

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**UYUMLU KESİRLİ DİNAMİK DIRAC
SİSTEMİ**

Yasin ERTUĞRUL

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 202

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac Sistemi” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

06/01/2025

(İmza)

Yasin ERTUĞRUL

ÖNSÖZ

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında, beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ocak, 2025

Yasin ERTUĞRUL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SUMMARY.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Temel Kavramlar.....	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	12
3.1. Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac Sistemi.....	12
3.2. Self Adjoint Operator.. ..	13
3.3. Özfonksiyon Açılımı.....	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	23
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
6. KAYNAKLAR.....	29

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

T	: Sturmian Zaman ölççeđi
$T_{\alpha,\Delta}$	: Delta Türev
$T_{\alpha,\nabla}$	: Nabla Türev
L_{maks}	: Maksimal Operatör
L_{min}	: Minimal Operatör
H	: Hilbert Uzayı
$\sigma(t)$	: Sıçrama Operatörü
$\rho(t)$	: Sıçrama Operatörü
R	: Reel Sayılar
C	: Kompleks Sayılar
Q	: Rasyonel Sayılar
N	:Doğal Sayılar
R^n	: Reel Vektör Uzayı
C^n	: Kompleks Vektör Uzayı
$\inf$	: İnfimum
$\sup$	: Supremum

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac Sistemi

Yasin ERTUĞRUL

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ocak, 2025

Bu çalışmada ilk olarak “Uyumlu kesirli dinamik Dirac sistemi” konusunun tarihsel gelişimi incelendi ve gerekli ön bilgiler verildi. Ayrıca çalışmada kullanılan bazı kavramlara ve gerekli olan temel sonuçlara değinildi.

Bir sonraki bölümde, uyumlu kesirli dinamik Dirac sistemi üzerine çalışıldı.

Son olarak ise simetrik uyumlu kesirli dinamik Dirac operatörünün disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları türünden ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli dinamik Dirac sistemi, maksimal ve minimal operatörler, delta ve nabla türevler ve integraller, disipatif ve akretif genişlemeler, sınır değer uzayı ve sınır koşulları.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

The Conformable Fractional Dynamic Dirac System

Yasin ERTUĞRUL

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

January, 2025

In this study, firstly, the historical development of the subject of "Conformable Fractional Dynamic Dirac System" was examined and necessary preliminary information was given. In addition, some concepts used in the study and the necessary basic results were mentioned.

In the next chapter, the conformable fractional dynamic dirac system is studied. Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self- adjoint and, other extensions of the symmetric conformable fractional dynamic Dirac operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: Conformable fractional dynamic Dirac system, maximal and minimal operators, delta and nabla derivatives and integrals, dissipative, accretive extensions, boundary value space and boundary conditions.

1.GİRİŞ

Dirac sistemi, elektron spininin doğal bir tanımını sağladığı, antimaddenin varlığını tahmin ettiği ve aynı zamanda hidrojen atomunun spektrumunu doğru bir şekilde yeniden üretebildiği için fizikte önemli bir rol oynar. Bu sistem birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Bu konularda hem fizik hem de matematik alanında önemli araştırmalar yapılmıştır.

Öte yandan, dinamik denklemler teorisi sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı denklemleri birleştirmeyi amaçlar. Dinamik denklemler çok aktif olan bir araştırma alanıdır. Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılmasının temellerini 1988 yılında Stefan Hilger atmıştır. Son zamanlarda ise matematikçiler zaman ölçeklerinde delta uyumlu ve nabla uyumlu bir türev tanımladılar.

Zhou ve You (Zhou ve You, 2016) zaman ölçeklerinde alternatif bir delta uyumlu türev tanımı verdiler. 2019'da ise Bendouma ve Hammoudi (Bendouma ve Hammoudi, 2019), zaman ölçeklerinde nabla uyumlu bir türev tanımlamışlardır.

Allahverdiev ve Tuna (Allahverdiev ve Tuna, 2022) ise uyumlu kesirli bir Sturm-Liouville problemini sınırlı zaman ölçeklerinde incelediler.

Yine Allahverdiev ve Tuna (Allahverdiev ve Tuna, 2023) zaman ölçekleri üzerinde bir delta/nabla uyumlu Dirac sistemini incelediler. Aynı zamanda bu sistemin temel spektral özelliklerini elde ettiler.

Operatörler teorisinde simetrik operatörlerin genişlemeleriyle alakalı ilk çalışmalar, J. Von Neumann (von Neumann, 1929) sayesinde ele alınmıştır. Von Neumann simetrik operatörlerin nasıl bir koşul şartıyla kendine eş genişlemenin olabileceği ve bu genişlemenin ne şekilde yapılabileceğini göstermiştir. Benzer konu altında , sayılanların yanısıra Krein (Krein, 1947; 1952), Rellich (Rellich, 1951), Birman (Birman, 1956), Vishik (Vishik, 1952), Phillips (Phillips, 1959) gibi isimler de simetrik operatörler ve genişlemeler üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Rofe-Beketov (Rofe-Beketov, 1969) ise lineer bağıntılar yardımı ile simetrik operatörlere ait genişlemelerini 1969 yılında ele almıştır. Yine aynı yöntemle simetrik diferansiyel operatörler konusu üzerinde kendine eş genişlemeleri elde eden diğer matematikçiler ise: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1984) Allahverdiev (Allahverdiev, 1995; 2013; 2014; 2016; 2019), Tuna (Tuna, 2013), Tuna ve Bayrak (Tuna ve Bayrak, 2018), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018) ve Kholkin (Kholkin, 1981) dir.

Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk, vd., 1972) disipatif lineer bağıntılar kullanarak operatör katsayıya sahip ve simetrik olan diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemelerini elde etmişlerdir.

Daha sonraları ayrı ayrı olmak üzere Bruk (Bruk, 1976) ve Kochubei (Kochubei, 1975) sınır değer uzayı kavramını kullanarak simetrik operatörlere ait disipatif ve akretif, aynı zamanda kendine eş ve bunlara ait genişlemeleri konusunda çalışmalar yapmışlardır.

Simetrik operatörlerin bunun gibi tüm genişlemeleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk, vd., 1989) gibi bilim insanlarının çalışmalarına bakılabilir.

Konu oldukça yeni olup, regüler durumda uyumlu kesirli Dirac operatörlerin genişlemeleri ile ilgili literatürde herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu tez çalışmasında uyumlu kesirli dinamik Dirac operatörlerin genişlemeleri ile ilgili çalışmalar yapılacak ve sonuçlar ele alınacaktır. Böylelikle yapılan çalışmaların literatüre katkı sağlaması ve yeni çalışmalara yön vermesi öngörülmektedir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1.Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. U, kompleks bir lineer uzay ve aynı zamanda $\forall x, y \in U$ ve $\lambda \in K$ için, aşağıda verilen şartları gerçekleyen ve (x, y) şeklinde ifade edilen kompleks sayıya x ve y elemanlarına ait iç çarpımı ve aynı zamanda alınan U lineer uzayına da iç çarpım uzayı adı verilir.

$$1. \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$3. \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$4. \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

Ayrıca yukarıda verilen özelliklerin yanısıra,

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle, \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

özelligi de yukarıdaki özellikler yardımı ile elde edilebilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.2. N bir reel veya kompleks vektör uzayı olsun. $\| \cdot \|: N \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$$N1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ veya } \alpha \in \mathbb{C})$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna N de bir norm adı verilir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.3. $C[a, b]$ nin vektör uzayı şartlarını sağladığını biliyoruz. Şimdi de bu uzayda tanımlanan,

$$\|f\|: \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

dönüşümünün norm şartlarını da sağladığını gösterelim.

N1) $\|f\| = \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)| \geq 0$ olduğu açıktır.

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ için } |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ için } f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f=0$

N2) $\|\alpha f\| = \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |(\alpha f)(x)| = \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |\alpha f(x)| = \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |\alpha| |f(x)| = |\alpha| \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)| = |\alpha| \|f\|$

N3) $\|f + g\| = \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |(f + g)(x)| = \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)| + \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$

olduğundan dolayı bu uzay bir normlu uzaydır. (Kreyszig, 1978)

Örnek 2.1.4. R^n uzayı Öklid uzayı olmakla beraber aynı zamanda

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

normuna göre normlu bir uzaydır. (Kreyszig, 1978)

Tanım 2.1.5. $(U, (\cdot, \cdot))$ iç çarpım uzayı ve $u \in U$ olsun. Bu u vektörünün normu,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2\right)} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Üzerinde norm tanımlanmış olan vektör uzayına bir normlu vektör uzayı adı verilir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.6. Yukarıda verilen tanımdan da anlaşılacağı üzere $R, R^2, \dots, C, C^2, \dots$ uzayları ve C^n, R üzerinde sırasıyla vektör uzayları olmakla beraber R^n ise C üzerinde vektör uzayı değildir. Çünkü $C \cdot R \not\subset R$ dir. Yine Determinantı 1 olan kompleks ve reel metrisler bir vektör uzayı değildir. Çünkü bu matrisleri bir α sayısı ile çarparsak eğer determinatı 1 den farklı bir değer olabilir (Kunt, 2012).

Tanım 2.1.7. Eğer bir normlu uzayın her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise bu uzaya tamdır denir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.8. Bilindiği gibi R ve C uzayları tamdır. Bu uzayların tamlığından yararlanarak $\forall n \in N$ için $(R^n, \|\cdot\|)$ ve $(C^n, \|\cdot\|)$ uzaylarının da tam olduğu rahatlıkla gösterilebilir. (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.9. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı normlu bir vektör uzayıdır. Aynı zamanda

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

normuna göre tam uzay yani benzer bir ifade ile $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı üzerindeki tüm Cauchy dizileri U ya ait bir x_0 noktasına yakınsak oluyorsa bu şekildeki U uzaylarına Hilbert Uzayı adı verilir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.10. R^n uzayının Hilbert uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için bu uzayın tam olduğunu göstereceğiz. İç çarpım normunun tanımından,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

elde ederiz. Bu normun da tam olduğunu biliyoruz. O halde R^n uzayının Hilbert uzayı olduğunu ispatlamış bulunuyoruz (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.11. K uzayı, H Hilbert uzayı üzerinde verilen lineer alt uzay olsun. ($K \subseteq H$) ve,

$$T: K \subseteq H \rightarrow H \quad (2.3)$$

dönüşümü, $\forall \alpha, \beta \in C$ ve tüm $x, y \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (2.4)$$

eşitliğini gerçekliyorsay bu durumda elde edilen T dönüşümü lineer operatör şeklinde isimlendirilir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.12. H Hilbert uzayı olmak üzere, H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanmış olan T lineer operatörü için ve $\forall y \in H$ için,

$$\|Ty\| \leq k\|y\| \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir k gerçel (reel) sayısı bulunabiliyorsa T lineer operatörüne, sınırlı lineer operatör adı verilir. Bu k sayılarından en küçük olarak alınan değerine T operatörün normu denir ve bu kavram $\|T\|$ sembolü ile gösterilir.

Bu operatörün normu

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|$$

ifadesi ile de elde edilebilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.13. H bir Hilbert uzayı ve T, H Hilbert uzayı üzerinde lineer operatör şartıyla, T lineer operatörünün tanım kümesi D(T) ve aynı zamanda D(T), H uzayı üzerinde yoğun bir küme olsun. $\forall s, t \in D(T)$ için,

$$(Ts, t) = (s, T^*t) \quad (2.6)$$

eşitliğini gerçekleyen bu T^* operatörüne T lineer operatörünün eşlenik operatörü adı verilir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektör kümesine ise tanım kümesi adı verilir ve $K(T^*)$ ile ifade edilir. T^* ,

i. $(T^*)^* = T$

ii. $(\lambda T)^* = \lambda T^*$

iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$

iv. $(T)^* = L^*T^*$

v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken)

özelliklerine sahiptir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.14. $T^* = T$ eşitliği gerçekleşiyorsa bu şekilde oluşturulan T operatörüne self-adjoint operatör denir. (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.14. H Hilbert uzayı ve $A:D(A) \rightarrow H$ lineer operatör verilsin. D(A) tanım kümesi H Hilbert uzayı üzerinde yoğun küme olsun ($\overline{D(A)} = H$). $\forall f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise yani $A \subset A^*$ ise, A operatörü simetrik operatör şeklinde isimlendirilir. Aynı zamanda,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

oluyorsa A ya Hermitian operatör adı verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.15. T lineer operatör ve H Hilbert uzayı olmak üzere T nin $D(T)$ tanım kümesi H uzayı üzerinde yoğun bir küme olmak üzere, $\forall f \in D(T)$ için,

$$\operatorname{Im}(Tf, f) \geq 0 \quad (2.7)$$

ise T lineer operatörüne disipatif operatör, her $f \in D(T)$ için,

$$\operatorname{Im}(Tf, f) \leq 0 \quad (2.8)$$

oluyorsa T lineer operatörüne akretif operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

T lineer operatörü akretif operatördür $\Leftrightarrow T$ lineer operatörü dissipative (disipatif) operatördür. Disipatif operatörler daima kapanabilir operatörlerdir. Bu operatörlerin kapanışları da yine disipatif operatör şeklindedir.

Tanım 2.1.16. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olarak verilsin.

i. $f, h \in D_{A^*}$ için,

$$(A^*f, h) - (f, A^*h) = (\Gamma_1f, \Gamma_2h)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1h)_K;$$

ii. Herhangi bir $F_1, F_2 \in K$ için

$$\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$$

şeklinde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır. i ve ii şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) ifadesine A nın sınır değer uzayı adı verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.1.17. Gerçek sayıların keyfi ve boş kümeden farklı olan kapalı her bir alt kümesine zaman skalası adı verilir. Zaman skalası kavramı T sembolü ile ifade edilir. Zaman skalası ile verilen bir dizinin limiti, bir fonksiyonun sürekliliği, sürekli fonksiyonların genel özellikleri klasik analizde olduğu gibi ifade edilebilir. $I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olmak üzere bir T zaman skalasındaki bir I_T aralığı $I_T = I \cap T$ şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson 2001; 2003).

Örnek 2.1.18. Gerçek sayılar ($\mathbb{R}$), Tam sayılar ($\mathbb{Z}$), Doğal sayılar ($\mathbb{N}$) ve ($\mathbb{N}^+$) kümeleri ve aynı zamanda $[1,4]$ ve $[2,3]$ gibi kapalı alt aralığı şeklinde verilen kümeler zaman skalası kavramına örnek oluştururlarken, bunların aksine, Rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$), İrrasyonel sayılar ($\mathbb{Q}'$), Kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) kümeleri ve $(2,5)$ veya $(0,1)$ gibi açık aralığı şeklinde verilen kümeler zaman skalasına örnek olarak verilemezler. (Bohner ve Peterson 2001; 2003).

Tanım 2.1.19. T Sturmian zaman skalası olmak üzere. $\sigma: T \rightarrow T$, $\rho: T \rightarrow T$ ileri ve geri sıçrama operatörleri olmak üzere,

$$\sigma(t) = \inf \{s \in T : s > t\} \quad t \in T, \quad (2.9)$$

ve

$$\rho(t) = \sup \{s \in T : s < t\} \quad t \in T, \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer $\rho(t) \neq t$ ise, o zaman $t \in T$ 'ye sola saçılmış nokta denir. $\rho(t) = t$ ise, t 'ye sol yoğun nokta denir. Bir $t \in T$ noktası, $\sigma(t) \neq t$ ise sağa saçılmış nokta ve $\sigma(t) = t$ ise t 'ye sağ yoğundur denir.

$$T^k = \begin{cases} T - \{t_1\}, & t_1 \text{ sol saçılmış maksimum noktasına sahipse} \\ T, & \text{Aksi durumda} \end{cases}$$

ve

$$T_k = \begin{cases} T - \{t_2\}, & t_2 \text{ sağ saçılmış maksimum noktasına sahipse} \\ T, & \text{Aksi durumda} \end{cases}$$

Bir $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, sağ taraftaki limitlerinin T 'deki tüm sağ yoğun noktalarda olması koşulu ve sol taraftaki limitlerinin T 'deki tüm sol yoğun noktalarda olması koşuluyla düzenlenmiş olarak adlandırılır. (Allahverdiev ve Tuna, 2021)

Tanım 2.1.20. $\mu: T \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde verilen ileri sıçrama operatörü her $t \in T$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t, \quad \sigma(t) = \inf \{s \in T : s > t\} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001; 2003).

Tanım 2.1.21. $\nu: T \rightarrow [0, \infty)$ olarak verilen geri sıçrama operatörü $\forall t \in T$ için

$$\nu(t) = t - \rho(t), \quad \rho(t) = \sup \{s \in T : s < t\} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir (Bohner ve Peterson 2001; 2003).

Örnek 2.1.22.

a) $T = \mathbb{R}$ ise tanımdan her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in T : s < T\} = \inf(t, \infty) = t$$

ve yine aynı şekilde,

$$\rho(t) = \sup \{s \in T: s < T\} = \sup(-\infty, t) = t$$

bulunur.

b) $T = h\mathbb{Z}$ ise her $t \in h\mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{t + h, t + 2h + \dots\} = t + h$$

$$\rho(t) = \sup\{\dots, t - 2h, t - h\} = t - h$$

bulunur.

c) $T = \mathbb{N}$ ise her $t \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(t) = t + 1$$

$$\rho(t) = \begin{cases} t - 1, & t > 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

d) $T = \{0, 1\} \cup [2, 3] \cup \{4\}$ ise $\forall t \in T$ için

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & t \in [2, 3] \cup \{4\} \\ t + 1, & t \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & t \in \{0\} \cup (2, 3) \\ t - 1, & t \in \{1, 2, 4\} \end{cases}$$

bulunur (Bohner ve Peterson 2001).

Tanım 2.1.22. $\alpha \in (0, 1)$ olsun. T üzerindeki bir f fonksiyonunun Her $\varepsilon > 0$ için bir $N \subset T$ nin t komşuluğu olacak şekilde $T_{\alpha, \Delta} f(t)$ sayısı bulunabiliyorsa, bu şekilde alınan T üzerindeki her f fonksiyonu $t \in T^k$ noktasında uyumlu delta türevlenebilirdir denir. Öyle ki ,

$$| [f(\sigma(t)) - f(s)] t^{1-\alpha} - T_{\alpha, \Delta} f(t) (\sigma(t) - s) | \leq \varepsilon | \sigma(t) - s | , \quad (2.13)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $s \in N$ vardır. (Benkhettou, Hassani ve Torres 2016: Bendouma ve Hammoudi, 2019; Allahverdiev ve Tuna, 2021)

Benzer şekilde, bazı fonksiyonların uyumlu nabla türevlenebilirliği kavramını tanımlarız.

Tanım 2.1.23. $\alpha \in (0, 1)$ olsun. T üzerindeki bir f fonksiyonunun, her $\varepsilon > 0$ için bir $N \subset T$ nin t komşuluğu olacak şekilde bir $T_{\alpha, \nabla} f(t)$ sayısı varsa, f fonksiyonu $t \in T_k$ noktasında uyumlu nabla türevlenebilirdir denir. Öyle ki,

$$| [f(\rho(t)) - f(s)] t^{1-\alpha} - T_{\alpha, \nabla} f(t) (\rho(t) - s) | \leq \varepsilon |\rho(t) - s|, \quad (2.14)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $s \in N$ vardır (Bendouma ve Hammoudi, 2019; Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Aşağıdaki lemmada, uyumlu delta/nabla türevinin bazı özelliklerini zaman ölçekleri üzerinde göstereceğiz.

Lemma 2.1.24. g, h bir t noktasında α ($0 < \alpha \leq 1$) mertebesinden uyumlu delta (nabla) türevlenebilir fonksiyonlar şeklinde verilsinler. O takdirde elimizde, tüm $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için,

$$(i) T_{\alpha, \Delta} (\lambda g + \mu h) = \lambda T_{\alpha, \Delta} (g) + \mu T_{\alpha, \Delta} (h) ,$$

$$(T_{\alpha, \nabla} (\lambda g + \mu h) = \lambda T_{\alpha, \nabla} (g) + \mu T_{\alpha, \nabla} (h)) \quad (2.15)$$

$$(ii) T_{\alpha, \Delta} (gh) = f T_{\alpha, \Delta} (h) + h^\sigma T_{\alpha, \Delta} (g) ,$$

$$(T_{\alpha, \nabla} (gh) = f T_{\alpha, \nabla} (h) + h^\rho T_{\alpha, \nabla} (g)) , \quad (2.16)$$

burada $h^\rho(t) := h(\rho(t))$ ve $h^\sigma(t) := h(\sigma(t))$.

$$(iii) T_{\alpha, \Delta} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{h T_{\alpha, \Delta} (g) - f g(h)}{h^\sigma h}$$

$$(T_{\alpha, \nabla} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{h T_{\alpha, \nabla} (g) - f T_{\alpha, \nabla} (h)}{h^\rho h} \quad (2.17)$$

(iv) Eğer g uyumlu delta (nabla) türevlenebilir ise, o zaman

$$T_{\alpha, \Delta} (g)(t) = t^{1-\alpha} g^\Delta(t) ,$$

$$(T_{\alpha, \nabla} (g)(t) = t^{1-\alpha} g^\nabla(t)) , \quad (2.18)$$

ifadeleri elde edilebilir. (Benkhettou vd., 2016; Bendouma ve Hammoudi, 2019; Allahverdiev ve Tuna, 2021)

Uyumlu delta ve nabla türevleri arasındaki aşağıdaki ilişki kolayca gösterilebilir.

Teorem 2.1.25. Uyumlu delta (nabla) türevlenebilir fonksiyonlar için,

$$T_{\alpha,\Delta} g(t) = T_{\alpha,\nabla} g(\sigma(t)) , t \in T^k$$

$$(T_{\alpha,\nabla} g(t) = T_{\alpha,\Delta} g(\rho(t)) , t \in T_k) \quad (2.19)$$

eşitlikleri gerçekleşir (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Tanım 2.1.26. $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ düzenlenmiş bir fonksiyon olsun. $f, 0 < \alpha \leq 1$ 'in nabla α -kesirli integrali ,

$$\int g(t) \nabla_{\alpha} t = \int g(t) t^{\alpha-1} \nabla t \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır. (Bendouma ve Hammoudi, 2019)

Tanım 2.1.27. $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ düzenlenmiş bir fonksiyon olsun. $f, 0 < \alpha \leq 1$ 'in delta α -kesirli integrali,

$$\int g(t) \Delta_{\alpha} t = \int g(t) t^{\alpha-1} \Delta t \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır. (Benkhettou vd., 2016)

Lemma 2.1.28. $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun, $m, n \in T$ ($m < n$) ve $0 < m \leq n$

$$(i) \int_m^n g(t) \Delta_{\alpha} t = \int_m^n f(\rho(t)) \nabla_{\alpha} t , \quad (2.22)$$

$$(ii) \int_m^n g(t) \nabla_{\alpha} t = \int_m^n f(\sigma(t)) \Delta_{\alpha} t , \quad (2.23)$$

$$(iii) \int_m^n [T_{\alpha,\Delta} f(t)] g(t) \Delta_{\alpha} t + \int_m^n f(\sigma(t)) [T_{\alpha,\Delta} g(t)] \Delta_{\alpha} t = f(n)g(n) - f(m)g(m), \quad (2.24)$$

$$(iv) \int_m^n [T_{\alpha,\nabla} f(t)] g(t) \nabla_{\alpha} t + \int_m^n f(\rho(t)) [T_{\alpha,\nabla} g(t)] \nabla_{\alpha} t = f(n)g(n) - f(m)g(m), \quad (2.25)$$

$$(v) \int_m^n [T_{\alpha,\Delta} f(t)] g(t) \Delta_{\alpha} t + \int_m^n f(t) [T_{\alpha,\nabla} g(t)] \nabla_{\alpha} t = f(n)g(n) - f(m)g(m) , \quad (2.26)$$

$$(vi) \int_m^n [T_{\alpha,\nabla} f(t)] g(t) \nabla_{\alpha} t + \int_m^n f(t) [T_{\alpha,\Delta} g(t)] \Delta_{\alpha} t = f(n)g(n) - f(m)g(m) , \quad (2.27)$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2021).

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1. Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac Sistemi

Tanım 3.1.1 Aşağıdaki şekilde tanımlanan Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac sistemini göz önüne alalım.

$$\Upsilon z = \lambda z, t \in T, \quad (3.1)$$

ve $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\Upsilon z := \begin{cases} -T_{\alpha, \nabla} z_2 + p(t)z_1 \\ T_{\alpha, \Delta} z_1 + r(t)z_2 \end{cases}, \quad (3.2)$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$, T üzerinde tanımlanan gerçel(reel) değerli fonksiyonlar ve $p(\cdot)$, $r(\cdot) \in L^1_{\alpha, \Delta}(T)$. Dikkat edilirse denklem (3.1), $T = \mathbb{R}$ (Allahverdiev ve Tuna, 2021) ve $\alpha=1$ (Allahverdiev ve Tuna, 2020; Gulsen ve Yılmaz, 2017) için ele alınmıştır. $H := L^2_{\alpha, \Delta}(T; \mathbb{C}^2)$ iç çarpımı olan Hilbert uzayı olsun.

$$\langle f, g \rangle_H := \int_m^n (f(x), g(x))_{\mathbb{C}^2} \Delta_{\alpha} t, \quad (3.3)$$

burada m ve n , $m \leq n$ ve $m \in T_k$, $n \in T_k$ ile T de sabit noktalardır.

Teorem 3.1.2. Başlangıç koşulları ile uyumlu kesirli dinamik Dirac (3.1) sistemi

$$z_1(t_0, \lambda) = c_1, \quad z_2^p(t_0, \lambda) = c_1 \quad (3.4)$$

ifadesinin

$$z(t, \lambda) = \begin{pmatrix} z_1(t, \lambda) \\ z_2^p(t, \lambda) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

şeklinde H de tek bir çözümü vardır.

İspat: Tanım 1'den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$z_2^p + t^{\alpha-1} \mu_{\sigma} T_{\alpha, \Delta} z_2^p = (z_2^p)^{\sigma} = z_2 \quad (3.6)$$

(3.1) ve (3.6) dan dolayı,

$$\begin{cases} T_{\alpha,\Delta} z_1 = (\lambda + r(t))(z_2^p)^\sigma = (\lambda + r(t))(z_2^p + t^{\alpha-1} \mu_\sigma T_{\alpha,\Delta} z_2^p) \\ T_{\alpha,\Delta} z_2 = T_{\alpha,\Delta} z_2^p = -(\lambda + p(t))z_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

elde edilir. Bunun sonucunda,

$$\begin{cases} T_{\alpha,\Delta} z_1 = -t^{\alpha-1} \mu_\sigma (\lambda + p(t))(\lambda + r(t))z_1 + (\lambda + r(t))z_2^p \\ T_{\alpha,\Delta} z_2^p = -(\lambda + p(t))z_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

olur.

(3.8) den

$$T_{\alpha,\Delta} \hat{z}(t) = H(t, \lambda) \hat{z}(t), \quad (3.9)$$

Böylece,

$$\hat{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2^p \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

ve

$$H(t, \lambda) := \begin{pmatrix} -t^{\alpha-1} \mu_\sigma (\lambda + p(t))(\lambda + r(t)) & (\lambda + r(t)) \\ -(\lambda + p(t)) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

olur. Buradan,

$$\det[I_2 + \mu_\sigma(t)H(t, \lambda)] = \begin{vmatrix} 1 - t^{\alpha-1} \mu_\sigma^2 (\lambda + p(t))(\lambda + r(t)) & \mu_\sigma (\lambda + r(t)) \\ -\mu_\sigma (\lambda + p(t)) & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.12)$$

elde edilir. $H(t, \lambda)$ matrisi gerileyicidir. Denklem (3.1) başlangıç koşulları (3.4) ile tek bir $z(t, \lambda)$ çözümüne sahiptir. (Bohner ve Peterson, 2001)

3.2. Self-Adjoint Operatör

Tanım 3.2.1

$D_{\max} = \{z \in H: z, T \text{ üzerinde } \Delta - \text{ mutlak sürekli fonksiyon ve } \gamma z \in H\},$

$$D_{\min} = \{z \in D_{\max}: z_1(\alpha) = z_2^p(\alpha) = z(b) = z_2^p(b) = 0\} \quad (3.13)$$

$D_{\max}$ üzerindeki $L_{\max}$ maksimum operatörü $L_{\max} = \gamma z$ şeklinde tanımlarız.

$L_{\min}$ minimum operatörü, yani $L_{\max}$ maksimum operatörünün $D_{\min}$ ile sınırlandırılması ile elde edilen $L_{\min}$ ifadesi, minimumu operatör olarak adlandırılır.

Tanımdan da görülebileceği üzere bu operatör, $L_{\min} = L_{\max}$ maksimum operatörünün kapalı bir simetrik (yansılmalı) operatör olduğu görülür. (Naimark ,1968)

Şimdi aşağıdaki Green formülünü vereceğiz.

Lemma 3.2.2 $u, v \in D_{\max}$ ise, $t \in T$ için,

$$\int_m^n [\gamma u(t), v(t)]_{C^2} - (u(t), \gamma v(t))_{C^2} \Delta_\alpha t = [u, v](n) - [u, v](m), \quad (3.14)$$

öyleki,

$$[u, v](t) = W_{\alpha, \Delta}(u, \bar{v})(t) := u_1(t) \overline{v_2^\rho(t)} - u_2^\rho(t) \overline{v_1(t)} \quad (3.15)$$

elde edilir. (Allahverdiev ve Tuna, 2021)

İspat. $u, v \in D_{\max}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \langle \gamma u, v \rangle_H - \langle u, \gamma v \rangle_H &= \int_m^n [(\gamma u(t), v(t))_{C^2} - (u(t), \gamma v(t))_{C^2}] \Delta_\alpha t \\ &= \int_m^n (-T_{\alpha, \nabla} u_2 + p(t) u_1) \bar{v}_1 \Delta_\alpha t + \int_m^n (T_{\alpha, \Delta} u_1 + r(t) u_2) \bar{v}_2 \Delta_\alpha t \\ &\quad - \int_m^n [u_1 (-T_{\alpha, \nabla} v_2 + p(t) v_1)] \Delta_\alpha t - \int_m^n u_2 (T_{\alpha, \Delta} v_1 + r(t) v_2) \Delta_\alpha t \\ &= - \int_m^n [(T_{\alpha, \Delta} u_2^\rho) \bar{v}_1 + u_2 \overline{(T_{\alpha, \Delta} v_1)}] \Delta_\alpha t + \int_m^n [(T_{\alpha, \Delta} u_1) \bar{v}_2 + u_1 \overline{(T_{\alpha, \Delta} v_2^\rho)}] \Delta_\alpha t \end{aligned}$$

Diğer taraftan, başka bir ifade ile,

$$\begin{aligned} (T_{\alpha, \Delta} (\bar{v}_1(t) u_2^\rho(t))) &= \bar{v}_1(t) (T_{\alpha, \Delta} u_2^\rho(t)) + (u_2^\rho(t))^\sigma \overline{(T_{\alpha, \Delta} v_1(t))} \\ &= (T_{\alpha, \Delta} (v_2^\rho(t)) \bar{v}_1(t)) + (u_2(t)) \overline{(T_{\alpha, \Delta} v_1(t))} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ve,

$$\begin{aligned} (T_{\alpha, \Delta} \overline{v_2^\rho(t)} u_1(t)) &= \overline{(T_{\alpha, \Delta} v_2^\rho(t))} u_1(t) + \overline{(v_2^\rho(t))}^\sigma (T_{\alpha, \Delta} u_1(t)) \\ &= \overline{(T_{\alpha, \Delta} v_2^\rho(t))} u_1(t) + \bar{v}_2(t) T_{\alpha, \Delta} u_1(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17)'den şu sonuç çıkar:

$$\begin{aligned}
\langle \gamma u, v \rangle_H - \langle u, \gamma v \rangle_H &= - \int_m^n (T_{\alpha, \Delta}) (\overline{v_1(t)} u_2^p(t)) \Delta_\alpha t + \int_m^n T_{\alpha, \Delta} (u_1(t) \overline{v_2^p(t)}) \Delta_\alpha t \\
&= \int_m^n T_{\alpha, \Delta} [(u_1(t) \overline{u_2^p(t)}) - \overline{v_1(t)} u_2^p(t)] \Delta_\alpha t \\
&= [u_1(n) \overline{v_2^p(n)} - \overline{v_1(n)} u_2^p(n)] - [u_1(m) \overline{v_2^p(m)} - \overline{v_1(m)} u_2^p(m)] \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Şimdi aşağıdaki Uygun Kesirli Dinamik Dirac sistemini ele alalım.

$$Yz = \lambda z, \quad (3.19)$$

sınır koşulları ile,

$$K_1(z) := k_{11}z_1(a) + k_{12}z_2^p(a) = 0, \quad (3.20)$$

$$K_2(z) := k_{21}z_1(b) + k_{22}z_2^p(b) = 0, \quad (3.21)$$

öyle $\{k_{ij}\}_{i,j=1,2}$ keyfî gerçel sayılardır vardır $k_{i1}^2 + k_{i2}^2 \neq 0$ ($i=1,2$)
(3.20), (3.21) ve Lemma 3.2.2 den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.3 (3.19), (3.20) ve (3.21) de tanımlanmış olarak verilen Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac operatörü H üzerinde self adjoint (kendine eş) operatördür. Bu nedenle bu operatör aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i) Tüm özdeğerler gerçel ve aynı zamanda basittir.
- (ii) Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldır. (Allahverdiev ve Tuna, 2021)

İspat.

$$\varphi_1(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t, \lambda) \\ \varphi_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{21}(t, \lambda) \\ \varphi_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}$$

ifadeleri, (3.19) 'un kabul edilir çözümleri olsun.

$\varphi_{ij}(a, \lambda) = \delta_{ij}$, burada δ_{ij} ($i, j=1, 2$) Kronecker sembolü ve $\lambda \in C'$ 'dir. O zaman (3.19) denkleminin genel çözümünü,

$$z(t, \lambda) = C_1 \varphi_1(t, \lambda) + C_2 \varphi_2(t, \lambda) \quad (3.22)$$

şeklinde gösteririz. Burada C_1 ve C_2 , t 'ye bağlı değildir. Aşağıdaki doğrusal sistemin aşikar olmayan bir çözümünü bulabilirsek,

$$\begin{cases} C_1 K_1(\varphi_1) + C_2 K_1(\varphi_2) = 0 \\ C_1 K_2(\varphi_1) + C_2 K_2(\varphi_2) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

bulacağımız bu $z(t, \lambda)$ çözümüne (3.19) ile verilen eşitliğin öz fonksiyonu denir. Bu nedenle, (3.19), (3.20) ve (3.21) ile tanımlanmış olarak verilen Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac operatörü ile ilişkili karakteristik determinant aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\omega(\lambda) = \begin{vmatrix} K_1(\varphi_1) & K_1(\varphi_2) \\ K_2(\varphi_1) & K_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \quad (3.24)$$

$\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları, (3.19), (3.20) ve (3.21) ile tanımlanan problemin özdeğerleridir. $\varphi_1(t, \lambda)$ ve $\varphi_2(t, \lambda)$, her bir sabit $t \in T$ için λ 'da tam olduğundan, $\omega(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyondur. Bu nedenle, (3.19), (3.20) ve (3.21) ile tanımlanan problemin özdeğerleri, sonlu sınır noktaları olmaksızın en fazla sayılabilir.

Teorem 3.2.4 (3.19), (3.20) ve (3.21) ile tanımlanan problemin tüm özdeğerleri, $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırlarıdır. (Allahverdiev ve Tuna, 2021)

İspat.

$$\begin{aligned} x_1(t, \lambda) &= K_1(\varphi_2)(\varphi_1(x, \lambda)) - K_1(\varphi_1)\varphi_2(t, \lambda), \\ x_1(t, \lambda) &= K_2(\varphi_2)(\varphi_1(x, \lambda)) - K_2(\varphi_1)\varphi_2(t, \lambda), \end{aligned} \quad (3.25)$$

Burada ,

$$x_1(t, \lambda) = \begin{pmatrix} x_{11}(t, \lambda) \\ x_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix}, \text{ ve } x_2(t, \lambda) = \begin{pmatrix} x_{21}(t, \lambda) \\ x_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}$$

O zaman $x_1(t, \lambda)$ ve $x_2(t, \lambda)$, (3.19) denkleminin kabul edilebilir çözümleridir.

$$x_1(a, \lambda) = \begin{pmatrix} k_{12} \\ -k_{11} \end{pmatrix} \text{ ve } x_2(b, \lambda) = \begin{pmatrix} k_{22} \\ -k_{21} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Bunun kontrolünü şu şekilde yapabiliriz.

$$W_{\alpha, \Delta}(\chi_1(t, \lambda), \chi_2(t, \lambda)) = W_{\alpha, \Delta}(\varphi_1(t, \lambda), \varphi_2(t, \lambda)) \omega(\lambda) = \omega(\lambda). \quad (3.27)$$

λ_0 , (3.19), (3.20) ve (3.21) ile tanımlanan problemin bir özdeğeri olarak verilsin. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olduğundan, $\chi_i(t, \lambda_0)$ ($i=1, 2$) gerçel değerli olarak alınabilir. (3.27) 'ten $\chi_1(t, \lambda_0)$ ve $\chi_2(t, \lambda_0)$ nin lineer bağımlı özfonksiyonlar olduğu sonucu çıkar. Böylece, sıfır olmayan bir sabit η_0 vardır, öyle ki;

$$\chi_1(t, \lambda_0) = \eta_0 \chi_2(t, \lambda_0)$$

(3.25) ve (3.26) sayesinde, şu sonuca varıyoruz:

$$\begin{aligned} \chi_{11}(b, \lambda_0) &= \eta_0 k_{22} = \eta_0 \chi_{21}(b, \lambda) , \\ x_{12}^\rho(b, \lambda_0) &= -\eta_0 k_{21} = -\eta_0 x_{22}^\rho(b, \lambda) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

(3.14)' te $u(t) = \chi_1(t, \lambda)$ ve $v(t) = \overline{\chi_1(t, \lambda_0)}$ alırsak,

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0) \int_m^n (x_1(t, \lambda), \overline{\chi_1(t, \lambda_0)})_{C^2} \Delta_\alpha t \\ &= \chi_{11}(n, \lambda) x_{12}^\rho(n, \lambda_0) - x_{12}^\rho(n, \lambda_0) \chi_{11}(n, \lambda) \\ &= \eta_0 x_{11}(n, \lambda) x_{22}^\rho(n, \lambda) - \eta_0 x_{12}^\rho(n, \lambda) x_{21}(n, \lambda) \\ &= \eta_0 W_{\alpha, \Delta}(x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda)) = \eta_0 w(\lambda) \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} w(\lambda) \Big|_{\lambda_0} &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{w(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \frac{1}{\eta_0} \int_m^n |x_1(t, \lambda_0)|^2 \Delta_\alpha t \neq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir, dolayısıyla $w(\lambda)$, λ_0 'da tam bir fonksiyondur. Sonuç olarak, λ_0 , $w(\lambda)$ 'nın basit bir sıfırıdır.

3.3. Özfonksiyon Açılımı.

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-T_{\alpha, \Delta} z_2 + \{-\lambda + p(t)\} z_1 = h_1(t) , \quad (3.30)$$

$$T_{\alpha, \Delta} z_1 + \{-\lambda + r(t)\} z_2 = h_2(t) , \quad (3.31)$$

$$k_{11} z_1(a) + k_{12} z_2^\rho(a) = 0 , \quad k_{11}^2 + k_{12}^2 \neq 0 , \quad (3.32)$$

$$k_{21} z_1(b) + k_{22} z_2^\rho(b) = 0 , \quad k_{21}^2 + k_{22}^2 \neq 0 , \quad (3.33)$$

Burada,

$$t \in T \text{ ve } h(.) = \begin{pmatrix} h_1(.) \\ h_2(.) \end{pmatrix} \in H$$

Teorem 3.3.1 Eğer $\omega(\lambda) \neq 0$ ise, o zaman sınır değer problemi (3.30)–(3.33),

$$z(t, \lambda) = \int_m^n (G(t, s, \lambda), \overline{f(s)}_{C^2} \Delta_\alpha s), \quad (3.34)$$

tarafından tanımlanan yalnız tek bir $z(t, \lambda)$ çözümüne sahiptir, öyle ki,

$$G(t, s, \lambda) = -\frac{1}{w(\lambda)} \begin{cases} \{x_2(t, \lambda)x_1^T(s, \lambda), m \leq s \leq t \\ \{x_1(t, \lambda)x_2^T(s, \lambda), t \leq s \leq n \end{cases} \quad (3.35)$$

elde edilebilir. (Allahverdiev ve Tuna, 2021)

İspat. (3.34) ten

$$\begin{aligned} z_1(t, \lambda) &= -\frac{1}{w(\lambda)} x_{21}(t, \lambda) \int_m^t (x_{11}(s, \lambda)h_1(s) + x_{12}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s \\ &\quad -\frac{1}{w(\lambda)} x_{11}(t, \lambda) \int_t^n (x_{21}(s, \lambda)h_1(s) + x_{22}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} z_2(t, \lambda) &= -\frac{1}{w(\lambda)} x_{22}(t, \lambda) \int_m^t (x_{11}(s, \lambda)h_1(s) + x_{12}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s \\ &\quad -\frac{1}{w(\lambda)} x_{12}(t, \lambda) \int_t^n (x_{21}(s, \lambda)h_1(s) + x_{22}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} T_{\alpha, \Delta} z_1(t, \lambda) &= -\frac{1}{w(\lambda)} T_{\alpha, \Delta} X_{21}(t, \lambda) \int_m^t (x_{11}(s, \lambda)h_1(s) + x_{12}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s \\ &\quad -\frac{1}{w(\lambda)} T_{\alpha, \Delta} X_{11}(t, \lambda) \int_t^n (x_{21}(s, \lambda)h_1(s) + x_{22}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s \\ &\quad + \frac{1}{w(\lambda)} W_{\alpha, \Delta}(X_1, X_2)h_2(t) = -\frac{1}{w(\lambda)} (-\lambda + r(t)) \{X_{22}(t, \lambda) \end{aligned}$$

$$x \int_m^t (x_{11}(s, \lambda)h_1(s) + x_{12}(s, \lambda)h_2(s)) \Delta_\alpha s$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{w(\lambda)}(-\lambda + r(t)) \{X_{12}(t, \lambda) \int_t^n (x_{21}(s, \lambda)f_1(s) + x_{22}(s, \lambda)h_2(s))\Delta_\alpha s + h_2(t) \\
& = -\{-\lambda + r(t)\} \frac{1}{w(\lambda)} X_{22}(t, \lambda) \\
& x \int_m^t (x_{11}(s, \lambda)h_1(s) + x_{12}(s, \lambda)h_2(s))\Delta_\alpha s - \{-\lambda + r(t)\}x \\
& x \frac{1}{w(\lambda)} X_{12}(t, \lambda) \int_x^n (x_{21}(s, \lambda)h_1(s) + x_{22}(s, \lambda)h_2(s))\Delta_\alpha s h_2(t) \\
& = -\{-\lambda + r(t)\} y_2(t) + f_2(t)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(3.30)' un geçerliliği benzer şekilde ispatlanmıştır. Bu nedenle formül (3.34) ile tanımlanan $z(t, \lambda)$, (3.30)–(3.31) ifadeleri ile belirlenen sınır değerinin çözümüdür. $z(t, \lambda)$ 'nın (3.32)–(3.33) koşullarını sağladığı kolaylıkla ispatlanabilir.

Genelliği kaybetmeden, $\lambda=0$ 'ın bir özdeğer olmadığını varsayabiliriz.

$$G(t, s) = -\frac{1}{w_{\alpha, \Delta}(X_1, X_2)} \begin{cases} \{x_2(t)x_1^T(s), m \leq s \leq t \\ \{x_2(t)x_2^T(s), t \leq s \leq n \end{cases} \tag{3.38}$$

Tanım 3.3.2 $m \leq t, s \leq n$ olmak üzere iki değişkenli matris değerli $M(t, s)$ fonksiyonu için aşağıdaki verilen ifade sağlanıyorsa Δ_α Hilbert-Schmidt çekirdeği olarak adlandırılır.

$$\int_m^n \int_m^n \|M(t, s)\|^2 \Delta_\alpha t \Delta_\alpha s < \infty \tag{3.39}$$

Teorem 3.3.3. $G(t, s)$, bir Δ_α Hilbert-Schmidt çekirdeğidir.

İspat. (24) ve (24) sayesinde, görüyoruz ki

$$\int_m^n \Delta_\alpha t \int_m^t \|G(t, s)\|^2 \Delta_\alpha t < \infty \text{ ve}$$

$$\int_m^n \Delta_\alpha t \int_m^t \|G(t, s)\|^2 \Delta_\alpha s < \infty ,$$

iç integralin olması ve $x_{1i}(t), x_{2k}(t)$ ($i, k = 1, 2$) çarpımlarının doğrusal bir kombinasyonu olmasından dolayı bu çarpımlar $H \times H$ 'ye aittir, çünkü faktörlerin her biri H 'ye aittir. Dolayısıyla

$$\int_m^n \int_m^n \|G(t, s)\|^2 \Delta_\alpha t \Delta_\alpha s < \infty \tag{3.40}$$

olur (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Şimdi gerekli olan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.3.4. Eğer,

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty , \quad (3.41)$$

ve bu bağıntı ile tanımlanan A operatörü

$$A\{x_i\} = \{y_i\} , \quad (3.42)$$

buradan,

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} x_k , i = 1, 2 \dots \quad (3.43)$$

olur ki bu da l^2 dizi uzayında kompakt olması demektir (Naimark , 1968).

Teorem 3.3.5. T operatörü,

$$(Th(t)) = \int_m^n (G(t,s), \overline{h(s)})_{C^2} \Delta_{\alpha} s , h \in H$$

şeklinde tanımlanır ve $(LTh)(t) = h(t)$, H 'de kompakt ve kendine eştir (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

İspat. $u, v \in H$ ve $\varphi_i = \varphi_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ H 'nin tam, ortonormal bir tabanı olsun.

O halde,

$$x_i = \langle u, \varphi_i \rangle_H = \int_m^n (u(s), \varphi_i(s))_{C^2} \Delta_{\alpha} s,$$

$$y_i = \langle v, \varphi_i \rangle_H = \int_m^n (v(s), \varphi_i(s))_{C^2} \Delta_{\alpha} s,$$

$$a_{ik} = \int_m^n \int_m^n G(t,s) \varphi_i(t) \varphi_k(s)_{C^2} \Delta_{\alpha} t \Delta_{\alpha} s , i, k = 1, 2, 3, \dots ,$$

$G(t, s)$ yukarıda verilenler nedeniyle bir Hilbert-Schmidt çekirdeğidir. H uzayı , izometrik olarak l^2 ye eşlenir. Sonuç olarak, integral operatörümüz T , bu eşleme ile l^2 uzayında formül (3.42) ile tanımlanan A operatörüne dönüşür ve koşul (3.40), koşul (3.41)' e çevrilir. Teorem 3.3.4. 'e göre, A kompakttır. Bu nedenle, orijinal T operatörü kompakttır.

Şimdi, T 'nin kendine eş (self adjoint) olduğunu kanıtlayacağız. $G(t, s) = G(s, t)$ ve $G(t, s), T \times T$ üzerinde tanımlanan gerçek bir matris değerli fonksiyon olduğundan, şu sonucu çıkarırız:

$$\begin{aligned}
 \langle Tu, v \rangle_H &= \int_m^n ((Tu)(t), v(t))_{C^2} \Delta_\alpha t \\
 &= \int_m^n \int_m^n G(t, s) u(s) v(t)_{C^2} \Delta_\alpha s \Delta_\alpha t \\
 &= \int_m^n (u(s), \int_m^n G(s, t) v(t) \Delta_\alpha t)_{C^2} \Delta_\alpha s = \langle u, Tv \rangle_H
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Teorem 3.3.6. L operatörünün özdeğerleri, aşağıdaki şekilde sıralanabilen gerçel (reel) sayıların sonsuz bir $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ dizisini oluşturur.

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < \dots \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

L 'nin tüm normalize edilmiş öz fonksiyonlarının kümesi ve aynı zamanda H uzayı için ortonormal bir temel oluşturur. Bu durum $z \in H$ için $Tz = h, Lh = z, Lx_n = \lambda_n x_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ için öz fonksiyon genişletme formülü

$$Lh = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle h, x_n \rangle_H x_n \tag{3.45}$$

Şeklinde ifade edilebilir. (Allahverdiev ve Tuna, 2021)

İspat. Teorem 3.3.5 ve Hilbert-Schmidt teoreminden $T, \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ ifadesinin sıfır olmayan gerçel özdeğerlerin sonsuz dizisine,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$$

değeri ile ulaşılabilir. Buradan,

$$|\lambda_n| = \frac{1}{|\xi_n|} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir. Ayrıca, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi, $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ dizisine benzer olarak karşılık gelen bir ortonormal öz fonksiyonlar kümesini gösterebilir. Böylece ($z \in H, Tz = h, Lh = z, Lx_n = \lambda_n x_n (n = 1, 2, 3, \dots)$)

$$z = \sum_{n=1}^\infty \langle z, x_n \rangle_H x_n$$

ve

$$\begin{aligned} Lh = z &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, x_n \rangle_H x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Lh, x_n \rangle_H x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, Lx_n \rangle_H x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle h, x_n \rangle_H x_n \end{aligned} \quad (3.46)$$

elde edilir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde zaman skalaları üzerinde ele alınan ve regüler durumda Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac sistemi üzerinde çalışacağız. Bu sistemin minimal simetrik operatörü tanımlanacak ve bu minimal simetrik operatör üzerinde sınır koşulları yardımı ile sınır değer uzayı inşa edilecektir. Bu uzay sayesinde simetrik Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac sisteminin minimal, kendine eş disipatif ve akretif genişlemelerine ulaşılmaya çalışılacaktır.

Bunun için öncelikle,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ ve } Yz := \begin{cases} -T_{\alpha, \nabla} z_2 + p(t)z_1 \\ T_{\alpha, \Delta} z_1 + r(t)z_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

olmak üzere

$$Yz = \lambda z, \quad t \in T, \quad (4.2)$$

şeklinde verilen Uyumlu Kesirli Dinamik Dirac sistemini göz önüne alalım. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$, T üzerinde tanımlanan gerçel değerli fonksiyonlardır. Uyumlu kesirli dinamik Dirac sisteminden operatöre geçiş yapmak için,

$$\langle f, g \rangle_H := \int_m^n (f(x), g(x))_{c^2 \Delta_\alpha} dt, \quad (4.3)$$

iç çarpımı yardımıyla tanımlanan,

$$H := L^2_{\alpha, \Delta}(T; \mathbb{C}^2)$$

Hilbert uzayını gözönüne alalım.

Şimdi (4.2) denklemine karşılık gelen maksimal ve minimal operatörlerin tanım kümelerini verelim.

$$D_{\text{maks}} = \{z \in H : z, T \text{ üzerinde } \Delta - \text{ mutlak sürekli fonksiyon ve } Yz \in H\},$$

$$D_{\text{min}} = \{z \in D_{\text{maks}} : z_1(\alpha) = z_2^p(\alpha) = z(b) = z_2^p(b) = 0\}$$

$D_{\max}$ kümesi üzerinde,

$$L_{\max} z = \Upsilon z$$

şeklinde $L_{\max}$ maksimal operatörünü tanımlayalım. Eğer $L_{\max}$ operatörü $D_{\min}$ kümesi üzerine sınırlandırılırsa $L_{\min}$ minimal operatörü elde edilir. Burada $L_{\min}^* = L_{\max}$ ve $L_{\min}$ minimal operatörü kapalı simetrik bir operatördür (Naimark,1968).

Şimdi ,

$$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{\max} \rightarrow C^2 ,$$

$$\Gamma_1 z = \begin{pmatrix} -z_1 a \\ z_1 b \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 z = \begin{pmatrix} z_2^{\rho}(a) \\ z_2^{\rho}(b) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

şeklindeki dönüşümleri ele alalım.

Teorem 4.1. (4.4) ile ifade edilen $(C^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü $L_{\min}$ operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

İspat: $\forall y, z \in D_{\max}$ için

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{C^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{C^2} \\ &= \left(\begin{pmatrix} -y_1(a) \\ y_1(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2^{\rho}(a) \\ z_2^{\rho}(b) \end{pmatrix} \right)_{C^2} - \left(\begin{pmatrix} y_2^{\rho}(a) \\ y_2^{\rho}(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_1(a) \\ z_1(b) \end{pmatrix} \right)_{C^2} \\ &= \left(-y_1(a) \overline{z_2^{\rho}(a)} + y_1(b) \overline{z_2^{\rho}(b)} \right) - \left(-y_2^{\rho}(a) \overline{z_1(a)} + y_2^{\rho}(b) \overline{z_1(b)} \right) \\ &= \left(y_2^{\rho}(a) \overline{z_1(a)} - y_1(a) \overline{z_2^{\rho}(a)} \right) + \left(y_1(b) \overline{z_2^{\rho}(b)} - y_2^{\rho}(b) \overline{z_1(b)} \right) \\ &= \left(y_1(b) \overline{z_2^{\rho}(b)} - y_2^{\rho}(b) \overline{z_1(b)} \right) - \left(y_1(a) \overline{z_2^{\rho}(a)} - y_2^{\rho}(a) \overline{z_1(a)} \right) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2 den

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{C^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{C^2} = [y, z](b) - [y, z](a)$$

$$=(L_{\max}y, z) - (y, L_{\max}z)$$

elde edilir. Yapılan bu işlem sonucunda, sınır değeri uzayına ait tanımlanan ilk koşulu ispatlamış olduk.

Şimdi de sınır değeri uzayına ait tanımın diğer koşulunu ispatlayacağız.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^2$$

$$\alpha_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) \\ \alpha_{12}(t) \end{pmatrix}, \alpha_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{21}(t) \\ \alpha_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$\beta_1(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) \\ \beta_{12}(t) \end{pmatrix}, \beta_2(t) = \begin{pmatrix} \beta_{21}(t) \\ \beta_{22}(t) \end{pmatrix} \in H \text{ için}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \alpha_1(t)u_1(t) + \alpha_2(t)v_1(t) + \beta_1(t)u_2(t) + \beta_2(t)v_2(t)$$

biçiminde verilen fonksiyon vektör değerli olmakla beraber aşağıdaki verilen şartları sağlasın.

$$\alpha_{11}(a) = -1, \alpha_{12}^p(a) = \alpha_{11}(b) = \alpha_{12}^p(b) = 0$$

$$\alpha_{22}^p(a) = 1, \alpha_{21}(a) = \alpha_{21}(b) = \alpha_{22}^p(b) = 0$$

$$\beta_{11}(a) = 1, \beta_{11}(a) = \beta_{12}^p(a) = \beta_{12}^p(b) = 0$$

$$\beta_{22}^p(b) = 1, \beta_{21}(a) = \beta_{21}(b) = \beta_{22}^p(a) = 0$$

Bu durumda bu fonksiyonun $D_{\max}$ kümesine ait olduğu açıkça görülür ve

$$\Gamma_1 y = u, \Gamma_2 y = v$$

olduğu açıktır.

Sonuç 4.2. K, C^2 uzayının üzerinde büzülme operatörü olsun. Bu durumda $L_{\min}$ minimal operatörünün,

$$(K - 1) \Gamma_1 y + i(K+1) \Gamma_2 y = 0 \tag{4.5}$$

ve

$$(K - 1) \Gamma_1 y - i(K+1) \Gamma_2 y = 0 \tag{4.6}$$

koşullarını gerçekleyen $y \in D_{\max}$ fonksiyonlarının kümesine sınırlandırılması, sırasıyla $L_{\min}$ operatörüne ait maksimal disipatif ve aynı zamanda maksimal akretif genişlemesini vermektedir.

Tersine $L_{\min}$ operatörüne ait olan keyfi maksimal disipatif ve aynı zamanda maksimal akretif genişlemeleri (4.5) ve (4.6) ön şartları sayesinde elde edilir. Ayrıca K büzülme operatörü ise genişleme sonucu yalnızca tek şekilde belirlenir.

Eğer (4.5) ve (4.6) ifadesinde ele alınan K operatörü izometrik bir operatör olarak alınırsa $L_{\min}$ operatörüne ait maksimal simetrik genişlemesini, eğer K operatörü üniter operatör olarak alınırsa bu durumda da $L_{\min}$ operatörüne ait kendine eş genişlemesi elde edilir. $L_{\min}$ operatörünün disipatif genişlemelerine ait genel form ise,

$$K(\Gamma_1 y + i \Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y - i \Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i \Gamma_2 y) \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i \Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y + i \Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i \Gamma_2 y) \in D(K) \quad (4.7)$$

şartı ile gösterilir. Burada K operatörünün $f \in D(K)$ için,

$$\|Kf\| < \|f\| \quad (4.8)$$

koşulunu sağlayan lineer bir operatör olduğu görülür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dirac sistemi, elektron spininin doğal bir tanımını sağladığı, antimaddenin varlığını tahmin ettiği ve aynı zamanda hidrojen atomunun spektrumunu doğru bir şekilde yeniden üretebildiği için fizikte önemli bir rol oynadı aşıkardır. Bu yüzden bu sistem birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Bu tez çalışmasında,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ ve } Yz := \begin{cases} -T_{\alpha, \nabla} z_2 + p(t)z_1 \\ T_{\alpha, \Delta} z_1 + r(t)z_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

olmak üzere

$$Yz = \lambda z, t \in T, \quad (5.2)$$

formatında verilen uyumlu kesirli dinamik Dirac sistemi regüler durumda ele alındı. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$, T üzerinde tanımlanan gerçek(reel) değerli fonksiyonlardır.

Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal operatörler ve maksimal operatörler

$$D_{\max} = \{z \in H: z, T \text{ üzerinde } \Delta - \text{ mutlak sürekli fonksiyon ve } Yz \in H\},$$

$$D_{\min} = \{z \in D_{\max}: z_1(a) = z_2^p(a) = z(b) = z_2^p(b) = 0\},$$

kümeleri yardımıyla tanımlandı.

$$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{\max} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$\Gamma_1 z = \begin{pmatrix} -z_1(a) \\ z_1(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 z = \begin{pmatrix} z_2^p(a) \\ z_2^p(b) \end{pmatrix}$$

dönüşümleri ile uyumlu kesirli dinamik Dirac sistemi operatörünün $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ sınır değer uzayı meydana getirildi. Sınır değer uzayı kullanılarak uyumlu kesirli dinamik Dirac sistemine ait simetrik operatörün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden şu şekilde gösterildi:

$K, \mathbb{C}^2$ uzayının üzerinde büzülme operatörü olsun. Bu durumda $L_{\min}$ minimal operatörünün,

$$(K - 1) \Gamma_1 y + i(K + 1) \Gamma_2 y = 0$$

ve

$$(K - 1) \Gamma_1 y - i(K + 1) \Gamma_2 y = 0$$

koşullarını gerçekleyen $y \in D_{\max}$ fonksiyonlarının kümesine sınırlandırılması, sırasıyla $L_{\min}$ operatörünün maksimal disipatif ve aynı zamanda maksimal akretif genişlemesini vermektedir.

Tersine $L_{\min}$ operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesi

$$(K - 1) \Gamma_1 y + i(K+1) \Gamma_2 y = 0$$

ve

$$(K - 1) \Gamma_1 y - i(K+1) \Gamma_2 y = 0$$

eşitliği sayesinde verilir. K büzülme operatörü ise genişleme ile yalnızca tek şekilde belirlenir.

Eğer ele alınan K operatörü izometrik operatör şeklinde alınırsa $L_{\min}$ operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer üniter operatör olursa bu durumda da $L_{\min}$ operatörüne ait kendine eş genişlemesi elde edilmiş olur. $L_{\min}$ operatörünün disipatif genişlemelerine ait genel form ise,

$$K(\Gamma_1 y + i \Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y - i \Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i \Gamma_2 y) \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i \Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y + i \Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i \Gamma_2 y) \in D(K)$$

koşulu ile gösterilir. Burada K operatörünün $f \in D(K)$ için,

$$\|Kf\| < \|f\|$$

koşulunu sağlayan lineer bir operatör olduğu görülür. Bu çalışmada regüler durumda yapılan işlemler aynı zamanda benzer türden denklemler için singüler durumda ele alınabilir ve konu benzer şekillerde genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Akhiezer, N. I., Glazman, I. M., (1963). *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*, Volume I. Frederick Ungar, New York.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., (2021). One dimensional Dirac operators on time scales, *Caspian Journal Mathematical Sciences* **10**(2), 195–209.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., (2020). One-dimensional conformable fractional Dirac system. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana* **26**(1), 121–146.
- Allahverdiev, B. P., (2016). Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat*, **30**(6), 1475-1484.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., (2022). Conformable fractional Sturm-Liouville problems on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **45**, 2299–2314.
- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., (2023). Conformable fractional dynamic dirac system. *Annali dell'Universita Ferrara* **69**, 203–218.
- Atici Merdivenci, F., Guseinov, G..Sh., (2002). On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales. *Journal of Computational Applied ,Mathematics* **141**(1–2), 75–99.
- Bendouma, B., Hammoudi, A., (2019). A nabla conformable fractional calculus on time scales. *Electronic Journal ofMathematical Analysis Applications* **7**(1), 202–216.
- Benkhettou, N., Hassani, S., Torres, D. F. M., (2016). A conformable fractional calculus on arbitrary time scales. *Journal of King Saud University* **28**(1), 93–98.
- Benkhettou, N., Brito da Cruz, A. M. C., Torres, D. F. M., (2015) A fractional calculus on arbitrary time scales, Fractional differentiation and fractional and fractional integration. *Signal Press.* **107**, 230–237.
- Bohner, M., Peterson, A., (2001) *Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser, Boston.
- Bohner, M., Peterson, A., (2003). (eds.): *Adverse in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser, Boston
- Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V. I., Kochubei, A. N., (1989). The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, *Ukrainian Mathematical Journal*. 41, 1299-1312 (English transl. in *Ukrainian Mathematical Journal*. 41, 1117-1129).
- Gulsen, T., Yilmaz, E., (2017) Spectral theory of Dirac system on time scales. *Applicable Analysis* **96**(16), 2684–2694
- Gulsen, T., Yilmaz, E., Goktas, S., (2017) Conformable fractional Dirac system on time scales. *Journal of Inequalities and Applications*. **2017**(161), 1–10.

- Hammoudi, A., Torres, D. F. M., (2018) A Truly conformable calculus on time scales. *Global Stochastic Analysis* 5(1), 1–14.
- Hilger, S., (1988). *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. Thesis, Universität Würzburg, Würzburg Germany.
- Kreyszig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley and Sons*, New York. 688.
- Keskin, B., (2020). Inverse problems for one dimensional conformable fractional Dirac type integro differential system. *Inverse Problems*. 36, No. 6, Article ID 065001, pp. 10.
- Kunt, M., (2018). *Tensör Çarpımları ve Nükleer C^* -Cebirleri* (Yüksek Lisans Tezi) Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Mamedov, K. R., Akcay, O., (2017). Inverse problem for a class of Dirac operators by the Weyl function. *Dynamical System of Applications* 26(1), 183–196.
- Naimark M. A., (1968). *Linear Differential Operators of 2nd edn.*, Nauka, Moscow (1969); *English translate of 1st. edn.*, 1,2, New York.
- Ozkan, A. S., (2018) Ambarzumyan-type theorems on a time scale. *Journal of Inverse and Ill Posed Problems* 26(5), 633–637.
- Tuna, H., Eryilmaz, A., (2015). Completeness theorem for discontinuous Dirac systems. *Journal of Differential Equations and Dynamic Systems* 23, 15–23.
- Zhao, D., Li, T., (2016). On conformable delta fractional calculus on time scales. *Journal of Mathematic Computational Sciences* 16, 324–335.