



**UYUMLU KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

Nazlıcan EROĞLU

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ
AĞRI-2019
(Her hakkı saklıdır.)**

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nazlıcan EROĞLU

UYUMLU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ
YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

AĞRI-2019

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “Uyumlu Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla İntegral Eşitsizlikler” adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- ☒ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- ☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- ☐ Tezimin yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

11/01/2019

Nazlıcan EROĞLU

TEZ ONAY FORMU

UYUMLU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER

Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ danışmanlığında, Nazlıcan EROĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma, 11/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Evrim TOKLU

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYUMLU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Nazlıcan EROĞLU

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

Bu tezde, konveks, konkav ve s –konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral içeren yeni genelleştirmeler elde edilmiştir. İlk bölüm giriş için ayrılmış olup, bu bölümde eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar, kesirli türev ve integraller, uyumlu kesirli türev ve integraller ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyonlar ile ilgili temel tanım ve kavramlara, farklı türden konveks fonksiyon sınıflarına, bazı önemli eşitsizliklere ve literatürde iyi bilinen kesirli türev ve integral tanımlarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde uyumlu kesirli türev ve integraller ile ilgili temel tanım, teorem ve bilgiler verilmiştir. Daha sonra bu bölümde literatürde mevcut bazı eşitsizliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise konveks ve konkav fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral içeren yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca s –konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral içeren eşitsizlikler bulunmuştur.

2019, 49 sayfa

Anahtar sözcükler: Uyumlu kesirli integral operatörü, Konveks fonksiyon, s –Konveks fonksiyon, Hölder eşitsizliği, Power Mean eşitsizliği.

ABSTRACT
MASTER THESIS
INTEGRAL INEQUALITIES VIA CONFORMABLE FRACTIONAL
INTEGRAL OPERATORS

Nazlıcan EROĞLU

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Alper EKİNCİ

In this thesis, new generalizations have been obtained including conformable fractional integral for convex, concave and s -convex functions. The first chapter is devoted to introduction, and in this chapter information on inequalities, convex functions, fractional derivatives and integrals, conformable fractional derivatives and integrals has been given. In the second chapter, basic definitions and concepts related to convex functions, different types of convex function classes, some important inequalities and fractional derivative and integral definitions well known in the literature are included. In the third chapter, basic definitions, theorems and information about conformable fractional derivatives and integrals are given. Later, some inequalities in the literature are included in this section. In the fourth chapter, new inequalities including conformable fractional integral are obtained for convex and concave functions. Also inequalities including conformable fractional integral were obtained for s -convex functions.

2019, 49 pages

Keywords: Conformable fractional integral operator, Convex function, s –Convex function, Hölder’s inequality, Power Mean inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirlemede yardımcı olarak, bilgi ve tecrübeleriyle rehberlik eden, her türlü imkanı sağlayan ve bana her zaman desteğini sunan saygıdeğer danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans çalışmalarım esnasında benden öneri ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

11/01/2019

Nazlıcan EROĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Genel Kavramlar	3
2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	9
2.3. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri	11
2.4. Caputo Kesirli Türevi.....	12
2.5. Katugampola Kesirli İntegrali	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Uyumlu (Conformable) Kesirli Türev ve İntegraller	13
3.2. Literatürde Mevcut Bazı İntegral Eşitsizlikler	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	29
4.1. Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler.....	29
4.2. s-Konveks Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler	39
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ.....	50

SİMGELER DİZİNİ

${}^{(n)}T_{\alpha}^a$	n . Mertebeden Sol Dizisel Uyumlu Kesirli Türev
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
$B_x(a, b)$	Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu
${}^cD_{\alpha}^a$	Caputo Kesirli Türevi
I°	I 'nın İçi
I_{α}^a	Sol Uyumlu Kesirli İntegral
$J_{a^{+}}^{\alpha}$	Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$J_{b^{-}}^{\alpha}$	Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$K_m(b)$	m –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyonların Sınıfı
T_{α}^a	Sol Uyumlu Kesirli Türev
${}^bI_{\alpha}$	Sağ Uyumlu Kesirli İntegral
${}^bT_{\alpha}^{(n)}$	n . Mertebeden Sağ Dizisel Uyumlu Kesirli Türev
${}^bT_{\alpha}$	Sağ Uyumlu Kesirli Türev
${}^{\rho}I_x^{\alpha}$	Katugampola Kesirli İntegral
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\in$	Elemanıdır
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
Γ	Gama Fonksiyonu
$B(x, y)$	Beta Fonksiyonu
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
$P(I)$	P –Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
max	Maksimum

f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme	3
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	3
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon	4



1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, fizik ve mühendislik gibi bazı bilimsel alanlarla birlikte yaklaşım teorisi ve ortalamalar teorisi gibi matematiğin diğer alanlarında da önemli bir yere sahiptir. Eşitsizlik teorisi ile ilgili Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” (Hardy *et al.* 1952), 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman’ın yazdığı “Inequalities” (Beckenbach and Bellman 1961), 1970 yılında Mitrinović’in yazdığı “Analytic Inequalities” (Mitrinović 1970) kitapları temel kaynaklar arasında gösterilebilir.

Tarihi çok eskilere dayanan konvekslik, fonksiyonel analiz ve olasılık teorisi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Konvekslik kavramı ilk olarak Hermite tarafından 1881’de bulunan bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen de bu alanda önemli çalışmalar yaparak konveks fonksiyonların gelişmesine öncülük etmiştir.

Konveks fonksiyonlar ile ilişkili olan eşitsizlik teorisi için çok sayıda çalışma yapılmış, kesirli türev ve kesirli integral kavramlarıyla birlikte önemli bir gelişme kazanmıştır. Kesirli Analiz ile ilgili son zamanlarda pek çok araştırma yapılmaya başlanmıştır. Kesirli Analiz ile ilgilenenlerin sayısı arttıkça konu daha iyi anlaşılmıştır. Önümüzdeki yıllarda da Kesirli Analiz ile ilgili yapılan çalışmaların önemli ölçüde artması öngörülmektedir.

L’Hospital’in Leibniz’e 1695 yılındaki bir mektupta $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda sonucun nasıl olacağını sorması üzerine kesirli hesabın temelleri atılmıştır. Daha sonra Laplace, Fourier, Abel, Lacroix, Euler, Riemann, Liouville, Grünwald ve Letnikov gibi birçok bilim insanı bu konu ile ilgili pek çok çalışmaya öncülük etmişlerdir.

Kesirli türev ve integrallerin birçok tanımı bulunmaktadır. Kesirli türevin birçok tanımında integral formu kullanılmaktadır. Bu formu kullanan Riemann-Liouville ve Caputo’nun tanımları en popüler olan tanımlardandır. Ayrıca Grünwald-Letnikov limit formundan faydalanan kesirli türev tanımı yapılmıştır. Yukarıdaki tanımlar da dahil bütün kesirli türev tanımları lineerlik şartını sağlar (Khalil *et al.* 2014). Diğer

özellikler ile ilgili pek fazla uyum görülmemektedir. Örneğin klasik türev için sağlanan zincir kuralı, iki fonksiyonun çarpımının türevi ve bölümünün türevi gibi özellikler kesirli türevlerin hepsi için sağlanmaz.

Kesirli Analiz ile ilgili, Haziran 1974'te B. Ross tarafından New Haven Üniversitesi'nde düzenlenen "First Conference on Fractional Calculus and its Applications" adlı ilk konferansta birçok matematikçinin katılımıyla birlikte önemli gelişmeler katedilmiştir. Daha sonra S.G. Samko, A.A. Kilbas ve O.I. Marichev, K.B. Oldham ve J. Spanier, K.S. Miller ve B. Ross gibi bilim insanları kesirli analiz ile ilgili kitaplar yazmışlardır.

Son zamanlarda ise klasik türevin doğal bir genişletilmesi olarak uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) adlı yeni bir kesirli türevin tanımı verildi. Bu tanım ile klasik türev tanımı arasındaki uyum dikkat çekmektedir. Uyumlu kesirli türevler çarpım kuralı ve bölüm kuralını sağlamakla birlikte klasik türevlerdeki zincir kuralına yakın bir formda yazılabilmektedir. Khalil ve arkadaşları (Khalil *et al.* 2014) ile ortaya çıkan bu tanım, klasik türev tanımına benzer limit formu kullanmaktadır. Daha sonra uyumlu kesirli türev kavramı Abdeljawad (2015) tarafından geliştirilmiştir. Abdeljawad yaptığı çalışmada, sağ ve sol uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini vermiştir. Ayrıca uyumlu kesirli integralin tanımını da vermiştir.

A. Yalçın "Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren İntegral Eşitsizlikler" (Yalçın 2016) adlı yüksek lisans tezinde yeni sonuçlara ulaşmıştır. A. Gözpınar "Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler" (Gözpınar 2018) adlı doktora tezinde uyumlu kesirli integraller ile ilgili yeni çalışmalara yer vermiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

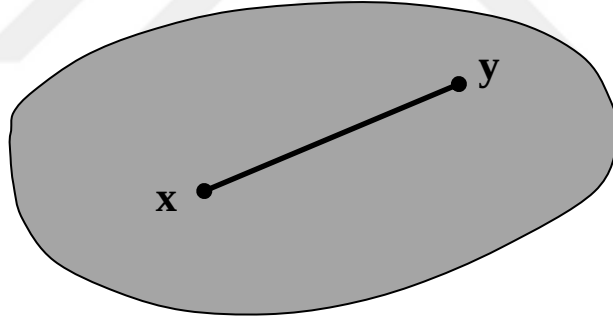
2.1. Genel Kavramlar

Çalışmanın bu bölümünde bazı temel tanım, teorem ve bilgilere yer verilecektir.

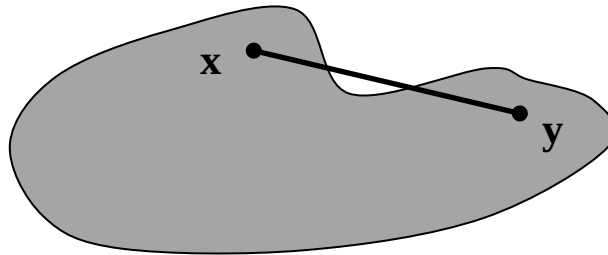
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



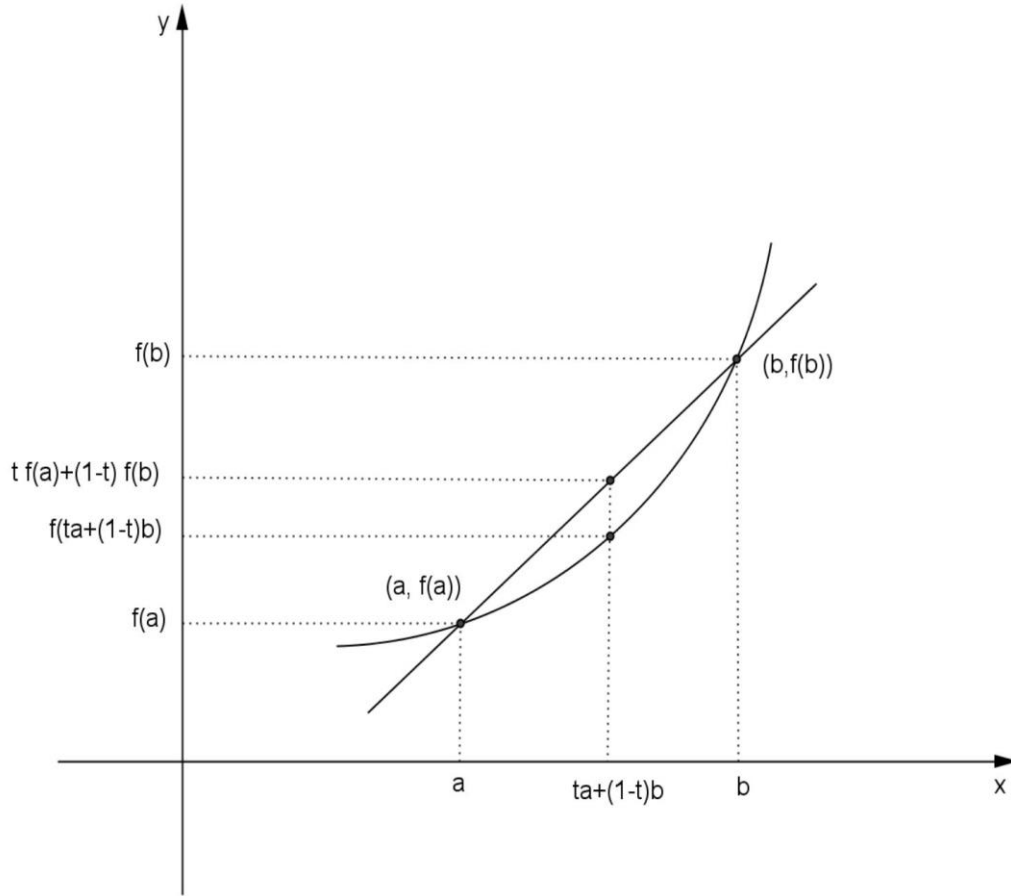
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić *et al.* 1992).

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak bir konveks fonksiyon eğrisi, üzerinde alınan herhangi $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen kirişin altında kalır. Diğer bir deyişle bir konveks fonksiyonda $ta + (1 - t)b$ noktasının görüntüsü $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerinin aynı t değeriyle oluşturulan lineer bileşiminden küçük veya eşit kalır.

Tanım 2.1.3. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 'da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.4. (Mutlak Süreklilik): $I, \mathbb{R}$ 'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter and Brunt 2000).

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. $f, (a, b)$ aralığında süreklidir ve
- b. $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.5. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I 'da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
 - (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
 - (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
 - (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır
- denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.2. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in I$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

(Adams and Essex 2010).

Sonuç 2.1.1. f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvektir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.3. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I° 'de artandır (kesin artandır) (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.4. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f'' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.6. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.7. f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.1.2. Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur (Ion 2007).

Tanım 2.1.8. (*log* –Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise veya her $x, y \in I$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{1-\alpha}$$

ise f fonksiyonuna *log* –konveks fonksiyon ve bu eşitsizliğin ters çevrilmesi durumunda ise *log* –konkav fonksiyon denir (Pečarić et al. 1992).

Tanım 2.1.9. (*P* –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu $\forall x, y \in I, \lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye *P* –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir et al. 1995).

Tanım 2.1.10. (Birinci Anlamda *s* –Konveks Fonksiyon): $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in [0, \infty)$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda *s* –konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.11. (İkinci Anlamda *s* –Konveks Fonksiyon): $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in [0, \infty)$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Tanım 2.1.12. (m –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], m \in [0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m – konvektir denir (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.1.13. (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang et al. 2012).

Tanım 2.1.14. (Ortalama Fonksiyonu): M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- 1) $M(x, y) = M(y, x)$
- 2) $M(x, x) = x$
- 3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- 4) $M(ax, ay) = aM(x, y), \forall a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir (Anderson *et al.* 2007).

Tanım 2.1.15. (Gama Fonksiyonu): Euler, Gama fonksiyonunun integral temsilini

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

şeklinde ifade eder (Kannappan 2009).

Tanım 2.1.16. (Beta Fonksiyonu): Beta fonksiyonu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0$$

şeklindedir (Dragomir *et al.* 2000). Bu eşitlik Euler tipli Beta fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır. Tamamlanmamış Beta fonksiyonu,

$$B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

şeklinde ifade edilir (Pearson 1968).

Bu fonksiyonların,

$$\text{i. } B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad x, y > 0$$

$$\text{ii. } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0$$

$$\text{iii. } B(x, y) = B(y, x)$$

gibi özellikleri vardır (Jeffrey and Dai 2008).

Literatürden görülebileceği gibi, gama ve beta fonksiyonları sırasıyla $(0, \infty)$ ve $(0, \infty)^2$ de logaritmik konveks fonksiyonlardır.

2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.2.2. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.2.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.2.1. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.2.4. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.5. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

2.3. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

Tanım 2.3.1. $[a, b](-\infty < a < b < \infty)$, reel eksen üzerinde sonlu bir aralık ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b$$

integrallerine sırasıyla $\alpha > 0$ için α . mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri denir (Kilbas *et al.* 2006). Burada $\Gamma(\alpha)$ Gama fonksiyonudur. Ayrıca $J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x)$ dir.

2.4. Caputo Kesirli Türevi

Tanım 2.4.1. $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > a$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$({}^c D_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(x) dx$$

biçiminde tanımlanır (Caputo 1967; Kilbas *et al.* 2006).

Ayrıca Caputo kesirli türevine (Podlubny 1999) kaynağında detaylı bir şekilde yer verilmiştir.

2.5. Katugampola Kesirli İntegrali

Tanım 2.5.1. α ve $\rho \neq -1$ olmak üzere, Katugampola kesirli integrali

$${}_{\rho} I_{\alpha}^a f(x) = \frac{(\rho + 1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha-1} t^{\rho} f(t) dt$$

şeklindedir (Katugampola 2011).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Uyumlu (Conformable) Kesirli Türev ve İntegraller

Bu bölümde uyumlu kesirli türev ve integraller ile ilgili bazı temel tanım, teorem ve bilgiler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun α mertebeden “uyumlu kesirli türevi”

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile tanımlanır (Khalil *et al.* 2014). Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa bu durumda,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olarak tanımlanır. f 'nin α mertebeli uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_{\alpha}(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türevi varsa bu durumda f 'ye kısaca α diferansiyellenebilirdir denir (Khalil *et al.* 2014).

Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.1.1. Bir $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere α diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir (Khalil *et al.* 2014).

İspat:

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

olduğundan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılabilir. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa bu durumda

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

olur. Böylece

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

Teorem 3.1.2. $\alpha \in (0, 1]$ için f ve g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.
2. $\forall p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.
3. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dir.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ dir.
5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ dir.
6. Ek olarak eğer f diferansiyellenebilirse $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir (Khalil et al. 2014).

İspat: İlk üç maddenin ispatları tanımdan açıkça görülebilir. Çok önemli olduklarından sadece (4) ve (6) nın ispatları verilecektir.

(4) Sabit bir $t > 0$ için

$$\begin{aligned} T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\ &= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha(g)(t) \end{aligned}$$

dir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir. (4) ün ispatı tamamlanır.

(5) Benzer şekilde ispatlanabilir.

(6) İspat için, Tanım 3.1.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ alınırsa ve buradan $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_\alpha(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\ &= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.1.3. (Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar için Rolle Teoremi): $a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i. $[a, b]$ aralığında sürekli,
- ii. $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir,
- iii. $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır (Khalil et al. 2014).

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ için bir $c \in (a, b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Genelliği bozmaksızın c noktasının f fonksiyonunun yerel minimum noktası olduğunu varsayalım. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Fakat, ilk limit negatif, ikinci limit ise pozitif değildir. Dolayısıyla, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 3.1.4. (Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi): $a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i. $[a, b]$ aralığında sürekli,
- ii. $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır (Khalil *et al.* 2014).

İspat: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu halde g fonksiyonu için Rolle teoreminin koşulları sağlanır. Dolayısıyla $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. $T_\alpha \left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha \right) = 1$ olduğu kullanılarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. $a = 0$ olduğunda T_α yazılır. Eğer (a, b) aralığında $(T_\alpha f)(t)$ mevcutsa $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t)$ olur (Abdeljawad 2015).

$0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^bT_\alpha f)(t)$ mevcutsa $({}^bT_\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^bT_\alpha f)(t)$ olur. Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $(T_\alpha^a f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $({}^bT_\alpha f)(t) = -(b-t)^{1-\alpha} f'(t)$ dir (Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1.3. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi, $f^{(n)}(t)$ türevi mevcut olmak üzere

$$(T_\alpha^a f)(t) = (T_\beta^a f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad 2015).

Benzer şekilde f fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = (-1)^{n+1} ({}^bT_\beta f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad 2015).

Notasyon 3.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = \int_a^t f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanan I_{α}^a operatörü ile α mertebeden sol uyumlu kesirli integrali ve

$$({}^b I_{\alpha} f)(t) = \int_t^b f(x) d_{\alpha}(b, x) = \int_t^b (b - x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanan ${}^b I_{\alpha}$ operatörü ile de α mertebeden sağ uyumlu kesirli integrali gösterilecektir (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.1.1. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T_{\alpha}^a I_{\alpha}^a f(t) = f(t)$$

olur (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.1.2. $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t < b$ için

$${}^b T_{\alpha} {}^b I_{\alpha} f(t) = f(t)$$

olur (Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1.4. $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. Bu takdirde sırasıyla α mertebeli sol uyumlu ve sağ uyumlu kesirli integralleri

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = J_{a^{+}}^{n+1} \left((t - a)^{\beta-1} f(t) \right) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t - x)^n (x - a)^{\beta-1} f(x) dx$$

ve

$$({}^b I_{\alpha} f)(t) = J_b^{n+1} \left((b - t)^{\beta-1} f(t) \right) = \frac{1}{n!} \int_t^b (x - t)^n (b - x)^{\beta-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad 2015). Eğer burada $\alpha = n + 1$ ise bu takdirde $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Dolayısıyla

$$(I_a^\alpha f)(t) = (J_a^{n+1} f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f(x) dx$$

olur. Bu ise Cauchy formülü ile f fonksiyonunun $(a, t]$ aralığında $n + 1$ kez tekrarlı integralidir.

$\alpha > 0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$(J_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlandığı hatırlatılarak $\alpha = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$(I_a^\alpha f)(t) = (J_{a^+}^{n+1} f)(t)$$

olduğu görülür (Abdeljawad 2015).

Örnek 3.1.1. $\alpha, \mu > 0$ için

$$J_{a^+}^\alpha ((t-a)^{\mu-1})(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \alpha)} (x-a)^{\alpha+\mu-1}$$

şeklindedir (Samko *et al.* 1993).

Buna göre $(t-a)^\mu$ fonksiyonunun $\alpha \in (n, n+1]$ için uyumlu kesirli integralini hesaplayalım. $\mu \in \mathbb{R}$ öyle ki $\alpha + \mu - n > 0$ olmak üzere

$$(I_a^\alpha (t-a)^\mu)(x) = (J_{a^+}^{n+1} (t-a)^{\mu+\alpha-n-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \mu - n)}{\Gamma(\alpha + \mu + 1)} (x-a)^{\alpha+\mu}$$

yazılabilir. Benzer biçimde $\mu \in \mathbb{R}$ öyle ki $\alpha + \mu - n > 0$ olmak üzere sağ uyumlu kesirli integral

$$({}^b I_\alpha (b-t)^\mu)(x) = (J_b^{n+1} (t-a)^{\mu+\alpha-n-1})(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \mu - n)}{\Gamma(\alpha + \mu + 1)} (b-x)^{\alpha+\mu}$$

olarak hesaplanır.

Buradan da anlaşılıyor ki; Polinom fonksiyonların Riemann kesirli integralleri ile uyumlu kesirli integralleri bir sabit çoklu kadar farklıdır ve doğal sayı mertebesinde çakışırlar.

Lemma 3.1.3. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

olur (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.1.4. $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu takdirde her $t < b$ için

$${}^bT_\alpha {}^bI_\alpha f(t) = f(t)$$

olur (Abdeljawad 2015).

Lemma 3.1.5. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$$I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) = f(t) - f(a)$$

olur (Abdeljawad 2015).

İspat: f diferansiyellenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) &= \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} T_\alpha(f)(x) dx = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} (x - a)^{1-\alpha} f'(x) dx \\ &= f(t) - f(a) \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.1.5 daha yüksek mertebeler için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Önerme 3.1.1. $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t > a$ için $(n + 1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $t > a$ için

$$I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

olur (Abdeljawad 2015).

Önerme 3.1.2. $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t < b$ için $(n+1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $t < b$ için

$${}^b I_{\alpha} {}^b T_{\alpha}(f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}$$

olur (Abdeljawad 2015).

Teorem 3.1.5. (Zincir Kuralı): $\alpha \in (0,1]$ ve $f, g: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (sol) α diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere her t için $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ ise $h(t)$, (sol) α diferansiyellenebilirdir ve

$$(T_{\alpha}^a h)(t) = (T_{\alpha}^a f)(g(t)) \cdot (T_{\alpha}^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Eğer $t = a$ ise

$$(T_{\alpha}^a h)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_{\alpha}^a f)(g(t)) \cdot (T_{\alpha}^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

olur (Abdeljawad 2015).

Önerme 3.1.3. $f: [a, \infty) \rightarrow \infty$, (a, ∞) üzerinde iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \beta \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$(T_{\alpha}^a T_{\beta}^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_{\alpha}^a f(t)$$

olur (Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1.5. $0 < \alpha < 1$ ve $n \in \{1,2,3, \dots\}$ olsun. Bu durumda sırasıyla n . mertebeden sol ve sağ dizisel uyumlu kesirli türev

$${}^{(n)}T_{\alpha}^a f(t) = \underbrace{T_{\alpha}^a T_{\alpha}^a \dots T_{\alpha}^a}_{n\text{-kez}} f(t)$$

ve

$${}^bT_\alpha^{(n)}f(t) = \underbrace{{}^bT_\alpha {}^bT_\alpha \dots {}^bT_\alpha}_{n\text{-kez}}f(t)$$

olarak tanımlanır (Abdeljawad 2015).

Teorem 3.1.6. $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve fg diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x) T_\alpha^a(g)(x) d_\alpha(x, a) = fg|_a^b - \int_a^b g(x) T_\alpha^a(f)(x) d_\alpha(x, a)$$

olur (Abdeljawad 2015).

Önerme 3.1.4. $0 < \alpha \leq 1$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(t) ({}^bI_\alpha g)(t) d_\alpha(t, a)$$

olur (Abdeljawad 2015).

İspat: Tanımdan

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b \left(\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx \right) g(t) (b-t)^{\alpha-1} dt$$

bulunur. Buradan da integrallerin mertebeleri değiştirilerek

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(x) ({}^bI_\alpha g)(x) d_\alpha(x, a)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7. $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t) ({}^bT_\alpha g)(t) d_\alpha(b, t) + f(t)g(t)|_a^b$$

olur (Abdeljawad 2015).

İspat: Önerme 3.1.2 yardımıyla ve g fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(t, a) \\
&= \int_a^b (T_\alpha^a f)(t) {}^b I_\alpha {}^b T_\alpha g(t) d_\alpha(t, a) + g(b) \int_a^b (T_\alpha^a f)(t) d_\alpha(t, a)
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 3.1.4 uygulanırsa,

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b (I_\alpha^a T_\alpha^a f)(t) {}^b T_\alpha g(t) d_\alpha(b, t) + g(b) (I_\alpha^a T_\alpha^a f)(a)$$

bulunur. Lemma 3.1.5 yardımıyla ve f 'nin diferansiyellenebilir olduğu kullanılarak $(I_\alpha^a T_\alpha^a f)(t) = f(t) - f(a)$ ve Önerme 3.1.2 yardımıyla ve g 'nin diferansiyellenebilir olduğu kullanılarak $({}^b I_\alpha {}^b T_\alpha g)(t) = g(t) - g(b)$ ifadeleri yerlerine yazılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.8. f fonksiyonu bazı $0 < \alpha \leq 1$ için bir t_0 noktası civarında sonsuz bir şekilde α diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda f fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t - t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, \quad t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}, \quad R > 0 \quad (3.1)$$

biçiminde kesirsel kuvvet seri açılımına sahiptir. Burada $(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)$ ifadesi k defa uyumlu kesirli türevin uygulanması anlamındadır (Abdeljawad 2015).

İspat: $t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}$, $R > 0$ olmak üzere $f(t) = c_0 + c_1(t - t_0)^\alpha + c_2(t - t_0)^{2\alpha} + c_3(t - t_0)^{3\alpha} + \dots$ olsun. Bu durumda $f(t_0) = c_0$ olur. f fonksiyonuna $T_\alpha^{t_0}$ uygulanırsa t_0 noktası için $(T_\alpha^{t_0} f)(t_0) = c_1\alpha$ dır ve böylece $c_1 = \frac{(T_\alpha^{t_0} f)(t_0)}{\alpha}$ olur. Bu şekilde devam edilerek f fonksiyonuna n defa $T_\alpha^{t_0}$ uygulanırsa t_0 da yerine yazılarak $(T_\alpha^{t_0} f)^{(n)}(t_0) = c_n\alpha(2\alpha) \dots (n\alpha) = \alpha^n n!$ dir ve buradan $c_n = \frac{(T_\alpha^{t_0} f)^{(n)}(t_0)}{\alpha^n n!}$ olur. Böylece (3.1) elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.2. Literatürde Mevcut Bazı İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde tez çalışmasında elde edilen sonuçlara benzer yöntemlerle oluşturulmuş lemma ve teoremlere yer verilecektir.

Latif ve Dragomir 2013 yılındaki çalışmalarında aşağıdaki teoremleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.1. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left(\frac{b-a}{96}\right) \left[|f'(a)| + 4 \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| + 2 \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + 4 \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right| + |f'(b)| \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif and Dragomir 2013).

Teorem 3.2.2. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde sabit bir $q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartıyla konveks ise

$$\left| \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{16}\right) \times \left\{ \left(\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q + |f'(a)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q + |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif and Dragomir 2013).

Teorem 3.2.3. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde sabit bir $q \geq 1$ için konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{16}\right) \\
& \times \left\{ \left(|f'(a)|^q + 2 \left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + 2 \left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + 2 \left| f'\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(2 \left| f'\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right|^q + |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif and Dragomir 2013).

Teorem 3.2.4. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde sabit bir $q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartıyla konkav ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{b-a}{16}\right) \left\{ \left| f'\left(\frac{7a+b}{8}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{5a+3b}{8}\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| f'\left(\frac{3a+5b}{8}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{a+7b}{8}\right) \right| \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif and Dragomir 2013).

Özdemir ve arkadaşları 2012 yılındaki çalışmalarında aşağıdaki lemma ve teoremleri elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.1. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ve n bir tek sayı ise

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{b-a}{n+1} \right) \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left[\int_0^1 t f' \left(t \frac{a(n-2k)+b(2k+1)}{n+1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-t) \frac{a(n-2k+1)+b(2k)}{n+1} \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 (1-t) f' \left(t \frac{a(n-2k-1)+b(2k+2)}{n+1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-t) \frac{a(n-2k)+b(2k+1)}{n+1} \right) dt \right] \\
& = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 2f \left(\frac{a(n-2k)+b(2k+1)}{n+1} \right) - \frac{n+1}{b-a} \int_a^b f(x) dx
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012).

Teorem 3.2.5. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ve n bir tek sayı ise

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 2f \left(\frac{a(n-2k)+b(2k+1)}{n+1} \right) - \frac{n+1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{6(n+1)} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(4 \left| f' \left(\frac{a(n-2k)+b(2k+1)}{n+1} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{a(n-2k+1)+b(2k)}{n+1} \right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| f' \left(\frac{a(n-2k-1)+b(2k+2)}{n+1} \right) \right| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012).

Teorem 3.2.6. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde sabit bir $q > 1$ için konveks, n bir tek sayı ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 2f \left(\frac{a(n-2k)+b(2k+1)}{n+1} \right) - \frac{n+1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{b-a}{n+1}\right) \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left| f' \left(\frac{a(n-2k) + b(2k+1)}{n+1} \right) \right|^q \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| f' \left(\frac{a(n-2k+1) + b(2k)}{n+1} \right) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{2} \left| f' \left(\frac{a(n-2k-1) + b(2k+2)}{n+1} \right) \right|^q \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left| f' \left(\frac{a(n-2k) + b(2k+1)}{n+1} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012).

Set ve Çelik 2017 yılındaki çalışmalarında uyumlu kesirli integraller için aşağıdaki lemma ve teoremleri elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha}(a, b) = & \frac{-(b-a)\alpha}{16} \left[\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) f' \left(ta + (1-t) \frac{3a+b}{4} \right) dt \right. \\
& - \int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n, n+1) f' \left(t \frac{3a+b}{4} + (1-t) \frac{a+b}{2} \right) dt \\
& + \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) f' \left(t \frac{a+b}{2} + (1-t) \frac{a+3b}{4} \right) dt \\
& \left. - \int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n, n+1) f' \left(t \frac{a+3b}{4} + (1-t)b \right) dt \right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $B_t(\cdot, \cdot)$ tamamlanmamış beta fonksiyonudur ve

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha}(a, b) &= \frac{\alpha}{4} \left[B(n+1, \alpha-n) \left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + B(\alpha-n, n+1) \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \right] - \frac{\alpha 4^{\alpha-1} n!}{(b-a)^{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(I_{\alpha}^a f \left(\frac{3a+b}{4} \right) + I_{\alpha}^{\frac{3a+b}{4}} f \left(\frac{a+b}{2} \right) + I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}} f \left(\frac{a+3b}{4} \right) + I_{\alpha}^{\frac{a+3b}{4}} f(b) \right) \right]$$

dir (Set and Çelik 2017).

Teorem 3.2.7. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$\begin{aligned} & |\Psi_{\alpha}(a, b)| \\ & \leq \frac{(b-a)\alpha}{16} \left[(B(n+1, \alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}} \left(\Phi_1^{\frac{1}{q}} + \Phi_3^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\ & \quad \left. + (B(n+2, \alpha-n))^{1-\frac{1}{q}} \left(\Phi_2^{\frac{1}{q}} + \Phi_4^{\frac{1}{q}} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left(\frac{1}{2} B(n+1, \alpha-n) - \frac{1}{2} B(n+3, \alpha-n) \right) |f'(a)|^q \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} B(n+1, \alpha-n+2) \right) \left| f' \left(\frac{3a+b}{4} \right) \right|^q, \\ \Phi_2 &= \left(\frac{1}{2} B(\alpha-n+2, n+1) \right) \left| f' \left(\frac{3a+b}{4} \right) \right|^q \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} B(\alpha-n, n+1) - \frac{1}{2} B(\alpha-n, n+3) \right) \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q, \\ \Phi_3 &= \left(\frac{1}{2} B(n+1, \alpha-n) - \frac{1}{2} B(n+3, \alpha-n) \right) \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} B(n+1, \alpha-n+2) \right) \left| f' \left(\frac{a+3b}{4} \right) \right|^q, \\ \Phi_4 &= \left(\frac{1}{2} B(\alpha-n+2, n+1) \right) \left| f' \left(\frac{a+3b}{4} \right) \right|^q \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} B(\alpha-n, n+1) - \frac{1}{2} B(\alpha-n, n+3) \right) |f'(b)|^q \end{aligned}$$

dir. Burada $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $B(a, b)$ Euler beta fonksiyonudur (Set and Çelik 2017).

Teorem 3.2.8. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
& |\Psi_\alpha(a, b)| \\
& \leq \frac{(b-a)\alpha}{16} \left[\left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(a)|^q + \left| f' \left(\frac{3a+b}{4} \right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + \left| f' \left(\frac{a+3b}{4} \right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 |B_{1-t}(\alpha-n, n+1)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{\left| f' \left(\frac{3a+b}{4} \right) \right|^q + \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + \left. \left(\frac{\left| f' \left(\frac{a+3b}{4} \right) \right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $B_t(\dots)$ tamamlanmamış beta fonksiyonudur (Set and Çelik 2017).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde uyumlu (conformable) kesirli integral içeren yeni bir lemma ispatlanmıştır. İspatlanan bu lemma yardımıyla konveks ve konkav fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n + 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b - a) + a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 [B_t(n+1, \alpha-n) f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]] dt \\ &= \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f \right) (\lambda(k)) \right\} \end{aligned}$$

dır.

İspat:

$$\lambda(k+1) - \lambda(k) = \frac{b-a}{j}$$

olduğu bilindiğinden ve kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [B_t(n+1, \alpha-n) f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]] dt \\ &= \frac{j}{b-a} B_t(n+1, \alpha-n) f[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)] \Big|_0^1 \\ & - \frac{j}{b-a} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)] dt \\ &= \frac{j}{b-a} B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] \\ & - \frac{j}{b-a} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)] dt \end{aligned}$$

elde edilir. $x = t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)$ değişken değiştirmesi kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)] dt \\ &= \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} (x - \lambda(k))^n (\lambda(k+1) - x)^{\alpha-n-1} \left(\frac{j}{b-a}\right)^\alpha f(x) dx \\ &= n! \left(\frac{j}{b-a}\right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)}I_\alpha f\right)(\lambda(k)) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.1. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b-a) + a$ olmak üzere $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a}\right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)}I_\alpha f\right)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} |f'(\lambda(k+1))| \right. \\ & \quad \left. + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} |f'(\lambda(k))| \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ve mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a}\right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)}I_\alpha f\right)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]| dt \end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\int_0^1 [B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|] dt$$

$$\leq \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) [t|f'(\lambda(k+1))| + (1-t)|f'(\lambda(k))|] dt$$

bulunur. Tamamlanmamış beta fonksiyonunun özellikleri ve kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) t dt \\ &= B_t(n+1, \alpha-n) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n+2} (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) (1-t) dt \\ &= B_t(n+1, \alpha-n) \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) dt \\ &= \frac{B(n+1, \alpha-n) - 2B(n+2, \alpha-n) + B(n+3, \alpha-n)}{2} \\ &= \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen sonuç bulunur.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.1 şartları altında, sırasıyla $j = 2, 3$ ve 4 seçilirse

i. $j = 2$ durumu

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a} \right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2} I_\alpha f \right)(a) + ({}^b I_\alpha f) \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \right\} \right| \\ & \leq \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} \left[\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| + |f'(b)| \right] \\ & \quad + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} \left[|f'(a)| + \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right] \end{aligned}$$

ii. $j = 3$ durumu

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{3}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{2b+a}{3}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{3}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{2a+b}{3} I_\alpha f\right)(a) + \left(\frac{2b+a}{3} I_\alpha f\right)\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \left({}^b I_\alpha f\right)\left(\frac{2b+a}{3}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} \left[\left| f'\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{2b+a}{3}\right) \right| + |f'(b)| \right] \\
& \quad + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} \left[|f'(a)| + \left| f'\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{2b+a}{3}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

iii. $j = 4$ durumu

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{4}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{3b+a}{4}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{4}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{3a+b}{4} I_\alpha f\right)(a) + \left(\frac{a+b}{2} I_\alpha f\right)\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \left(\frac{3b+a}{4} I_\alpha f\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left({}^b I_\alpha f\right)\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} \left[\left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right| + |f'(b)| \right] \\
& \quad + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} \left[|f'(a)| + \left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1'de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\
& \leq \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{1}{3} |f'(\lambda(k+1))| + \frac{1}{6} |f'(\lambda(k))| \right\}
\end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.2. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n + 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b - a) + a$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f \right)(\lambda(k)) \right\} \right|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \{ |f'(\lambda(k+1))|^q + |f'(\lambda(k))|^q \}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f \right)(\lambda(k)) \right\} \right| \quad (4.1)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]| dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_0^1 |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\int_0^1 |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 [t|f'(\lambda(k+1))|^q + (1-t)|f'(\lambda(k))|^q] dt$$

$$= \frac{1}{2} \{ |f'(\lambda(k+1))|^q + |f'(\lambda(k))|^q \}$$

yazılır. Bu ifadeleri (4.1) de yerine yazıp eşitsizliği sadeleştirerek istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.2 şartları altında, $j = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) I_\alpha f(a) + ({}_b I_\alpha f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right\} \right| \\ & \leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times 2^{-\frac{1}{q}} \left\{ \left[\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |f'(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[|f'(b)|^q + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.2’de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (2)^{-\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \{ |f'(\lambda(k+1))|^q + |f'(\lambda(k))|^q \}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.3. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° ’de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b-a) + a$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a}\right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f \right)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq (B(n+1, \alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} |f'(\lambda(k+1))|^q + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} |f'(\lambda(k))|^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ve Power-Mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha (\lambda^{(k+1)} I_\alpha f)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]| dt \\ & \leq \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) dt &= B_t(n+1, \alpha-n) t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= B(n+1, \alpha-n) - B(n+2, \alpha-n) \\ &= B(n+1, \alpha-n+1) \end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \\ & \leq \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) [t |f'(\lambda(k+1))|^q + (1-t) |f'(\lambda(k))|^q] dt \\ & = \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} |f'(\lambda(k+1))|^q \end{aligned}$$

$$+ \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} |f'(\lambda(k))|^q$$

bulunur. Bu sonuçlar birleştirilirse ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5. Teorem 4.1.3 şartları altında, $j = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) I_\alpha f(a) + ({}^b I_\alpha f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right\} \right| \\ & \leq (B(n+1, \alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left\{ \left[\frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} |f'(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+3, \alpha-n)}{2} |f'(b)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{B(n+1, \alpha-n+2)}{2} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.3'de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{1}{3} |f'(\lambda(k+1))|^q + \frac{1}{6} |f'(\lambda(k))|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.4. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in$

$\mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b-a) + a$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konkav ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f \right) (\lambda(k)) \right\} \right|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \left| f' \left(\frac{\lambda(k+1) + \lambda(k)}{2} \right) \right|$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1, $q > 1$ ve $p = \frac{q}{q-1}$ için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f \right) (\lambda(k)) \right\} \right|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_0^1 |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konkav olduğundan konkav fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^1 |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt$$

$$\leq \left| f' \left(\frac{\lambda(k+1) + \lambda(k)}{2} \right) \right|^q$$

bulunur. Bu eşitsizlikler birleştirilerek istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.7. Teorem 4.1.4 şartları altında, $j = 2$ ve $j = 3$ seçilirse

i. $j = 2$ durumu

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2} I_\alpha f\right)(a) + ({}^b I_\alpha f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

ii. $j = 3$ durumu

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{3}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{2b+a}{3}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{3}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{2a+b}{3} I_\alpha f\right)(a) + \left(\frac{2b+a}{3} I_\alpha f\right)\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + ({}^b I_\alpha f)\left(\frac{2b+a}{3}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left| f'\left(\frac{5a+b}{6}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{5b+a}{6}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.8. Teorem 4.1.4’de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\
& \leq \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{\frac{q-1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \left| f'\left(\frac{\lambda(k+1) + \lambda(k)}{2}\right) \right|
\end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

4.2. s-Konveks Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde s –konveks fonksiyonlar için Lemma 4.1.1 kullanılarak uyumlu kesirli integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1. $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n + 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b - a) + a$ olmak üzere $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s –konveks ve $s \in (0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)}I_\alpha f \right)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1} |f'(\lambda(k+1))| \right. \\ & \quad \left. + \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1} |f'(\lambda(k))| \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ve mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)}I_\alpha f \right)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]| dt \end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s –konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|] dt \\ & \leq \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) [t^s |f'(\lambda(k+1))| + (1-t)^s |f'(\lambda(k))|] dt \end{aligned}$$

bulunur. Tamamlanmamış beta fonksiyonunun özellikleri ve kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) t^s dt \\
&= B_t(n+1, \alpha-n) \frac{t^{s+1}}{s+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \frac{t^{s+1}}{s+1} dt \\
&= \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) (1-t)^s dt \\
&= B_t(n+1, \alpha-n) \frac{-(1-t)^{s+1}}{s+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \frac{-(1-t)^{s+1}}{s+1} dt \\
&= \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen sonuç bulunur.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.1 şartları altında, $j = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) I_{\alpha} f\right)(a) + ({}^b I_{\alpha} f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1} \left[\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f'(b)| \right] \\
& \quad + \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1} \left[|f'(a)| + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.1'de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\
& \leq \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{1 - B(s+2, 1)}{s+1} |f'(\lambda(k+1))| + \frac{B(1, s+2)}{s+1} |f'(\lambda(k))| \right\}
\end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.2.2. $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b-a) + a$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s -konveks, $s \in (0, 1]$ ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_{\alpha} f \right) (\lambda(k)) \right\} \right|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \{ |f'(\lambda(k+1))|^q + |f'(\lambda(k))|^q \}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha \left({}^{\lambda(k+1)} I_{\alpha} f \right) (\lambda(k)) \right\} \right| \quad (4.2)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]| dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_0^1 |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s -konveks olduğundan

$$\int_0^1 |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 [t^s |f'(\lambda(k+1))|^q + (1-t)^s |f'(\lambda(k))|^q] dt$$

$$= \frac{1}{s+1} \{ |f'(\lambda(k+1))|^q + |f'(\lambda(k))|^q \}$$

yazılır. Bu ifadeler (4.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.2.2 şartları altında, $j = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) I_\alpha f(a) + ({}^b I_\alpha f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left[\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |f'(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[|f'(b)|^q + \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.2.2’de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ |f'(\lambda(k+1))|^q + |f'(\lambda(k))|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.2.3. $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° ’de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(k) = \frac{k}{j}(b-a) + a$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s -konveks, $s \in (0, 1]$ ve $q \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a}\right)^\alpha ({}^{\lambda(k+1)} I_\alpha f)(\lambda(k)) \right\} \right| \\
& \leq (B(n+1, \alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1} |f'(\lambda(k+1))|^q + \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1} |f'(\lambda(k))|^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ve Power-Mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ B(n+1, \alpha-n) f[\lambda(k+1)] - n! \left(\frac{j}{b-a} \right)^\alpha (\lambda^{(k+1)} I_\alpha f)(\lambda(k)) \right\} \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{j-1} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]| dt \\ & \leq \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = (B(n+1, \alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s -konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) |f'[t\lambda(k+1) + (1-t)\lambda(k)]|^q dt \\ & \leq \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) [t^s |f'(\lambda(k+1))|^q + (1-t)^s |f'(\lambda(k))|^q] dt \\ & = \frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1} |f'(\lambda(k+1))|^q \\ & + \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1} |f'(\lambda(k))|^q \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.2.3 şartları altında, $j = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2}{b-a} \left\{ B(n+1, \alpha-n) \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - n! \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) I_\alpha f\right)(a) + ({}^b I_\alpha f)\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right\} \right| \\
& \leq (B(n+1, \alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left[\frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1} |f'(a)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{B(n+1, \alpha-n) - B(n+s+2, \alpha-n)}{s+1} |f'(b)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{s+1} \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.6. Teorem 4.2.3'de $\alpha = 1$ ve $n = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{j}{b-a} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ f[\lambda(k+1)] - \frac{j}{b-a} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} f(x) dx \right\} \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \frac{1 - B(s+2, 1)}{s+1} |f'(\lambda(k+1))|^q + \frac{B(1, s+2)}{s+1} |f'(\lambda(k))|^q \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Riemann integrali içeren eşitsizlik elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada konveks, konkav ve s –konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar bazı özel şartlarda literatürde var olan eşitsizlikler ile uyum göstermektedir. Konuyla ilgilenen araştırmacılar, uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Ayrıca bu tez çalışmasındaki benzer yöntemler kullanılarak Riemann-Liouville kesirli integralleri için yeni eşitsizlikler elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. *Calculus A Complete Course*. Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., 2007. Generalized convexity and Inequalities. *J. Math. Anal. Appl.* 335, 1294-1308.
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. *Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Bayraktar, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*, ISBN 978-605-395-412-5.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. *Inequalities*. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.*, 23, 13–20.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13, 529-539.
- Carter, M. and van Brunt, B., 2000. *The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction*. Springer-Verlag, 228, New York.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., 2000. Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *J. of Inequal. and Appl.*, 5, 103-165.

- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3), 335-341.
- Gözpınar, A., 2018. Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi, Ordu.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1971. A review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. *Inequalities*. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- Jeffrey, A. and Dai, H-H., 2008. *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.
- Kannappan, P.I., 2009. *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer.
- Katugampola, U.N., 2011. New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 860-865.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier Science Limited, 204, 523 p, Amsterdam.

- Latif, M.A. and Dragomir, S.S., 2013. New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Functions Whose Derivatives in Absolute Value are Convex with Applications. *Acta Univ. M. Belii, ser. Math.*, 21, 27-42.
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 9, 157-162.
- Özdemir, M.E., Ekinci, A. and Akdemir, A.O., 2012. Some New Integral Inequalities for Functions Whose Derivatives of Absolute Values are Convex and Concave. *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 15(48). <http://rgmia.org/papers/v15/v15a48.pdf>.
- Pearson, K., 1968. *Tables of The Incomplete Beta-Function*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge.
- Pečarić, J.E., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. Academic Press, Inc.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I., 1993. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers.
- Set, E. and Çelik, B., 2017. Certain Hermite-Hadamard type inequalities associated with conformable fractional integral operators. *Creative Mathematics and Informatics*. 26(3), 321-330.
- Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity. *Proceedings of The Colloquium On Approximation and Optimization*, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329-338.

Yalçın, A., 2016. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren İntegral Eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı.

Zhang, T.-Y., Ji, A.-P. and Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions. Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2012/560586.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Nazlıcan EROĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	Eleşkirt/AĞRI-23.08.1992
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	2015, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	2019, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
İletişim	
E-posta Adresi	nazlicaneroglu@hotmail.com