

**UYUMLU KESİRLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN NONLİNEER
ÇÖZÜMLERİ**

Sara BADUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı



T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYUMLU KESİRLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN NONLİNEER ÇÖZÜMLERİ

Sara BADUR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2018
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Sara BADUR tarafından hazırlanan “UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NONLİNEER ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışması 07/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Mustafa AVCI

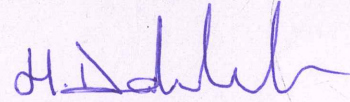
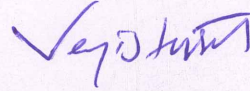
Danışman

Dr.Öğr. Üyesi Veyis TURUT

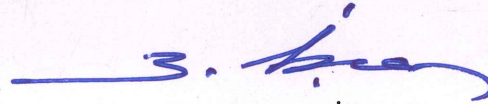
Üye

Dr.Öğr. Üyesi Hasan DALMAN

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.



Doç. Dr. Bahattin İŞCAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Sara BADUR

07.06.2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYUMLU KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN NONLİNEER ÇÖZÜMLERİ

Sara BADUR

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

2018, 72 Sayfa

Jüri

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Doç. Dr. Mustafa AVCİ

Dr. Öğr. Üyesi Hasan DALMAN

Bu tezde, son zamanlarda uyumlu kesirli diferensiyel denklemler olarak adlandırılan kesirli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri ele alınmıştır. Padé yaklaşımının etkinliği nümerik olarak, uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu ile elde edilen seri çözümler üzerinde incelenmiştir. Uyumlu kesirli diferensiyel denklemlerin kesin çözümleri ve bu denklemlerin uyumlu diferensiyel dönüşüm metoduyla elde edilen seri çözümleri ile seri çözümlere ait Padé yaklaşımından elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak Padé yaklaşımının daha etkili bir yaklaşım olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev, Padé Yaklaşımı, Uyumlu Kesirli Diferensiyel Denklem, Uyumlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu.

ABSTRACT

MS THESIS

**NONLINEAR SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL
DIFFERENTIAL EQUATION**

Sara BADUR

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT
2018, 72 Pages**

**Jury
Advisor : Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT
Assoc. Prof. Dr. Mustafa AVCİ
Asst. Prof. Dr. Hasan DALMAN**

In this thesis, numerical solutions of fractional differential equations which are recently called conformable fractional differential equations have been discussed. The effectiveness of the Padé approximation has been investigated on serial solutions obtained by conformable fractional differential transformation method. The exact solutions of conformable fractional differential equations and the series solutions of this equations obtained by the conformable differential transformation method and the Padé approximation of the series solutions are compared with each other. In conclusion, the Padé approximation is found more effective approximation.

Keywords: Conformable Fractional Differential Equation, Conformable Differential Transformation Method, Fractional Derivative, Padé Approximation.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve yürütülmesinde değerli görüşlerinden faydalandığım, tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan beni yönlendiren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yaşamımın her aşamasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı ağabeyim Sıraç BADUR'a, çalışmalarımda bana yol gösteren ağabeyim İsa BADUR' a, her zaman yanımda olan sevgili kardeşim Gülistan BADUR'a ve aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Sara BADUR
BATMAN-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER TABLOSU	ix
ÇİZELGE TABLOSU	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1 Ön Bilgiler.....	3
2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller.....	6
2.2.1 Gama Fonksiyonu	6
2.2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevleri ve Kesirli İntegralleri.....	7
2.2.3 Caputo Kesirli Türevleri	8
3. BİR BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ.....	9
4. TEK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMI.....	11
4.1 Padé Yaklaşımının Hesaplanması	14
4.2 Padé Tablosu	15
5. UYUMLU KESİRLİ HESAP	17
5.1 Uyumlu Kesirli Fonksiyonlar İçin Rolle Teoremi	23
5.2 Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi...	24
5.3 Uyumlu Kesirli İntegral	25
5.4 Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (UKDDM)	26
6. UYGULAMALAR.....	32
6.1 Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (UKDDM) ve Padé Yaklaşımı	32
7. SONUÇ	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	72

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Kısaltmalar

DDM	Diferensiyel Dönüşüm Metodu
UKADD	Uyumlu Kesirli Adi Diferensiyel Denklem
UKDD	Uyumlu Kesirli Diferensiyel Denklem
UDDM	Uyumlu Diferensiyel Dönüşüm Metodu
UKDDM	Uyumlu Kesirli Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçek Sayılar Kümesi
T_α	: α – mertebeden Uyumlu Kesirli Türev
T_α^a	: α – mertebeden Sol Uyumlu Kesirli Türev
${}^bT_\alpha$	: α – mertebeden Sağ Uyumlu Kesirli Türev
I_α^a	: α – mertebeden Sol Uyumlu Kesirli İntegral
${}^bI_\alpha$	: α – mertebeden Sağ Uyumlu Kesirli İntegral
$F_\alpha(k)$	: f fonksiyonunun Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşümü
$r_{m,n}(t)$	: (m, n) dereceli Padé Yaklaşımı
$[m,n]$	: (m, n) dereceli Padé Yaklaşımı

ŞEKİLLER TABLOSU

Şekil 4.1 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ fonksiyonu, $P_4(x)$ Kuvvet serisi ve $r_{3,1}(x)$ Padé yaklaşımı.....	16
Şekil 6.1 $y(t)$ Kesin çözümü, $P_5(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{2,2}(t)$ Padé yaklaşımı	35
Şekil 6.2. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_{10}(t)$ Seri çözüm ve $r_{5,4}(t)$ Padé yaklaşımı.....	37
Şekil 6.3. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_4(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{2,1}(t)$ Padé yaklaşımı	40
Şekil 6.4. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_3(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{1,1}(t)$ Padé yaklaşımı.....	42
Şekil 6.5. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_6(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{4,2}(t)$ Padé yaklaşımı	47
Şekil 6.6. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_8(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{5,3}(t)$ Padé yaklaşımı	49
Şekil 6.7. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_6(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{4,2}(t)$ Padé yaklaşımı	52
Şekil 6.8. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_{10}(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{5,5}(t)$ Padé yaklaşımı.....	54
Şekil 6.9. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_3(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{3,2}(t)$ Padé yaklaşımı	59
Şekil 6.10. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_7(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{8,5}(t)$ Padé yaklaşımı	62
Şekil 6.11. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_3(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{1,4}(t)$ Padé yaklaşımı	65
Şekil 6.12. $y(t)$ kesin çözümü, $P_2(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{1,2}(t)$ Padé yaklaşımı	67

ÇİZELGE TABLOSU

Çizelge 3.1. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri	10
Çizelge 4.1. Padé tablosu	15
Çizelge 6.1 $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.5$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_5(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{2,2}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	34
Çizelge 6.2. $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_{10}(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{5,4}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	37
Çizelge 6.3. $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.75$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_4(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{2,1}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	39
Çizelge 6.4. $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_3(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{1,1}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	41
Çizelge 6.5 $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümleri $P_{10}(t)$, $P_4(t)$, $P_3(t)$ ve Padé yaklaşımları $r_{5,4}(t)$, $r_{2,1}(t)$, $r_{1,1}(t)$ olan uyumlu diferansiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	43
Çizelge 6.6 $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.5$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_6(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{4,2}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	46
Çizelge 6.7. $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_8(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{5,3}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	49

Çizelge 6.8. $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.75$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_6(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{4,2}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması.....	51
Çizelge 6.9. $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_{10}(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{5,5}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması.....	53
Çizelge 6.10 $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümleri $P_8(t)$, $P_6(t)$, $P_{10}(t)$ ve Padé Yaklaşımları $r_{5,3}(t)$, $r_{4,2}(t)$, $r_{5,5}(t)$ olan uyumlu diferansiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması.....	55
Çizelge 6.11 $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 0.5$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_3(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{3,2}(t)$ olan uyumlu diferansiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	58
Çizelge 6.12 $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 0.25$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_7(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{8,5}(t)$ olan uyumlu diferansiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	61
Çizelge 6.13. $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 0.75$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_3(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{1,4}(t)$ olan uyumlu diferansiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması	64

Çizelge 6.14. $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen

seri çözümü $P_2(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{1,2}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin
nümerik değerlerinin karşılaştırılması 66

Çizelge 6.15 $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümünün $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ olduğunda

UKDDM ile elde edilen seri çözümler $P_7(t)$, $P_3(t)$, $P_2(t)$ ve Padé Yaklaşımları $r_{8,5}(t)$,
 $r_{1,4}(t)$, $r_{1,2}(t)$ olan diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması 68

1. GİRİŞ

Mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi birçok alanda eldeki problemin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin kurulması oldukça önemlidir. Bu modellemelerde ortaya konulan problemlerin çözülebilmesi ihtiyacı karşımıza diferansiyel denklemleri çıkartmaktadır. Doğada var olan problemlerin modellenmesinde tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler ile fiziksel olayları açıklamadaki eksiklikleri giderebilmesi ve bu problemlerin daha iyi modellenebilmesi için kesirli mertebeli diferansiyel denklemler kullanılmaktadır.

Kesir mertebeli diferansiyel denklemleri ve sistemleri analitik olarak çözmek zordur. Bu zorlukları giderebilmek için sayısal (nümerik) ve yarı sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları Varyasyonel Iterasyon, Homotopy Perturbasyon, Adomian Ayırışma metodu ve Diferansiyel Dönüşüm metodudur. Ayrıca Laplace transform, Fractional Green's function, ve Mellin transform yöntemi de bu yöntemlerden bazılarıdır (Podlubny, 1999).

Kesirli türevin klasik türevden önemli bir farkı, kesirli türevin tek bir tanımının olmayışıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması fırsatını verir. Kesirli türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi tanımlardır. Bu tanımların en popüler olanları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir. Riemann-Liouville, Caputo ve diğer kesirli türev tanımları için Miller (1993) ,Podlubny (1999) ve Kilbas ve ark. (2006) referanslarına bakılabilir. Literatürde olan bu tanımlar birbirleri arasında geçişler sağlamasına rağmen fiziksel yorumları açısından farklılıklar gösterirler.

Son zamanlarda Khalil ve arkadaşları kesirli türev ve kesirli integralin yeni bir tanımını sundular. Bu yeni tanımın klasik analizde verilen klasik türevin özelliklerini sağladığını ve klasik türev tanımındaki gibi bir limit formundan yararlandığını göstermişlerdir. Çalışmalarında, bu yeni kesirli türev tanımı için çarpım kuralını, bölüm kuralını, zincir kuralını, kesirsel Rolle teoremini ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sundular (Khalil, 2014).

Bu yeni alana katkıda bulunan başka bir çalışma Abdeljawad tarafından yapıldı. Abdeljawad bu yeni teoriyi geliştirdi. Sol ve sağ uyumlu kesirli türev tanımlarını, $\alpha > 1$ için yüksek mertebeden kesirli integral tanımını, kesirsel Gronwall eşitsizliğini, uyumlu kesirli türevler için zincir kuralını ve kısmi integrasyon formüllerini, kesirsel kuvvet seri açılımını ve laplace dönüşümünü verdi (Abdeljawad, 2014).

Kısa sürede ilgi çeken yeni kesirli türev tanımı ile alakalı birçok çalışma yapıldı. Kesirsel fourier serileri (Khalil, 2014), uyumlu kesirli Legendre diferansiyel denklemi ve kesirsel Legender polinomları (Abu Hammad ve Khalil 2014), uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoremleri (Gökdoğan ve ark., 2016), uyumlu kesir merteben Bessel denklemi ve kesirsel Bessel polinomları (Gökdoğan ve ark., 2015), uyumlu kesirli adi diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü (Ünal ve ark., 2016), uyumlu varyasyonel iterasyon metodu (Açan ve ark, 2016) bu çalışmalardan bazılarıdır.

Sürekli kesirler ve Euclid algoritması temel alınarak geliştirilen Padé yaklaşımları Fransız matematikçi Henri Eugène Padé'nin çalışmasıyla literatüre kazandırılmıştır. Padé yaklaşımları Euler, C.G.J. Jacobi, Michell Rolle, George Ferdinand Frobenius, Jean Darboux ve Daniel Bernoulli gibi bir çok ünlü matematikçi tarafından matematiğin farklı alanlarında kullanıldı (Brezinski, 1991). Padé yaklaşımları diğer nümerik yaklaşımlara göre daha iyi sonuçlar verir. Bundan dolayı bu yaklaşıma olan ilgi diğer nümerik yaklaşımlara göre daha fazladır.

Bu çalışmada litaretüre yeni giren uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri, uyumlu diferansiyel dönüşüm metoduyla elde edilen seri çözümler ve bu seri çözümlerin Padé yaklaşımları karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmada Padé yaklaşımının, uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin kesin çözümleriyle daha uyumlu olan nümerik çözümleri hedeflenmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan tanım ve teoremler verilecektir. Burada ele alınacak teoremlerin ispatları, literatürde ayrıntılı bir şekilde verildiği için ayrıca yapılmamıştır.

2.1 Ön Bilgiler

Tanım 2.1: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots \quad (2.1)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclauren serisi adı verilir.

Tanım 2.2: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots \quad (2.2)$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu tanımda $c = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

elde edilir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$ olur.

Tanım 2.3: f fonksiyonu reel değerli bir fonksiyon olsun;

i) a noktasını içeren herhangi bir açık aralıkta, f fonksiyonunun a noktasında türevi varsa

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir ve f , a noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

ii) f fonksiyonunun açık aralıktaki herhangi bir noktada türevi varsa, f fonksiyonu diferensiyellenebilirdir denir (Wade, 2000).

Tanım 2.4: Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferensiyel denklem denir. Yani, kesirli diferensiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferensiyel denklemlerdir (Benghorbal, 2004).

Örnek 2.1: Aşağıdaki gibi verilen,

$$xD^{1/2}y(x) - D^{2/3}y(x) - y(x) = \sin(x) \quad (2.4)$$

(2.4) denklemi bir kesirli diferensiyel denklemdir. Kesirli diferensiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

a) Adi kesirli diferensiyel denklemler. Örneğin,

$$D^{1/3}y(x) + 5y^2(x) = 3 \quad (2.5)$$

$$D^{1/2}y(t) + D^{1/2}x(t) = t \quad (2.6)$$

$$D^{3/2}y(x) + D^{1/2}y(x) - 2y(x) = 0 \quad (2.7)$$

denklemleri adi kesirli diferensiyel denklemlerdir (Podlubny, 1999).

b) Kısmi kesirli diferensiyel denklemler. Örneğin,

$$D_t^{1/2}u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

denklemi bir kısmi kesirli diferensiyel denklemdir (Podlubny, 1999).

Başka bir sınıflandırma ise, lineerliliğe ya da non-lineerliliğe göre yapılan sınıflandırma türüdür.

Tanım 2.5: x bağımsız değişkenine göre bir kesirli diferansiyel denklem eğer;

$$a_n(x)D^{a_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{a_{n-1}}y(x) + \dots + a_1(x)D^1y(x) + a_0(x)D^0y(x) = f(x) \quad (2.9)$$

biçiminde ise lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. (2.9) denkleminde;

D^{a_i} , ($i = 1, 2, \dots, n$) kesirli diferansiyel operatörüdür ve lineerdir. Dikkat edilirse, lineer kesirli diferansiyel denklemlerin iki özelliği göze çarpmaktadır:

i) Bağımlı değişken y ve y 'nin kesirli türevleri birinci derecedendir. Yani, y bağımlı değişkenini içeren her terimin kuvveti 1'dir.

ii) Her terimin katsayısı yalnız x bağımsız değişkenine bağlıdır (Benghorbal, 2004).

Buna göre, lineer olmayan bir kesirli diferansiyel denklem non-lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanımlardan hareketle

$$x^3 D^{3/2}y(x) + y(x) = e^x \quad (2.10)$$

$$D^{2q}y(x) + D^qy(x) - y(x) = 0 \quad (2.11)$$

denklemleri lineerdir. Fakat;

$$D^{2/3}y(x) = y^2(x) \quad (2.12)$$

$$y(x)D^{3/2}y(x) + D^{3/5}y(x) = x^3 \quad (2.13)$$

denklemleri nonlineerdir (Benghorbal, 2004).

Tanım 2.6: Kesirli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebedeki türeve denklemin mertebesi denir. Örneğin,

$$y(x)D^{7/3}y(x) + (D^{3/5}y(x))^2 = (x+1)^2 \quad (2.14)$$

denklemini bir $\frac{7}{3}$.*mertebeden* nonlineer adi diferansiyel denklemdir (Benghorbal, 2004).

2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Bu bölümde literatürde çok kullanılan bazı özel fonksiyonlar verilecektir.

2.2.1 Gama Fonksiyonu

Tanım 2.7: $x > 0$ için,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.15)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir (Bell, 1968). (2.15) ifadesi sadece $x > 0$ için tanımlıdır.

Teorem 2.1: $\Gamma(1) = 1$ (Bell, 1968).

Teorem 2.2: $x > 0$ olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olur. (Bell, 1968).

Teorem 2.3: $x > 0$ tam sayı olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x!$ olur.

Gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir: (Andrews, Askey ve Roy, 2000):

$$a) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (2.16)$$

$$b) \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (0 < p < 1) \quad (2.17)$$

$$c) \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}, \quad (n < 0) \quad (2.18)$$

Kesirli türevin literatürde birçok farklı tanımı vardır. Bu alandaki en popüler tanımlar Riemann-Liouville, Caputo tanımlarıdır. Bu tanımlar sırasıyla aşağıda verilecektir.

2.2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türevleri ve Kesirli İntegralleri

Bu bölümde, Kilbas ve arkadaşları tarafından ele alınan Riemann-Liouville integral ve türev tanımları verilmiştir. Litaretürdeki çalışmalardan yararlanarak aşağıdaki tanım ve teoremler verilecektir (Kilbas, vd., 2006; Oldham, vd., 1974; Ross ve Miller, 1993).

Tanım 2.8: $\alpha \geq 0$ için, α . mertebeden ($\alpha > 0$) Riemann-Liouville integral operatörü,

$$(J_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a \quad (2.19)$$

$$(J_a^0 f)(t) = f(t) \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanır. $f \in C_\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

$$a) \quad (J_a^\alpha J_a^\beta f)(t) = (J_a^{\alpha+\beta} f)(t) \quad (2.21)$$

$$b) \quad (J_a^\alpha J_a^\beta f)(t) = (J_a^\beta J_a^\alpha f)(t) \quad (2.22)$$

$$c) \quad J_a^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \quad (2.23)$$

Tanım 2.9: $n \in \mathbb{N}$, $n-1 < \alpha \leq n$ olmak üzere $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$, için reel bir fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$(D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx \quad (2.24)$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.3 Caputo Kesirli Türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve literatürde ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Bu tanımlar kısaca aşağıda verilecektir.

Tanım 2.10: $n-1 < \alpha \leq n$ için, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $f \in C_{-1}^n$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$(D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx \quad (2.25)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_a^n$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere, Caputo türev tanımına ait,

$$a) \quad (D_a^\alpha J_a^\alpha f)(t) = f(t) \quad (2.26)$$

$$b) \quad (D_a^\alpha J_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{k!}, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.27)$$

özellikleri de verilebilir (Caputo, 1967; Kılbas, vd., 2006).

Tanım 2.11: t değişkeni zamanı göstermek üzere ve n tamsayısı α 'dan büyük en küçük tamsayı yada α 'ya eşit olacak şekilde, α mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo zaman-kesirli türev operatörü,

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} d\tau, & \text{için } n-1 < \alpha < n \\ \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}, & \text{için } \alpha = m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.28)$$

biçiminde tanımlanır (Caputo, 1967; Kılbas, vd., 2006).

3. BİR BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.1)$$

(3.1) denkleminde $y(x)$ orijinal fonksiyon, $Y(k)$ 'da T – fonksiyonu olarak adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur (Ayaz, 2004).

$Y(k)$ 'nın diferensiyel ters dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.(3.1) ve (3.2) denklemlerinden,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) denklemi diferensiyel dönüşümün(transformun) Taylor serisi açılımından türetildiği fikrini akla getirmektedir. Ancak bu metot sembolik olarak türevleri hesaplamamaktadır. Bununla birlikte, orijinal fonksiyonların dönüşüm denklemleri aşağıdaki Çizelge 3.1 de verilmiştir. (Ayaz, 2004).

Yukarıdaki (3.1) ve (3.2) denklemlerinin tanımlarından, Çizelge 3.1 deki temel matematiksel işlemlerin dönüşüm fonksiyonlarıyla uyduğu kolaylıkla görülebilir ve kanıtlanabilir.

Uygulamalarda, $y(x)$ fonksiyonu sonlu bir seriyle ifade edilir ve (3.2) denklemi,

$$y(x) = \sum_{k=0}^m x^k Y(k) \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. (3.4) denklemi ile $\sum_{k=m+1}^{\infty} x^k Y(k)$ ifadesinin ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu açıkça görülmektedir.(Ayaz, 2004).

Çizelge 3.1. Bir boyutlu diferensiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri

Asıl(Orijinal) fonksiyon	Dönüşüm(Transform) fonksiyonu
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = cw(x)$	$Y(k) = cW(k)$
$y(x) = dw/dx$	$Y(k) = (k+1)W(k+1)$
$y(x) = d^j w/dx^j$	$Y(k) = (k+1)(k+2)...(k+j)W(k+j)$
$y(x) = u(x)v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$y(x) = x^j$	$Y(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

4. TEK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMI

f fonksiyonu $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x + \dots$ yani,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \quad (c_0 \neq 0) \quad (4.1)$$

şeklinde bir kuvvet serisiyle temsil edilsin. Bu durumda bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı,

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1x + \dots a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots b_nx^n} \quad (4.2)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur (polinomların oranı). Payın derecesi m , paydanın derecesi n dir. (4.2) de $m+1$ tane payın katsayısı ve $n+1$ tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (4.2)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0 = 1$ alınmalıdır. Bu seçimle (4.2)'nin payının $m+1$ tane bağımsız katsayısı ve paydasının n tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda $m+n+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[m/n]$, (4.1)'deki kuvvet serisinin ilk $m+n+1$ terimine karşılık gelir (Çelik, 2002).

(4.1)'deki $1, x, x^2, \dots, x^{m+n}$, $m+n$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımını,

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1x + \dots a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots b_nx^n} + O(x^{m+n+1}) \quad (4.3)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.3) denkleminde,

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + O(x^{m+n+1}) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) denklemindeki $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ katsayılarının eşitliğinden

$$b_n c_{m-n+1} + b_{n-1} c_{m-n+2} + \dots + b_0 c_{m+1} = 0$$

$$b_n c_{m-n+2} + b_{n-1} c_{m-n+3} + \dots + b_0 c_{m+2} = 0 \quad (4.5)$$

$\vdots$

$$b_n c_m + b_{n-1} c_{m+1} + \dots + b_0 c_{m+n} = 0$$

sistemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğu için, (4.5) denklemi n tane lineer denklemden oluşur.

Yani;

$$\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & \cdots & c_{m+1} \\ c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & c_{m-n+5} & \cdots & c_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

olur. Buradan b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (4.6) denkleminde payın

katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları $1, x, x^2, \dots, x^{m+n}$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$a_0 = c_0$$

$$a_1 = c_1 + b_1 c_0$$

$$a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \quad (4.7)$$

$\vdots$

$$a_m = c_m + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} b_i c_{m-i}$$

olarak bulunur. Böylece (4.6) ve (4.7) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir (Çelik, 2002). Buna göre,

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad g(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Padé denklemleri katsayılar hesaplanmadan şeklinde de ifade edilebilir (Turut, 2010).

Bu denklemler yardımıyla x^{m+n} inci dereceden $\sum_{i=0}^m c_i x^i$ kuvvet serisine karşılık gelen

$[m/n]$ Padé yaklaşımı oluşturulur. Yani verilen $f(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$ kuvvet serisini keyfi dereceden Maclaurin serisine dönüştürerek, bu serinin keyfi Padé yaklaşımı (serisi) oluşturulur (Turut, 2010).

Bir $f(x)$ fonksiyonu için $[m/n]_f(x)$ Padé yaklaşımı problemi; Padé yaklaşımında pay ve payda polinomları olan,

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad (4.9)$$

polinomlarını bulmayı içerir. Yani,

$$[m/n]_f(x) = \frac{m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i}{q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad (4.10)$$

olur. (p ve q'nün kesin polinomsal dereceleri ∂ ile ve seri içerisindeki dereceleri ω ile gösterilecektir) (Turut, 2010).

(4.3) ifadesinde, yapılan içler dışlar çarpımıyla elde edilen (4.5) ve (4.7) denklemlerinde $[m/n]_f(x)$ bulunurken,

$$\left. \begin{array}{l} \partial(p) \leq m \\ \partial(q) \leq n \\ \omega(fq - p) \geq m + n + 1 \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

durumu söz konusudur (Turut, 2010).

Teorem 4.1: $r_{m,n}(x)$ rasyonel fonksiyonu bir f fonksiyonuna ait (m,n) dereceli Padé yaklaşımı olmak üzere; her negatif olmayan m, n sayısı için f fonksiyonuna ait tek bir (m,n) dereceli $r_{m,n}(x)$ Padé yaklaşımı vardır(Turut, 2010).

4.1 Padé Yaklaşımının Hesaplanması

Padé yaklaşımının hesaplanmasında literatürde farklı algoritmalar kullanılmaktadır. Bu çalışmada yaygın ve kullanışlı olan determinant formülleri kullanılmıştır. Bu yöntem şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (4.12)$$

serisiyle temsil edilen fonksiyonun (m,n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad (4.13)$$

olarak tanımlanırsa,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad (4.14)$$

ifadesinin içler dışlar çarpımıyla oluşan denklem sistemi ve bu sistemdeki katsayılar determinant yöntemiyle bulunabilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad \text{için;} \quad (4.15)$$

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i, \quad k \geq 0 \quad (4.16)$$

$$F_k(x) = 0, \quad k < 0 \quad (4.17)$$

yazılabilir(Turut, 2010).

4.2 Padé Tablosu

Genel anlamda bir $f(x)$ fonksiyonunun Padé yaklaşımı

$$[m/n] = [m/n]_f = [m/n](x) = [m,n]_f(x) = r_{m,n}$$

şeklinde değişik formlarda ifade edilebilir (Çelik,2002).

Yaklaşımlara ait tablo sistematik olarak Henri Eugène Padé tarafından verildiği için hem yaklaşıma, hem de tabloya Padé'nin ismi verilmiştir. Genel anlamda bir fonksiyona ait Padé tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.1. Padé tablosu

n \ m	0	1	2	...
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$	...
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$	...
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
...				

Aşağıda, Padé yaklaşımının nasıl bulunacağını bir örnek üzerinde bakalım.

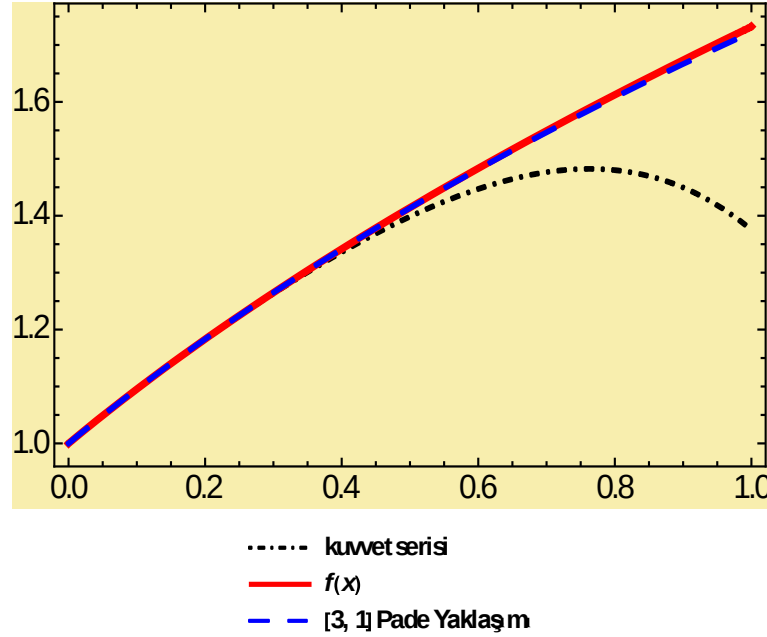
Örnek 4.1 : $f(x) = \sqrt{2x+1}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun beş terimli seri açılımı,

$$P_5(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 \quad (4.18)$$

şeklindedir. (4.18) kuvvet serisinin [3,1] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemleri yardımıyla,

$$r_{3,1}(x) = \frac{1 + \frac{9x}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{8}}{1 + \frac{5x}{4}} \quad (4.19)$$

olarak hesaplanır. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ fonksiyonu , $P_5(x)$ kuvvet serisi (3,1) dereceli Padé yaklaşımına ait grafik şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ Kuvvet serisi ve $r_{3,1}(x)$ Padé yaklaşımı

5. UYUMLU KESİRLİ HESAP

Bu bölüm, çalışmamızın esasını oluşturan tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 5.1: Bir $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Burada bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için f fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli türevi,

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (5.1)$$

olarak tanımlanır (Khalil, 2014).

Burada $\alpha > 0$ olmak üzere $(0, a)$ aralığındaki bazı değerler için f fonksiyonu, α -diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcut ise

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t) \quad (5.2)$$

olduğu görülür.

Bazen, $T_{\alpha}(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazarak, α mertebeden f fonksiyonun, uyumlu kesirli türevleri gösterilebilir. Buna ek olarak, α mertebeden f 'nin uyumlu kesirli türevi varsa, o zaman f , α -türevlenebilirdir denir (Khalil, 2014).

Tanım 5.1'in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1: Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha \in (0, 1]$ aralığında tanımlı ve $t_0 > 0$ da α -diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise f fonksiyonu t_0 da süreklidir (Khalil, 2014).

Teorem 5.2: $\alpha \in (0, 1]$ ve f, g bir $t > 0$ noktasında α -diferensiyellenebilen iki fonksiyon olsun. O zaman T_{α} aşağıda verilen bütün özellikleri sağlar (Khalil, 2014).

- a) $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$
- b) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha},$ her $p \in \mathbb{R}$ için,
- c) Bütün sabit $f(t) = \lambda$ için, $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.
- d) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$
- e) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
- f) Eğer f diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise, $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dır.

İspat 5.2 : (a) ve (c) doğrudan tanımdan çıkar. (d) ve (f) kritik olduklarından ispatları aşağıda verilmiştir. (b) 'nin ispatı da aşağıdaki ispatlara benzer şekilde yapılabilir.

d) Şimdi, sabit $t > 0$ değerleri için,

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \right) \\
 &= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha(g)(t)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Burada g fonksiyonu t 'de sürekli olduğu için,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t) \tag{5.4}$$

Böylece (d)'nin ispatı tamamlanır (Khalil, 2014).

(e) benzer bir şekilde ispatlanabilir (Khalil, 2014).

(f)' yi kanıtlamak için, Tanım 5.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ yazarsak, buradan $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ elde edilir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
 T_a(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}} \\
 &= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\
 &= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \quad (\text{Khalil, 2014}).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tanım 5.2: $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için α mertebeden (sol) uyumlu kesirli türevi,

$$(T_a^\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{5.6}$$

olarak tanımlanır. Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_a şeklinde yazılır. Eğer $(T_a^\alpha f)(t)$, (a, b) aralığında oluşursa o zaman $(T_a^\alpha f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_a^\alpha f)(t)$ dır (Abdeljawad, 2014).

Ayrıca Teorem 5.2 de verilen bütün özellikler t yerine $(t-a)$ yazılırsa Tanım 5.2 için de sağlanır. Tanım 5.2 için bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevi aşağıdaki gibidir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

a) $T_a^\alpha((t-a)^p) = p(t-a)^{p-\alpha}$ bütün $p \in \mathbb{R}$ için,

b) $T_a^\alpha \left(e^{\lambda \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}} \right) = \lambda e^{\lambda \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$

c) $T_a^\alpha \left(\sin \left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c \right) \right) = \omega \cos \left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c \right), \omega, c \in \mathbb{R}$

$$\text{d)} \quad T_a^\alpha \left(\cos \left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c \right) \right) = -\omega \cos \left(\omega \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} + c \right), \omega, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{f)} \quad T_a^\alpha \left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} \right) = 1$$

Tanım 5.3: $f : (\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $t < b$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için α mertebeden (sağ) uyumlu kesirli türevi,

$$({}_a^b T f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (5.7)$$

olarak tanımlanır. Eğer $({}_a^b T f)(t)$ (a, b) aralığında oluşursa o zaman,

$$({}_a^b T f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}_a^b T f)(t) \quad (5.8)$$

biçiminde elde edilir (Abdeljawad, 2014).

Yüksek mertebeden uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için aşağıdaki genelleme yapılabilir.

Tanım 5.4 : $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. Bir $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun a ' dan başlayarak α - mertebeden (sol) kesirli türevi, $f^{(n)}(t)$ vardır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(T_a^\alpha f)(t) = (T_\beta^\alpha f^{(n)})(t) \quad (5.9)$$

Burada $a = 0$ olduğu zaman notasyon T_a şeklinde yazılır.

f' nin b 'de sona eren sıralı α - mertebeden (sağ) kesirli türevi, $({}_b^b T f)(t) = (-1)^{n+1} ({}_b^b T f)(t)$

şeklinde olur.

$\alpha = n + 1$ ise $\beta = 1$ ve f 'nin kesirli türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ olduğunda (veya

$\alpha \in (0,1)$) $\beta = \alpha$ olur ve Tanım 5.2 ' dekiyle aynı durum oluşur (Abdeljawad, 2014).

Bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıda verilmiştir (Khalil, 2014).

a) $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$, bütün $p \in \mathbb{R}$ için.

b) $T_\alpha(1) = 0$.

c) $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$.

d) $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx$, $b \in \mathbb{R}$.

e) $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx$, $b \in \mathbb{R}$.

f) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$.

g) $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

ğ) $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

h) $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

Teorem 5.3: f , bir t_0 komşuluğunda bazı $0 < \alpha \leq 1$ için, sonsuz α -türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun kesirli kuvvet serisi açılımı,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_{t_0}^{\alpha} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, \quad t_0 < t < t_0 + R^{\frac{1}{\alpha}}, \quad R > 0. \quad (5.10)$$

şeklinde olur. Burada $(T_{t_0}^{\alpha} f)^{(k)}(t_0)$ ifadesi kesirli türevin k kez uygulanması anlamına gelir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Örnek 5.1: $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$. mertebeden kesirli türevini uyumlu kesirli türev yardımıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2}}(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\frac{1}{2}}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{\frac{1}{2}}) - f(t)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Burada $\varepsilon t^{\frac{1}{2}} = h$ dersek, $\varepsilon = h t^{-\frac{1}{2}}$ şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h t^{-\frac{1}{2}}} \\ &= t^{\frac{1}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= t^{\frac{1}{2}} \frac{df(t)}{dt} \\ &= t^{\frac{1}{2}} \cdot 2t \\ &= 2t^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tanımın Analizi

Son yıllarda, araştırmacılar gerçek dünya problemlerini modellemek için çok sayıda kesirli türev tanımı önermişlerdir. . Bilinen kesirli türevlerden biri Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevdir. Bu tanım gerçek dünya problemlerini modellemek için her zaman uygun değildir. Bir başka tanım ise Caputo türevidir. Caputo tanımı, fiziksel alan problemlerini modellemekte ve çözmekte oldukça avantajlıdır fakat yeterli değildir. Bununla birlikte, kompleks sistemlerin dinamiklerini daha iyi ele modelleyebilmek için kısa bir süre önce Khalil ve arkadaşları önerdikleri yeni türev tanımının klasik türevin özelliklerini sağladığını göstermişlerdir.

Khalil ve arkadaşları uyumlu kesirli türev tanımının, diğer kesirli türev tanımlarının aksine Çarpım kuralını, Bölüm kuralını, Zincir kuralını sağladığını göstermişlerdir. Buna ek olarak uyumlu kesirli fonksiyonlar için Rolle teoremi ve

Ortalama Değer Teoremi gibi temel analiz teoremlerinin kanıtını vermişlerdir. Klasik türevin sağladığı bu özelliklerin, önerilen yeni kesirli türevin de sağlaması bu yeni tanımın bilinen kesirli türev tanımlarına göre çok daha avantajlı olduğunu göstermektedir.

5.1 Uyumlu Kesirli Fonksiyonlar İçin Rolle Teoremi

Teorem 5.4: f fonksiyonu $a > 0$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- (i) f , $[a, b]$ üzerinde süreklidir,
- (ii) f bazı $\alpha \in (0, 1)$ için α -diferensiyellenebilir.
- (iii) $f(a) = f(b)$.

durumları sağlanırsa, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır (Khalil, 2014).

İspat 5.4: f , $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için yerel bir ekstremum noktası olan $c \in (a, b)$ vardır.

Genellik kaybı olmaksızın, c 'nin yerel minimum bir nokta olduğunu varsayalım. Yani,

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \varepsilon c^{(1-\alpha)}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \varepsilon c^{(1-\alpha)}) - f(c)}{\varepsilon} \quad (5.12)$$

Buradan, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olur (Khalil, 2014).

5.2 Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi

Teorem 5.5: f fonksiyonu $a > 0$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sağlayan belirli bir fonksiyon olsun.

(i) f , $[a, b]$ üzerinde süreklidir.

(ii) f , bazı $\alpha \in (0, 1)$ değerleri için α -diferensiyellenebilir.

$$\text{Sonuç olarak, } f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \quad (5.13)$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır (Khalil, 2014).

$$\text{İspat 5.5: } g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right) \quad (5.14)$$

fonksiyonunu düşünelim.

Buradan g fonksiyonu, Rolle teoremi koşullarını yerine getirir. Dolayısıyla $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ olduğunu kullanarak sonuca ulaşılmış olur (Khalil, 2014).

Temel analizle aynı doğrultuda, uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için ortalama değer teoremi kullanılarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.1: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, bazı $\alpha \in (0, 1)$ için α -diferensiyellenebilir olsun.

(a) $f^{(\alpha)}$, $a > 0$ olduğu yerde $[a, b]$ üzerinde sınırlandırılmışsa, f , $[a, b]$ üzerinde düzgün süreklidir ve dolayısıyla f sınırlandırılmıştır.

(b) Eğer $f^{(\alpha)}$, $[a, b]$ 'de sınırlandırılmış ve a 'da sürekli iken f , $[a, b]$ üzerinde düzgün süreklidir ve dolayısıyla f sınırlandırılmıştır (Khalil, 2014).

5.3 Uyumlu Kesirli İntegral

$$\textbf{Tanım 5.5 : } (I_a^\alpha f)(t) = \int_a^t f(x) d\alpha(x, a) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (5.15)$$

$a = 0$ olduğunda $d\alpha(x)$ yazarız. Benzer şekilde,

$$({}^b I_\alpha f)(t) = \int_t^b f(x) d\alpha(b, x) = \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (5.16)$$

yazabiliriz. Burada $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere I_a^α ve ${}^b I_\alpha$ ifadelerine sırasıyla α mertebeden uyumlu sol ve sağ kesirli integralleri denir (Abdeljawad, 2014).

Teorem 5.6: f fonksiyonu, $t \geq a$ için değerleri I_a^α 'nın çevresindeki herhangi sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$T_\alpha I_a^\alpha (f)(t) = f(t) \quad (5.17)$$

biçiminde ifade yazılabilir (Khalil, 2014).

5.4 Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (UKDDM)

Tanım 5.6: $f(t)$ fonksiyonu bazı $\alpha \in (0,1]$ değerleri için sonsuz α -türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $f(t)$ fonksiyonunun uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm metodu (UKDDM) ile çözümü,

$$F_\alpha(k) = \frac{1}{\alpha^k k!} \left[(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t) \right]_{t=t_0} \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}$ kesirli türevin k kez uygulanmasını gösterir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Tanım 5.7 : $F_\alpha(k)$, $f(t)$ 'nin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşümü olsun. $F_\alpha(k)$ 'nın uyumlu kesirli ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\alpha(k) (t-t_0)^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k k!} \left[(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t) \right]_{t=t_0} (t-t_0)^{\alpha k}, \quad (5.19)$$

Tamsayıli mertebeli türevlerin başlangıç koşulları,

$$F_\alpha(k) = \begin{cases} \alpha k \in Z^+, \frac{1}{(\alpha k)!} \left[\frac{d^{\alpha k} f(t)}{dt^{\alpha k}} \right]_{t=t_0}, & k = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{n}{\alpha} - 1 \right) \text{ için} \\ \alpha k \notin Z^+, & 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

olarak tanımlanır. Burada n , uyumlu kesirli adi diferansiyel denklem (UKADD)' in mertebesidir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.7: Eğer $f(t) = u(t) \pm v(t)$ olduğu zaman

$$F_\alpha(k) = U_\alpha(k) \pm V_\alpha(k) \quad (5.21)$$

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.8: c bir sabit değer olmak üzere, eğer $f(t) = cu(t)$ ise

$$F_\alpha(k) = cU_\alpha(k) \quad (5.22)$$

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.9: Eğer $f(t) = u(t)v(t)$ ise

$$F_\alpha(k) = \sum_{l=0}^{\infty} U_\alpha(l)V_\alpha(k-l)$$

(5.23)

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.10: $f(t) = T_\alpha^{t_0}(u(t))$ olduğu zaman

$$F_\alpha(k) = \alpha(k+1)U_\alpha(k+1) \quad (5.24)$$

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.11: $f(t) = T_\beta^{t_0}(u(t))$, $m < \beta \leq m+1$ için

$$F_\alpha(k) = U_\alpha(k + \beta/\alpha) \frac{\Gamma(k\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k\alpha + \beta - m)} \quad (5.25)$$

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.12: Eğer $f(x) = (T_{\beta_1}^{t_0}u_1)(t)(T_{\beta_2}^{t_0}u_2)(t)\dots(T_{\beta_n}^{t_0}u_n)(t)$, sonra $i = 1, 2, \dots, n$ için

$m_i < \beta_i \leq m_i + 1$ ve $\frac{\beta_i}{\alpha} \in \mathbb{Z}^+$ olduğu yerde,

$$F_\alpha(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \frac{\Gamma(k_1\alpha + \beta_1 + 1)}{\Gamma(k_1\alpha + \beta_1 - m_1)} \frac{\Gamma((k_2 - k_1)\alpha + \beta_2 + 1)}{\Gamma((k_2 - k_1)\alpha + \beta_2 - m_2)} \dots \frac{\Gamma((k - k_{n-1})\alpha + \beta_n + 1)}{\Gamma((k - k_{n-1})\alpha + \beta_n - m_n)}$$

$$(U_1)_\alpha(k_1 + \beta_1/\alpha)(U_2)_\alpha(k_2 - k_1 + \beta_2/\alpha)\dots(U_n)_\alpha(k - k_{n-1} + \beta_n/\alpha) \quad (5.26)$$

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.13: $f(t) = e^{\lambda \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}}$ ise, λ sabit bir sayı olmak üzere,

$$F_{\alpha}(k) = \frac{\lambda^k}{\alpha^k k!} \quad (5.27)$$

olur (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.14: $f(t) = (t - t_0)^p$ ğfonksiyonu için $F_{\alpha}(k) = \delta\left(k - \frac{p}{\alpha}\right)$ olduĒunda

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

olur(Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Şimdi, bazı uyumlu kesirli adi diferensiyel denklemlerin UKDDM yardımı ile çözümleri verilecektir.

Örnek 5.2: $\alpha \in (0,1]$ için $y^{(\alpha)} + y = 0$ (5.29)

diferensiyel denklemi $y(0) = 1$ başlangıç şartıyla verilsin. Bu denklemin kesin çözümü

$$y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}} \quad (5.30)$$

şeklindedir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.10 kullanılarak UKDDM (5.29) diferensiyel denklemine uygulanırsa aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha(k+1)Y_{\alpha}(k+1) + Y_{\alpha}(k) = 0, \quad Y_{\alpha}(0) = 1. \quad (5.31)$$

Bu nedenle, tekrarlama ilişkisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y_{\alpha}(k+1) = -\frac{1}{\alpha(k+1)}Y_{\alpha}(k), \quad Y_{\alpha}(0) = 1.$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ için,

$$Y_{\alpha}(1) = -\frac{1}{\alpha}Y_{\alpha}(0) = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
Y_\alpha(2) &= -\frac{1}{2\alpha} Y_\alpha(1) = -\frac{1}{2!\alpha^2} \\
Y_\alpha(3) &= -\frac{1}{3\alpha} Y_\alpha(2) = -\frac{1}{3!\alpha^3} \\
&\vdots \\
Y_\alpha(n) &= \frac{(-1)^n}{n!\alpha^n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla seri çözüm

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\alpha^n} t^{n\alpha} = e^{-\frac{1}{\alpha} t^\alpha} \quad (5.32)$$

şeklinde dir. Görüldüğü gibi, bu çözüm kesin çözüm ile aynıdır (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Örnek 5.3: $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$y^{(\alpha)} = 1 + 2y + y^2 \quad (5.33)$$

kesirli Riccati diferensiyel denklemini alalım. Bu denklemin kesin çözümü,

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha} \text{ dir.}$$

Teorem 5.8, Teorem 5.9, Teorem 5.10 ve Teorem 5.12 yardımıyla UKDDM (5.33) diferensiyel denkleminde uygulanırsa aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha(k+1)Y_\alpha(k+1) = \delta(k) - \sum_{l=0}^k Y_\alpha(l)Y_\alpha(k-l) \quad (5.34)$$

Böylece,

$$Y_\alpha(k+1) = \frac{1}{\alpha(k+1)} \left(\delta(k) - \sum_{l=0}^k Y_\alpha(l)Y_\alpha(k-l) \right) \quad (5.35)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (5.33) denkleminin $k = 0, 1, 2, \dots$, değerleri için seri çözümü,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2} + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3} + \frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4} + \frac{t^{5\alpha}}{\alpha^5} + \frac{t^{6\alpha}}{\alpha^6} + \frac{t^{7\alpha}}{\alpha^7} + \frac{t^{8\alpha}}{\alpha^8} + \frac{t^{9\alpha}}{\alpha^9} + \frac{t^{10\alpha}}{\alpha^{10}} + \dots \\
 &= \frac{t^\alpha}{\alpha} \left(1 + \frac{t^\alpha}{\alpha} + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^3 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^5 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^6 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^7 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^8 + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^9 + \dots \right) \\
 &= \frac{t^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^\alpha}{\alpha}} = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

biçiminde elde edilir. Bu seri çözüm, kesin çözüm ile aynıdır (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Örnek 5.4: $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$y^{(\alpha)} = 1 - y^2 \tag{5.37}$$

kesirli Riccati denklemini alalım. Bu denklemin kesin çözümü $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} - 1}{e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} + 1}$

şeklinde dir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Teorem 5.9, Teorem 5.10 ve Teorem 5.12 yardımıyla UKDDM (5.37) denkleminde uygulanırsa dönüşüm fonksiyonu,

$$\alpha(k+1)Y_\alpha(k+1) = \delta(k) - \sum_{l=0}^k Y_\alpha(l)Y_\alpha(k-l) \tag{5.38}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,

$$Y_\alpha(k+1) = \frac{1}{\alpha(k+1)} \left(\delta(k) - \sum_{l=0}^k Y_\alpha(l)Y_\alpha(k-l) \right) \tag{5.39}$$

elde edilir. $k = 0, 1, 2, \dots$, için (5.37) diferensiyel denkleminin seri çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{t^{3\alpha}}{3\alpha^3} + \frac{2t^{5\alpha}}{15\alpha^5} - \frac{17t^{7\alpha}}{315\alpha^7} + \frac{62t^{9\alpha}}{2835\alpha^9} - \dots \quad (5.40)$$

Bu seri çözüm kesin çözüm ile aynıdır (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Örnek 5.5: $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 1$ olmak üzere, $\frac{d^{\frac{3}{2}}y}{dt^{\frac{3}{2}}} - \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dt^{\frac{1}{2}}} = 0$, (5.41)

uyumlu kesirli adi diferensiyel denklemi verilsin.

$\alpha = 0.5$ için Teorem 5.12 kullanılarak, bu denklemin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşümü,

$$Y_\alpha(k+3) = \frac{Y_\alpha(k+1)}{(0.5k+1.5)} \quad (5.42)$$

$k = 1, 2, \dots$ için, başlangıç dönüşüm katsayıları ,

$$Y_\alpha(4) = \frac{Y_\alpha(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Y_\alpha(5) = \frac{Y_\alpha(3)}{2.5} = 0$$

$$Y_\alpha(6) = \frac{Y_\alpha(4)}{3} = \frac{1}{2.3}$$

$$Y_\alpha(7) = \frac{Y_\alpha(5)}{3.5} = 0$$

$\vdots$

biçiminde elde edildi. Dolayısıyla, seri çözüm aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} y(t) &= t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k - 1 \\ &= e^t - 1 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Elde edilen bu ifade $\alpha = 0.5$ değeri için kesin çözümün aynısıdır (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

6. UYGULAMALAR

Bu bölümde beşinci bölümde UKDDM yardımıyla elde edilen diferansiyel denklemlerin seri çözümleri ve bu seri çözümlerin Padé yaklaşımları hesaplanacaktır. Ayrıca Padé yaklaşımlarına ait sonuçların, uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerinin nümerik sonuçlarıyla daha uyumlu olduğu gösterilecektir.

6.1 Uyumlu Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Metodu (UKDDM) ve Padé Yaklaşımı

Uygulama 6.1:

$$\alpha \in (0,1] \text{ için } y^{(\alpha)} + y = 0 \quad (6.1)$$

diferansiyel denkleminin, $y(0) = 1$ başlangıç şartıyla, kesin çözümü

$$y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha} \quad (6.2)$$

şeklinde verilmiştir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Burada (6.1) denkleminin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen seri çözümü

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\alpha}t^\alpha + \frac{1}{2!\alpha^2}t^{2\alpha} - \frac{1}{3!\alpha^3}t^{3\alpha} + \frac{1}{4!\alpha^4}t^{4\alpha} - \frac{1}{5!\alpha^5}t^{5\alpha} \dots \quad (6.3)$$

biçiminde buluruz.

Şimdi (6.2) denkleminde

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ değeri için, } y(t) = e^{-2\sqrt{t}} \quad (6.4)$$

elde ederiz.

Ayrıca (6.3) denkleminde de $\alpha = \frac{1}{2}$ değeri yerine yazılırsa seri çözüm,

$$\begin{aligned} u(t) = 1 - 2\sqrt{t} + 2t - \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2t^2}{3} - \frac{4t^{\frac{5}{2}}}{15} + \frac{4t^3}{45} - \frac{8t^{\frac{7}{2}}}{315} + \frac{2t^4}{315} - \frac{4t^{\frac{9}{2}}}{2835} \\ + \frac{4t^5}{14175} - \frac{8t^{\frac{11}{2}}}{155925} + O(t^6) \end{aligned} \quad (6.5)$$

şeklinde elde edilir. Buradan seri çözümün beş terimli kuvvet serisini,

$$P_5(t) = 1 - 2\sqrt{t} + 2t - \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2t^2}{3} \quad (6.6)$$

biçiminde buluruz.

Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla $t^{\frac{1}{2}} = x$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} u(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 - \frac{8}{315}x^7 \\ + \frac{2}{315}x^8 - \frac{4}{2835}x^9 + \frac{4}{14175}x^{10} - \frac{8}{155925}x^{11} + O(x^{12}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz.

Buradan, beş terimli kuvvet serisinin [2,2] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplayıp ve daha sonra yine $t^{\frac{1}{2}} = x$ dönüşümü yaparsak,

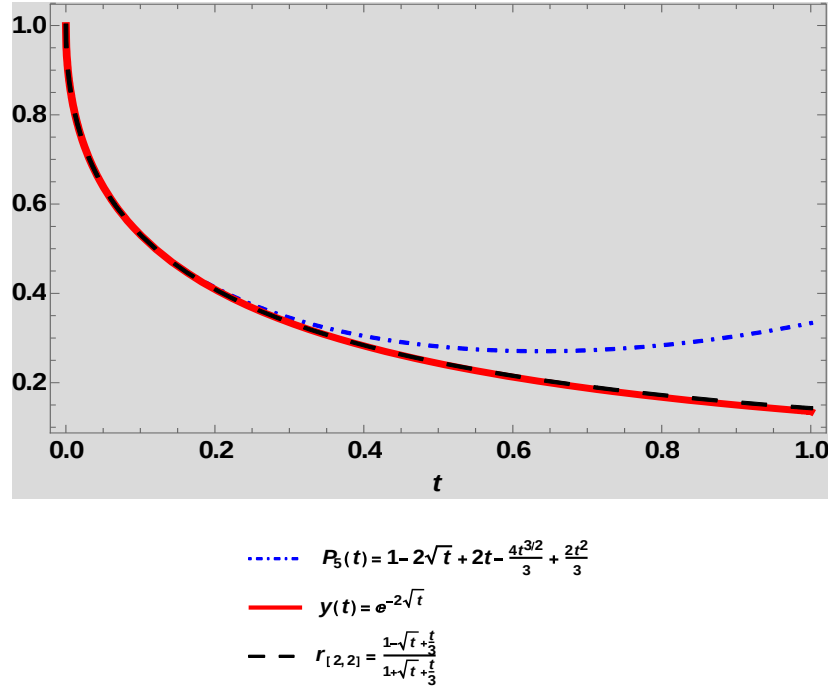
$$r_{2,2}(t) = \frac{1 - \sqrt{t} + \frac{t}{3}}{1 + \sqrt{t} + \frac{t}{3}} \quad (6.8)$$

olarak buluruz.

Daha sonra $y(t)$, $P_5(t)$ ve $r_{2,2}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.1 ve Şekil 6.1).

Çizelge 6.1 $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.5$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_5(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{2,2}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

$\alpha = 0.5$					
t	$P_5(t)$	$y(t)$	$r_{2,2}(t)$	$ y(t) - r_{2,2}(t) $	$ y(t) - P_5(t) $
0.1	0.5320474326	0.5312856092	0.5313620612	0.0000764520	0.0007618234
0.2	0.4129825169	0.4088417198	0.4091823418	0.0003406220	0.0041407971
0.3	0.3454658621	0.3343907315	0.3351762345	0.0007855030	0.0110751306
0.4	0.3044459856	0.2822643985	0.2836566768	0.0013922783	0.0221815871
0.5	0.2810485839	0.2431167345	0.2452590445	0.0021423100	0.0379318494
0.6	0.2711293267	0.2124192553	0.2154380879	0.0030188326	0.0587100714
0.7	0.2724639224	0.1876231118	0.1916302316	0.0040071198	0.0848408106
0.8	0.2837566143	0.1671515518	0.1722458626	0.0050943108	0.1166050625
0.9	0.3042134460	0.1499630129	0.1562321836	0.0062691707	0.1542504331
1.0	0.3333333333	0.1353352832	0.1428571429	0.0075218597	0.1979980501



Şekil 6.1 $y(t)$ Kesin çözümü, $P_5(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{2,2}(t)$ Padé yaklaşımı

Elde edilen nümerik sonuçlar ve grafikte görüldüğü gibi Padé yaklaşımı kuvvet serisinden çok daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir.

Şimdi de $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümünde

$$\alpha = \frac{1}{4} \text{ değeri yerine yazılırsa } y(t) = e^{-4t^{\frac{1}{4}}} \quad (6.9)$$

biçiminde elde edilir. Buradan (6.1) denkleminin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.3) seri çözümünde $\alpha = \frac{1}{4}$ değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
 u(t) = & 1 - 4t^{\frac{1}{4}} + 8\sqrt{t} - \frac{32t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{32t}{3} - \frac{128t^{\frac{5}{4}}}{15} + \frac{256t^{\frac{3}{2}}}{45} - \frac{1024t^{\frac{7}{4}}}{315} \\
 & + \frac{512t^2}{315} - \frac{2048t^{\frac{9}{4}}}{2835} + \frac{4096t^{\frac{5}{2}}}{14175} - \frac{16384t^{\frac{11}{4}}}{155925} + O(t^3)
 \end{aligned} \quad (6.10)$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Elde edilen seri çözümün ilk on terimi,

$$P_{10}(t) = 1 - 4t^{\frac{1}{4}} + 8\sqrt{t} - \frac{32t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{32t}{3} - \frac{128t^{\frac{5}{4}}}{15} + \frac{256t^{\frac{3}{2}}}{45} - \frac{1024t^{\frac{7}{4}}}{315} + \frac{512t^2}{315} - \frac{2048t^{\frac{9}{4}}}{2835} \quad (6.11)$$

olduğu görülür.

Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.11) seri çözümünde $t^{\frac{1}{4}} = x$ dersek,

$$u(x) = 1 - 4x + 8x^2 - \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^4 - \frac{128}{15}x^5 + \frac{256}{45}x^6 - \frac{1024}{315}x^7 + \frac{512}{315}x^8 - \frac{2048}{2835}x^9 \quad (6.12)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz.

Buradan on terimli kuvvet serisinin [5,4] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplayıp ve daha sonra tekrar $t^{\frac{1}{4}} = x$ dönüşümü yaparsak,

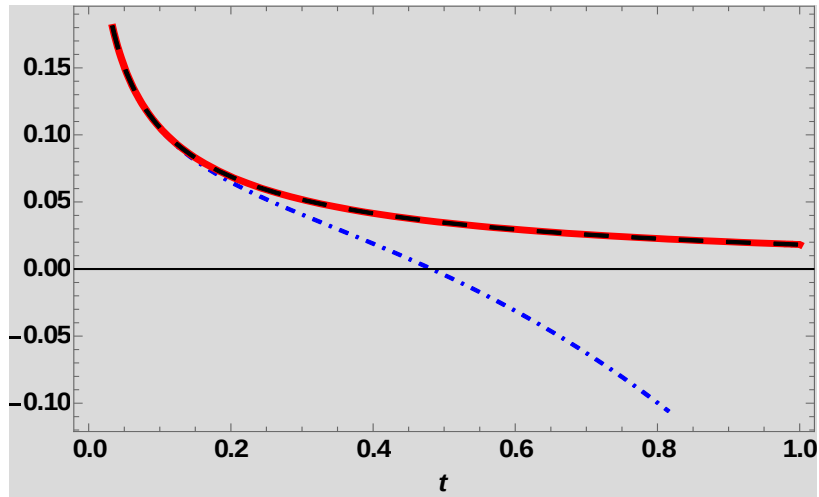
$$r_{5,4}(t) = \frac{1 - \frac{20t^{\frac{1}{4}}}{9} + \frac{20t^{\frac{1}{2}}}{9} - \frac{80t^{\frac{3}{4}}}{63} + \frac{80t}{189} - \frac{64t^{\frac{5}{4}}}{945}}{1 + \frac{16t^{\frac{1}{4}}}{9} + \frac{4t^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{32t^{\frac{3}{4}}}{63} + \frac{16t}{189}} \quad (6.13)$$

biçiminde Padé denklemi elde edilir.

Daha sonra $y(t)$, $P_{10}(t)$ ve $r_{5,4}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.2. ve Şekil 6.2).

Çizelge 6.2. $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_{10}(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{5,4}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

$\alpha = 0.25$					
t	$P_{10}(t)$	$y(t)$	$r_{5,4}(t)$	$ y(t) - r_{5,4}(t) $	$ y(t) - P_{10}(t) $
0.1	0.1047094162	0.1054661426	0.1054650528	0.10898×10^{-5}	0.0007567264
0.2	0.06476555881	0.06890950065	0.06890507343	0.981520×10^{-5}	0.00414394184
0.3	0.04062262436	0.05180175666	0.05179194146	0.981520×10^{-5}	0.01117913230
0.4	0.01896036232	0.04154064577	0.04152357410	0.00001707167	0.02258028345
0.5	-0.0043178985	0.03461093311	0.03458488674	0.00002604637	0.03892883161
0.6	-0.0311363685	0.02958620875	0.02954959397	0.00003661478	0.06072257725
0.7	-0.0626370982	0.02576431518	0.02571564365	0.00004867153	0.08840141338
0.8	-0.0996070886	0.02275508969	0.02269296436	0.00006212533	0.1223621783
0.9	-0.1426454091	0.02032273668	0.02024583943	0.00007689725	0.1629681458
1.0	-0.1922398589	0.01831563889	0.01822272216	0.00009291673	0.2105554978



$$\begin{aligned}
 & \cdots P_{10}(t) = 1 - 4\sqrt[4]{t} + 8\sqrt{t} - \frac{32t^{3/4}}{3} + \frac{32t}{3} - \frac{128t^{5/4}}{15} + \frac{256t^{3/2}}{45} - \frac{1024t^{7/4}}{315} + \frac{512t^2}{315} - \frac{2048t^{9/4}}{2835} \\
 & \text{--- } y(t) = e^{-4\sqrt[4]{t}} \\
 & \text{-- } [5, 4] = \frac{1 - \frac{20\sqrt[4]{t}}{9} + \frac{20\sqrt{t}}{9} - \frac{80t^{3/4}}{63} + \frac{80t}{189} - \frac{64t^{5/4}}{945}}{1 + \frac{16\sqrt[4]{t}}{9} + \frac{4\sqrt{t}}{3} + \frac{32t^{3/4}}{63} + \frac{16t}{189}}
 \end{aligned}$$

Şekil 6.2. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_{10}(t)$ Seri çözüm ve $r_{5,4}(t)$ Padé yaklaşımı

$y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümünde

$$\alpha = \frac{3}{4} \text{ için ; } y(t) = e^{\left(\frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3}\right)} \quad (6.14)$$

elde edilir.

Burada (6.1) denkleminin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.3) seri çözümünde $\alpha = \frac{3}{4}$ değerini yerine yazarsak

$$u(t) = 1 - \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{32t^{\frac{9}{4}}}{81} + \frac{32t^3}{243} - \frac{128t^{\frac{15}{4}}}{3645} + \frac{256t^{\frac{9}{2}}}{32805} - \frac{1024t^{\frac{21}{4}}}{688905} + O(t^6) \quad (6.15)$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün ilk dört terimi,

$$P_4(t) = 1 - \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{32t^{\frac{9}{4}}}{81} \quad (6.16)$$

olduğu görülür.

Daha sonra Padé yaklaşımı için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.15)

seri çözümünde $t^{\frac{3}{4}} = x$ yazarsak,

$$u(x) = 1 - \frac{4x}{3} + \frac{8x^2}{9} - \frac{32x^3}{81} + \frac{32x^4}{243} - \frac{128x^5}{3645} \dots \quad (6.17)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz.

Buradan dört terimli kuvvet serisi için [2,1] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant

denklemlerinden hesaplanırsa ve daha sonra tekrar $t^{\frac{3}{4}} = x$ dönüşümü yaparsak,

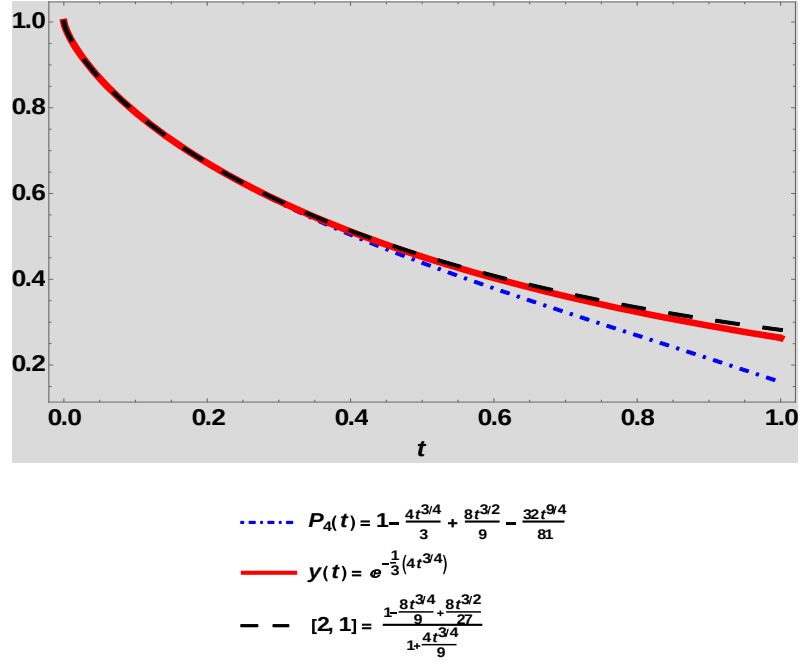
$$r_{2,1}(t) = \frac{1 - \frac{8t^{\frac{3}{4}}}{9} + \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{27}}{1 + \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{9}} \quad (6.18)$$

biçiminde Padé denklemi elde edilir.

$y(t)$, $P_4(t)$ ve $r_{2,1}(t)$ için elde ettiğimiz nümerik değerleri ve grafikleri aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.3 ve Şekil 6.3).

Çizelge 6.3. $y(t) = e^{-\frac{1}{t^\alpha}}$ kesin çözümün $\alpha = 0.75$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_4(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{2,1}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.75$				
t	$P_4(t)$	$y(t)$	$r_{2,1}(t)$	$ y(t) - r_{2,1}(t) $	$ y(t) - P_4(t) $
0.1	0.7887836181	0.7889092993	0.7889463407	0.0000370414	0.0001256812
0.2	0.6701772163	0.6711519766	0.6714170777	0.0002651011	0.0009747603
0.3	0.5792652314	0.5824685643	0.5832822635	0.0008136992	0.0032033329
0.4	0.5039729509	0.5113857084	0.5131571845	0.0017714761	0.0074127575
0.5	0.4384134394	0.4525736606	0.4557735793	0.0031999187	0.0141602212
0.6	0.3789712834	0.4029368242	0.4080780859	0.0051412617	0.0239655408
0.7	0.3231415358	0.3604576615	0.3680812835	0.0076236220	0.0373161257
0.8	0.2690535912	0.3237244199	0.3343889703	0.0106645504	0.0546708287
0.9	0.2152373247	0.2917003754	0.3059739617	0.0142735863	0.0764630507
1.0	0.1604938272	0.2635971382	0.2820512821	0.0184541439	0.1031033110



Şekil 6.3. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_4(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{2,1}(t)$ Padé yaklaşımı

Şimdi de $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümünde

$$\alpha = 1 \text{ için ; } y(t) = e^{-t} \quad (6.19)$$

elde ederiz.

Daha sonra (6.1) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.3) seri çözümünde $\alpha = 1$ değerini yerine yazarsak

$$u(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} - \frac{t^7}{5040} - \frac{t^8}{40320} + O(t^9) \quad (6.20)$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün ilk üç terimli kuvvet serisinin

$$P_3(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \quad (6.21)$$

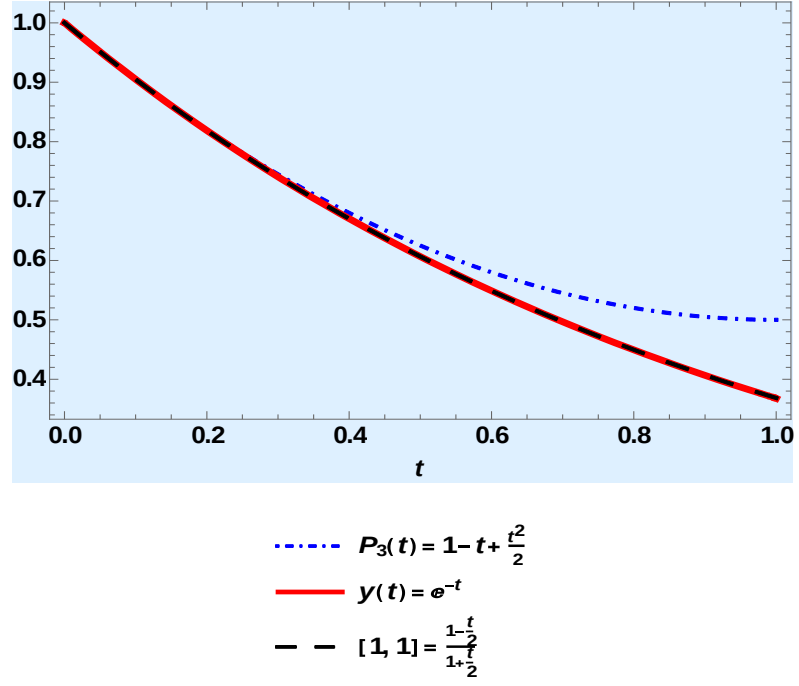
olduğu görülür. Daha sonra $[1,1]$ dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplanırsa,

$$r_{1,1}(t) = \frac{1 - \frac{t}{2}}{1 + \frac{t}{2}} \quad (6.22)$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $y(t)$, $P_3(t)$ ve $r_{1,1}(t)$ aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.4 ve Şekil 6.4).

Çizelge 6.4. $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_3(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{1,1}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 1$				
t	$P_3(t)$	$y(t)$	$r_{1,1}(t)$	$ y(t) - r_{1,1}(t) $	$ y(t) - P_3(t) $
0.1	0.9050000000	0.9048374180	0.9047619048	0.0000755132	0.0001625820
0.2	0.8200000000	0.8187307531	0.8181818182	0.0005489349	0.0012692469
0.3	0.7450000000	0.7408182207	0.7391304348	0.0016877859	0.0041817793
0.4	0.6800000000	0.6703200460	0.6666666667	0.0036533793	0.0096799540
0.5	0.6250000000	0.6065306597	0.6000000000	0.0065306597	0.0184693403
0.6	0.5800000000	0.5488116361	0.5384615385	0.0103500976	0.0311883639
0.7	0.5450000000	0.4965853038	0.4814814815	0.0151038223	0.0484146962
0.8	0.5200000000	0.4493289641	0.4285714286	0.0207575355	0.0706710359
0.9	0.5050000000	0.4065696597	0.3793103448	0.0272593149	0.0984303403
1.0	0.5000000000	0.3678794412	0.3333333333	0.0345461079	0.1321205588



Şekil 6.4. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_3(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{1,1}(t)$ Padé yaklaşımı

Elde edilen bu değerler karşılaştırmalı olarak aşağıdaki çizelgede verilmiştir (Çizelge 6.5).

Çizelge 6.5 $y(t) = e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümleri $P_{10}(t)$, $P_4(t)$, $P_3(t)$ ve Padé yaklaşımları $r_{5,4}(t)$, $r_{2,1}(t)$, $r_{1,1}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.75$			$\alpha = 1$		
t	$P_{10}(t)$	$y(t)$	$r_{5,4}(t)$	$P_4(t)$	$y(t)$	$r_{2,1}(t)$	$P_3(t)$	$y(t)$	$r_{1,1}(t)$
0.1	0.1047094162	0.1054661426	0.1054650528	0.7887836181	0.7889092993	0.7889463407	0.9050000000	0.9048374180	0.9047619048
0.2	0.06476555881	0.06890950065	0.06890507343	0.6701772163	0.6711519766	0.6714170777	0.8200000000	0.8187307531	0.8181818182
0.3	0.04062262436	0.05180175666	0.05179194146	0.5792652314	0.5824685643	0.5832822635	0.7450000000	0.7408182207	0.7391304348
0.4	0.01896036232	0.04154064577	0.04152357410	0.5039729509	0.5113857084	0.5131571845	0.6800000000	0.6703200460	0.6666666667
0.5	-0.0043178985	0.03461093311	0.03458488674	0.4384134394	0.4525736606	0.4557735793	0.6250000000	0.6065306597	0.6000000000
0.6	-0.0311363685	0.02958620875	0.02954959397	0.3789712834	0.4029368242	0.4080780859	0.5800000000	0.5488116361	0.5384615385
0.7	-0.0626370982	0.02576431518	0.02571564365	0.3231415358	0.3604576615	0.3680812835	0.5450000000	0.4965853038	0.4814814815
0.8	-0.0996070886	0.02275508969	0.02269296436	0.2690535912	0.3237244199	0.3343889703	0.5200000000	0.4493289641	0.4285714286
0.9	-0.1426454091	0.02032273668	0.02024583943	0.2152373247	0.2917003754	0.3059739617	0.5050000000	0.4065696597	0.3793103448
1.0	-0.1922398589	0.01831563889	0.01822272216	0.1604938272	0.2635971382	0.2820512821	0.5000000000	0.3678794412	0.3333333333

Uygulama 6.2:

$y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$y^{(\alpha)} = 1 + 2y + y^2 \quad (6.23)$$

kesirli Riccati denklemini alalım. Bu denklemin kesin çözümü,

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha} \quad (6.24)$$

olarak verilmiştir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Burada (6.23) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen seri çözümü

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{\alpha^2} + \frac{t^{3\alpha}}{\alpha^3} + \frac{t^{4\alpha}}{\alpha^4} + \frac{t^{5\alpha}}{\alpha^5} + \frac{t^{6\alpha}}{\alpha^6} + \frac{t^{7\alpha}}{\alpha^7} + \frac{t^{8\alpha}}{\alpha^8} + \frac{t^{9\alpha}}{\alpha^9} + \frac{t^{10\alpha}}{\alpha^{10}} + \dots \quad (6.25)$$

biçimindedir.

Şimdi (6.24) denkleminde,

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ değeri için } y(t) = \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2} - \sqrt{t}} \quad (6.26)$$

olarak bulunur.

Ayrıca (6.25) denkleminde de $\alpha = \frac{1}{2}$ değeri yerine yazılırsa seri çözüm

$$u(t) = 2\sqrt{t} + 4t + 8t^{\frac{3}{2}} + 16t^2 + 32t^{\frac{5}{2}} + 64t^3 + 128t^{\frac{7}{2}} + 256t^4 + 512t^{\frac{9}{2}} + 1024t^5 + 2048t^{\frac{11}{2}} + O(t^6) \quad (6.27)$$

şeklinde elde edilir. Buradan seri çözümün ilk altı terimi,

$$P_6(t) = 2\sqrt{t} + 4t + 8t^{\frac{3}{2}} + 16t^2 + 32t^{\frac{5}{2}} + 64t^3 \quad (6.28)$$

biçiminde elde edilir.

Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.27) denkleminde $t^{\frac{1}{2}} = x$ dönüşümü yapılırsa

$$u(x) = 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + 64x^6 + 128x^7 + 256x^8 + 512x^9 + 1024x^{10} + 2048x^{11} + O(x^{12}) \quad (6.29)$$

şeklinde seri açılım elde edilir.

Altı terimli kuvvet serisinin [4,2] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplanır ve yine $t^{\frac{1}{2}} = x$ dönüşümü yaparsak

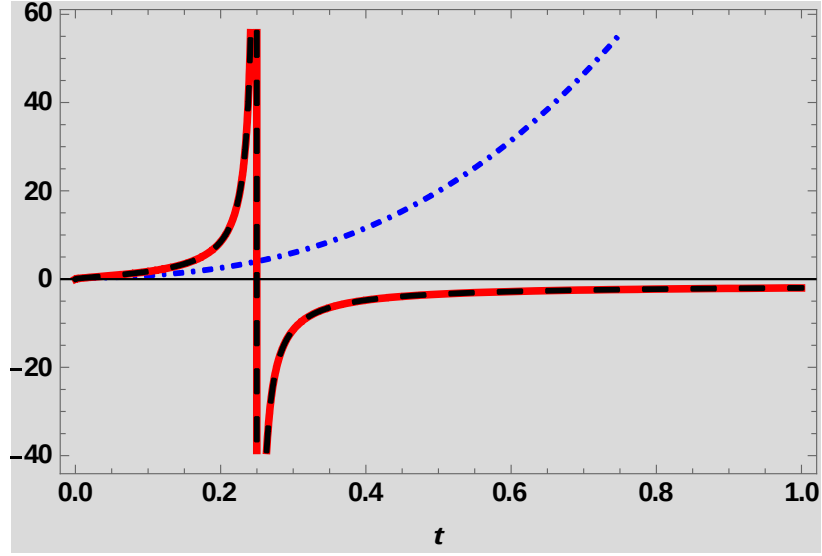
$$r_{4,2}(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1 - 2\sqrt{t}} \quad (6.30)$$

olarak elde ederiz. Daha sonra $y(t)$, $P_6(t)$ ve $r_{4,2}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.6 ve Şekil 6.5).

Çizelge 6.6 $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.5$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü

$P_6(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{4,2}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

$\alpha = 0.5$					
t	$P_6(t)$	$y(t)$	$r_{4,2}(t)$	$ y(t) - r_{4,2}(t) $	$ y(t) - P_6(t) $
0.1	1.610630630	1.720759220	1.720759220	0.	0.1101285901
0.2	4.134402346	8.472135955	8.472135956	0.	4.337733609
0.3	8.355420218	-11.47722558	-11.47722558	0.	19.83264580
0.4	14.78294109	-4.774851774	-4.774851774	0.	19.55779286
0.5	23.89949494	-3.414213562	-3.414213566	0.	27.31370850
0.6	36.17461098	-2.820852385	-2.820852386	0.	38.99546337
0.7	52.06944541	-2.485177807	-2.485177808	0.	54.55462322
0.8	72.03905727	-2.267661083	-2.267661082	0.	74.30671836
0.9	96.53375743	-2.114371768	-2.114371768	0.	98.64812920
1.0	126.	-2.	-2.	0.	128.



$$\cdots P_6(t) = 2\sqrt{t} - 4t + 8t^2 - 16t^3 + 32t^4 - 64t^5$$

$$\text{— } y(t) = \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2} - \sqrt{t}}$$

$$\text{-- } r_{4,2}(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1 - 2\sqrt{t}}$$

Şekil 6.5. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_6(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{4,2}(t)$ Padé yaklaşımı

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha} \text{ kesin çözümünde}$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \text{ değeri yazılırsa, } y(t) = \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} - t^{\frac{1}{4}}} \quad (6.31)$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra (6.23) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.25) seri çözümünde $\alpha = \frac{1}{4}$ değerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
 u(t) = & 4t^{\frac{1}{4}} + 16t^{\frac{1}{2}} + 64t^{\frac{3}{4}} + 256t + 1024t^{\frac{5}{4}} \\
 & + 4096t^{\frac{3}{2}} + 16384t^{\frac{7}{4}} + 65536t^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün ilk sekiz terimi,

$$\begin{aligned}
 P_8(t) = & 4t^{\frac{1}{4}} + 16t^{\frac{1}{2}} + 64t^{\frac{3}{4}} + 256t + 1024t^{\frac{5}{4}} \\
 & + 4096t^{\frac{3}{2}} + 16384t^{\frac{7}{4}} + 65536t^2
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

olarak buluruz. Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.33) denkleminde $t^{\frac{1}{4}} = x$ dersek,

$$\begin{aligned}
 u(x) = & 4x + 16x^2 + 64x^3 + 256x^4 + 1024x^5 \\
 & + 4096x^6 + 16384x^7 + 65536x^8 + \dots
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz. Buradan on terimli kuvvet serisinin [5,3] dereceli Padé yaklaşımını (4.8) determinant denklemlerinden hesaplayıp ve daha sonra tekrar $t^{\frac{1}{4}} = x$ dönüşümü yaparsak,

$$r_{5,3}(t) = \frac{4t^{\frac{1}{4}}}{1 - 4t^{\frac{1}{4}}} \tag{6.35}$$

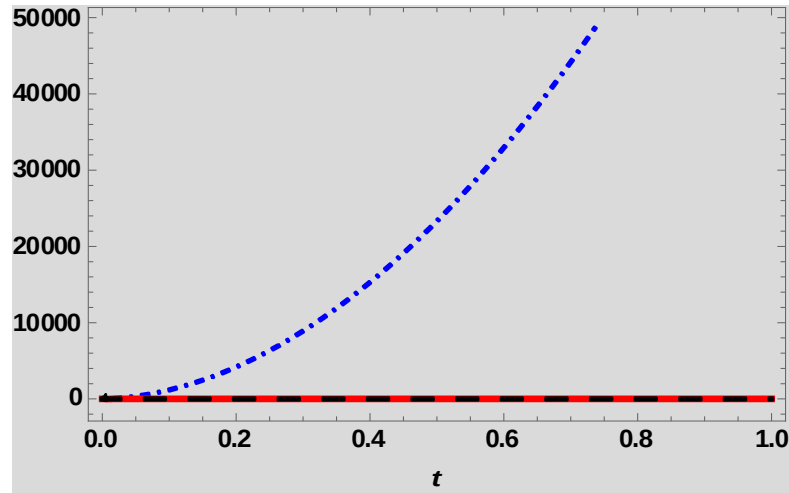
biçiminde Padé yaklaşımını elde ederiz

Daha sonra $y(t)$, $P_8(t)$ ve $r_{5,3}(t)$ 'i nümerik değerlerini aşağıdaki tablo ve şekilde karşılaştıralım (Çizelge 6.7 ve Şekil 6.6).

Çizelge 6.7. $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü

$P_8(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{5,3}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

$\alpha = 0.25$					
t	$P_8(t)$	$y(t)$	$r_{5,3}(t)$	$ y(t) - r_{5,3}(t) $	$ y(t) - P_8(t) $
0.1	1178.113941	-1.800406414	-1.800406414	0.	1179.914347
0.2	4184.918012	-1.597028748	-1.597028748	0.	4186.515041
0.3	8905.527551	-1.510117877	-1.510117877	0.	8907.037669
0.4	15291.89499	-1.458487842	-1.458487842	0.	15293.35348
0.5	23314.41792	-1.423085999	-1.423085999	0.	23315.84100
0.6	32952.18876	-1.396755028	-1.396755028	0.	32953.58551
0.7	44189.29315	-1.376114492	-1.376114492	0.	44190.66927
0.8	57013.02306	-1.359328804	-1.359328804	0.	57014.38238
0.9	71412.88559	-1.345302081	-1.345302081	0.	71414.23089
1.0	87380.	-1.333333333	-1.333333333	0.	87381.33333



$$\cdots P_8(t) = 4\sqrt[4]{t} + 16\sqrt{t} + 64t^{3/4} + 256t + 1024t^{5/4} + 4096t^{3/2} + 16384t^{7/4} + 65536t^2$$

$$\text{---} y(t) = \frac{\sqrt[4]{t}}{\frac{1}{4} - \sqrt[4]{t}}$$

$$\text{---} r_{5,3}(t) = \frac{4\sqrt[4]{t}}{1 - 4\sqrt[4]{t}}$$

Şekil 6.6. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_8(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{5,3}(t)$ Padé yaklaşımı

Benzer olarak (6.23) diferensiyel denkleminin $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümünde

$$\alpha = \frac{3}{4} \text{ için, } y(t) = \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4} - t^{\frac{3}{4}}} \quad (6.36)$$

elde edilir. Daha sonra (6.23) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.25) seri çözümünde $\alpha = \frac{3}{4}$ değerini yerine yazarsak,

$$u(t) = \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{16t^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{64t^{\frac{9}{4}}}{27} + \frac{256t^3}{81} + \frac{1024t^{\frac{15}{4}}}{243} + \frac{4096t^{\frac{9}{2}}}{729} + \dots \quad (6.37)$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün altı terimi,

$$P_6(t) = \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{16t^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{64t^{\frac{9}{4}}}{27} + \frac{256t^3}{81} + \frac{1024t^{\frac{15}{4}}}{243} + \frac{4096t^{\frac{9}{2}}}{729} \quad (6.38)$$

şeklindedir.

Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.37) denkleminde $t^{\frac{3}{4}} = x$ dersek

$$u(x) = \frac{4x}{3} + \frac{16x^2}{9} + \frac{64x^3}{27} + \frac{256x^4}{81} + \frac{1024x^5}{243} + \frac{4096x^6}{729} + \dots \quad (6.39)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz. Buradan on terimli kuvvet serisinin [4,2] dereceli

Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplayıp sonra yine $t^{\frac{3}{4}} = x$ dersek

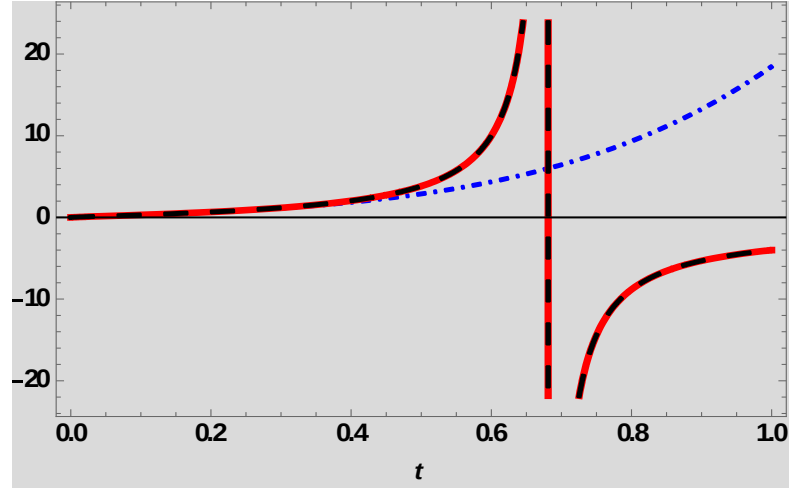
$$r_{4,2}(t) = \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3 \left(1 - \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} \right)} \quad (6.40)$$

biçiminde Padé denklemi elde ederiz.

Daha sonra $y(t)$, $P_6(t)$ ve $r_{4,2}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.8 ve Şekil 6.7).

Çizelge 6.8. $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.75$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_6(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{4,2}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.75$				
t	$P_6(t)$	$y(t)$	$r_{4,2}(t)$	$ y(t) - r_{4,2}(t) $	$ y(t) - P_6(t) $
0.1	0.3107392998	0.3107945210	0.3107945210	0.	0.0000552212395
0.2	0.6605619947	0.6632284268	0.6632284268	0.	0.002666432027
0.3	1.146864851	1.176184137	1.176184137	0.	0.02931928556
0.4	1.850883230	2.036109936	2.036109936	0.	0.1852267072
0.5	2.876233477	3.826365314	3.826365314	0.	0.9501318366
0.6	4.353478640	9.986052385	9.986052385	0.	5.632573745
0.7	6.442834336	-50.06585225	-50.06585225	0.	56.50868658
0.8	9.336347517	-8.820890284	-8.820890284	0.	18.15723780
0.9	13.25982747	-5.309822534	-5.309822534	0.	18.56965001
1.0	18.47462277	-4.	-4.	0.	22.47462277



$$\begin{aligned}
 \cdots P_6(t) &= \frac{4t^{3/4}}{3} + \frac{16t^{3/2}}{9} + \frac{64t^{9/4}}{27} + \frac{256t^3}{81} + \frac{1024t^{15/4}}{243} + \frac{4096t^{9/2}}{729} \\
 \text{--- } y(t) &= \frac{t^{3/4}}{3 - t^{3/4}} \\
 \text{--- } r_{5,3}(t) &= \frac{4t^{3/4}}{3(1 - \frac{4t^{3/4}}{3})}
 \end{aligned}$$

Şekil 6.7. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_6(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{4,2}(t)$ Padé yaklaşımı

(6.23) diferensiyel denkleminin $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümünde

$$\alpha = 1 \text{ değerini yerine yazarsak } y(t) = \frac{t}{1-t} \quad (6.41)$$

elde edilir. (6.23) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.25) seri çözümünde $\alpha = 1$ değeri yerine yazarsak

$$u(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{11} + \dots \quad (6.42)$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün ilk on terimli kuvvet serisinin

$$P_{10}(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + t^{10} \quad (6.43)$$

olduğu görülür. Buradan on terimli kuvvet serisinin [5,5] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplırsak,

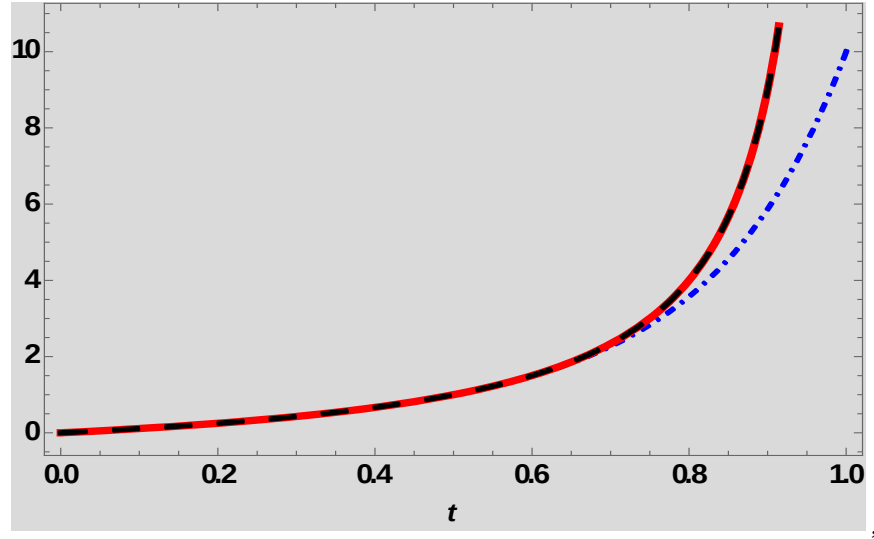
$$r_{5,5}(t) = \frac{t}{1-t} \quad (6.44)$$

olarak elde edilir.

Daha sonra $y(t)$, $P_{10}(t)$ ve $r_{5,5}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.9 ve Şekil 6.8).

Çizelge 6.9. $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü $P_{10}(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{5,5}(t)$ olan denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 1$				
t	$P_{10}(t)$	$y(t)$	$r_{5,5}(t)$	$ y(t) - r_{5,5}(t) $	$ y(t) - P_{10}(t) $
0.1	0.1111111111	0.1111111111	0.1111111111	0.	0.
0.2	0.2499999744	0.2500000000	0.2500000000	0.	0.256×10^{-7}
0.3	0.4285688979	0.4285714286	0.4285714286	0.	0.25307×10^{-5}
0.4	0.6665967616	0.6666666667	0.6666666667	0.	0.0000699051
0.5	0.9990234375	1.0000000000	1.0000000000	0.	0.0009765625
0.6	1.490930074	1.5000000000	1.5000000000	0.	0.0090699264
0.7	2.267422442	2.3333333333	2.3333333333	0.	0.0659108911
0.8	3.570503270	4.0000000000	4.0000000000	0.	0.4294967296
0.9	5.861894039	9.0000000000	9.0000000000	0.	3.138105961
1.0	10.	—	—	—	—



$$\begin{aligned}
 & \cdots P_{10}(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + t^{10} \\
 & \text{---} y(t) = \frac{t}{1-t} \\
 & \text{---} r_{5,5}(t) = \frac{t}{1-t}
 \end{aligned}$$

Şekil 6.8. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_{10}(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{5,5}(t)$ Padé yaklaşımı

Elde ettiğimiz nümerik değerleri aşağıdaki çizelgede karşılaştıralım(Çizelge 6.10).

Çizelge 6.10 $y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha - t^\alpha}$ kesin çözümün $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümleri $P_8(t)$, $P_6(t)$, $P_{10}(t)$ ve Padé Yaklaşımları $r_{5,3}(t)$, $r_{4,2}(t)$, $r_{5,5}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.75$			$\alpha = 1$		
t	$P_8(t)$	$y(t)$	$r_{5,3}(t)$	$P_6(t)$	$y(t)$	$r_{4,2}(t)$	$P_{10}(t)$	$y(t)$	$r_{5,5}(t)$
0.1	1178.113941	-1.800406414	-1.800406414	0.3107392998	0.3107945210	0.3107945210	0.1111111111	0.1111111111	0.1111111111
0.2	4184.918012	-1.597028748	-1.597028748	0.6605619947	0.6632284268	0.6632284268	0.2499999744	0.2500000000	0.2500000000
0.3	8905.527551	-1.510117877	-1.510117877	1.146864851	1.176184137	1.176184137	0.4285688979	0.4285714286	0.4285714286
0.4	15291.89499	-1.458487842	-1.458487842	1.850883230	2.036109936	2.036109936	0.6665967616	0.6666666667	0.6666666667
0.5	23314.41792	-1.423085999	-1.423085999	2.876233477	3.826365314	3.826365314	0.9990234375	1.000000000	1.000000000
0.6	32952.18876	-1.396755028	-1.396755028	4.353478640	9.986052385	9.986052385	1.490930074	1.500000000	1.500000000
0.7	44189.29315	-1.376114492	-1.376114492	6.442834336	-50.06585225	-50.06585225	2.267422442	2.333333333	2.333333333
0.8	57013.02306	-1.359328804	-1.359328804	9.336347517	-8.820890284	-8.820890284	3.570503270	4.000000000	4.000000000
0.9	71412.88559	-1.345302081	-1.345302081	13.25982747	-5.309822534	-5.309822534	5.861894039	9.000000000	9.000000000
1.0	87380.	-1.333333333	-1.333333333	18.47462277	-4.	-4.	10.	—	—

Elde edilen nümerik sonuçlar ve grafikte görüldüğü gibi Padé yaklaşımı kuvvet serisinden çok daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir.

Uygulama 6.3:

$y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$y^{(\alpha)} = 1 - y^2 \quad (6.45)$$

kesirli nonlinear diferensiyel Riccati denkleminin kesin çözümü

$$y(t) = \frac{e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} - 1}{e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} + 1} \quad (6.46)$$

olarak verilmiştir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Burada (6.45) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen seri çözümü

$$y(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{t^{3\alpha}}{3\alpha^3} + \frac{2t^{5\alpha}}{15\alpha^5} - \frac{17t^{7\alpha}}{315\alpha^7} + \frac{62t^{9\alpha}}{2835\alpha^9} - \dots \quad (6.47)$$

biçiminde elde edilir. Şimdi (6.46) denkleminde

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ için, } y(t) = \frac{e^{4\sqrt{t}} - 1}{e^{4\sqrt{t}} + 1} \quad (6.48)$$

elde ederiz. Ayrıca (6.47) denkleminde de $\alpha = \frac{1}{2}$ değeri yerine yazılırsa seri çözüm

$$u(t) = 2\sqrt{t} - \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{64t^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{2176t^{\frac{7}{2}}}{315} + \frac{31744t^{\frac{9}{2}}}{2835} - \frac{2830336t^{\frac{11}{2}}}{155925} + \dots \quad (6.49)$$

şeklinde elde edilir. Buradan seri çözümün ilk üç terimi,

$$P_3(t) = 2\sqrt{t} - \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{64t^{\frac{5}{2}}}{15} \quad (6.50)$$

biçiminde buluruz. Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.49) $t^{\frac{1}{2}} = x$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$u(x) = 2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{64}{15}x^5 - \frac{2176}{315}x^7 + \frac{31744}{2835}x^9 - \frac{2830336}{155925}x^{11} + \dots \quad (6.51)$$

şeklinde seri açılım elde edilir. Buradan, üç terimli kuvvet serisinin $[3,2]$ dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplanır ve yine $t^{\frac{1}{2}} = x$ yazılırsa

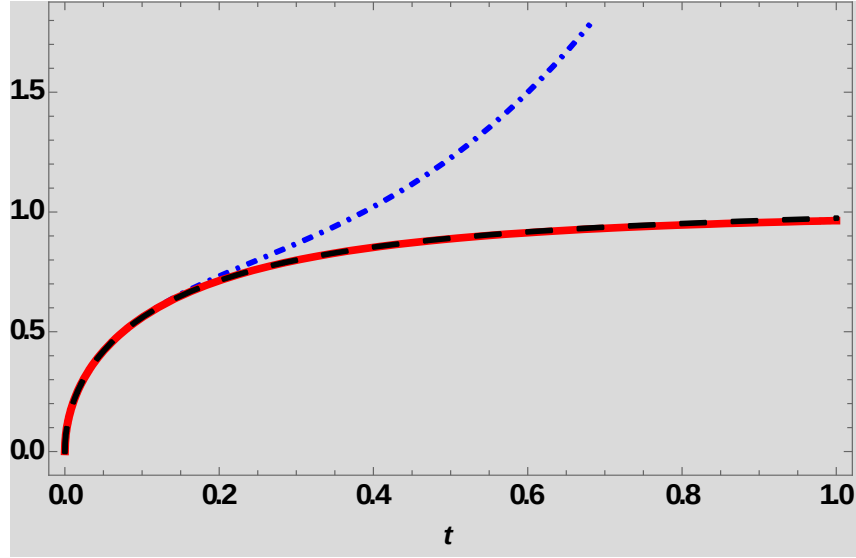
$$r_{3,2}(t) = \frac{\frac{8t^{\frac{3}{2}}}{15} + 2\sqrt{t}}{1 + \frac{8t}{5}} \quad (6.52)$$

şeklinde Padé yaklaşımı elde ederiz. Daha sonra $y(t)$, $P_3(t)$ ve $r_{3,2}(t)$ 'i aşağıdaki tablo ve şekilde karşılaştırmaları verilmiştir (Çizelge 6.11 ve Şekil 6.9).

Çizelge 6.11 $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 0.5$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü

$P_3(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{3,2}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.5$				
t	$P_3(t)$	$y(t)$	$r_{3,2}(t)$	$ y(t) - r_{3,2}(t) $	$ y(t) - P_3(t) $
0.1	0.5616205124	0.5597407231	0.5597594938	0.0000187707	0.0018797893
0.2	0.7322377270	0.7135735259	0.7137348292	0.0001613033	0.0186642011
0.3	0.8675925312	0.7988569250	0.7993788676	0.0005219426	0.0687356062
0.4	1.022048140	0.8524123942	0.8535578726	0.0011454784	0.1696357458
0.5	1.225651754	0.8883855616	0.8904307611	0.0020451995	0.3372661924
0.6	1.499619151	0.9136522960	0.9168695265	0.0032172305	0.5859668550
0.7	1.860731898	0.9319892787	0.9366382689	0.0046489902	0.9287426193
0.8	2.323125557	0.9456395295	0.9519634430	0.0063239135	1.377486028
0.9	2.899176159	0.9560114440	0.9642354832	0.0082240392	1.943164715
1.0	3.600000000	0.9640275801	0.9743589744	0.0103313943	2.635972420



$$\begin{aligned}
 \cdots \quad P_3(t) &= 2\sqrt{t} - \frac{8t^{3/2}}{3} + \frac{64t^{5/2}}{15} \\
 \text{---} \quad y(t) &= \frac{e^{4\sqrt{t}} - 1}{e^{4\sqrt{t}} + 1} \\
 \text{---} \quad r_{3,2}(t) &= \frac{\frac{8t^{3/2}}{15} + 2\sqrt{t}}{1 + \frac{8t}{5}}
 \end{aligned}$$

Şekil 6.9. $y(t)$ Kesin çözümü, $P_3(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{3,2}(t)$ Padé yaklaşımı

Şimdide (6.45) diferansiyel denkleminin $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{-t}t^\alpha} - 1}{e^{\frac{2}{-t}t^\alpha} + 1}$ kesin çözümünde

$$\alpha = \frac{1}{4} \text{ değeri için, } y(t) = \frac{e^{8t^{\frac{1}{4}}} - 1}{e^{8t^{\frac{1}{4}}} + 1} \quad (6.53)$$

elde edilir. Daha sonra (6.45) denkleminin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.47) seri çözümünde $\alpha = \frac{1}{4}$ değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
 u(t) = & 4t^{\frac{1}{4}} - \frac{64t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{2048t^{\frac{5}{4}}}{15} - \frac{278528t^{\frac{7}{4}}}{315} + \frac{16252928t^{\frac{9}{4}}}{2835} - \frac{5796528128t^{\frac{11}{4}}}{155925} \\
 & + \frac{1465926025216t^{\frac{13}{4}}}{6081075} - \frac{998117113593856t^{\frac{15}{4}}}{638512875} + \dots
 \end{aligned} \quad (6.54)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz. Buradan seri çözümün yedi terimi,

$$P_7(t) = 4t^{\frac{1}{4}} - \frac{64t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{2048t^{\frac{5}{4}}}{15} - \frac{278528t^{\frac{7}{4}}}{315} + \frac{16252928t^{\frac{9}{4}}}{2835} - \frac{5796528128t^{\frac{11}{4}}}{155925} + \frac{1465926025216t^{\frac{13}{4}}}{6081075} \quad (6.55)$$

biçiminde buluruz. Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.54) denkleminde $t^{\frac{1}{4}} = x$ değeri yerine yazılırsa,

$$u(x) = 4x - \frac{64}{3}x^3 + \frac{2048}{15}x^5 - \frac{278528}{315}x^7 + \frac{16252928}{2835}x^9 - \frac{5796528128}{155925}x^{11} + \frac{1465926025216}{6081075}x^{13} - \frac{998117113593856}{638512875}x^{15} + \dots \quad (6.56)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz.

Buradan, yedi terimli kuvvet serisinin [8,5] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplayıp ve daha sonra yine $t^{\frac{1}{4}} = x$ dönüşümü yaparsak

$$r_{8,5}(t) = \frac{4t^{\frac{1}{4}} + \frac{1216t^{\frac{3}{4}}}{165} + \frac{2048t^{\frac{5}{4}}}{1485} - \frac{16384t^{\frac{7}{4}}}{155925}}{1 + \frac{6656t}{1485} + \frac{1184t^2}{165}} \quad (6.57)$$

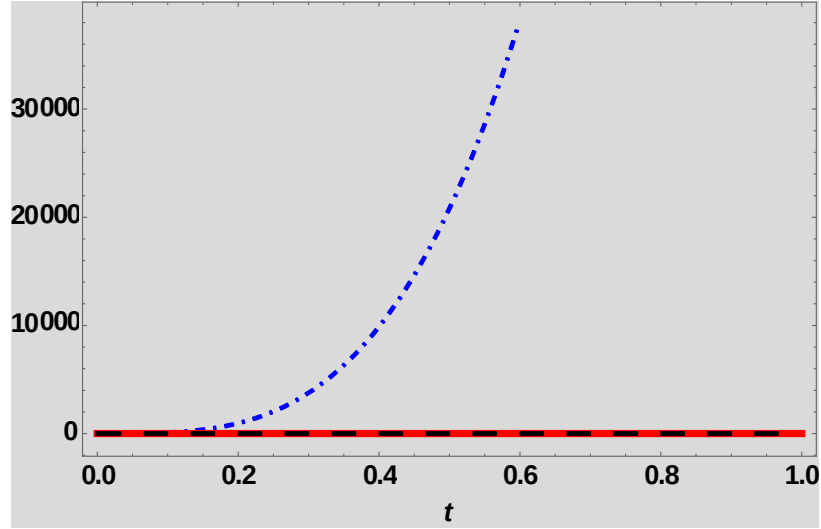
elde edilir.

Daha sonra $y(t)$, $P_7(t)$ ve $r_{8,5}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıracağız (Çizelge 6.12 ve Şekil 6.10).

Çizelge 6.12 $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 0.25$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri

çözümü $P_7(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{8,5}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.25$				
t	$P_{13}(t)$	$y(t)$	$r_{8,5}(t)$	$ y(t) - r_{8,5}(t) $	$ y(t) - P_7(t) $
0.1	92.10080334	0.9779985105	0.9779951453	0.33652×10^{-5}	91.12280483
0.2	959.9755178	0.9905478452	0.9905313585	0.0000164867	958.9849700
0.3	3759.709384	0.9946475190	0.9946076212	0.0000398978	3758.714736
0.4	9865.269194	0.9965546948	0.9964815467	0.0000731481	9864.272639
0.5	20802.99100	0.9976070332	0.9974913775	0.0001156557	20801.99339
0.6	38219.38105	0.9982508436	0.9980839967	0.0001668469	38218.38280
0.7	63861.37562	0.9986732808	0.9984470907	0.0002261901	63860.37695
0.8	99562.80754	0.9989649477	0.9986717438	0.0002932039	99561.80858
0.9	147234.4694	0.9991743138	0.9988068668	0.0003674470	147233.4702
1.0	208856.4670	0.9993292997	0.9988807738	0.0004485259	208855.4677



$$\begin{aligned}
 \text{---} \quad P_7(t) &= 4\sqrt[4]{t} - \frac{64t^{3/4}}{3} + \frac{2048t^{5/4}}{15} - \frac{278528t^{7/4}}{315} + \frac{16252928t^{9/4}}{2835} - \frac{5796528128t^{11/4}}{155925} + \frac{1465926025216t^{13/4}}{6081075} \\
 \text{---} \quad y(t) &= \frac{-1 + e^{8\sqrt[4]{t}}}{1 + e^{8\sqrt[4]{t}}} \\
 \text{---} \quad [8, 5] &= \frac{4\sqrt[4]{t} + \frac{1216t^{3/4}}{165} + \frac{2048t^{5/4}}{1785} + \frac{16384t^{7/4}}{155925}}{1 + \frac{6656t}{1485} + \frac{1184\sqrt{t}}{165}}
 \end{aligned}$$

Şekil 6.10. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_7(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{8,5}(t)$ Padé yaklaşımı

$$y(t) = \frac{e^{\frac{3}{4}t^{\frac{3}{4}}} - 1}{e^{\frac{3}{4}t^{\frac{3}{4}}} + 1} \text{ kesin çözümünde}$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \text{ için, } y(t) = \frac{e^{\left(\frac{\frac{3}{4}t^{\frac{3}{4}}}{3}\right)} - 1}{e^{\left(\frac{\frac{3}{4}t^{\frac{3}{4}}}{3}\right)} + 1} \quad (6.58)$$

elde edilir. Daha sonra (6.45) denkleminin uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.47) seri çözümünde $\alpha = \frac{3}{4}$ değerini yerine yazarsak

$$u(t) = \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} - \frac{64t^{\frac{9}{4}}}{81} + \frac{2048t^{\frac{15}{4}}}{3645} - \frac{278528t^{\frac{21}{4}}}{688905} + \frac{16252928t^{\frac{27}{4}}}{55801305} + \dots \quad (6.59)$$

biçiminde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün üç terimli kuvvet serisinin

$$P_3(t) = \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} - \frac{64t^{\frac{9}{4}}}{81} + \frac{2048t^{\frac{15}{4}}}{3645} \quad (6.60)$$

olduğu görülür. Daha sonra Padé yaklaşımını hesaplamak için tam sayılı kuvvet serisi elde edebilmek amacıyla (6.59) denkleminde $t^{\frac{3}{4}} = x$ dersek

$$u(x) = \frac{4x}{3} - \frac{64x^3}{81} + \frac{2048x^5}{3645} - \frac{278528x^7}{688905} + \frac{162529289}{55801305} + \dots \quad (6.61)$$

şeklinde kuvvet serisi elde ederiz.

Buradan üç terimli kuvvet serisinin [1,4] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplayıp ve daha sonra tekrar $t^{\frac{3}{4}} = x$ dönüşümü yaptıktan sonra

$$r_{1,4}(t) = \frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3 \left(1 + \frac{16t^{\frac{3}{2}}}{27} - \frac{256t^3}{3645} \right)} \quad (6.62)$$

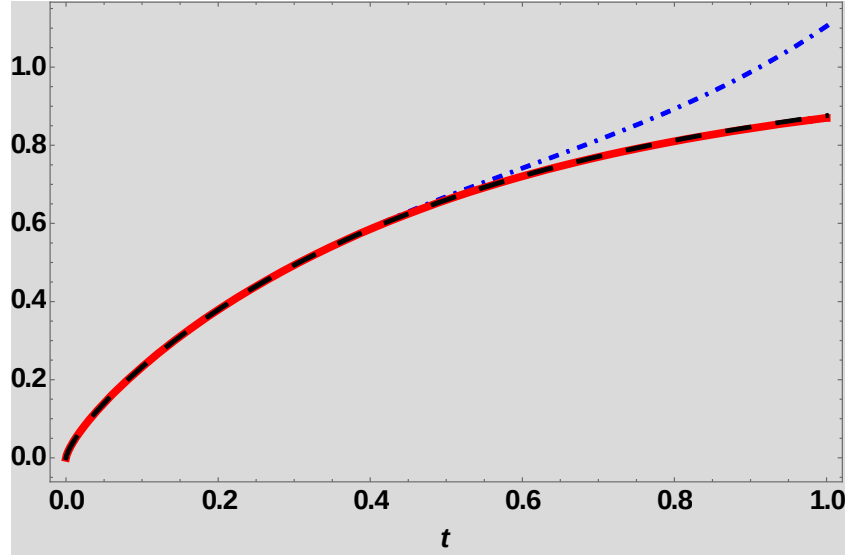
şeklinde Padé yaklaşımı elde edilir.

Daha sonra $y(t)$, $P_3(t)$ ve $r_{1,4}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.13 ve Şekil 6.11).

Çizelge 6.13. $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 0.75$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri

çözümü $P_3(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{1,4}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.75$				
t	$P_3(t)$	$y(t)$	$r_{1,4}(t)$	$ y(t) - r_{1,4}(t) $	$ y(t) - P_3(t) $
0.1	0.2327606460	0.2327584232	0.2327585085	0.853×10^{-7}	0.22228×10^{-5}
0.2	0.3789684748	0.3788871922	0.3788902076	0.30154×10^{-5}	0.0000812826
0.3	0.4940014134	0.4933512697	0.4933743545	0.0000230848	0.0006501437
0.4	0.5881798522	0.5853949073	0.5854890723	0.0000941650	0.0027849449
0.5	0.6684626560	0.6599949834	0.6602667728	0.0002717894	0.0084676726
0.6	0.7413695685	0.7206401598	0.7212707182	0.0006305584	0.0207294087
0.7	0.8137342219	0.7700215814	0.7712809464	0.0012593650	0.0437126405
0.8	0.8929645658	0.8102865003	0.8125429284	0.0022564281	0.0826780655
0.9	0.9871447543	0.8431665966	0.8468918357	0.0037252391	0.1439781577
1.0	1.105075446	0.8700616618	0.8758334835	0.0057718217	0.2350137842



$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{---} \text{---} P_3(t) &= \frac{4t^{3/4}}{3} - \frac{64t^{9/4}}{81} + \frac{2048t^{15/4}}{3645} \\
 \text{---} y(t) &= \frac{\frac{8t^{3/4}}{3}}{\frac{1+e^{-\frac{8t^{3/4}}{3}}}{1+e^{-\frac{8t^{3/4}}{3}}}} \\
 \text{---} [1, 4] &= \frac{4t^{3/4}}{3 \left(1 + \frac{16t^{3/2}}{27} - \frac{256t^3}{3645} \right)}
 \end{aligned}$$

Şekil 6.11. $y(t)$ Kesin çözüm, $P_3(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{1,4}(t)$ Padé yaklaşımı

Benzer şekilde $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t^\alpha}} - 1}{e^{\frac{2}{t^\alpha}} + 1}$ kesin çözümünde

$$\alpha = 1 \text{ için } y(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \quad (6.63)$$

elde edilir. Daha sonra (6.45) denkleminin uyumlu kesirli diferensiyel dönüşüm metodu yardımıyla elde edilen (6.47) seri çözümünde $\alpha = 1$ değerini yerine yazarsak,

$$u(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} - \frac{17t^7}{315} + \dots \quad (6.64)$$

şeklinde seri çözüm elde ederiz. Buradan seri çözümün ilk iki terimli kuvvet serisinin

$$P_2(t) = t - \frac{t^3}{3} \quad (6.65)$$

olduğu görülür. Buradan iki terimli kuvvet serisinin [1,2] dereceli Padé yaklaşımı (4.8) determinant denklemlerinden hesaplırsak aşağıdaki gibi

$$r_{1,2}(t) = \frac{t}{1 + \frac{t^2}{3}} \quad (6.66)$$

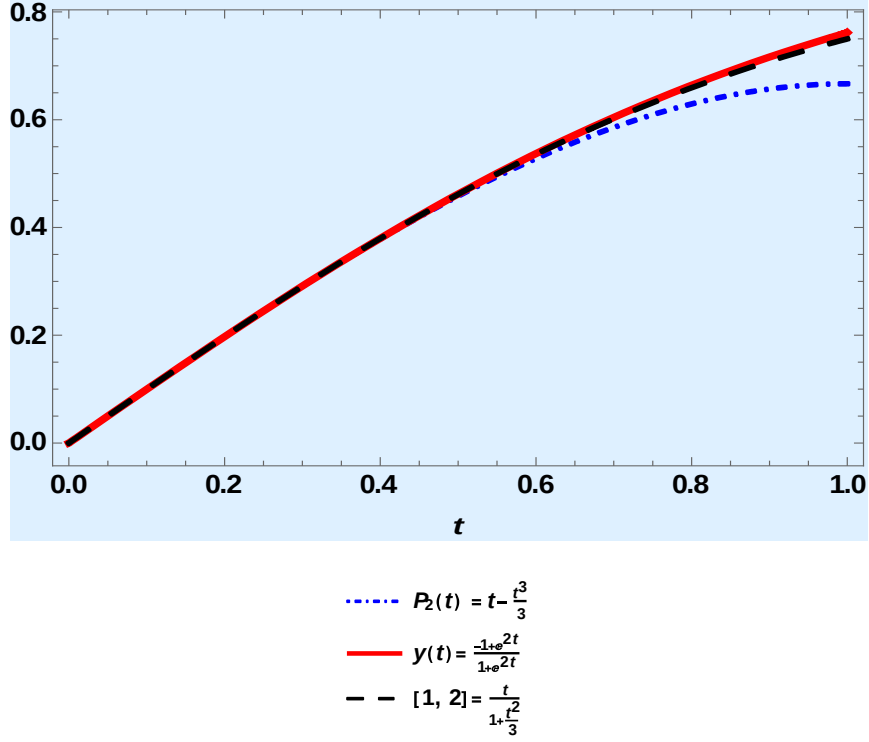
biçiminde Padé yaklaşımı elde ederiz.

Bulduğumuz $y(t)$, $P_2(t)$ ve $r_{1,2}(t)$ denklemlerinin nümerik değerlerini aşağıdaki şekil ve çizelgede karşılaştıralım (Çizelge 6.14 ve Şekil 6.12).

Çizelge 6.14. $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{t}} - 1}{e^{\frac{2}{t}} + 1}$ kesin çözümde $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümü

$P_2(t)$ ve Padé Yaklaşımı $r_{1,2}(t)$ olan uyumlu diferensiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

$\alpha = 1$					
t	$P_2(t)$	$y(t)$	$r_{1,2}(t)$	$ y(t) - r_{1,2}(t) $	$ y(t) - P_2(t) $
0.1	0.09966666667	0.09966799456	0.09966777412	0.22044×10^{-6}	0.132789×10^{-5}
0.2	0.1973333333	0.1973753203	0.1973684211	0.68992×10^{-5}	0.0000419870
0.3	0.2910000000	0.2913126124	0.2912621359	0.0000504765	0.0003126124
0.4	0.3786666667	0.3799489622	0.3797468356	0.0002021266	0.0012822955
0.5	0.4583333333	0.4621171572	0.4615384617	0.0005786955	0.0037838239
0.6	0.5280000000	0.5370495670	0.5357142857	0.0013352813	0.0090495670
0.7	0.5856666667	0.6043677771	0.6017191979	0.0026485792	0.0187011104
0.8	0.6293333333	0.6640367702	0.6593406595	0.0046961107	0.0347034369
0.9	0.6570000000	0.7162978702	0.7086614173	0.0076364529	0.0592978702
1.0	0.6666666667	0.7615941560	0.7500000000	0.0115941560	0.0949274893



Şekil 6.12. $y(t)$ kesin çözümü, $P_2(t)$ Kuvvet serisi ve $r_{1,2}(t)$ Padé yaklaşımı

Şekil ve çizelgeler incelendiğinde uyumlu kesirli diferensiyel denklemlerin elde edilen nümerik sonuçlarından görüldüğü gibi Padé yaklaşımı UKDDM ile elde edilen serilerin değerlerinden çok daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir.

Elde ettiğimiz nümerik değerleri aşağıdaki çizelgede karşılaştıralım(Çizelge 6.15).

Çizelge 6.15 $y(t) = \frac{e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} - 1}{e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} + 1}$ kesin çözümünün $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 1$ olduğunda UKDDM ile elde edilen seri çözümler $P_7(t)$, $P_3(t)$, $P_2(t)$ ve Padé

Yaklaşımları $r_{8,5}(t)$, $r_{1,4}(t)$, $r_{1,2}(t)$ olan diferansiyel denklemin nümerik değerlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.75$			$\alpha = 1$		
t	$P_7(t)$	$y(t)$	$r_{8,5}(t)$	$P_3(t)$	$y(t)$	$r_{1,4}(t)$	$P_2(t)$	$y(t)$	$r_{1,2}(t)$
0.1	92.10080334	0.9779985105	0.9779951453	0.2327606460	0.2327584232	0.2327585085	0.09966666667	0.09966799456	0.09966777412
0.2	959.9755178	0.9905478452	0.9905313585	0.3789684748	0.3788871922	0.3788902076	0.19733333333	0.1973753203	0.1973684211
0.3	3759.709384	0.9946475190	0.9946076212	0.4940014134	0.4933512697	0.4933743545	0.29100000000	0.2913126124	0.2912621359
0.4	9865.269194	0.9965546948	0.9964815467	0.5881798522	0.5853949073	0.5854890723	0.37866666667	0.3799489622	0.3797468356
0.5	20802.99100	0.9976070332	0.9974913775	0.6684626560	0.6599949834	0.6602667728	0.45833333333	0.4621171572	0.4615384617
0.6	38219.38105	0.9982508436	0.9980839967	0.7413695685	0.7206401598	0.7212707182	0.52800000000	0.5370495670	0.5357142857
0.7	63861.37562	0.9986732808	0.9984470907	0.8137342219	0.7700215814	0.7712809464	0.58566666667	0.6043677771	0.6017191979
0.8	99562.80754	0.9989649477	0.9986717438	0.8929645658	0.8102865003	0.8125429284	0.62933333333	0.6640367702	0.6593406595
0.9	147234.4694	0.9991743138	0.9988068668	0.9871447543	0.8431665966	0.8468918357	0.65700000000	0.7162978702	0.7086614173
1.0	208856.4670	0.9993292997	0.9988807738	1.105075446	0.8700616618	0.8758334835	0.66666666667	0.7615941560	0.7500000000

7. SONUÇ

Bu çalışmada bazı uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin non-lineer çözümleri verilmiştir. Kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde etkili metotlardan olan diferansiyel dönüşüm metodu kullanılmıştır.

Çalışmamızın uygulamalar kısmındaki sonuçlardan da görüleceği gibi diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri ve bu denklemlerin uyumlu diferansiyel dönüşüm metoduyla elde edilen seri çözümleri ile seri çözümlere ait Padé yaklaşımından elde edilen sonuçlar şekil ve çizelgeler üzerinde karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmada Padé yaklaşımının son derece etkili bir yaklaşım olduğu elde edilen nümerik değerlerden görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Açan, Ö., ve Oturanc, O. F. Y. K. G. (2017). Conformable Variational Iteration Method. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(5), 172-178.
- Andrews, G.E., Askey R. ve Roy R. (2000), “Special Functions”, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ayaz, F. (2004). Solutions of the system of differential equations by differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 147(2), 547-567.
- Bell, W.W, (1968), “Special Functions For Scientists and Engineers”, D. Van Nostrand Company, Toronto.
- Benghorbal, M.M, (2004), “Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals”, Faculty of Graduate Studies (Doktora Tezi), The University of Western Ontario, Canada.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5), 529-539.
- Çelik, E., (2002), “Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü”, Doktora Tezi.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kılbas, A. A., Srivastava ve H.M., Trujillo, J.J., (2006) “Theory and Applications of Fractional Differential Equations”, Elsevier B.V., Amsterdam.
- Podlubny, I., (1999), “Fractional Differential Equations”, Academic Press, San Diego, California.
- Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, 4(1), 75-89.
- Turut, V., (2010), “Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri”, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.

- Ünal, E. ve Gökdoğan, A., 2016, Uyumlu Kesir Mertebeden Chebyshev Diferensiyel Denklemleri ve Kesirsel Chebyshev Polinomları, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 031302 (16), 576-584.
- Ünal, E., ve Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 128, 264-273.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sara BADUR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Midyat / 1991

EĞİTİM

Derece Lise	Adı, İlçe, İl : Midyat İMKB Lisesi	Bitirme Yılı 2007
Üniversite	: Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği, DİYARBAKIR	2013

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015-	TP Fatıma Zehra Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi, Batman	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce