



**UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Ayşenur ATMIŞ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**

**Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
2018**

Her hakkı saklıdır

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

Ayşenur ATMIŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI
2018

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UYUMLU KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Ayşenur ATMIŞ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez çalışmasında eşitsizlik teorisinde önemli bir yere sahip olan konveks fonksiyon kavramı ve çeşitleri üzerine genel bir inceleme yapılmıştır. Konveks fonksiyon kavramı ile analizin temel kavramlarından ortalama fonksiyonu arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Daha sonra klasik integral operatörünün bir genelleştirmesi olan kesirli integral operatörleri hakkında bazı bilgiler verilmiştir. Özellikle uygulamalı matematik alanında son yıllarda birçok araştırmacı tarafından çalışılmaya başlanan ve birçok matematiksel problemin çözümüne ışık tutan kesirli türev ve integral operatörleri eşitsizlikler için kullanarak yeni genelleştirmeler elde edilmiştir. Araştırma bulgularında uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla elde edilmiş yeni eşitsizliklere yer verilmiştir.

2018, 91 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği, konveks fonksiyonlar, uyumlu kesirli integraller.

ABSTRACT

Master

INTEGRAL INEQUALITIES INVOLVING CONFORMABLE FRACTIONAL INTEGRALS

Ayşenur ATMIŞ

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis study, firstly convex function concept and various properties are examined. Convex function types are emphasized and a close relation between convex functions and averages is revealed. Then, the concepts of fractional derivative and integral are introduced. In recent years, the variants of fractional derivative and integral operators, which have begun to be studied by many researchers and shed light on the solution of many mathematical problems, have been recalled. Some inequalities which are obtained by using compatible fractional integral operator and present in the literature are presented. In the research findings, new integral inequalities for the class of m -convex functions have been proved with the help of matched fractional integrals.

2018, 91 pages

Keywords: Hermite-Hadamard type inequalities, Hölder inequality, Power-mean inequality, convex functions, conformable fractional integrals.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden,engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmalarım da etkin katkısı bulunan ve tüm babacanlığı ile beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans sürecinde bana yardımcı olan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ'ye ve emeği geçen tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşenur ATMIŞ
2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	4
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları	11
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller.....	20
3.1.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri	20
3.1.2. Caputo kesirli türevleri.....	22
3.1.3. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi	24
3.1.4. Katugampola Kesirli Türev ve İntegrali	47
3.1.5. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev ve İntegrali.....	58
3.1.6. Atangana-Baleanu Kesirli Türevin Analizi.....	59
3.2. Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	60
3.3. Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği	64
3.2. Ostrowski Eşitsizliği	65
3.2. Grüss Eşitsizliği	67
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	69
4.1. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikler.....	69
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	76
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
${}^{(k)}D_{\alpha}^a$	$k\alpha$ mertebeli dizisel Riemann-Liouville kesirli türev
${}^{(n)}T_{\alpha}^a$	n . mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev
${}_bT_{\alpha}^{(n)}$	n . mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supset$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$SX(h, I)$	h –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h, I)$	h –konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α, m) –konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

$X_c^p(a,b)$ $[a,b]$ aralığında kompleks değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi

$D_\alpha^a f(t)$ Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev

$J_{a+}^\alpha f(t)$ Sol Riemann-Liouville kesirli integral

$J_{b-}^\alpha f(t)$ Sağ Riemann-Liouville kesirli integral

${}^C D_a^\alpha f(t)$ Caputo kesirli mertebeden türev

$T_\alpha(f)(t)$ Uyumlu kesirli türev

$T_\alpha^a f(t)$ Sol Uyumlu kesirli türev

${}^b T_\alpha f$ Sağ Uyumlu kesirli türev

$I_\alpha^a f(t)$ Sol Uyumlu kesirli integral

${}^b I_\alpha f(t)$ Sağ Uyumlu kesirli integral

$D^\alpha f(t)$ Katugampola kesirli mertebeden türev

$I_{a+}^\alpha f(x)$ Sol Hadamard kesirli integral

$\left(I_{a+;\rho,\eta}^\alpha\right) f(t)$ Sol Erdelyi-Kober kesirli integral

${}^\rho I_{a+}^\alpha f(t)$ Sol Katugampola kesirli integrali

${}^\rho I_{b-}^\alpha f(t)$ Sağ Katugampola kesirli integrali

${}^\rho D_{a+}^\alpha f(t)$ Genelleştirilmiş Sol Katugampola kesirli türevi

${}^{\rho}D_{b^{-}}^{\alpha}f(t)$	Genelleştirilmiş Sağ Katugampola kesirli türevi
$D_t^{\alpha}f(t)$	Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev
$I_a^t f(t)$	Caputo-Fabrizio kesirli integrali
$D_t^{\alpha}f(t)$	Genelleştirilmiş Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev
$E_{\alpha}(z)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_b^{ABC}D_t^{\alpha}f(t)$	Caputo anlamında Atangana-Balenau kesirli türevi
${}_b^{ABR}D_t^{\alpha}f(t)$	Riemann anlamında Atangana-Balenau kesirli türevi
${}_a^{AB}I_t^{\alpha}\{f(t)\}$	Atangana-Balenau kesirli integrali
$H(a,b)$	Sobolev uzayı
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonların kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme.....	12
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	12
Şekil 2.4. Konveks fonksiyon.....	14
Şekil 2.4. Aralık Üzerinde Konveks fonksiyon.....	16
Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon	20
Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon.....	20
Şekil 3.1. $f(x) = x$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri.....	29
Şekil 3.2. $f(x) = 1$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri.....	30
Şekil 3.3. $f(x) = x^\nu$ kuvvet fonksiyonunun $1/2$ merteben kesirli türevleri.....	61
Şekil 3.4. $\rho = 0.4, 1.0, 1.4$ ve $\nu = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ için $f(x) = x^\nu$ kuvvet fonksiyonunun genelleştirilmiş kesirli türevleri.....	65
Şekil 3.5. $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ ve $\nu = 0.5, 1.0, 1.5$ için $f(x) = x^\nu$ kuvvet fonksiyonunun genelleştirilmiş kesirli türevleri.....	65

1. GİRİŞ

Kesirli analizin tarihi, diferansiyellenme teorisinin ortaya çıkışına kadar dayanmaktadır. Tarihi çok eskilere dayanmasına rağmen, fiziksel yapısındaki karmaşıklıktan dolayı klasik analiz gibi yorumlanmaması bu konuyla ilgili çalışmaları ertelemiş ve bilim, mühendislikte çok popüler olmamıştır. Ancak kesirli türev ve integrallerin yerel veya noktasal bir büyüklük olmamaları, doğanın gerçekliğini daha iyi ifade etmesi açısından kesirli analiz konusunu dikkat çekici hale getirmiştir. Bu yüzden, bu konunun bilim ve mühendislik alanında daha yaygın hale getirilmesi, doğanın daha iyi yorumlanması ve ifade edilmesinde önemli bir rol oynayacaktır.

1695 yılında ilk kez kesirli türev ve integral kavramları L'Hospital tarafından Leibnitz'e gönderilen bir mektupta türev mertebesi $1/2$ olması durumunda anlamlı olup olmayacağını sormasıyla ortaya atılmıştır. Böylece kesirli analizin doğuşu L'Hospital'in sorusuyla başlamıştır.

Leibnitz ve L'Hospital'den sonra 1730 yılında kesirli analiz konusu Euler'in de dikkatini çekmiştir. 1772 yılında J.L. Lagrange ise diferansiyel operatörler için kuvvet alma kanunundan bahsettiği çalışmasında dolaylı olarak kesirli analize katkıda bulunmuştur. 1812 yılında P. S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türevi tanımlamış ve 1819 yılında S.F. Lacroix 700 sayfalık çalışmasında keyfi mertebeden türevden bahsetmiştir. Bunun ardından 1822 yılında J. B. J. Fourier keyfi mertebeden türevleri çalışma konusu yapmıştır.

Kesirli operatörler ilk kez N. H. Abel tarafından 1823 yılında tautochrane probleminin çözümünde kullanılmıştır. 1832 yılında J. Liouville, kesirli analiz tanımlarını teorik problemlere uygulayarak ilk önemli çalışmayı yapmıştır. 1892 yılında G. F. B. Riemann, yayımladığı çalışmasında üzerinde uzun yıllar çalıştığı kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. 1868 ile 1872 yılları arasında A. V. Letnikov, bu konu üzerine pek çok makale yayınlamıştır. 1900 ile 1970 yılları arasında kesirli analiz konusuna önemli katkıları bulunan bilim adamları ise H. H. Hardy, S. Samko, H. Weyl, M. Riesz, S. Blair'dir. 1970 yılından günümüze kadar olan zamanda J. Spanier, K. B. Oldham, B. Ross, A. Kılbaş, M. Caputo, I. Podlubny, M. Fabrizio, T. Abdeljawad, R. Khalil, A. Atangana, D. Balenau, J. Losada, J.J. Nieto gibi birçok bilim adamı bu konu üzerinde ciddi çalışmalar ortaya koymaktadırlar.

Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımları da dahil literatürdeki bütün kesirli türev tanımlarının klasik türev tanımından aldıkları tek ortak özellik lineer olma özelliğidir (Khalil *et al.* 2014). Bunun dışındaki özelliklerle alakalı olarak bir uyum genellikle söz konusu değildir. Mesela sabitin kesirli türevi Riemann-Liouville kesirli türev tanımı için sıfır olmamaktadır. Yine klasik türevdeki iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün türevi formülü bütün kesirli türevler için geçerli değildir. Buna benzer olarak yine bütün kesirli türev tanımları klasik türevdeki zincir kuralını sağlamaz.

Son zamanlarda klasik türevin doğal genişletilmesi olarak görülen kesirli türevin yeni bir tanımı verildi (Khalil *et al.* 2014). Bu yeni tanım klasik türeve uyumuyla dikkat çekmektedir. Yukarıda sayılan ve diğer kesirli türevler için sağlanmayan, çarpım kuralı ve bölüm kuralı bu yeni kesirli türev tanımı için sağlanmaktadır. Zincir kuralı ise klasik türevdeki kurala çok yakın olarak yazılabilmektedir. Uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılan bu yeni kesirli türev tanımı, sağladığı bu özelliklerden dolayı büyük bir ilgiyi üzerine çekmiş ve kısa zamanda bu yeni tanımla alakalı birçok çalışma yapılmıştır.

Bazı yazarlar (Ortiguera and Machado 2015) tarafından uyumlu kesirli türevin gerçekten kesirsel bir operatör olup olmadığı tartışıldı. Bugün bu soru hala tartışmaya açık görülüyor. Belki de bu konu felsefik bir konudur (Batarfi *et al.* 2015). Ayrıca bu yeni tanım bir kesirli türev tanımı olmasa bile kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için bir dönüşüm olarak düşünülebilir (Çenesiz and Kurt 2015). Anlaşılacağı üzere bu tartışma, bu yeni teoriye hangi ismin verileceği üzerine yapılan bir tartışmadır. Herhalükarda bu yeni kesirli türev tanımı üzerinde çalışılmayı hak eden bir konu olarak karşımızda durmaktadır.

Khalil *et al.* (2014) tarafından ortaya atılan bu yeni tanım klasik türevdekine benzer bir limit formuna sahiptir. Khalil ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bu yeni kesirli türev tanımının (ya da dönüşümünün) çarpım kuralını ve bölüm kuralını sağladığını ispat ettiler. Ayrıca onlar yaptıkları çalışmada uyumlu kesirli mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade ettiler. Uyumlu kesirli türev analizi, Abdeljawad (2015) tarafından geliştirildi. Abdeljawad yapmış olduğu çalışmada bu yeni tanım için sol ve sağ uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini sundu. Ayrıca uyumlu kesirli mertebeden dizesel türev kavramını, $0 < \alpha \leq 1$ için iki tür kesirsel kısmi integrasyon formüllerini, uyumlu kesirsel kuvvet seri açılımını, kesirsel Taylor eşitsizliğini ve son olarak kesirsel Laplace dönüşümünü verdi.

2. KURAMSAL TEMELLER

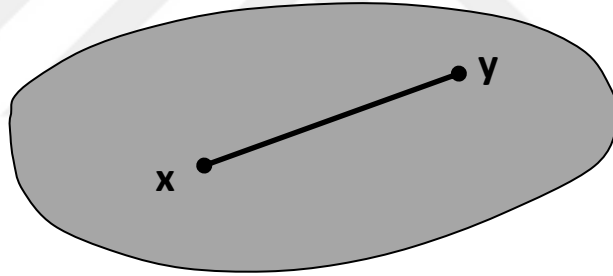
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Çalışmamız için önemli yere sahip bazı temel kavramlar hiyerarşik olarak şu şekilde sıralanmıştır.

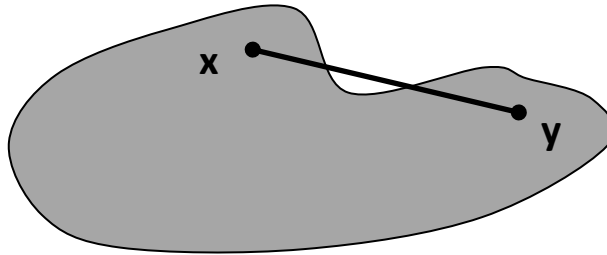
Tanım 2.1.1. “Konveks Küme: L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir” (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. “(J –Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. “(Kesin J –Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. “(Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

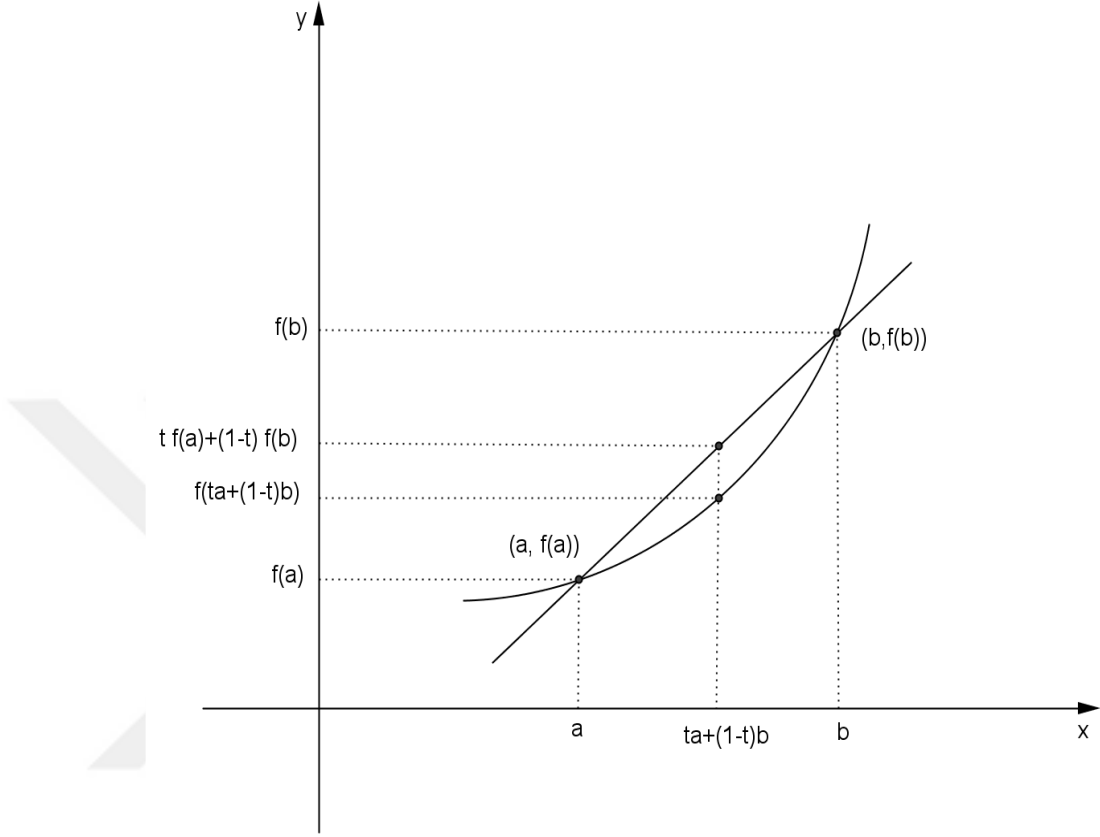
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.” (Pečarić et al. 1992).

Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - t)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f ’ ye konkav (strictly konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3. den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için f' nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.1. “(Üçgen Eşitsizliği): Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. “(Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f ’nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = |\alpha x + (1 - \alpha)y|$$

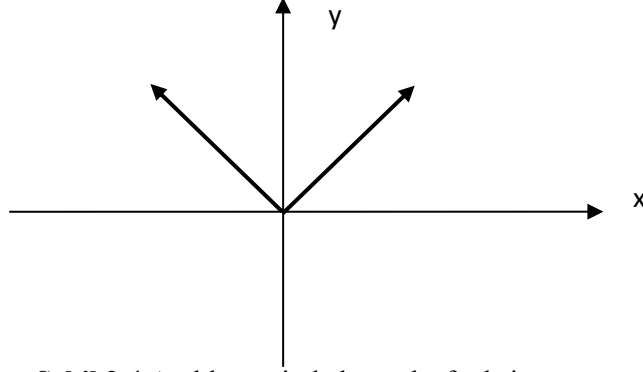
$$\leq \alpha + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden})$$

$$= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y|$$

$$= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur

$f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4 Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. “ $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.3. “(Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. “(İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993)

Tanım 2.1.5. “(Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 ’da süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. “(Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , S ’de düzgün süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. “(Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f , S ’de Lipschitz şartını sağlıyor denir” (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2. “ f , S ’de Lipschitz şartını sağlıyorsa f , S ’de düzgün süreklidir” (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.5. $[a, b] \subseteq I$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f , $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° ’de süreklidir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.6. “ f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f , (a, b) aralığında sürekli ve

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır” (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.8. “(Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I ’da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

Denir” (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.7. “ J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.” (Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3. “ f, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvektir” (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.8. “Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° ’de artandır (kesin artandır)” (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.9. “ f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' nin artan (kesin artan) olmasıdır” (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.10. “ f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır” (Pečarić *et al.* 1992).

2.2 Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.2.1. “(Quasi-Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye *quasi* –konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f ’ye strictly *quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

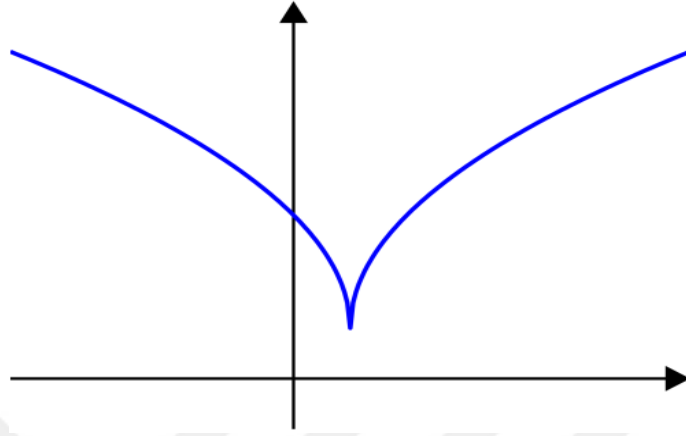
Tanım 2.2.2. “ f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f ’ye *quasi* –monotonik denir” (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.2.1. “Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

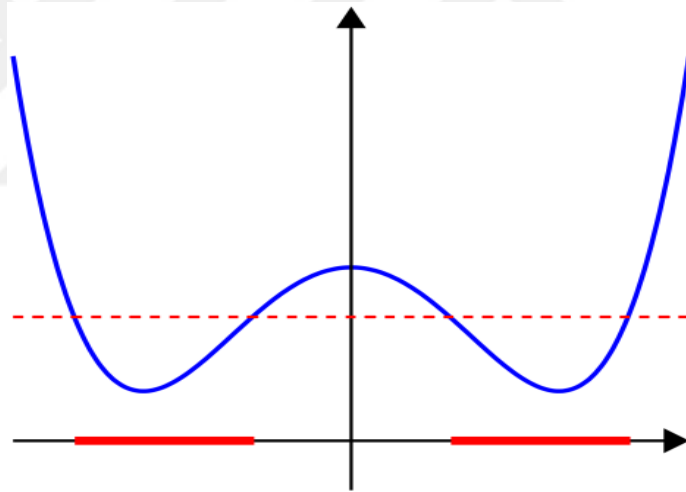
Örneğin $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur” (Ion 2007).



Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.6. Quasi-konveks olmayan fonksiyon

Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon: Fonksiyonun tanım kümesinde, değerleri kırmızı kesik çizginin altında kalan noktalar, iki kırmızı aralığın birleşimidir ve fonksiyon bu noktaların birleşiminde konveks değildir.

Tanım 2.2.3. “(Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \alpha > 0$ şartları altında her bir $y + \alpha, x \in I$ için

$$f(x + \alpha) - f(x) \leq f(y + \alpha) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. “(Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x$, $\alpha > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \alpha \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \alpha)] \leq \max\{f(x), f(y + t)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.5. “(J –Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J - quasi -konveks$ denir" (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.2.6. “(Log-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konveks denir" (Pečarić et al. 1992).

Tanım 2.2.7 “(Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, t \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak;

$f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır” (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.8. “(P –Fonksiyonu): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I, t \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir” (Dragomir et al. 1995).

Tanım 2.2.9. “(m –Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $\alpha \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + m(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir” (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.10. “(Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir” (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.11. “(İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir” (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.2.1. “ $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

- (i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.
- (ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir” (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.12. “(**h –Konveks Fonksiyon**): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir” (Varošanec 2007).

“(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ ’dir” (Varošanec 2007).

“Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ’dir; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ ’dir” (Varošanec 2007).

Tanım 2.2.13. “(**Starshaped Fonksiyon**): $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her

$x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir” (Toader 1984).

Tanım 2.2.14. “(Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

Tanım 2.2.15. “(s – Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq [f(x)]^{\alpha^s} [f(y)]^{(1-\alpha)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s –geometrik konveks fonksiyon denir” (Zhang *et al.* 2012).

$s = 1$ için, s –geometrik konveks fonksiyon tanımının geometrik konveks fonksiyon tanımına dönüşeceği açıktır.

Tanım 2.2.16. (Harmonik Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R}/\{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2.17. “(Ortalama Fonksiyonu) M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- (4) $M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir” (Anderson et al. 2007).

Örnek 2.2.2

“(1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ Aritmetik ortalama

(2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ Geometrik ortalama

(3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ Harmonik ortalama

(4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ Logaritmik ortalama

(5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ İdentrik ortalama” (Anderson et al. 2007).

Tanım 2.2.18. “(MN- Konveks (Konkav) fonksiyon): $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için

$$f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna MN –konveks(konkav) fonksiyonu denir” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.1. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart f nin konveks (konkav) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(be^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $\log f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $1/f(1/x)$ nin $(1/b, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır” (Anderson 2007).

Teorem 2.2.2. “ $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow (0, \infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, b)$, $0 < b < \infty$ olarak verilsin.

(1) f nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(2) f nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(3) f nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(4) f nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(5) f nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(6) f nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $xf'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(7) f nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(8) f nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)$ nin artan (azalan) olmasıdır.

(9) f nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart $x^2f'(x)/f(x)^2$ nin artan (azalan) olmasıdır” (Anderson 2007).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Kesirli analiz, klasik analizin bir genişlemesi olarak kabul edilebilir. Kesirli analizde klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımı olmayıp birden fazla türev tanımının varlığı, problemin en iyi çözümünün elde edilmesi fırsatını verir.

Kesirli analiz birçok bilim adamı tarafından çalışılmış ve farklı gösterimlerle kesirli türev ve integrali değişik şekillerde ifade etmişlerdir. Fakat bu ifadelerin birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılıklar gösterir.

3.1.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri

Tanım 3.1.1.1. $\alpha > 0$ olmak üzere α mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü J

$$(J_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a \quad (3.1)$$

$$(J_0^a f)(t) = f(t) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır (Ross 1977, Samko 2009).

f , $t \geq a$ için sürekli olsun. $\alpha, \beta > 0$, ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$a. \quad (J_{\alpha}^a J_{\beta}^a f)(t) = (J_{\alpha+\beta}^a f)(t) \quad (3.3)$$

$$b. \quad (J_{\alpha}^a J_{\beta}^a f)(t) = (J_{\beta}^a J_{\alpha}^a f)(t) \quad (3.4)$$

$$c. \quad J_{\alpha}^a t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \quad (3.5)$$

Tanım 3.1.1.2. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $t > a$ ve $m - 1 < \alpha \leq m$ için,

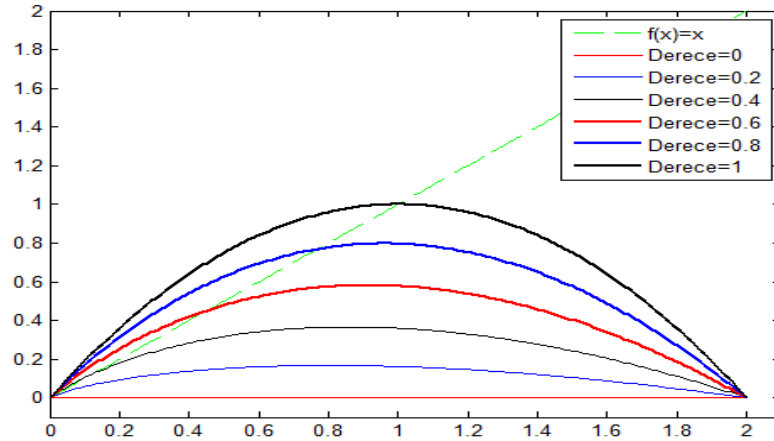
$$(D_a^\alpha f)(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - m + 1}} dx \right]$$

olarak tanımlanır (Ross 1977, Samko 2009).

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve bunların matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynamasına rağmen Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin yorumlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur.

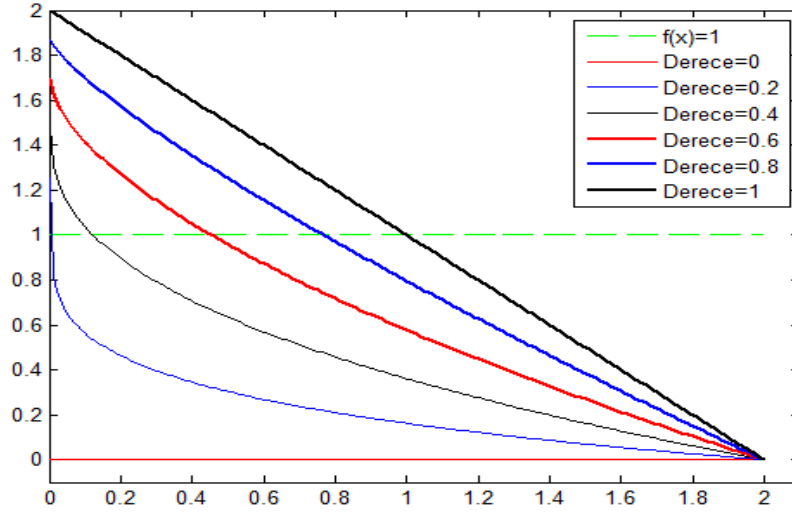
Riemann-Liouville kesirli türev tanımının diğer bir eksikliği ise sabit fonksiyon ve birim fonksiyon incelenerek doğrudan gösterilebilir.

Bir birim fonksiyonun, kesirli mertebeden türevi ne olursa olsun türev sonucu 1 olmalıdır. Fakat Şekil 3.1’de Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevleri incelendiğinde bu durumun geçerli olmadığı görülmektedir.



Şekil 3.1 $f(x) = x$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesirli dereceli türevleri

Şekil 3.2’de ise $f(x) = 1$ fonksiyonunun Riemann-Liouville yöntemine göre kesirli mertebeli türevleri görülmektedir. Şekilde de görüleceği gibi sabit fonksiyonun türevleri değişkene bağlı çıkmaktadır.



Şekil 3.2 $f(x)=1$ fonksiyonu Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri

3.1.2. Caputo kesirli türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kılbas vd. 2006).

Tanım 3.1.2.1. “ $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > a$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$({}^C D_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(x) dx \quad (3.6)$$

biçiminde tanımlanır (Caputo 1967; Kılbas vd. 2006).”

“Ayrıca $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $t > a$ ve $f \in C^{m-1}$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere Caputo türev tanımına ait,

$$a. ({}^C D_{\alpha}^a J_{\alpha}^a f)(t) = f(t) \quad (3.7)$$

$$b. (J_{\alpha}^a {}^C D_{\alpha}^a f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)} \frac{(t-a)^k}{k!} \quad (3.8)$$

özellikleri de verilebilir.”



3.1.3. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi

Caputo kesirli türevinin diğer bir özelliği ise sabitin Caputo türevinin sıfır olmasıdır. Bu nedenle de Caputo tanımı, Riemann-Liouville tanımına göre bir problemin fiziksel olarak yorumunun daha rahat yapılmasına olanak sağlar.

Uyumlu kesirli türev, klasik türeve uyumuyla dikkat çekmektedir. Khalil *et al.* tarafından tanımlanan uyumlu kesirli türev, klasik türevdekine benzer bir limit formuna sahiptir. Khalil ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bu tanımın çarpım kuralını ve bölüm kuralını sağladığını ispat ettiler. Ayrıca yaptıkları çalışmada uyumlu kesirli mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade ettiler.

Uyumlu kesirli türev analizi, Abdeljawad tarafından geliştirildi. Abdeljawad yapmış olduğu çalışmada uyumlu kesirli türev için sol ve sağ uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirli zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini sundu. Ayrıca uyumlu kesirli mertebeden dizisel türev kavramını, $0 < \alpha \leq 1$ için iki tür kesirli kısmi integrasyon formüllerini, uyumlu kesirli kuvvet seri açılımını, kesirli Taylor eşitsizliğini ve son olarak kesirli Laplace dönüşümünü verdi.

Bu bölümde uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar verilecektir. (Khalil vd. 2014; Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1.3.1. “ $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun “uyumlu kesirli türev” diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ oluşursa o zaman,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f , α diferansiyellenebilir denilecektir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.”

Teorem 3.1.3.1. “Bir $f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $t_0 > 0$ da $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilirse, f fonksiyonu t_0 noktasında sürekli dir.”

İspat:

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

tanımından

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılır. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

olur. Böylece

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olur. Bu ise f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olduğunu ifade eder.

Teorem 3.1.3.2. “ $\alpha \in (0,1]$ için f ve g , $t > 0$ noktasında α diferansiyellenebilir olsun. O halde

1. $\forall a, b \in R$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.

2. $\forall p \in R$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.
3. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dir.
4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
5. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$.
6. Ek olarak eğer f diferansiyellenebilirse $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir.”

İspat: (1), (2) ve (3) ün ispatları direkt tanımdan görülebilir. Burada (4), (5) ve (6) nın ispatları verilecektir.

(4) $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= T_\alpha f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha g(t)
\end{aligned}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir.

(5) $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]g(t) - [g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]}{\varepsilon}g(t) - \frac{[g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon}f(t)}{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)} \\
&= \frac{T_\alpha f(t)g(t) - T_\alpha g(t)f(t)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ dir.

(6) Bu özelliğin ispatı için Tanım 3.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.1.3.3. “(Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Rolle Teoremi):

$a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu

- i. $[a, b]$ aralığında sürekli,
- ii. $\alpha \in (0,1)$ için α diferansiyellenebilir,
- iii. $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlasın. Bu taktirde $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.”

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için bir $c \in (a, b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Genelliği bozmaksızın c noktasının bir yerel minimum nokta olduğunu kabul edelim. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Fakat, ilk limit negatif, ikinci limit ise pozitif değildir. O halde, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 3.1.3.4. “(Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0, 1)$ için α diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.”

İspat: k bir sabit sayı olmak üzere $g: [a, b] \rightarrow R$, $g(t) = f(t) + k \frac{1}{\alpha} t^\alpha$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon da $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $t \in (a, b)$ için α diferansiyellenebilirdir. Şimdi k sabiti $g(a) = g(b)$ olacak şekilde seçilirse $f(a) + k \frac{1}{\alpha} a^\alpha = f(b) + k \frac{1}{\alpha} b^\alpha$ olup

$$k = - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha}$$

yazılabilir. O halde $g(t) = f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha \right)$ olur. Bu fonksiyon Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Dolayısıyla (a, b) aralığında öyle bir c sayısı vardır ki $g^{(\alpha)}(c) = 0$ dır. Buradan

$$f^{(\alpha)}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} = 0 \Rightarrow f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

elde edilir. Burada $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ özelliği kullanılmıştır.

Tanım 3.1.3.2. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T_\alpha^a f)(t)$ mevcutsa $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t)$ olur.”

Tanım 3.1.3.3. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b - t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^bT_\alpha f)(t)$ mevcutsa $({}^bT_\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^bT_\alpha f)(t)$ olur.”

Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $(T_\alpha^a f)(t) = (t - a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $({}^bT_\alpha f)(t) = -(b - t)^{1-\alpha} f'(t)$ dir.

Tanım 3.1.3.4. “ $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = (T_\beta^a f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır. Böylece α mertebeli sol uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez türevlenebilir olması gerekir.”

Benzer olarak $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^b_a T f)(t) = (-1)^{n+1} ({}^b_a T f^{(n)})(t)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3.5. “ $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sol uyumlu kesirli integral

$$(I_\alpha^a f)(t) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeden sağ uyumlu kesirli integral,

$$({}^b I_\alpha f)(t) = \int_t^b f(x) d_\alpha(b, x) = \int_t^b (b - x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.”

Lemma 3.1.3.1. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

olur. Sağ durumda benzer olarak verilebilir.”

Lemma 3.1.3.2. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t < b$ için

$${}^bT_\alpha {}^bI_\alpha f(t) = f(t)$$

olur.”

Tanım 3.1.3.6. “ $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu takdirde $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli integrali

$$(I_\alpha^a f)(t) = I_{n+1}^a((t-a)^{\beta-1}f) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.”

Eğer $\alpha = n + 1$ ise bu takdirde $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Böylece

$$(I_\alpha^a f)(t) = (I_{n+1}^a f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n f(x) dx$$

olur. Bu ise $(a, t]$ aralığında $n + 1$ kez f fonksiyonunun tekrarlı integralinin Cauchy formülü ile yazılımıdır.

$\alpha > 0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$(J_\alpha^a f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlandığı biliniyor. $\alpha = n + 1, n = 0, 1, 2 \dots$ için

$$(I_\alpha^a f)(t) = (J_\alpha^a f)(t)$$

olduğu görülür.

Örnek 3.1.3.1. $\alpha, \mu > 0$ için

$$J_{\alpha}^a((t-a)^{\mu-1})(t) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi $(t-a)^{\mu-1}$ fonksiyonunun $\alpha \in (n, n+1]$ için uyumlu kesirli integralini bulalım. $\mu, \alpha + \mu - n - 1 > 0$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. Tanım 3.6 dan

$$(I_{\alpha}^a((t-a)^{\mu-1}))(t) = (I_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t)$$

yazılır. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli integralin özelliğinden

$$(I_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t) = (J_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t)$$

eşitliği de yazılabilir. Böylelikle

$$(I_{\alpha}^a((t-a)^{\mu-1}))(t) = (J_{n+1}^a((t-a)^{\alpha+\mu-n-2}))(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n-1)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olur. Benzer şekilde bu tip fonksiyonların sağ uyumlu kesirli integrali

$$\begin{aligned} ({}^bI_{\alpha}((b-t)^{\mu-1}))(t) &= ({}^bJ_{n+1}((b-t)^{\alpha+\mu-n-2}))(t) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n-1)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(b-t)^{\alpha+\mu-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da anlaşıyor ki: Riemann-Liouville kesirli integrali ile uyumlu kesirli integral bir polinom fonksiyonuna uygulandığında bir sabit farkıyla aynı sonucu verirler.

Teorem 3.1.3.5. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \mu \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$(I_{\alpha} I_{\mu} f)(t) = \frac{t^{\mu}}{\mu} (I_{\alpha} f)(t) + \frac{1}{\mu} (I_{\alpha+\mu} f)(t) - \frac{t}{\mu} \int_0^t x^{\alpha+\mu-2} f(x) dx$$

olur.”

İspat: Tanım 3.6 dan

$$(I_{\alpha+\mu} f)(t) = (I_2 x^{\alpha+\mu-2} f(x))(t) = \int_0^t (t-x) x^{\alpha+\mu-2} dx$$

yazılır. Şimdi, integral mertebelerinin yer değiştirmesi yardımıyla ispatı tamamlayalım:

$$\begin{aligned} (I_{\alpha} I_{\mu} f)(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(x) x^{\alpha-1} dx \right) t_1^{\mu-1} dt_1 \\ &= \int_0^t f(x) x^{\alpha-1} \left(\int_x^t t_1^{\mu-1} dt_1 \right) dx \\ &= \int_0^t f(x) x^{\alpha-1} \left[\frac{t^{\mu}}{\mu} - \frac{x^{\mu}}{\mu} \right] dx \\ &= \frac{t^{\mu}}{\mu} (I_{\alpha} f)(t) + \frac{1}{\mu} \left[(I_{\alpha+\mu} f)(t) - t \int_0^t x^{\alpha+\mu-2} f(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Riemann-Liouville sol ve sağ kesirli integral için Q -operatörünün işlevinin $f: [a, b] \rightarrow R$, $Qf(t) = f(a + b - t)$ için

$$QJ_{\alpha}^a f(t) = {}^b J_{\alpha} Qf(t)$$

olduğu biliniyor.

Şimdi, $\alpha \in (n, n + 1]$ için uyumlu kesirli integral için bu durum incelenirse

$$QI_{\alpha}^a f(t) = QJ_{n+1}^a ((t-a)^{\alpha-n-1} f(t)) = {}^b J_{n+1} ((b-t)^{\alpha-n-1} f(a+b-t)) = {}^b I_{\alpha} Qf(t)$$

olduğu görülür. Yani, Q -operatörü burada da aynı işlevi görür.

Lemma 3.1.3.3. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu durumda, $\forall t > a$ için

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

olur.”

İspat: Tanım 2.4 den

$$\begin{aligned} T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) &= T_\beta^a \left(\frac{d^n}{dt^n} I_\alpha^a f(t) \right) = T_\beta^a \left(\frac{d^n}{dt^n} I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} f(t) \right) \right) \\ &= T_\beta^a \left(I_1^a \left((t-a)^{\beta-1} f(t) \right) \right) = T_\beta^a I_\beta^a f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.1 den sonuç görülür. Benzer olarak Lemma 3.2 de Lemma 3.4 deki gibi genelleştirilebilir.

Lemma 3.1.3.4. “ $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n + 1]$ olsun. Bu durumda $\forall t < b$ için

$${}^b T_\alpha {}^b I_\alpha f(t) = f(t)$$

olur.”

Lemma 3.1.3.5. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde $\forall t > a$ için

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a)$$

olur.”

İspat: Tanım 3.5 den

$$I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a f(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} T_{\alpha}^a f(x) dx$$

yazılır. f diferansiyellenebilir olduğundan

$$I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a f(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} f'(x) dx = f(t) - f(a)$$

sonucu elde edilir. Lemma 3.5 daha yüksek mertebeler için aşağıdaki gibi genelleştirebilir.

Lemma 3.1.3.6. “ $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f: [a, \infty) \rightarrow R$, $(n+1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall t > a$ için

$$I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

olur.”

İspat: Tanım 3.4, Tanım 3.6 ve f fonksiyonunun $(n+1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmasından aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^a T_{\alpha}^a f(t) &= I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} T_{\beta}^a f^{(n)}(t) \right) = I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} (t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t) \right) \\ &= I_{n+1}^a \left(f^{(n+1)}(t) \right) \end{aligned}$$

Sonra kısmi integrasyon uygulanarak ispat tamamlanır. Benzer olarak sağ durum aşağıdaki gibi verilebilir.

Lemma 3.1.3.7. “ $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f: (-\infty, b] \rightarrow R$, $(n+1)$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall t < b$ için

$${}^bI_\alpha {}^bT_\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}$$

olur.”

Teorem 3.1.3.6. “(Zincir Kuralı): $\alpha \in (0,1]$ ve $f, g: [a, \infty) \rightarrow R$ (sol) α diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere bütün $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ için $h(t)$, (sol) α diferansiyellenebilirdir ve

$$(T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Eğer $t = a$ ise

$$(T_\alpha^a h)(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

olur.”

İspat: Tanım 3.2 de $u = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ değişken değiştirmesi yapılır ve g fonksiyonunun sürekli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} (T_\alpha^a h)(t) &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(u-t)} (t-a)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(g(u) - g(t))} \cdot \lim_{u \rightarrow t} \frac{g(u) - g(t)}{u-t} (t-a)^{1-\alpha} \\ &= \lim_{g(u) \rightarrow g(t)} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{(g(u) - g(t))} g(t)^{1-\alpha} \cdot T_\alpha^a g(t) \cdot g(t)^{\alpha-1} \\ &= (T_\alpha^a f)(g(t)) \cdot (T_\alpha^a g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.1.3.8. “ $f: [a, \infty) \rightarrow R$, iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$(T_{\alpha}^a T_{\beta}^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} T_{\alpha}^a f(t)$$

olur.”

İspat: f , fonksiyonu iki kez türevlenebildiği için

$$(T_{\alpha}^a T_{\beta}^a f)(t) = T_{\alpha}^a \left((t - a)^{1-\beta} f'(t) \right)$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitliğe uyumlu kesirli türevler için geçerli olan çarpım kuralı uygulanırsa

$$(T_{\alpha}^a T_{\beta}^a f)(t) = (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} (t - a)^{1-\alpha} f'(t) + (t - a)^{1-\beta} T_{\alpha}^a (f'(t))$$

elde edilir. f fonksiyonu iki kez türevlenebildiği için $T_{\alpha}^a (f'(t)) = (t - a)^{1-\alpha} f''(t)$ yazılabilir. Böylece

$$(T_{\alpha}^a T_{\beta}^a f)(t) = (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} (t - a)^{1-\alpha} f'(t) + (t - a)^{2-(\alpha+\beta)} f''(t)$$

elde edilir. $T_{\alpha}^a f(t) = (t - a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $T_{\alpha+\beta}^a f(t) = (t - a)^{2-(\alpha+\beta)} f''(t)$ olduğundan

$$(T_{\alpha}^a T_{\beta}^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1 - \beta)(t - a)^{-\beta} T_{\alpha}^a f(t)$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.1.3.7. “ fg , türevlenebilir olacak şekilde $f, g: [a, b] \rightarrow R$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b f(t)T_\alpha^a g(t)d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b - \int_a^b g(t)T_\alpha^a f(t)d_\alpha(t, a)$$

olur.”

İspat: Lemma 3.5 den

$$\int_a^b T_\alpha^a(fg)(t) d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem 3.2 (4) den

$$\int_a^b (T_\alpha^a f(t)g(t) + f(t)T_\alpha^a g(t)) d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b$$

yazılır. Buradan da

$$\int_a^b f(t)T_\alpha^a g(t)d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b - \int_a^b g(t)T_\alpha^a f(t)d_\alpha(t, a)$$

olduğu görülür.

Lemma 3.1.3.9. “ $0 < \alpha \leq 1$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow R$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t))g(t)d\alpha(b, t) = \int_a^b f(t) {}^bI_\alpha(g(t))d\alpha(t, a)$$

olur.”

İspat: Tanım 3.5 den

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t))g(t)d\alpha(b,t) = \int_a^b \left(\int_a^t (x-a)^{\alpha-1}f(x)dx \right) g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt$$

elde edilir. Buradan da integrallerin mertebelerini deęiřtirerek

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t))g(t)d\alpha(b,t) = \int_a^b f(t) {}^bI_\alpha(g(t))d\alpha(t,a)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.3.8. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ t revlenebilen iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b T_\alpha^a(f(t))g(t)d_\alpha(t,a) = \int_a^b f(t) {}^bI_\alpha(g(t))d_\alpha(b,t) + fg \Big|_a^b$$

olur.”

İspat: Lemma 3.7 den ve g fonksiyonunun türevlenebilir olmasından,

$$\begin{aligned} \int_a^b T_\alpha^a(f(t))g(t)d_\alpha(t,a) \\ = \int_a^b T_\alpha^a(f(t)) {}^bI_\alpha({}^bT_\alpha g(t))d_\alpha(t,a) + g(b) \int_a^b T_\alpha^a(f(t))d_\alpha(t,a) \end{aligned}$$

yazılır. şimdi, Lemma 3.9 uygulanırsa,

$$\int_a^b T_\alpha^a(f(t))g(t)d_\alpha(t,a) = \int_a^b I_\alpha^a T_\alpha^a(f(t)) {}^bT_\alpha(g(t))d_\alpha(t,a) + g(b) I_\alpha^a T_\alpha^a(f(t))$$

elde edilir. Son olarak f türevlenebilir olduğu için $I_\alpha^a T_\alpha^a(f(t)) = f(t) - f(a)$ ve g türevlenebilir olduğu için ${}^bI_\alpha {}^bT_\alpha g(t) = g(t) - g(b)$ olup bu ifadeler yerlerine yazılarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.3.7. “ $0 < \alpha < 1$ ve $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. Bu durumda n . mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev

$${}^{(n)}T_\alpha^a f(t) = T_\alpha^a T_\alpha^a \dots T_\alpha^a f(t)$$

biçiminde tanımlanır. Burada T_α^a , n kez tekrar etmektedir. Benzer şekilde n . mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev

$${}^bT_\alpha^{(n)} f(t) = {}^bT_\alpha {}^bT_\alpha \dots {}^bT_\alpha f(t)$$

şeklindedir.”

Teorem 3.1.3.9. “ f fonksiyonu bazı $0 < \alpha \leq 1$ için bir t_0 noktası civarında sonsuz bir şekilde α diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t - t_0)^{\alpha k}}{\alpha^k k!}, \quad t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}, \quad R > 0$$

biçiminde kesirsel kuvvet seri açılımına sahiptir. Burada $(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)$ ifadesi k defa art arda uyumlu kesirli türevin uygulanması manasındadır.”

İspat: $t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}$, $R > 0$ olmak üzere $f(t) = c_0 + c_1(t - t_0)^\alpha + c_2(t - t_0)^{2\alpha} + \dots$ olsun. Bu takdirde $f(t_0) = c_0$ olur. f fonksiyonuna $T_\alpha^{t_0}$ uygulanırsa t_0 noktası için $(T_\alpha^{t_0} f)(t_0) = \alpha c_1$ olur ve böylece $c_1 = \frac{(T_\alpha^{t_0} f)(t_0)}{\alpha}$ olur. Bu şekilde devam edilerek f

fonksiyonuna n defa $T_{\alpha}^{t_0}$ uygulanırsa $(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(n)}(t_0) = c_n \alpha (2\alpha) \dots (n\alpha) = c_n \alpha^n n!$ olur ve böylece $c_n = \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(n)}(t_0)}{\alpha^n n!}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3.10. “(Uyumlu Kesirli Türevler İçin Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi):

$a > 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında α diferansiyellenebilir olsun. Ayrıca, her $t \in (a, b)$ için $g^{(\alpha)}(t) \neq 0$ olsun. Bu taktirde (a, b) aralığında

$$\frac{f^{(\alpha)}(c)}{g^{(\alpha)}(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.”

İspat: İspatı, klasik türevde verilen ispat gibidir.

Teorem 3.1.3.11. “ $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ sürekli monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer $a < c < b$ ve $f'(c) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu $d = f(c)$ noktasında α diferansiyellenebilirdir ve

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = (dc)^{1-\alpha} \frac{1}{f^{(\alpha)}(c)}$$

dir.”

İspat: Uyumlu kesirli türevin tanımından,

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = \frac{f^{-1}(d + \varepsilon d^{1-\alpha}) - f^{-1}(d)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. $f^{-1}(d + \varepsilon d^{1-\alpha}) = t$ olarak alınırsa $f(t) = d + \varepsilon d^{1-\alpha}$ ve $d = f(c)$ olduğundan $f^{-1}(d) = c$ olur. Dolayısıyla

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t - c}{\frac{f(t) - f(c)}{d^{1-\alpha}}}$$

yazılabilir. Buradan da

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = d^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(t) - f(c)}{t - c}}$$

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = d^{1-\alpha} \frac{1}{f'(c)}$$

elde edilir. Son olarak, f fonksiyonu c noktasında türevlenebildiği için

$$f^{(\alpha)}(c) = c^{1-\alpha} f'(c)$$

yazılabilir. Buna göre

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = (dc)^{1-\alpha} \frac{1}{f^{(\alpha)}(c)}$$

olacaktır.

Örnek 3.1.1. “ e^t fonksiyonunun ters fonksiyonu için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $t = 1$ noktasındaki α mertebeli uyumlu kesirli türevini bulunuz.”

Çözüm: e^t fonksiyonunun tersinin $\ln t$ olduğu biliniyor. Önce, $\ln t$ fonksiyonunun α mertebeli uyumlu kesirli türevi bulunup verilen teoremdaki sonuçla karşılaştırılacaktır. Uyumlu kesirli türev tanımına göre

$$T_{\alpha}(\ln t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \ln t}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Logaritmanın özelliğinden

$$T_\alpha(\ln t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \varepsilon t^{-\alpha})}{\varepsilon}$$

olur. $\varepsilon t^{-\alpha} = k$ denirse $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $k \rightarrow 0$ olup

$$T_\alpha(\ln t) = t^{-\alpha} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + k)}{k} = t^{-\alpha} \lim_{k \rightarrow 0} \ln(1 + k)^{1/k} = t^{-\alpha}$$

elde edilir. Bulunan bu sonuç, teoremle uyumludur. Çünkü, $c = 1$ için $d = e$ dir. e^t fonksiyonunun c noktası için α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$f^{(\alpha)}(c) = c^{1-\alpha} e^c$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$f^{(\alpha)}(1) = e$$

olur. Bütün bu yazılanlara göre

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(e) = e^{1-\alpha} \frac{1}{e} = e^{-\alpha}$$

olacaktır.

Teorem 3.1.3.12. “ $f: (0, \infty) \rightarrow R$, $y = f(t)$ fonksiyonu bir $x > 0$ parametresi yardımıyla $t = h(x)$ ve $y = k(x)$ olarak verilsin. $h, k: (0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonları α diferansiyellenebilir olmak üzere,

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(k)(x)}{T_\alpha(h)(x)}$$

olur.”

İspat: $t = h(x)$ ve $y = k(x)$, α diferansiyellenebilir olduğundan

$$\Delta t = h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)$$

$$\Delta y = k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)$$

olarak yazılabilir. f fonksiyonunun α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olduğundan pay ve payda $t^{1-\alpha}$ ile çarpılırsa

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}}$$

olur. Son eşitlik de

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

olarak yazılabilir. Δy ve Δt ifadelerinin değerleri yerine yazılarak devam edilirse,

$$\begin{aligned} T_\alpha(f)(t) &= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)}{h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)}{\varepsilon}}{\frac{h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)}{\varepsilon}} \\ &= t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(k)(x)}{T_\alpha(h)(x)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2. $y = 4x$ ve $t = 2x$ olmak üzere $y = f(t)$ fonksiyonun α mertebeli uyumlu kesirli türevini bulunuz.

Çözüm: Teorem 4.3 den

$$T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{T_{\alpha}(y)(x)}{T_{\alpha}(t)(x)} = t^{1-\alpha} \frac{4x^{1-\alpha}}{2x^{1-\alpha}} = 2t^{1-\alpha}$$

olur. Gerçekten de eğer parametre yok edilecek olursa fonksiyon $y = 2t$ olarak bulunur. Şimdi, bu fonksiyon için α mertebeli uyumlu kesirli türev alınırsa

$$T_{\alpha}(f)(t) = 2t^{1-\alpha}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.3.13. “ $F(t, y) = 0$ bağıntısıyla verilen kapalı fonksiyonun α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$T_{\alpha}(y)(t) = -y^{1-\alpha} \frac{\frac{\partial T_{\alpha}(F)(t, y)}{\partial t^{\alpha}}}{\frac{\partial T_{\alpha}(F)(t, y)}{\partial y^{\alpha}}}$$

olur.”

İspat: İki değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralı formülü kullanılarak

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt} = 0$$

yazılabilir. Fakat buradaki türev uyumlu kesirli türev olduğundan, uyumlu kesirli türevler için geçerli olan zincir kuralı kullanılmalıdır. Uyumlu kesirli türev için zincir kuralı hatırlanacak olursa $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere

$$(T_\alpha h)(t) = (T_\alpha f)(g(t)) \cdot (T_\alpha g)(t) \cdot g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Bu formülden

$$\frac{\partial T_\alpha(F)}{\partial y^\alpha} T_\alpha(y) y^{\alpha-1} + \frac{\partial T_\alpha(F)}{\partial t^\alpha} = 0$$

olduğu görülür. Buradan da $T_\alpha(y)$ yalnız bırakılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Örnek 3.1.3. $F(t, y) = t^2 + 3y^2t - 8t + 4y - 1$ kapalı fonksiyonu için $T_\alpha(y)$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha} \frac{\frac{\partial T_\alpha(F)(t, y)}{\partial t^\alpha}}{\frac{\partial T_\alpha(F)(t, y)}{\partial y^\alpha}}$$

olduğundan

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha} \frac{2t^{2-\alpha} - 8t^{1-\alpha} + t^{1-\alpha}3y^2}{6y^{2-\alpha}t + 4y^{1-\alpha}}$$

yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$T_\alpha(y)(t) = -\frac{2t^{2-\alpha} - 8t^{1-\alpha} + t^{1-\alpha}3y^2}{6yt + 4}$$

olur. Bulunan bu sonuç direkt işlem yapılarak da görülebilir:

$$t^2 + 3y^2t - 8t + 4y - 1 = 0$$

$$2t^{2-\alpha} + 6y^{2-\alpha}T_\alpha(y).y^{\alpha-1}.t + t^{1-\alpha}.3y^2 - 8t^{1-\alpha} + 4T_\alpha(y) = 0$$

$$T_\alpha(y)(6yt + 4) = -(2t^{2-\alpha} + t^{1-\alpha}.3y^2 - 8t^{1-\alpha})$$

olup,

$$T_\alpha(y) = -\frac{(2t^{2-\alpha} + t^{1-\alpha}.3y^2 - 8t^{1-\alpha})}{(6yt + 4)}$$

olduğu görülür.

3.1.4. Katugampola Kesirli Türev ve İntegrali

Udita N. Katugampola tarafından tanıtilan bu yeni kesirli türev, klasik türevin limit formunun genelleştirilmiş hali olarak karşımıza çıkar. Katugampola yaptığı çalışmada bu tanımın çarpım kuralını, bölüm kuralını, kuvvet kuralını, sabit fonksiyonun türevinin sıfırı sağladığını göstermiştir. Ayrıca çalışmada Katugampola kesir mertebeden diferansiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade etmiştir.

Katugampola ayrıca Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integralini genelleştirerek, tek bir formda yeni bir kesirli integral tanımı vermiştir.

Tanım 3.1.4.1: $f: (0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun α mertebeden Katugampola kesirli türevi,

$$D^\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (3.9)$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α Katugampola diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} D^\alpha(f)(t)$ limiti varsa o zaman,

$$D^{\alpha}(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} D^{\alpha}(f)(t)$$

eşitliği yazılır (Katugampola 2014).

Teorem 3.1.4.1: $\alpha \in (0,1]$ için $f, g, t > 0$ noktasında α Katugampola diferansiyellenebilir olsun. O halde

1. Her $a, b \in R$ için $D^{\alpha}[af + bg] = aD^{\alpha}(f) + bD^{\alpha}(g)$
2. Her $n \in N$ için $D^{\alpha}(t^n) = nt^{n-\alpha}$
3. Tüm $f(t) = C$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $D^{\alpha}(C) = 0$
4. $D^{\alpha}(fg) = fD^{\alpha}(g) + gD^{\alpha}(f)$
5. $D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD^{\alpha}(f) - fD^{\alpha}(g)}{g^2}$
6. f fonksiyonu $g(t)$ de diferansiyellenebilirse $D^{\alpha}(f \circ g)(t) = f'(g(t))D^{\alpha}g(t)$
7. f diferansiyellenebilirse $D^{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$

dir (Katugampola 2014)

İspat: 1. Her $a, b \in R$ için

$$D^{\alpha}(af + bg) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(af + bg)(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - (af + bg)(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{af(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) + bg(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - af(t) - bg(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a \left(\frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b \left(\frac{g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - g(t)}{\varepsilon} \right)$$

$$= aD^{\alpha}(f) + bD^{\alpha}(g)$$

bulunur.

2. $\alpha \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(t^n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})^n - t^n}{\varepsilon} \\ &= t^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{n\varepsilon t^{-\alpha}} - 1}{\varepsilon} \\ &= t^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon n t^{-\alpha} + \frac{\varepsilon^2 n^2 t^{-2\alpha}}{2!} + \dots}{\varepsilon} \\ &= t^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon n t^{-\alpha} + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \\ &= n t^{n-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$3. D^{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \quad \text{Katugampola kesirli türev tanımında } f(t) = C \in \mathbb{R}$$

sabiti alınırsa

$$D^{\alpha}(C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C - C}{\varepsilon} = 0$$

bulunur.

4. f, g fonksiyonları $t > 0$ da α Katugampola diferansiyellenebilir olsun.

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) + f(t)g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) \right] + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= D^{\alpha}(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) + f(t) D^{\alpha}(g)(t) \\
&= D^{\alpha}(f)(t) g(t) + f(t) D^{\alpha}(g)(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada g fonksiyonu t noktasında sürekli olduğundan $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) = g(t)$ dir.

5. $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})}{g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})g(t) - f(t)g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) + f(t)g(t) - f(t)g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})}{g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})g(t)\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)\right]g(t) - \left[g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - g(t)\right]f(t)}{g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}})g(t)\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{[f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)]}{\varepsilon} g(t) - \frac{[g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - g(t)]}{\varepsilon} f(t)}{g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) g(t)} \\
&= \frac{D^\alpha f(t) g(t) - D^\alpha g(t) f(t)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) g(t)} \\
&= \frac{D^\alpha f(t) g(t) - D^\alpha g(t) f(t)}{g^2(t)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) = g(t)$ dir.

6. $u = g(t)$, $a > 0$ 'da α Katugampola diferansiyellenebilir ve $y = f(u)$, $b = g(a) > 0$ 'da diferansiyellenebilir olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\Delta y = f(b e^{\varepsilon b^{-\alpha}}) - f(b)$ alınır, $\Delta u = \varepsilon b^{1-\alpha} + O(\varepsilon^2)$ olmak üzere $b e^{\varepsilon b^{-\alpha}} = b + \varepsilon b^{1-\alpha} + O(\varepsilon^2) = b + \Delta u$ olur. $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ iken $\Delta u \rightarrow 0$ olan, $\Delta y = D^1 f(b) \Delta u + \varepsilon_1 \Delta u$ eşitliği elde edilir. Eğer Δt yi t de bir artma miktarı ve sırasıyla Δu ve Δy 'yi de (ikisinin de birlikte 0'a eşit olma ihtimali) u ve y nin denk artma miktarları olarak alınır, Δy eşitliğini de kullanarak $\Delta u = D^\alpha g(a) \Delta t + \varepsilon_2 \Delta t$ yazılabilir. Burada $\Delta t \rightarrow 0$ iken $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ dır ve

$$\begin{aligned}
\Delta y &= [D^1 f(b) + \varepsilon_1] \Delta u \\
&= [D^1 f(b) + \varepsilon_1] \cdot [D^\alpha g(a) + \varepsilon_2] \Delta t
\end{aligned}$$

durumunda $\Delta t \rightarrow 0$ iken $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ve $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ dır. $\Delta t = \varepsilon$ alındığında

$$\begin{aligned}
D^\alpha (f \circ g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [D^1 f(b) + \varepsilon_1] [D^\alpha g(a) + \varepsilon_2] \\
&= D^1 f(b) D^\alpha g(a) = f'(g(a)) D^\alpha g(a)
\end{aligned}$$

olur. Δu eşitliği, Δy eşitliği formunda yazılamaz. Yazılabilmesi için Δu eşitliğine α mertebeden Katugampola kesirli türev uygulanmalıdır.

Limit yaklaşımı ile sonuç ispatlanacak olursa, g fonksiyonu a komşuluğunda sabit olmayan bir fonksiyon alınsın. Bu durumda herhangi $x_1, x_2 \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ için $g(x_1) \neq g(x_2)$ ve g fonksiyonu a noktasında sürekli fonksiyon olsun. Böylece $\varepsilon > 0$ ve $a > 0$ için

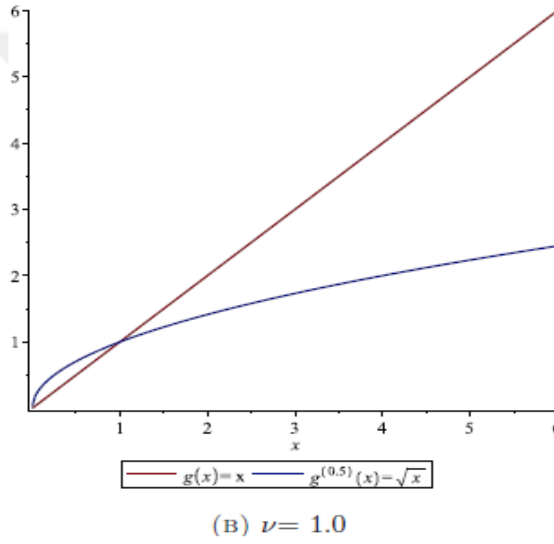
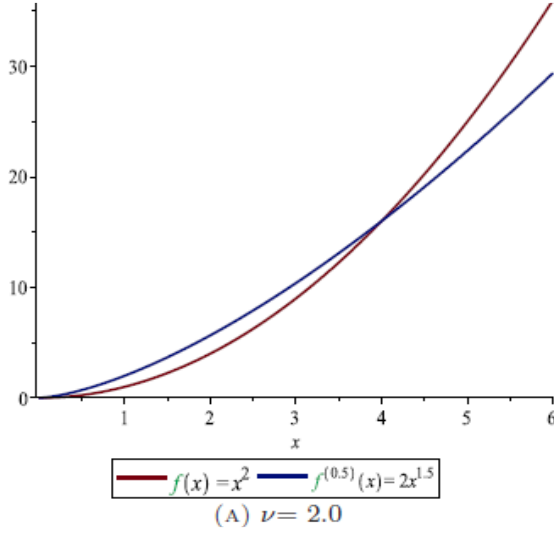
$$\begin{aligned}
D^\alpha (f \circ g)(a) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(ae^{\varepsilon a^{-\alpha}})) - f(g(a))}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(ae^{\varepsilon a^{-\alpha}})) - f(g(a))}{g(ae^{\varepsilon a^{-\alpha}}) - g(a)} \cdot \frac{g(ae^{\varepsilon a^{-\alpha}}) - g(a)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + \varepsilon_1) - f(g(a))}{\varepsilon_1} \cdot \frac{g(ae^{\varepsilon a^{-\alpha}}) - g(a)}{\varepsilon} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ iken } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + \varepsilon_1) - f(g(a))}{\varepsilon_1} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(ae^{\varepsilon a^{-\alpha}}) - g(a)}{\varepsilon} \\
&= f'(g(a)) D^\alpha g(a)
\end{aligned}$$

bulunur.

7. Tanım 2.4.1’de $h = \varepsilon t^{1-\alpha} (1 + O(\varepsilon))$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 D^{-\alpha}(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha} + O(\varepsilon^2)) - f(t)}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{\frac{ht^{\alpha-1}}{1+O(\varepsilon)}} \\
 &= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.



Şekil 3.3 $f(x) = x^\nu$ kuvvet fonksiyonunun $1/2$ merteben Katugampola kesirli türevleri

Teorem 3.1.4.2 (α mertebeden Katugampola Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar için Rolle Teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu

- i) $[a, b]$ aralığında sürekli
- ii) $\alpha \in (0, 1)$ için (a, b) aralığında α mertebeden Katugampola kesirli diferansiyellenebilir,
- iii) $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlasın. Bu taktirde $D^{\alpha}(f)(c)=0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır (Katugampola 2014).

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)=f(b)$ olduğu için bir $c \in (a,b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Genelliği bozmaksızın c noktasının bir yerel minimum nokta olduğunu kabul edelim. Böylece

$$D^{\alpha} f(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f\left(ce^{\varepsilon c^{-\alpha}}\right) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f\left(ce^{\varepsilon c^{-\alpha}}\right) - f(c)}{\varepsilon} \quad (3.10)$$

yazılabilir. O halde, $D^{\alpha}(f)(c)=0$ dır.

Teorem 3.1.4.3 (α mertebeden Katugampola Kesirli Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f: [a,b] \rightarrow R$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0,1)$ için α mertebeden Katugampola kesirli diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$D^{\alpha}(f)(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha}} \quad (3.11)$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır (Katugampola 2014).

$$\textbf{İspat: } g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha} x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha} \right)$$

g fonksiyonu kesirli Rolle teoremi koşullarını sağlar ve bu nedenle $D^{\alpha}(f)(c)=0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır. Burada $D^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} x^{\alpha}\right) = 1$ özelliği kullanılmıştır.

Tanım 3.1.4.2 : $\alpha \in R$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ ve $x > a \geq 0$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun sol Hadamard kesirli integrali

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{\tau} \right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (3.12)$$

olarak tanımlanır (Katugampola).

Tanım 3.1.4.3 : $\alpha \in R$, $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\rho > 0$, $\mu \in R$ ve $x > a \geq 0$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun sol Erdelyi-Kober kesirli integrali,

$$(I_{a^+; \rho, \eta}^{\alpha} f)(x) = \frac{\rho x^{-\rho(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\tau^{\rho\eta+\rho-1} f(\tau)}{(x^{\rho} - \tau^{\rho})^{1-\alpha}} d\tau \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanır (Katugampola).

Tanım 3.1.4.4 : $\alpha \in R$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ ve $x > a$, $\rho > 0$ için $f \in X_c^p(a, b)$ fonksiyonunun sol Katugampola kesirli integrali,

$$({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\tau^{p-1} f(\tau)}{(x^p - \tau^p)^{1-\alpha}} d\tau \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanır (Katugampola).

Tanım 3.1.4.5 : $\alpha \in R$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ ve $x < b$, $\rho > 0$ için $f \in X_c^p(a, b)$ fonksiyonunun sağ Katugampola kesirli integrali,

$$({}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\tau^{p-1} f(\tau)}{(\tau^p - x^p)^{1-\alpha}} d\tau \quad (3.15)$$

olarak tanımlanır (Katugampola).

Katugampola kesirli integrali operatörleri, Erdelyi-Kober kesirli integral operatörlerine eşit görünmese de sadece $\rho^{-\alpha}$ çarpan farkıyla birbirlerine eşitlenirler. Bunu da Osler'in Erdelyi'nin çalışmasını genelleştirerek belirttiği

$$\left(I_{a^+;g}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g'(\tau) f(\tau)}{[g(x) - g(\tau)]^{1-\alpha}} d\tau \quad (3.16)$$

kesirli integralinde $g(x) = x^{\rho}$ alınarak görülebilir (Osler 1970)

Tanım 3.1.4.6. : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ ve $\rho > 0$ olmak üzere, $0 \leq a < x < b \leq \infty$ için genelleştirilmiş Katugampola kesirli türevi

$$\begin{aligned} \left({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \left({}^{\rho}I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x) D \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{\tau^{\rho-1} f(\tau)}{(x^{\rho} - \tau^{\rho})^{\alpha-n+1}} d\tau \end{aligned} \quad (3.17)$$

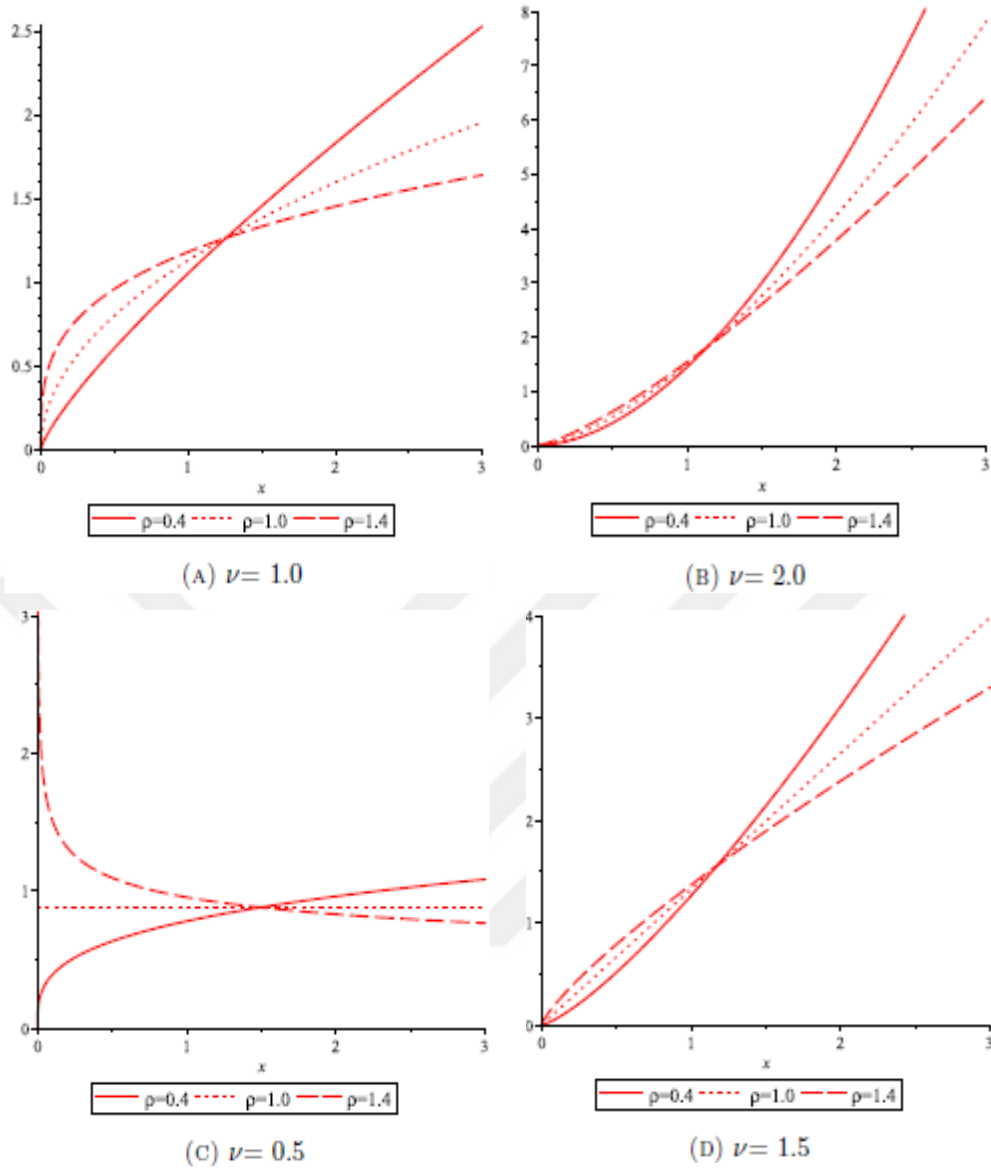
$$\begin{aligned} \left({}^{\rho}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(-x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \left({}^{\rho}I_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(x) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-x^{1-\rho} \frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{\tau^{\rho-1} f(\tau)}{(\tau^{\rho} - x^{\rho})^{\alpha-n+1}} d\tau \end{aligned} \quad (3.18)$$

biçiminde ifade edilir (Katugampola 2014).

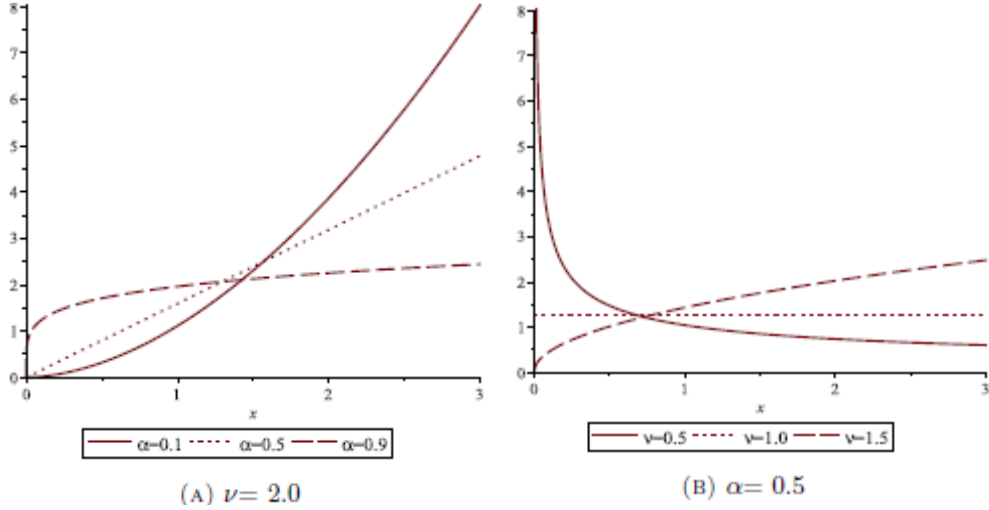
Lemma 3.1.4.1: $0 < \alpha < 1$ ve $f \in X_c^{\rho}(a, b)$ olsun. $a > 0$ ve $\rho > 0$ için,

$$\left({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha} {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \quad (3.19)$$

olur (Katugampola 2014).



Şekil 3.4 $\rho = 0.4, 1.0, 1.4$ ve $\nu = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ için $f(x) = x^\nu$ kuvvet fonksiyonunun genelleştirilmiş Katugampola kesirli türevleri



Şekil 3.5 $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ ve $\nu = 0.5, 1.0, 1.5$ için $f(x) = x^\nu$ kuvvet fonksiyonunun genelleştirilmiş Katugampola kesirli türevleri

Şekil 3.4’de $f(x) = x^\nu$ fonksiyonunun farklı ρ ve ν değerleri için, Şekil 3.5’te ise farklı α ve ν değerleri için genelleştirilmiş Katugampola kesirli türevlerinin sonuçları karşılaştırılmıştır. Şekil 1(c) ve 1(d) grafiklerinde $\nu = 0.5$ ve $\nu = 1.5$ durumlarına dikkat edilecek olunursa, ρ ’nin değerleri, 1’in yakınında değiştiğinde fonksiyonun konkavlığı da değişir. Burada kesirli türev, x ’in farklı değerleri için sabit bir değer alır veya lineer olur.

3.1.5. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev

Caputo ve Fabrizio 2015 yılında yeni bir kesirli mertebeden türev tanımlamışlardır. Yeni Caputo kesirli türevi diye de tanımlanan bu kesirli türevde, Riemann-Liouville ve Caputo gibi kesirli türevlerinin çekirdeğinin teklik durumlarını göz önünde bulundurarak, bu problemi ortadan kaldırmak için çekirdeği eksponansiyel fonksiyon olarak belirtmişlerdir.

Tanım 3.1.5.1: $f \in H^1(a, b)$ olmak üzere $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ için Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$$D_t^\alpha (f(t)) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(x) \exp\left[-\alpha \frac{t-x}{1-\alpha}\right] dx \quad (3.20)$$

olarak tanımlanır. Burada $M(\alpha)$ normleştirilmiş bir fonksiyondur ve $M(0) = M(1) = 1$ ’dir. Eğer fonksiyon $H^1(a, b)$ ‘ye ait değilse,

$$D_t^\alpha (f(t)) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t (f(t) - f(x)) \exp\left[-\alpha \frac{t-x}{1-\alpha}\right] dx \quad (3.21)$$

biçiminde tanımlanır (Caputo and Fabrizio 2015).

Tanım 3.1.5.2.: $0 < \alpha < 1$, $t \geq 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli integrali,

$$I_a^\alpha (f(t)) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} f(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s) ds \quad (3.22)$$

biçiminde tanımlanır (Losada and Nieto 2015).

Tanım 3.1.5.3. $0 < \alpha < 1$, $t \geq 0$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebeden Caputo-Fabrizio genelleştirilmiş kesirli türevi,

$$D_t^\alpha (f(t)) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(x) \exp\left[-\alpha \frac{t-x}{1-\alpha}\right] dx \quad (3.23)$$

şeklindedir (Losada and Nieto 2015).

3.1.6. Atangana- Baleanu Kesirli Türev

A. Atangana ve D. Baleanu, Riemann-Liouville ve Caputo gibi kesirli türevlerin çekirdeğinin teklik durumunun, modelleme problemlerindeki eksikliği nedeniyle, yeni bir kesirli türev tanımlamışlardır. Tanımladıkları kesirli türevde Mittag-Leffler fonksiyonundan yola çıkarak, yeni bir kesirli operatör sunmuşlardır.

Tanım 3.1.6.1.: $\alpha \in R$, $\text{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere, bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.24)$$

biçiminde tanımlanır (Atangana and Baleanu 2016).

Atangana-Baleanu kesirli türev ve integral tanımında belirtilecek olan $B(\alpha)$ fonksiyonu, Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integral tanımında belirtilen $M(\alpha)$ normleştirilmiş fonksiyonu ile aynı özelliklere sahiptir.

Tanım 3.1.6.2.: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABC}_b D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilir (Atangana and Baleanu 2016).

Tanım 3.1.6.3.: $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere Riemann-Liouville anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABR}_b D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx \quad (3.26)$$

şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016).

Tanım 3.1.6.4.: Atangana-Baleanu kesirli integrali ise

$${}^{AB}_a I_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(y) (t-y)^{\alpha-1} dy \quad (3.27)$$

biçimindedir (Atangana and Baleanu 2016).

Tanımlanan kesirli integral α , 0 olduğu zaman normal fonksiyona, α , 1 olduğunda da klasik integrale dönüşür.

3.2. Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen, analizin temel eşitsizliklerinden birisi olan bu eşitsizlik 1893 yılında ilk kez J. Hadamard tarafından verildi.

Konveks terimine ilk olarak, 1881 yılında Hermite'in Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3'te şu şekilde basıldı.

“Sur deux limites d’une integrale definie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le meme sens de $x=a, x=b$. On aura les relations

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Suivant que la courbe $y=f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l’axe des abscisses.”

Hermite’in yazdığı bu eşitsizliklerin,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği için bir ara değer olduğu aşıktı. Hermite’in çalışmasının yayınlanmasından sonra, 1893 yılında J. Hadamard konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Verdi (Hadamard 1893).

M. Z. Sarıkaya *et al.* Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini Teorem 3.1.1’de, A. O. Akdemir *et al.* Uyumlu kesirli integraller içeren Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini Teorem 3.1.2’de, H. Chen ve U. N. Katugampola, Katugampola kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini ise Teorem 3.1.3’te vermişlerdir.

Teorem 3.2.1: $0 \leq a < b$ olmak üzere $f:[a,b] \rightarrow R$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise, kesirli integraller için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Sarıkaya vd. 2013).

Teorem 3.2.2: $0 \leq a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise, uyumlu kesirli integraller için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [I_{a+}^\alpha f(b) + I_{b-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği vardır (Set vd. 2017).

Teorem 3.2.3: $\alpha > 0, \rho > 0$ ve $0 \leq a < b$ olmak üzere f fonksiyonu $f: [a^\rho, b^\rho] \rightarrow R$ ve $f \in X_c^\rho(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer f , $[a, b]$ aralığında konveks ise,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leq \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha} [\rho I_{a+}^\alpha f(b^\rho) + \rho I_{b-}^\alpha f(a^\rho)] \leq \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Chen and Katugampola 2017).

Teorem 3.2.4. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g fonksiyonu ise $s \in [0, 1]$ için s -konveks ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^\alpha} [I_a^\alpha f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a)] \\ & \leq \frac{M(a, b)}{n!} [B(n+s+2, \alpha-n) + B(n+1, \alpha-n+s+1)] \\ & + \frac{N(a, b)}{n!} [B(n+2, \alpha-n+s) + B(s+n+1, \alpha-n+1)] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $\alpha \in (n, n+1]$, $M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a, b)f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklindedir” (Set vd. 2016).

Sonuç 3.2.1. “Teoremin şartları altında $f(x) = 1$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a) \right] \\
& \leq \frac{g(a)+g(b)}{n!} \left[B(n+s+2, \alpha-n) + B(n+1, \alpha-n+s+1) \right] \\
& \quad + \frac{g(a)+g(b)}{n!} \left[B(n+2, \alpha-n+s) + B(s+n+1, \alpha-n+1) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir” (Set vd. 2016).

Teorem 3.2.5. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu s_1 –konveks ve g fonksiyonu s_2 –konveks ise $(s_1, s_2 \in [0, 1])$, bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a) \right] \\
& \leq \frac{1}{n!} M(a, b) \left[B(s_1 + s_2 + n + 1, \alpha - n) + B(n + 1, s_1 + s_2 + \alpha - n) \right] \\
& \quad + \frac{1}{n!} N(a, b) \left[B(n + s_1 + 1, \alpha - n + s_2) + B(n + s_2 + 1, \alpha - n + s_1) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $\alpha \in (n, n + 1]$, $M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a, b)f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklindedir” (Set vd. 2016).

Teorem 3.2.6. “ $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonları verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu konveks ve negatif olmayan bir fonksiyon, g fonksiyonu ise $s \in [0, 1]$ için s –konveks ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& 2^s B(n+1, \alpha-n) f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \leq \frac{\Gamma(n+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b)g(b) + {}^b I_\alpha f(a)g(a) \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} M(a, b) \left[B(n+2, \alpha-n+s) + B(s+n+1, \alpha-n+1) \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} N(a, b) \left[B(n+1, \alpha-n+s+1) + B(n+s+2, \alpha-n) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $\alpha \in (n, n + 1]$, $M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a, b)f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklindedir” (Set vd. 2016a).

Teorem 3.2.7. “ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $\alpha \in (n, n+1]$ dir” (Set vd. 2016b).

Lemma 3.2.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon $x \in [a, b]$ ve $\alpha \in [n, n+1)$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right) dt \right] \\ & - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right) dt \right] \\ & = \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{[f(x) + f(a)]}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x+a}{2}\right) + I_\alpha^a f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \\ & + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{[f(x) + f(b)]}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[I_\alpha^a f\left(\frac{x+b}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Yalçın 2016).

3.3. Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

1906 yılında Fejer, trigonometrik polinomları çalışırken Hermite’in sonuçlarının genelleştirilmesi olan, literatürde Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği olarak bilinen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx$$

eşitsizliğini elde etmiştir (Fejer 1906).

İ. İşcan, Riemann-Liouville kesirli integral yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini Teorem 3.2.1’de, H. Chen ve U. N. Katugampola, Katugampola kesirli integral yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini Teorem 3.2.2’de vermişlerdir.

Teorem 3.3.1: $f: [a, b] \rightarrow R$ konveks fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer $g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$, ye göre simetrik ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[J_{a^+}^\alpha g(b) + J_{b^-}^\alpha g(a) \right] &\leq \left[J_{a^+}^\alpha (fg)(b) + J_{b^-}^\alpha (fg)(a) \right] \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \left[J_{a^+}^\alpha g(b) + J_{b^-}^\alpha g(a) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan 2015).

Teorem 3.3.2: $f: [a, b] \rightarrow R$ konveks fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer $g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\alpha > 0, \rho > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} F\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha g(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha g(a) \right] &\leq \left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha (gF)(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha (gF)(a) \right] \\ &\leq \frac{F(a) + F(b)}{2} \left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha g(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha g(a) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada F , $F(x) = f(x) + f(a+b-x)$ olarak tanımlanan ayrıca,

i) $(a+b)/2$ ye göre simetrik,

ii) $F(a) = F(b) = f(a) + f(b)$,

iii) $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

şartlarını sağlayan konveks bir fonksiyondur (Chen and Katugampola 2017).

3.4. Ostrowski Eşitsizliği

1938 yılında matematikçi A. M. Ostrowski, $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilen fonksiyon için, $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\|f'\|_\infty = \sup_{t \in (a, b)} |f'(t)| < +\infty$ koşullarını sağlayan Ostrowski eşitsizliğini

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq (b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \|f'\|_\infty$$

belirtmiştir (Ostrowski 1938).

Ostrowski eşitsizliğinin diğer bir sonucu olarak da bu eşitsizlik, literatürde $\|f'\|_\infty < M$ alınarak

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq (b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] M$$

şeklinde de belirtilir (Ostrowski 1938).

1995 yılında G. A. Anastassiou (3.9) eşitsizliğini genelleştirerek yüksek mertebeden türevli fonksiyonlar için yeni bir Ostrowski eşitsizliği

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq \frac{1}{(n+2)!} \left[\frac{(x-a)^{n+2} + (b-x)^{n+2}}{(b-a)} \right] \|f^{(n+1)}\|_\infty \quad \left(f^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, n \right)$$

sunmuştur (Anastassiou 1995).

G. A. Anastassiou Teorem 3.3.1’de Caputo kesirli türevini içeren Ostrowski eşitsizliğini, A. O. Akdemir *et al.* Teorem 3.3.2’de Uyumlu kesirli integralleri içeren Ostrowski eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Teorem 3.4.1: $f \in AC^m([a, b])$, $m = [\alpha]$ ve $f^{(k)}(b) = 0$, $k = 1, \dots, m-1$ olmak üzere

$$\left| f(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq \begin{cases} \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \| {}^c D_{b-}^\alpha f \|_{\infty, [a,b]}, & \text{if } {}^c D_{b-}^\alpha f \in L_\infty([a,b]), \alpha > 0, \\ \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \| {}^c D_{b-}^\alpha f \|_{L_1([a,b])}, & \text{if } {}^c D_{b-}^\alpha f \in L_\infty([a,b]), \alpha \geq 1, \\ \frac{(b-a)^{\alpha-1+\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)(p(\alpha-1)+1)^{\frac{1}{p}} \left(\alpha + \frac{1}{p} \right)} \| {}^c D_{b-}^\alpha f \|_{L_q([a,b])}, & \text{if } {}^c D_{b-}^\alpha f \in L_q([a,b]), p, q > 1, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \alpha > 1 - \frac{1}{p} \end{cases}$$

eşitsizliği vardır (Anastassiou 2011).

Teorem 3.4.2: $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks fonksiyon, $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$ ve $\alpha \in [n, n+1)$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha-n) \left[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha \right]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} \left[{}^x I_\alpha f(a) + I_\alpha^x f(b) \right] \right| \leq \frac{M \Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)} \left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1} \right]$$

eşitsizliği sağlanır (Set vd. 2016).

3.5. Grüss Eşitsizliği

Grüss 1935'te iki fonksiyonun çarpımının integrali ile bu fonksiyonların integrallerinin çarpımının farkının mutlak değerinin sınırını veren bir eşitsizlik elde etmiştir ve bu eşitsizliği

şu şekilde belirtmiştir. f ve g $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ve $m \leq f(x) \leq M$, $n \leq g(x) \leq N$, $m, M, n, N \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right) \right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n)$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović 1970).

Z. Dahmani *et al.* Riemann-Liouville kesirli integralini içeren Grüss eşitsizliğini Teorem 3.4.1’de ve J. Sousa *et al.*, Katugampola kesirli integralini içeren Grüss eşitsizliğini Teorem 3.4.2’de vermişlerdir.

Teorem 3.5.1: f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen, $m \leq f(x) \leq M$ ve $p \leq g(x) \leq P$ koşullarını sağlayan iki fonksiyon olsun. $m, M, p, P \in \mathbb{R}$ ve her $t > 0$, $\alpha > 0$ için,

$$\left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J^\alpha f g(t) - J^\alpha f(t) J^\alpha g(t) \right| \leq \left(\frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} \right)^2 (M-m)(P-p)$$

eşitsizliği elde edilir (Dahmani vd. 2010).

Teorem 3.5.2: f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen, $m \leq f(x) \leq M$ ve $p \leq g(x) \leq P$ koşullarını sağlayan iki fonksiyon olsun. $m, M, p, P \in \mathbb{R}$ ve $x \in [0, \infty)$ olmak üzere, $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\alpha > 0$, $\rho > 0$ ve $\eta \geq 0$ için

$$\left| \Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha, \eta) {}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f g(x) - {}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f(x) {}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} g(x) \right| \leq \left(\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha, \eta) \right)^2 (M-m)(P-p)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha, \eta) = \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha+1)} \rho^{-\beta} x^{\kappa+\rho(\eta+\alpha)}$$

şeklindedir (Vanterler vd. 2017).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegral İçeren Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında P –fonksiyon ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_a^\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) \right] \right. \\ & \quad + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} \\ & \quad \left. - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) + I_a^\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{n! \Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)} [|f'(a)| + 2|f'(x)| + |f'(b)|] \end{aligned}$$

eşitsizliği $\alpha \in (n, n + 1]$ için geçerlidir. Burada $\Gamma(x)$ Euler gamma fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1’den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_\alpha^a f\left(\frac{x + a}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) \right] \right. \\
& \quad + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} \\
& \quad \left. - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) + I_\alpha^a f\left(\frac{x + b}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n! (b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right) \right| dt \right] \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n! (b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right) \right| dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında P –fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_\alpha^a f\left(\frac{x + a}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) \right] \right. \\
& \quad + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} \\
& \quad \left. - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) + I_\alpha^a f\left(\frac{x + b}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n! (b - a)} \left[\int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n) (|f'(x)| + |f'(a)|) dt \right] \\
& \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n! (b - a)} \left[\int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n) (|f'(x)| + |f'(b)|) dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n) dt = \int_0^1 1 B_t(n + 1, \alpha - n) dt \\
& B_t(n + 1, \alpha - n) t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^n (1 - t)^{\alpha - n - 1} dt \\
& = B(n + 1, \alpha - n) - B(n + 2, \alpha - n) \\
& = \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(n + 2)\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha + 2)} \\
& = \frac{n! \Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(n + 1)! \Gamma(\alpha - n)}{(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{n! \Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)}$$

Böylece Euler Gamma fonksiyonu formülünden $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ ($n > 0$) olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında P –fonksiyon ve $q \geq 1$ ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_\alpha^a f\left(\frac{x + a}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) \right] \right. \\ & \quad + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} \\ & \quad \left. - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) + I_\alpha^a f\left(\frac{x + b}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{2(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left(\int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} (|f'(x)|^q + |f'(a)|^q) \\ & \quad + \frac{2(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left(\int_0^1 B_t(n + 1, \alpha - n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} (|f'(x)|^q + |f'(b)|^q) \end{aligned}$$

eşitsizliği $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \in [n, n + 1)$ için geçerlidir.

İspat: Lemma 4.1.1’de integraller için mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha - n)(x - a)^\alpha [f(x) + f(a)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[I_\alpha^a f\left(\frac{x + a}{2}\right) + {}^b I_\alpha f\left(\frac{x + a}{2}\right) \right] \right. \\ & \quad + \frac{\Gamma(\alpha - n)(b - x)^\alpha [f(x) + f(b)]}{\Gamma(\alpha + 1)(b - a)} \\ & \quad \left. - \frac{2^\alpha}{b - a} \left[{}^b I_\alpha f\left(\frac{x + b}{2}\right) + I_\alpha^a f\left(\frac{x + b}{2}\right) \right] \right| \\ & \leq \frac{(x - a)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right) \right| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right) \right| dt \right] \\ & \quad + \frac{(b - x)^{\alpha+1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right) \right| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \left| f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right) \right| dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left(\frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Her $x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \leq \int_0^1 |f'(x)|^q + |f'(a)|^q dt \\
&= |f'(x)|^q + |f'(a)|^q \\
I_2 &= \int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right|^q dt = |f'(x)|^q + |f'(a)|^q \\
I_3 &= \int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt = |f'(x)|^q + |f'(b)|^q \\
I_4 &= \int_0^1 \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) \right|^q dt = |f'(x)|^q + |f'(b)|^q
\end{aligned}$$

İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığının alt kümesi olan I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında P –fonksiyon ise bu takdirde uyumlu kesirli integraller için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a)] \leq [f(a) + f(b)]$$

eşitsizliği $\alpha \in [n, n+1)$ için geçerlidir.

İspat: $x, y \in [a, b]$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında P –fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$$

ifadesi yazılır. Burada $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$ olarak alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılarak ve $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{n!} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f(ta + (1-t)b) dt \\ + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f((1-t)a + tb) dt \\ = \frac{1}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a) \end{aligned}$$

bulunur ve burada $\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} dt = B(n+1, \alpha-n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$ olduğu kullanılmıştır. Eşitsizliğin sol tarafı ispat edilmiş olup sağ tarafın ispatı için, fonksiyonun m -konveks oluşu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq f(a) + f(b) \\ f((1-t)a + tb) &\leq f(a) + f(b) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanıp elde edilen yeni eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılarak ve $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa,

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a f(b) + {}^b I_\alpha f(a) \leq \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} [f(a) + f(b)]$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

4.2. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımını İhtiva Eden Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$) , AA -konveks fonksiyonlar ve $f_i \in L[a, b]$ ise bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha} \sum_{i=1}^n \left({}^b I_\alpha f_i(u) + I_\alpha^a f_i(u) \right)$$

$$\leq \frac{1}{n!} \left[(\beta(n+2, \alpha-n) + \beta(n+1, \alpha-n+1)) \sum_{i=1}^n f_i(b) \right. \\ \left. + (\beta(n+1, \alpha-n+1) + \beta(n+2, \alpha-n)) \sum_{i=1}^n f_i(a) \right]$$

eşitsizliği $\alpha \in [n, n+1)$ için sağlanır ve burada $\beta(a, b)$ Euler Beta fonksiyonudur.

İspat: f_i fonksiyonları birer AA –konveks fonksiyon ve $t \in [0,1]$ için

$$f_1(tb + (1-t)a) \leq tf_1(b) + (1-t)f_1(a)$$

$$f_2(tb + (1-t)a) \leq tf_2(b) + (1-t)f_2(a)$$

.....

.....

$$f_n(tb + (1-t)a) \leq tf_n(b) + (1-t)f_n(a)$$

ifadeleri yazılabilir. Elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$ ifadesi ile çarpılarak $[0,1]$ üzerinden integrali alınır;

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [f_1(tb + (1-t)a) + f_2(tb + (1-t)a) + \dots \\ + f_n(tb + (1-t)a)] dt \\ \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [tf_1(b) + (1-t)f_1(a) + tf_2(b) \\ + (1-t)f_2(a) + \dots + tf_n(b) + (1-t)f_n(a)] dt$$

elde edilir. $u = tb + (1-t)a$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve sağ tarafta yer alan integraller hesaplandığında;

$$\frac{1}{(b-a)n!} \int_a^b \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} \left[\sum_{i=1}^n f_i(u) \right] du \\ \leq \frac{1}{n!} \left[\beta(n+2, \alpha-n) \sum_{i=1}^n f_i(b) + \beta(n+1, \alpha-n+1) \sum_{i=1}^n f_i(a) \right]$$

elde edilir. Benzer bir yol izlenerek;

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha} \sum_{i=1}^n (I_a^\alpha f_i(u))$$

$$\leq \frac{1}{n!} \left[\beta(n+2, \alpha-n) \sum_{i=1}^n f_i(a) + \beta(n+1, \alpha-n+1) \sum_{i=1}^n f_i(b) \right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Wright-quasi-konveks fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ ise bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\frac{1}{2(b-a)^\alpha} \left({}^b I_\alpha f_i(u) + I_\alpha^a f_i(u) \right) \leq \frac{\beta(n+1, \alpha-n+1)}{n!} \max\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği $\alpha \in [n, n+1)$ için sağlanır ve burada $\beta(a, b)$ Euler Beta fonksiyonudur.

İspat: f fonksiyonu bir Wright-quasi-konveks fonksiyon ve $t \in [0, 1]$ için

$$\frac{1}{2} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$ ifadesi ile çarpılarak $[0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \\ \leq \frac{1}{n!} \max\{f(a), f(b)\} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Değişken değiştirme yapılırsa ve sağ tarafta yer alan integral hesaplandığında;

$$\frac{1}{2(b-a)^\alpha} \left({}^b I_\alpha f_i(u) + I_\alpha^a f_i(u) \right) \leq \frac{\beta(n+1, \alpha-n+1)}{n!} \max\{f(a), f(b)\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, integraller için geçerli olan yöntemler uyumlu kesirli integrallerin analizine uygun olarak uyumlu kesirli integraller için de yazılmış ve konveks fonksiyon türleri için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra bazı lemmalar kullanılarak Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar $\alpha = n + 1$ özel seçimi ile Riemann-Liouville integralleri ihtiva eden çeşitli sonuçlara indirgenir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için farklı türden kesirli integral operatörleri içeren yeni eşitsizlikler elde edebilirler.



KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.
- Abdon, A., Baleanu, D., (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. Thermal Sci, 18. doi: 10.2298/TSCI160111018A.
- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E., Avcı-Ardıç, M. And Yalçın, A., Some new generalizations for GA –convex functions, Filomat 31:4 (2017), 1009–1016.
- Akdemir, A.O., Set, E., Özdemir, M.E., and Yalçın, A., New generalizations for functions whose second derivatives are GG –convex, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Avcı-Ardıç, M. and Set, E., New integral inequalities via GA –convex functions, submitted (2015)
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç, F., Some inequalities for GG –convex functions, submitted (2015).
- Anastassiou, G. A., (1995). Ostrowski type inequalities. Proc. AMS 123, 3775-3781.
- Anastassiou, G.A., (2011). Advances on Fractional Inequalities, Springer, New York.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., Generalized convexity and Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007) 1294-1308
- Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Balcı, M., 2012. Matematik Analiz-1. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, Türkiye.
- Bayın, S., 2004. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Ders Kitapları A.Ş., 458 s, Ankara.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Caputo, M. , Fabrizio, M., (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. Progr Fract Differ Appl 1:73–85.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13, 529–539.

- Chen, H., Katugampola, U.N., (2017). Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for generalized fractional integrals. *J. Math. Anal. Appl.* 446 1274–1291.
- Dahmani, Z., Tabharit, L., Taf, S., (2010). New generalizations of Gruss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 2(3), 93-99.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, *Bull. Austral.Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Fejer, L.,(1906). Uberdie Fourierreihen, II, *Math. Naturwise. Anz Ungar. Akad., Wiss*, 24, 369-390.
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for r –convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 215, 461-470.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Hadamard, J., (1893). Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction consider par Riemann. *J. Math. Pures Appl.*, .58, 171-215.
- Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s –convex functions. *Aequationes Math.*, 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- İşcan İ., (2015). Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for convex function via fractional integrals. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 60(3) 356-366.
- İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 43 (6) (2014), 935-942.
- Kadıoğlu, E. ve Kamali, M., 2013. Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye.
- Katugampola, U. N., A new fractional derivative with classical properties, e-print arXiv:1410.6535.
- Katugampola, U.N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bull. Math. Anal. Appl.* 6(4), 1–15.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.

- Khalil, R., 2014. Fractional Fourier Series with Applications. American Journal of Computational and Applied Mathematics, 4 (6), 187-191.
- Khalil, R. and Abu Hammad, M., 2014. Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials. International Journal of Applied Mathematical Research, 3 (3), 214-219.
- Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier Science Limited, 204, 523 p, Amsterdam.
- Kilbas, A. A., Rivero, M., Rodríguez-Germá, L. and Trujillo, J. J., 2007. α -Analytic solutions of some linear fractional differential equations with variable coefficients. Applied mathematics and computation, 187.1, 239-249.
- Latif, M.A., New Hermite-Hadamard type integral inequalities for GA –convex functions with applications, Analysis, Volume 34, Issue 4, 379-389, 2014. Doi:10.1515/anly-2012-1235.
- Losada, J., Nieto, J.J., (2015). Properties of the new fractional derivative without singular kernel. Progr. Fract. Differ. Appl.1, 87–92.
- Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9, 157-162.
- Osler, T.J.,(1970). Leibniz rule for fractional derivatives and an application to infinite series. SIAM J. Appl. Math., 18(3):658-674.
- Ostrowski, A., (1938). ber die Absolutabweichung einer dierentiebaren Funktion von ihrem Inte-gralmittelwert, Comment. Math. Helv., 10, 226-227.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions ,Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300 pp, New York.
- Ross, B., 1977. The Development of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Mathematica, 4 (1), 75-89.
- Samko, S. G. *et al.*, (2009). Fractional Integral and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon et alibi.

- Sarikaya, M.Z., (2012). Ostrowski type inequalities involving the right Caputo fractional derivatives belong to L_p . Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics , Vol. 27 No 2, 191-197.
- Sarikaya, M.Z., Set, E., Yaldiz, H. and Basak, N., (2013). Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, vol. 57, pp. 2403–2407.
- Set, E., Akdemir, A.O., and Çelik, B., 2016. Some Hermite-Hadamard type inequalities for products of two different convex functions via conformable fractional integrals, X. Statistical Days, Proceedings Book, Giresun-Turkey.
- Set, E., Akdemir, A.O., and Mumcu, İ., 2017. The Hermite-Hadamard's inequality and its extensions for conformable fractional integrals of any order $\alpha > 0$, Creative Mathematics and Informatics, Accepted.
- Set, E., Akdemir, A.O., Mumcu, I., Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are convex via conformable fractional integrals. Submitted.
- Thomas, G.B., (2009). Thomas Calculus (11-th ed.), Çeviri: Recep Korkmaz, Beta Yayınları, İstanbul.
- Vanterler da C. Sousa, J., Oliveira, D.S., Capelas de Oliveira E., (2017). Grüss-type inequality by mean of a fractional integral. Submitted.
- Wade, W.R., (2009). An Introduction to Analysis, Prentice- Hall.
- Yalçın, A., (2016). Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren İntegral Eşitsizlikler, Yüksek Lisans Tezi, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

