
		31	0,0920				65	0,1013
		36	0,0460				77	0,0481
		48	0,0100				97	0,0094
1000	17	29	0,1930		1600	27	57	0,1969
		34	0,1020				69	0,0988
		40	0,0450				80	0,0475
		51	0,0080				104	0,0100

Çizelge 3.6. (Devam) Simülasyon ile oluşturulan A istatistiğinin dağılımına ilişkin kritik değerler

N	n	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$	N	n	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$
1600	28	59	0,1981	1600	38	96	0,2019
		73	0,1019			118	0,1013
		86	0,0500			135	0,0500
		110	0,0100			181	0,0100
1600	29	66	0,1975	1600	39	99	0,2013
		80	0,1013			120	0,1000
		92	0,0481			140	0,0494
		117	0,0100			170	0,0094
10000	30	67	0,2029	10000	40	103	0,2011
		81	0,1025			126	0,1000
		95	0,0490			148	0,0496
		126	0,0095			191	0,0099
1600	31	71	0,1969	10000	50	145	0,1945
		87	0,0981			177	0,0984
		101	0,0500			205	0,0496
		128	0,0100			265	0,0099
1600	32	74	0,2038	10000	60	190	0,1999
		91	0,1000			232	0,0986
		107	0,0488			270	0,0498
		135	0,0100			348	0,0093
1600	33	77	0,1963	10000	70	240	0,2019
		90	0,1006			292	0,1027
		108	0,0500			340	0,0488
		141	0,0094			438	0,0095
1600	34	82	0,1975	10000	80	293	0,1988
		101	0,0988			357	0,1015
		117	0,0488			415	0,0530
		149	0,0100			535	0,0112
10000	35	84	0,2036	10000	90	349	0,1982
		102	0,1019			426	0,1015
		120	0,0493			495	0,0530
		152	0,0103			639	0,0112
1600	36	91	0,2019	10000	100	409	0,1930
		113	0,0981			499	0,0955
		132	0,0488			580	0,0467
		166	0,0100			748	0,0089
1600	37	90	0,1988				
		110	0,1000				
		128	0,0488				
		172	0,0100				

Çizelge 3.6' ya bakıldığında $N = 10000$ tekrar sayısı ve $n = 25$ örnek hacmi iken 0,01 anlamlılık düzeyinde H_0 hipotezinin red edilmesi için $A \geq 93$ olmalıdır. $N = 1600$ ve $n = 39$ iken $A \geq 99$ olması olasılığı 0,2013' tür.

$n = 8(1)15$ için A istatistiğinin dağılımına ilişkin daha ayrıntılı bilgiler Çizelge 3.7' de verilmiştir. Bu çizelgelerden $P(A \geq A_c^*)$ olasılık değerleri için daha ayrıntılı sonuçlar bulunabilir.

Çizelge 3.7. A İstatistiği için birikimli olasılık değerleri ve bu değerleri sağlayan A_c^* değerleri

n=8		n=9	
Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$
9	0,2267	11	0,2074
10	0,1657	12	0,1580
11	0,1183	13	0,1176
12	0,0810	14	0,0874
13	0,0543	15	0,6330
14	0,0347	16	0,0462
15	0,0227	17	0,0335
16	0,0151	18	0,0241
17	0,0089	19	0,0157
n=10		20	0,0106
Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$	21	0,0062
13	0,2008	n=11	
14	0,1606	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$
15	0,1260	15	0,2018
16	0,0972	16	0,1628
17	0,0729	17	0,1336
18	0,0542	18	0,1091
19	0,0406	19	0,0860
20	0,0298	20	0,0670
21	0,0221	21	0,0522
22	0,0166	22	0,0417
23	0,0126	23	0,0334
24	0,0090	24	0,0257
		25	0,0194
		26	0,0147
		27	0,0111
		28	0,0082

Çizelge 3.7. (Devam) A İstatistiği için birikimli olasılık değerleri ve bu değerleri sağlayan A_c^* değerleri

n=12		n=13	
Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$
17	0,2015	19	0,2056
18	0,1677	20	0,1733
19	0,1407	21	0,1488
20	0,1162	22	0,1249
21	0,0929	23	0,1038
22	0,0755	24	0,0878
23	0,0615	25	0,0736
24	0,0507	26	0,0606
25	0,0416	27	0,0484
26	0,0315	28	0,0410
27	0,0240	29	0,0334
28	0,0175	30	0,0278
29	0,0134	31	0,0221
30	0,0099	32	0,0184
n=14		33	0,0145
Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$	34	0,0120
21	0,2168	35	0,0097
22	0,1909	n=15	
23	0,1657	Kritik Değer A_c^*	$P(A \geq A_c^*)$
24	0,1431	23	0,2125
25	0,1267	24	0,1873
26	0,1100	25	0,1648
27	0,0945	26	0,1454
28	0,0806	27	0,1285
29	0,0691	28	0,1132
30	0,0581	29	0,0972
31	0,0497	30	0,0841
32	0,0435	31	0,0723
33	0,0360	32	0,0624
34	0,0293	33	0,0542
35	0,0236	34	0,0468
36	0,0200	35	0,0403
37	0,0175	36	0,0344
38	0,0141	37	0,0296
39	0,0119	38	0,0240
40	0,0085	39	0,0206
		40	0,0163
		41	0,0141
		42	0,0118
		43	0,0089

Damico (2004) çalışmasını tamamladıktan sonra, n 'in büyük değerleri için kritik değerlerin mükemmel tahminlerini veren bazı formüller elde etmiştir (Bu formüller adımsal regresyon teknikleri kullanılarak hesaplanmıştır.). α anlamlılık düzeylerinin 0,01; 0,05; 0,10 ve 0,20 olduğu durumlar için bu formüller Çizelge 3.8' de verilmiştir.

Çizelge 3.8. α anlamlılık düzeylerinde kritik değer formülleri

α Düzeyleri	Kritik Değer Formülü
0,20	$Gif\left(0,4081 \times n^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 1\right)$
0,10	$Gif\left(0,4981 \times n^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 1\right)$
0,05	$Gif\left(0,5797 \times n^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 1\right)$
0,01	$Gif\left(0,7473 \times n^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 1\right)$

$n = 20$ için 0,05 anlamlılık düzeyinde kritik değer,

$$Gif\left(0,5797 \times n^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 1\right) = Gif\left(0,5797 \times 20^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 1\right) = Gif(52,8499) = 52$$

olarak elde edilir.

n ' in 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 ve 100 değerleri için bu formüllerden hesaplanan A_c^* kritik değerleri Çizelge 3.9' da verilmiştir.

Çizelge 3.9. α anlamlılık düzeylerinde kritik değer formüllerinden hesaplanan A_c^* kritik değerleri

α Düzeyleri	n 'in Değerleri								
	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,20	37	68	104	145	190	240	293	349	409
0,10	45	82	127	177	232	292	357	426	499
0,05	52	96	147	205	270	340	415	495	580
0,01	67	123	190	265	348	438	535	639	748

Çizelge 3.6 ile Çizelge 3.9 karşılaştırıldığında, örneğin $n = 20$ ve $\alpha = 0,20$ için kritik değerler her iki çizelgede de 37' dir. Buradan simülasyonla hesaplanan kritik değerlerin iyi tahminler olduğu görülmektedir [Damico, 2004].

3.3. A İstatistiği İçin Güç Karşılaştırması

Stephens (1974) uyum iyiliği için bazı testlerin güç karşılaştırmasını yapmıştır. Bu karşılaştırmalar için yokluk hipotezi

H_0 : n hacimli örnek $(0,1)$ aralığında Düzgün (Tekdüze) Dağılımdan gelmiştir.

olarak alınmıştır ve aşağıdaki gibi tanımlanan 7 alternatif dağılım çalışmaya alınmıştır. [Damico, 2004].

$$F : F(x) = 1 - (1 - z)^k \quad ; \quad 0 \leq z \leq 1 \quad , \quad k = 1,5; 2$$

$$G : F(x) = 2^{(k-1)} z^k \quad ; \quad 0 \leq z \leq 0.5$$

$$F(x) = 1 - 2^{(k-1)} (1 - z)^k \quad ; \quad 0.5 \leq z \leq 1 \quad , \quad k = 1,5; 2; 3$$

$$H : F(x) = 0.5 - 2^{(k-1)} (0.5 - z)^k \quad ; \quad 0 \leq z \leq 0.5$$

$$F(x) = 0.5 + 2^{(k-1)} (z - 0.5)^k \quad ; \quad 0.5 \leq z \leq 1 \quad , \quad k = 1,5; 2$$

Örnek hacmi n 10, 20, 40 ve anlamlılık düzeyi 0,10 alınarak, Stephens (1974)' in Kolmogorov-Smirnov D_n , Kuiper V , Watson U^2 , Cramer von Misses W^2 Anderson-Darling D , $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$ ve Ki-Kare testlerinin güç karşılaştırması sonuçları Çizelge 3.10' da verilmiştir.

Çizelge 3.10. Kolmogorov-Smirnov D_n , Kuiper V , Watson U_n^2 ,
Cramer von Misses W^2 , Anderson-Darling D ,
 $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$ ve Ki-Kare testlerinin güç karşılaştırması
sonuçları

Alternatif	D_n	W^2	V	U^2	D	Q	Ki-Kare
$(n=10, \alpha=0,10)$							
$F_k=1.5$	0,23	0,27	0,18	0,19	0,24	0,43	-
$F_k=2.0$	0,54	0,60	0,35	0,35	0,58	-	-
$G_k=1.5$	0,09	0,07	0,22	0,23	0,06	-	-
$G_k=2.0$	0,09	0,07	0,40	0,44	0,06	-	-
$G_k=3.0$	0,21	0,21	0,81	0,86	0,18	-	-
$H_k=1.5$	-	-	-	-	-	-	-
$H_k=2.0$	-	-	-	-	-	-	-
$(n=20, \alpha=0,10)$							
$F_k=1.5$	0,38	0,46	0,25	0,28	0,46	0,68	-
$F_k=2.0$	0,78	0,87	0,61	0,60	0,87	0,97	0,59
$G_k=1.5$	0,13	0,11	0,32	0,34	0,10	0,11	-
$G_k=2.0$	0,25	0,25	0,71	0,77	0,28	0,25	-
$G_k=3.0$	0,63	0,79	0,99	0,99	0,84	-	-
$H_k=1.5$	0,25	0,20	0,36	0,37	0,28	-	-
$H_k=2.0$	0,47	0,44	0,71	0,77	0,54	-	-
$(n=40, \alpha=0,10)$							
$F_k=1.5$	0,60	0,70	0,43	0,43	-	0,89	0,40
$F_k=2.0$	0,98	0,99	0,91	0,89	-	1,00	0,89
$G_k=1.5$	0,19	0,22	0,57	0,61	-	-	0,39
$G_k=2.0$	0,56	0,72	0,96	0,98	-	-	0,85
$G_k=3.0$	-	-	-	-	-	-	-
$H_k=1.5$	0,36	0,32	0,58	0,63	-	-	-
$H_k=2.0$	0,71	0,80	0,96	0,98	-	-	-

Bu 7 durumda da Damico (2004)' nun A istatistiğinin gücü hesaplanmıştır. A istatistiğinin gücü Kolmogorov-Smirnov D_n istatistiği ile çok uygunluk göstermiştir.

Çizelge 3.10' a Damico (2004) simülasyon yöntemiyle hesapladığı A istatistiğinin gücünü gösteren bir sütun ekleyerek Çizelge 3.11' i

oluşturmuştur (Örnek hacmi $n=10, 20, 40$ 'a eşit alınmış, α anlamlılık düzeyi 0,10 seçilmiştir.).

Çizelge 3.11. Kolmogorov-Smirnov D_n , Kuiper V , Watson U_n^2 ,
Cramer von Misses W^2 , Anderson-Darling D ,
 $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$, Ki-Kare testleri ile Damico (2004)' nun A
testinin güç karşılaştırması sonuçları

Alternatif	D_n	W^2	V	U^2	D	Q	Ki-Kare	A
($n=10, \alpha=0,10$)								
$F_k=1.5$	0,23	0,27	0,18	0,19	0,24	0,43	-	0,27
$F_k=2.0$	0,54	0,60	0,35	0,35	0,58	-	-	0,58
$G_k=1.5$	0,09	0,07	0,22	0,23	0,06	-	-	0,07
$G_k=2.0$	0,09	0,07	0,40	0,44	0,06	-	-	0,10
$G_k=3.0$	0,21	0,21	0,81	0,86	0,18	-	-	0,29
$H_k=1.5$	-	-	-	-	-	-	-	0,14
$H_k=2.0$	-	-	-	-	-	-	-	0,21
($n=20, \alpha=0,10$)								
$F_k=1.5$	0,38	0,46	0,25	0,28	0,46	0,68	-	0,46
$F_k=2.0$	0,78	0,87	0,61	0,60	0,87	0,97	0,59	0,88
$G_k=1.5$	0,13	0,11	0,32	0,34	0,10	0,11	-	0,10
$G_k=2.0$	0,25	0,25	0,71	0,77	0,28	0,25	-	0,29
$G_k=3.0$	0,63	0,79	0,99	0,99	0,84	-	-	0,83
$H_k=1.5$	0,25	0,20	0,36	0,37	0,28	-	-	0,17
$H_k=2.0$	0,47	0,44	0,71	0,77	0,54	-	-	0,36
($n=40, \alpha=0,10$)								
$F_k=1.5$	0,60	0,70	0,43	0,43	-	0,89	0,40	0,73
$F_k=2.0$	0,98	0,99	0,91	0,89	-	1,00	0,89	0,99
$G_k=1.5$	0,19	0,22	0,57	0,61	-	-	0,39	0,23
$G_k=2.0$	0,56	0,72	0,96	0,98	-	-	0,85	0,75
$G_k=3.0$	-	-	-	-	-	-	-	1,00
$H_k=1.5$	0,36	0,32	0,58	0,63	-	-	-	0,27
$H_k=2.0$	0,71	0,80	0,96	0,98	-	-	-	0,75

$n=10$ ve $G_k=3,0$ için A istatistiğinin gücü 0,29' dur. Kuiper' ın V istatistiği (0,81) ve Watson' ın U^2 istatistiği (0,86) hariç diğer testlerin güçleri A istatistiğinin gücünden düşüktür.

$n = 20$ ve $F_k = 2,0$ için A istatistiğinin gücü 0,88' dir. Burada $Q \left(= \sum_i \ln Z_i \right)$ (0,97) istatistiğinin gücü hariç diğer testlerin güçleri A istatistiğinin gücünden düşüktür.

$n = 40$ ve $H_k = 1,5$ için A istatistiğinin gücü 0,27' dir. Burada A istatistiğinin gücü diğer testlerin gücünden düşüktür.

3.4. A İstatistiğinin İki Bağımsız Örnek İçin Tanımı

Bölüm 3.1' de A istatistiğinin tanımı verilmişti ve bu tanımın aşağıdaki gibi iki-örnek probleminde test için kolayca genişletilebileceği ifade edilmişti.

X_i , $i = 1, 2, \dots, m$, bir P_x yığınınından gözlemleri gösterebilir ve $F_X(x)$ birikimli dağılım fonksiyonu olsun. Y_j , $j = 1, 2, \dots, n$ de P_y yığınınından gözlemleri gösterebilir ve $G_Y(y)$ birikimli dağılım fonksiyonu olsun. Alternatif hipotez " $F_X(x) \neq G_Y(y)$ " ye karşı yokluk hipotezi " $F_X(x) = G_Y(y)$ " test edilmek istensin. $m \leq n$ kabul edilsin. t_k , $k = 1, 2, \dots, (m + n)$ olmak üzere birleştirilmiş örnekten sıralı istatistikleri gösterebilir. Birleştirilmiş örnekte X_i 'nin sıra sayılarını ($X_{(i)}$ 'leri) kullanarak iki-örnek istatistiği A_2 oluşturulur [Damico, 2004].

$$A_2 = \sum_{i=1}^m \left| Gif \left((X_{(i)}) * (m / (m + n + 1)) + 1 \right) - i \right| \quad (3.2)$$

Örnek : X yığınınından 4 çaplı bir örnek ve Y yığınınından da 6 çaplı bir örneğin olduğu kabul edilsin [Damico, 2004].

Çizelge 3.12. X yığınınından 4 ve Y yığınınından da 6 çaplı örnekler için gözlem değerleri ve r sıra sayıları

X	r	Y	r
0,089	1	0,134	4
0,097	2	0,678	6
0,125	3	0,714	7
0,498	5	0,834	8
		0,912	9
		0,934	10

$$Gif((1) \times (4/11) + 1) = 1 \quad : \quad |1 - 1| = 0$$

$$Gif((2) \times (4/11) + 1) = 1 \quad : \quad |1 - 2| = 1$$

$$Gif((3) \times (4/11) + 1) = 2 \quad : \quad |2 - 3| = 1$$

$$Gif((5) \times (4/11) + 1) = 2 \quad : \quad |2 - 4| = 2$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla A_2 istatistiğinin değeri 4 olur. Yokluk hipotezi altında, A_2 istatistiğinin 4 değerine eşit ya da daha büyük olması olasılığı Çizelge 3.4' den 0,0286 bulunur. Böylece yokluk hipotezi red edilecektir. İki-örnek test istatistiği için kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir ($m = 4, n = 6$).

Çizelge 3.13. İki-örnek test istatistiği için birikimli dağılım fonksiyonu

A_2^* Değeri	0	1	2	3	4
$P(A_2 \geq A_2^*)$	0.1714	0.3429	0.3238	0.1333	0.0286

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Çalışmanın bu bölümünde Damico (2004)' nun A Testi ile ikinci bölümde açıklanan testlerden bazılarının gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları bakımından karşılaştırması yapılmıştır. Bu amaçla yapılan simülasyon çalışması için Matlab7.0 paket programı kullanılmıştır.

Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarının karşılaştırmaları için yokluk hipotezleri,

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,1)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,5)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,10)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,20)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,30)$ dağılımdan gelmiştir.

olarak alınmıştır.

Örnek hacmi olarak $n = 5(5)50(10)100$ ve anlamlılık düzeyi olarak $\alpha = 0,05$ alınmıştır.

Her test için gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranını bulmak amacıyla verilen n değerleri için örnek seçme işlemi 10000 defa tekrarlanarak, $\alpha = 0,05$ iken, red sayısı bulunmuş, bu sayı 10000' e bölünmüştür. Bu yolla bulunan gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları Çizelge 4.1' de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları

		Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 5$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0052	0,0059	0,0048	0,0045
0	5	0,0055	0,0258	0,0126	0,0036
0	10	0,0055	0,0142	0,0063	0,0039
0	20	0,0056	0,0152	0,0098	0,0045
0	30	0,0064	0,0322	0,0161	0,0042
$n = 10$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0197	0,0243	0,0195	0,0128
0	5	0,0148	0,0733	0,0358	0,0102
0	10	0,0158	0,0404	0,0180	0,0110
0	20	0,0158	0,0431	0,0237	0,0128
0	30	0,0183	0,0917	0,0459	0,0119
$n = 15$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0344	0,0537	0,0273	0,0326
0	5	0,0377	0,1867	0,0911	0,0261
0	10	0,0401	0,1028	0,0458	0,0279
0	20	0,0403	0,1099	0,0849	0,0326
0	30	0,0467	0,2334	0,1169	0,0303
$n = 20$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0462	0,1219	0,0772	0,0368
0	5	0,0425	0,2108	0,1028	0,0294
0	10	0,0453	0,1160	0,0517	0,0315
0	20	0,0455	0,1240	0,0954	0,0368
0	30	0,0527	0,2635	0,1320	0,0342

Çizelge 4.1. (Devam) $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları

		Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 25$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0539	0,1288	0,0810	0,0405
0	5	0,0468	0,2320	0,1132	0,0324
0	10	0,0498	0,1277	0,0669	0,0347
0	20	0,0501	0,1365	0,1033	0,0405
0	30	0,0580	0,2900	0,1452	0,0377
$n = 30$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0641	0,1642	0,1297	0,0542
0	5	0,0627	0,3107	0,1516	0,0434
0	10	0,0667	0,1710	0,0962	0,0464
0	20	0,0671	0,1828	0,1280	0,0542
0	30	0,0777	0,3884	0,1945	0,0504
$n = 35$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0680	0,2080	0,1924	0,0638
0	5	0,0738	0,3657	0,1784	0,0511
0	10	0,0786	0,2013	0,1196	0,0546
0	20	0,0789	0,2152	0,1383	0,0638
0	30	0,0915	0,4571	0,2289	0,0594
$n = 40$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0714	0,2235	0,2025	0,0654
0	5	0,0756	0,3749	0,1829	0,0523
0	10	0,0805	0,2063	0,1519	0,0560
0	20	0,0809	0,2206	0,1709	0,0654
0	30	0,0938	0,4686	0,2347	0,0609

Çizelge 4.1. (Devam) $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları

		Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 45$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0717	0,2560	0,2401	0,0720
0	5	0,0832	0,4127	0,2013	0,0576
0	10	0,0886	0,2271	0,1612	0,0617
0	20	0,0891	0,2428	0,1927	0,0720
0	30	0,1032	0,5158	0,2583	0,0670
$n = 50$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0721	0,3036	0,2742	0,0736
0	5	0,0851	0,4218	0,2058	0,0589
0	10	0,0906	0,2321	0,1824	0,0630
0	20	0,0911	0,2482	0,2146	0,0736
0	30	0,1055	0,5273	0,2641	0,0685
$n = 60$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0741	0,3140	0,2943	0,0824
0	5	0,0952	0,4720	0,2302	0,0659
0	10	0,1014	0,2598	0,1969	0,0705
0	20	0,1019	0,2777	0,2265	0,0824
0	30	0,1181	0,5900	0,2955	0,0766
$n = 70$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0814	0,3629	0,3184	0,0848
0	5	0,0980	0,4858	0,2370	0,0678
0	10	0,1043	0,2673	0,2013	0,0726
0	20	0,1049	0,2858	0,2484	0,0848
0	30	0,1215	0,6072	0,3041	0,0789

Çizelge 4.1. (Devam) $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları

		Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 80$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0819	0,3830	0,3345	0,0900
0	5	0,1040	0,5154	0,2514	0,0720
0	10	0,1107	0,2837	0,2257	0,0770
0	20	0,1113	0,3033	0,2603	0,0900
0	30	0,1289	0,6443	0,3227	0,0837
$n = 90$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0777	0,4087	0,3446	0,0947
0	5	0,1094	0,5424	0,2646	0,0757
0	10	0,1165	0,2985	0,2392	0,0810
0	20	0,1171	0,3191	0,2821	0,0947
0	30	0,1357	0,6780	0,3395	0,0881
$n = 100$					
Örneklerin Seçildiği Normal Dağılımın Parametreleri					
μ	σ^2				
0	1	0,0835	0,4174	0,3647	0,0994
0	5	0,1149	0,5693	0,2777	0,0795
0	10	0,1223	0,3133	0,2446	0,0851
0	20	0,1229	0,3350	0,3040	0,0994
0	30	0,1424	0,7116	0,3564	0,0924

Çizelge 4.1 incelendiğinde, bütün dağılımlarda örnek hacmi arttıkça gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarının da arttığı görülmektedir.

Küçük örnek hacimlerinde Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors testlerinin anlamlılık düzeylerini koruyabildiği, ancak örnek hacmi arttıkça gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarının da giderek yükseldiği

gözlenmiştir. Bunun yanı sıra, örnek hacmi arttıkça Damico' nun A testi ve Ki-Kare testleri gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarını korumuşlardır.

Bütün Normal dağılımlarda varyans arttıkça gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları da artmakta olup, sadece çok küçük olmayan örnek hacimlerinde Damico' nun A testi ve Ki-Kare testlerinde gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları korunabilmiştir. Varyansın artışı Damico' nun A testi ve Ki-Kare testlerinde gözlenen gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarında çok fazla bir farklılaşma yaratmamışken, Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors testlerinde farklılaşmalar gözlenmiştir.

Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors testleri sadece küçük örnek hacimlerinde gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarını korumuş olmakla birlikte, Lilliefors testinde örnek hacmi arttıkça Kolmogorov-Smirnov testine göre daha düşük gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları gözlenmiştir.

Damico' nun A testi ve Ki-Kare testleri hem çok küçük hem de büyük örnek hacimlerinde gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarını koruyamamışken $n = 25,30$ örnek hacimlerinde Ki-Kare testi ve $n = 30,35,40$ örnek hacimlerinde Damico' nun A testi gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarını korumuşlardır.

Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının karşılaştırmaları için yokluk hipotezi,

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,1)$ dağılımdan gelmiştir.

olarak alınmıştır.

Örnek hacmi olarak $n = 5(5)50(10)100$ ve anlamlılık düzeyi olarak $\alpha = 0,05$ alınmıştır.

Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranını bulmak amacıyla Tekdüze(0,1) dağılım, Üstel(1) dağılım, $t(3)$ dağılımı ve Ki-Kare(2) dağılımından n değerleri için örnek seçme işlemi 10000 defa tekrarlanarak, $\alpha = 0,05$ iken, red sayısı bulunmuş, bu sayı 10000' e bölünmüştür. Bu yolla bulunan gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları Çizelge 4.2' de verilmiştir.

Çizelge 4.2. $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare,

Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları

	Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 5$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,1380	0,0142	0,0527	0,1105
Üstel(1)	0,1126	0,2245	0,1407	0,3057
t(3)	0,0183	0,2674	0,2639	0,3364
Ki-Kare(2)	0,0077	0,2958	0,2633	0,2967
$n = 10$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,2172	0,0232	0,0684	0,2459
Üstel(1)	0,1965	0,2674	0,2814	0,3493
t(3)	0,0443	0,3108	0,2818	0,3457
Ki-Kare(2)	0,0892	0,3550	0,2857	0,3705
$n = 15$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,2616	0,0353	0,0796	0,2961
Üstel(1)	0,2940	0,2918	0,2591	0,3954
t(3)	0,0670	0,3331	0,2993	0,3921
Ki-Kare(2)	0,1912	0,4174	0,3508	0,4367
$n = 20$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,2992	0,0454	0,0847	0,3289
Üstel(1)	0,3804	0,3443	0,2725	0,4285
t(3)	0,0904	0,4187	0,3134	0,4229
Ki-Kare(2)	0,2770	0,4248	0,3571	0,4538
$n = 25$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,3291	0,0560	0,1005	0,3502
Üstel(1)	0,4704	0,3458	0,2951	0,4863
t(3)	0,1309	0,4295	0,3251	0,4461
Ki-Kare(2)	0,3628	0,4298	0,3592	0,4691

Çizelge 4.2. (Devam) $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları

	Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 30$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,3510	0,0667	0,1124	0,3714
Üstel(1)	0,5617	0,3597	0,3090	0,5821
t(3)	0,1671	0,4530	0,3509	0,4776
Ki-Kare(2)	0,4190	0,4443	0,3693	0,4834
$n = 35$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,3941	0,0785	0,1377	0,3954
Üstel(1)	0,6409	0,4620	0,3148	0,6582
t(3)	0,2097	0,4751	0,3663	0,5073
Ki-Kare(2)	0,4678	0,4453	0,3739	0,4882
$n = 40$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,4306	0,0888	0,1481	0,4528
Üstel(1)	0,7170	0,4784	0,3330	0,7334
t(3)	0,2495	0,4874	0,3804	0,5369
Ki-Kare(2)	0,5260	0,4524	0,3883	0,5306
$n = 45$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,4524	0,0997	0,1734	0,4739
Üstel(1)	0,7687	0,4943	0,3555	0,7957
t(3)	0,2966	0,5264	0,4042	0,5666
Ki-Kare(2)	0,5703	0,4739	0,4131	0,5894
$n = 50$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,4793	0,1107	0,1759	0,5192
Üstel(1)	0,8243	0,5025	0,3635	0,8664
t(3)	0,3484	0,5387	0,4082	0,5963
Ki-Kare(2)	0,6155	0,4757	0,4179	0,6236

Çizelge 4.2. (Devam) $\alpha = 0,05$ ve $n = 5(5)50(10)100$ iken 10000 tekrarda, Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico' nun A testi için, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları

	Ki-Kare	Kolmogorov Smirnov	Lilliefors	Damico
$n = 60$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,5446	0,1408	0,1997	0,5585
Üstel(1)	0,9006	0,5194	0,3817	0,9154
t(3)	0,4510	0,5410	0,4121	0,6259
Ki-Kare(2)	0,6852	0,4980	0,4226	0,6923
$n = 70$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,5902	0,1709	0,2358	0,5977
Üstel(1)	0,9455	0,5970	0,4169	0,9506
t(3)	0,5424	0,5932	0,4603	0,6556
Ki-Kare(2)	0,7300	0,5291	0,4472	0,6915
$n = 80$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,6395	0,2010	0,2504	0,6854
Üstel(1)	0,9756	0,6296	0,4373	0,9776
t(3)	0,6340	0,6255	0,4834	0,6852
Ki-Kare(2)	0,7798	0,5403	0,4722	0,7245
$n = 90$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,6881	0,2311	0,2715	0,7006
Üstel(1)	0,9875	0,6473	0,4977	0,9903
t(3)	0,7281	0,6377	0,5086	0,7288
Ki-Kare(2)	0,8093	0,5868	0,4939	0,7574
$n = 100$				
Örneklerin Seçildiği Dağılımın Parametreleri				
Tekdüze(0,1)	0,7326	0,2612	0,3152	0,7629
Üstel(1)	0,9945	0,6818	0,5226	0,9952
t(3)	0,7934	0,6703	0,5453	0,8003
Ki-Kare(2)	0,8338	0,6135	0,5237	0,7903

Tekdüze dağılımdan çekilen örneklerde, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları yükselmektedir.

Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico testlerinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları karşılaştırıldığında; Damico' nun A testinin Ki-Kare testi ile gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının yakın olduğu, ayrıca diğer testlerde gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının örnek hacmi arttıkça arttığı, fakat yine de Ki-Kare ve Damico' nun A testinin diğerlerinden daha yüksek gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları verdiği gözlenmiştir.

Üstel dağılımdan çekilen örneklerde, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları yükselmektedir.

Üstel dağılımda Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico testlerinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları karşılaştırıldığında; Damico' nun A testi küçük örnek hacimlerinde diğer testlerden daha yüksek gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları verirken, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları da giderek yükselmiş olup, Ki-Kare testinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları Damico' nun A testinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları yaklaşmıştır. $n = 5, 10$ ' de Kolmogorov-Smirnov testinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları Ki-Kare testinden yüksek iken, örnek hacmi arttıkça daha küçük gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları vermeye başlamıştır. Ayrıca, Lilliefors testinin diğer dağılımlardan küçük gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları verdiği gözlenmiştir.

$t(3)$ dağılımdan çekilen örneklerde, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları yükselmektedir.

$t(3)$ dağılımda Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico testlerinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları karşılaştırıldığında; Damico' nun A testinin gücünün diğer testlerin güçlerinden daha yüksek olduğu gözlenmiş olup, diğer testler kendi içlerinde karşılaştırıldığında, Lilliefors ve Kolmogorov-Smirnov testlerinin, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları $n = 5(5)50(10)70$ için Ki-Kare testinden yüksek çıkmıştır. Bununla beraber $t(3)$ dağılımında, Kolmogorov-Smirnov testi Lilliefors testinden gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları bakımından daha iyi sonuçlar vermiştir.

Ki-Kare(2) dağılımdan çekilen örneklerde, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları yükselmektedir.

Ki-Kare(2) dağılımda Ki-Kare, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors ve Damico testlerinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları karşılaştırıldığında; Damico' nun A testinin küçük örnek hacimlerinde diğer testlerden daha yüksek olduğu gözlenmiş olup, örnek hacmi arttıkça Ki-Kare testinin, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları, Damico' nun A testinden daha yüksek çıkmıştır. Diğer testler kendi içlerinde karşılaştırılırsa, Ki-Kare testinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları, $n = 5(5)20$ için Lilliefors ve Kolmogorov-Smirnov testlerinden düşük iken, örnek hacmi arttıkça Ki-Kare testinin, gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları da her iki testten de yüksek çıkmıştır.

Lilliefors ve Kolmogorov-Smirnov testlerinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları karşılaştırıldığında; Tekdüze dağılımda Lilliefors testi Kolmogorov-Smirnov testinden daha iyi gerçekte yanlış olan H_0

hipotezini red etme oranları verirken, diğer dağılımlarda güç bakımından Kolmogorov-Smirnov testinden düşük olduğu gözlenmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Ki-Kare Uyum İyiliği Testi, Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi, Lilliefors Uyum İyiliği Testi ve Uyum İyiliği için Damico' nun A Testi üzerinde durulmuştur.

Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranlarının karşılaştırmaları için yokluk hipotezleri,

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,1)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,5)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,10)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,20)$ dağılımdan gelmiştir.

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,30)$ dağılımdan gelmiştir.

olarak alınmıştır.

Matlab7.0 paket programında, örnek hacimleri $n = 5(5)50(10)100$ için, Normal(0,1) dağılım, Normal(0,5) dağılım, Normal(0,10) dağılım, Normal(0,15) dağılım, Normal(0,20) dağılım ve Normal(0,30) dağılımından örnek seçme işlemi 10000 defa tekrarlanarak $\alpha = 0,05$ iken Ki-Kare testi, Kolmogorov-Smirnov testi, Lilliefors testi ve Damico' nun A testlerinin her biri için gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları bulunmuştur.

Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları bakımından Çizelge 4.1 incelendiğinde, Kolmogorov-Smirnov ve Lilliefors testleri küçük örnek hacimleri durumu hariç $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyine yaklaşamamışlardır.

Ancak, örnek hacmi artarken Kolmogorov-Smirnov testi Lilliefors testinden daha önce $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyine ulaşmıştır. Küçük örnek hacmi durumunda Damico' nun A testi ve Ki-Kare testinin gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları birbirine yakın çıkmışken, Ki-Kare testi Damico' nun A testinden daha önce $0,05'$ e ulaşmıştır. Örnek hacmi artıkça bütün testlerin gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları $0,05'$ ten yüksek çıkmıştır.

Örnek hacmi artıkça bütün testlerin gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları $0,05'$ ten yüksek çıkmıştır. Ancak, hem örnek hacmi hem de varyans artarken Damico' nun A testinin gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme oranları diğer testlere göre daha düşük seyrettiği gözlenmiştir.

Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının karşılaştırmaları için yokluk hipotezi,

$H_0 : n$ hacimli örnek $X \sim N(0,1)$ dağılımdan gelmiştir.

olarak alınmıştır.

Matlab7.0 paket programında türetilen, örnek hacimleri $n = 5(5)50(10)100$ için Tekdüze(0,1) dağılım, Üstel(1) dağılım, $t(3)$ dağılımı ve Ki-Kare(2) dağılımdan örnek seçme işlemi 10000 defa tekrarlanarak $\alpha = 0,05$ iken Ki-Kare testi, Kolmogorov-Smirnov testi, Lilliefors testi ve Damico' nun A testlerinin her biri için gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları bulunmuştur.

Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları bakımından Çizelge 4.2 incelendiğinde,

Ki-Kare testi, $t(3)$ dağılımı ve Ki-Kare(2) dağılımında, küçük örnek hacimlerinde gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranı bakımından iyi sonuçlar vermezken, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları yükselmiştir. Tekdüze(0,1) dağılımı ve Üstel(1) dağılımında ise diğer dağılımlara göre gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları daha yüksek çıkmıştır. Dolayısıyla, Ki-Kare(2) ve $t(3)$ dağılımında, küçük örnek hacimleri durumunda ve Ki-Kare(2) dağılımından, büyük örnek hacimleri durumunda diğer testlerin yerine Ki-Kare testinin kullanılmasının uygun olacağı söylenebilir.

Kolmogorov-Smirnov testi, $t(3)$ dağılımı ve Ki-Kare(2) dağılımında, küçük örnek hacimleri durumunda gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları bakımından iyi sonuçlar verirken, özellikle Tekdüze(0,1) dağılımında bu oranlar düşük gözlenmiştir. Dolayısıyla, Ki-Kare(2) ve $t(3)$ dağılımında, küçük örnek hacimleri durumunda Kolmogorov-Smirnov testinin kullanılabileceği söylenebilir.

Lilliefors testi, $t(3)$ dağılımı ve Ki-Kare(2) dağılımında gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları bakımından iyi sonuçlar vermiş, ancak örnek hacmi arttıkça diğer testlere göre bu oranların düştüğü gözlenmiştir. Özellikle Tekdüze(0,1) dağılım ve Üstel(1) dağılımda gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları oldukça düşük çıkmıştır. Dolayısıyla, Lilliefors testi gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının en yüksekini $t(3)$ dağılımında verdiği için diğer dağılımlar yerine $t(3)$ dağılımında bu testin kullanılmasının uygun olacağı söylenebilir.

Kolmogorov-Smirnov testi ile Lilliefors testi karşılaştırıldığında her iki testte de Tekdüze(0,1) dağılım ve Üstel(1) dağılımında gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının düşük olduğu ve Kolmogorov-Smirnov testinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranlarının Lilliefors testinden

daha yüksek olduğu gözlenmiştir. Bu durumda, bu simülasyon çalışmasında kullanılan dağılımlar için Lilliefors testi yerine Kolmogorov-Smirnov testinin kullanılması uygun değerlendirilmiştir.

Damico' nun A testinin Tekdüze(0,1) dağılım, Üstel(1) dağılım, $t(3)$ dağılımı ve Ki-Kare dağılımı için gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları oldukça yüksek çıkmış olup, örnek hacmi arttıkça gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları özellikle Üstel(1) dağılım için 1,000' e yaklaşmıştır.

Sonuç olarak, Damico' nun A testinin gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme oranları, sadece Ki-Kare testinde büyük örnek hacimleri durumu hariç, diğer testlerden biraz daha yüksek gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

Birnbaum, Z.W., (Eylül), "Numerical Tabulation of The Distribution of Kolmogorov's Statistic for Finite Sample Size", **JASA**, vol. 47 : 425-441 (1952).

Chernoff, H. Ve Lehmann, E.L., "The Use of Maximum Likelihood Estimates in χ^2 Tests for Goodness of Fit", **The Annals of Mathematical Statistics**, 25 : 579-586 (1954).

D'Agostino, R.B., (Nisan), "Small Sample Probability Points for The D Test of Normality", **Biometrika**, vol. 59 : 219-221 (1972).

Damico J., "A New One-Sample Test For Goodness-Of-Fit", **Communications In Statistics Theory And Methods**, vol. 33, 1: 181-193 (2004).

David, F.N. ve Johnson, N.L., "The Probability Integral Transformation When Parameters Are Estimated From The Sample", **Biometrika** , vol. 35 : 182-190 (1948).

Downton, F., "Linear Estimates with Polynomial Coefficient", **Biometrika**, 53 : 129-141 (1966).

Gibbons, J.D. ve Chakraborti, S., "Nonparametric Statistical Inference 4th ed", **Marcel Dekker, New York**, 104-133 (1985).

Johnson, N.L., Nixon, E., Amos, D.E. ve Pearson, E.S., "Table of Percentage Points of Pearson Curves, for Given $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 , Expressed in Standard Measure", **Biometrika**, vol. 50 : 459-498 (1963).

Kac, M., Kiefer, J. ve Wolfowitz, J., "On Tests of Normality and Other Tests of Goodness of Fit Based on Distance Methods", **The Annals of Mathematical Statistics**, vol. 26 : 189-211 (1955).

Lilliefors, H.W., (Haziran), "On The Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown", **JASA**, 399-402 (1967).

Massey, F.J., "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit", **JASA**, vol. 46 : 68-78 (1951).

Matlab 7.0 Paket Programı, **Bilkent Üniversitesi Kütüphanesi**.

Stephens, M.A., "EDF Statistics For Goodness-Of-Fit And Some Comparisons (In theory and methods)", **JASA**, Theory and Methods Section September, vol. 69 (347) : 730-737 (1974).

Stephens, M.A., "The Distribution of The Goodness of Fit Statistic, U_n^2 -I", ***Biometrika***, vol. 50, 2-3: 303-313 (1963).

Stephens, M.A., "The Distribution of The Goodness of Fit Statistic, U_n^2 -II", ***Biometrika***, vol. 51, 3-4: 393-397 (1964).

Watson, G.S., "Goodness of Fit Tests On a Circle-I", ***Biometrika***, 48, 109-114 (1961).

Watson, G.S., "Goodness of Fit Tests On a Circle-II", ***Biometrika***, vol. 49, 57-63 (1962).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : OKATAN, Burçin Gonca
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 22.03.1983 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 438 10 81
 e-mail : burcin.gonca@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üni./İstatistik Bölümü	2004
Lise	Çankaya Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005	Tadımsan/Yurt Gıda A.Ş.	Halkla iliş. Departmanı
2006-20..	Jandarma Genel K.lığı	İstk Uzm./Uzm.Svl.Me.

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Patchwork, Kitap okumak, Doğa yürüşleri, Latin dansları.