

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN ÇÖZÜNEN MADDE TAŞIMA
PROBLEMİNİN YENİ BİR NÜMERİK METOTLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS

Gülzar PASHAYEVA

EKİM-2025
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN ÇÖZÜMEN MADDE TAŞIMA
PROBLEMİNİN YENİ BİR NÜMERİK METOTLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**THE NUMERICAL SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL
SOLUTE TRANSPORT PROBLEM WITH A NEW NUMERICAL METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Gülzar PASHAYEVA

**EKİM-2025
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN ÇÖZÜMEN MADDE TAŞIMA
PROBLEMİNİN YENİ BİR NÜMERİK METOTLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**THE NUMERICAL SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL
SOLUTE TRANSPORT PROBLEM WITH A NEW NUMERICAL METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Gülzar PASHAYEVA

Danışman: Doç. Dr. Halil ANAÇ

**EKİM-2025
GÜMÜŞHANE**

KABUL ve ONAY

X X X X

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Uyumlu Kesirli Mertebeden Çözünen Madde Taşıma Probleminin Yeni Bir Nümerik Metotla Sayısal Çözümü**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

03/10/2025

.....
Gülner PASHAYEVA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarında bana ilgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli zamanını ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Halil ANAÇ' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün kıymetli hocalarına teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca hep yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli babama, kıymetli eşim Araz PASHAYEV'e ve sevgili oğullarım Elnar ve Fakraddin PASHAYEV'e teşekkürlerimi sunarım.

Gülner PASHAYEVA
GÜMÜŞHANE-2025

ÖZET

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kesirli türev kavramına ilişkin genel literatür taramasına yer verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmada kullanılan temel tanımlar ve teoremler sunulmuştur. Üçüncü bölümde ise önerilen yeni nümerik yöntem detaylı olarak tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu çözünen madde taşıma problemi (UKMİBÇMTP), uyumlu kesirli q -şekillendirilebilir homotopi analiz dönüşüm metodu (UK q -ŞHADM) kullanılarak sayısal olarak çözülmüş ve bu yöntemle elde edilen çözümlerin etkinliği ile güvenilirliğini ortaya koymak amacıyla çeşitli sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, elde edilen sayısal çözümler ile mevcut analitik çözümler karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu analiz edilmiştir. Son bölümde ise, önerilen yöntemin doğrusal olmayan uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde basit, güçlü ve etkili bir araç olarak kullanılabileceği vurgulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İki boyutlu çözünen madde taşıma problemi, Uyumlu kesirli q -şekillendirilebilir homotopi analiz dönüşüm metodu, Uyumlu kesirli şekillendirilebilir integral dönüşümü

SUMMARY

This thesis consists of five main sections. In the first section, a general literature review on the concept of fractional derivative is included. In the second section, the basic definitions and theorems used in the study are presented. In the third section, the proposed new numerical method is introduced in detail. In the fourth section, the conformable fractional two-dimensional solute transport problem (CFTDSTP) is solved numerically using the conformable fractional q-formable homotopy analysis transform method (CFq-FHADM) and various numerical simulations are performed in order to reveal the effectiveness and reliability of the solutions obtained with this method. In addition, the accuracy of the method is analyzed by comparing the obtained numerical solutions with the existing analytical solutions. In the last section, it is emphasized that the proposed method can be used as a simple, powerful and effective tool in solving nonlinear compatible fractional differential equations.

Keywords: Two-dimensional solute transport problem, Conformable fractional q-formable homotopy analysis transform method, Conformable fractional formable integral transform

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLOLAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	7
3.ÜRETİLEN YÖNTEM	9
3.1.Uyumlu Kesirli q-Şekillendirilebilir Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (UKq- SHADM).....	9
4.YAPILAN ÇALIŞMALAR	13
4.1.UKKİBÇMTD için UKq-SHADM Çözümü	13
5.SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	19
KAYNAKÇA.....	21
ÖZGEÇMİŞ	27

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 4.1' de $n = 1, \hbar = -1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, t = 0.001, y = 2, \mu = 1$ olmak üzere, (33) denkleminin analitik çözümünün, UKq-ŞHADM, DDM (AAH) (Sunitha vd., 2023) ve (SFM) (Sunitha vd., 2023) çözümlerinin karşılaştırılması	18
--	----

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 1. Örnek 4.1 için $t = 0.001, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 1, e_2 = 1, h = -1, n = 1, \mu = 1$ olmak üzere (a) UKq – ŞHADM çözümü (b)Örnek 4.1denkleminin analitikçözümü © Mutlak hata $= |z_{analitik} - z_{UKq-ŞHADM}| \dots\dots\dots 16$
- Şekil 2. Örnek 4.1 için $n = 1, h = -1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 1, e_2 = 1, t = 0.1, y = 2$ olmak üzere farklı μ değerleri için UKq-ŞHADM çözümleri ile analitik analitik çözümün karşılaştırılması $\dots\dots\dots 17$



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

UKMİBÇMTP : Uyumlu kesirli mertebeden iki boyutlu çözünen madde taşıma problemi

UKq-ŞHADM : Uyumlu kesirli q-şekillendirilebilir homotopi analiz dönüşüm metodu

$T_{\mu}(f)$: f 'nin μ mertebeden uyumlu kesirli türevi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar

$\Gamma(.)$: Gamma fonksiyonu

$\mathcal{F}$: Şekillendirilebilir integral dönüşümü

${}^U\mathcal{F}_{\mu}$: Uyumlu kesirli şekillendirilebilir integral dönüşümü

$({}^U\mathcal{F}_{\mu})^{-1}$: Ters uyumlu kesirli şekillendirilebilir integral dönüşümü

H_m : Homotopi polinomu

1. GİRİŞ

Kesirli kalkülüs, 17. yüzyılın sonlarında ortaya çıkmış olup, tamsayıli mertebeye dayalı hesaplamaların bir genellemesi niteliğindedir. Bu alanın en dikkat çekici özelliği, çeşitli fiziksel ve mühendislik problemlerinde karşılaşılan bellek etkisi ve kalıtsal özelliklerin modellenmesi için son derece uygun bir araç olarak kendini kanıtlamış olmasıdır. Ayrıca klasik kalkülüs, kesirli kalkülüsün yalnızca özel bir durumu olarak değerlendirilebilir. Kesirli mertebeli türevlerin kuramsal temelleri; Liouville, Riemann, Caputo, Miller, Ross, Podlubny gibi öncü bilim insanlarının katkılarıyla oluşturulmuştur (Hilfer, 2000). Kesirli hesap teorisi günümüzde uygulamalı projelerle doğrudan ilişkilendirilmekte olup, kaos teorisi (Lin, 2007), sinyal işleme (Li, 2018), elektrodinamik (Nasrolahpour, 2013), optik (Esen vd., 2018) gibi birçok alanda başarıyla uygulanmıştır (Ayaz, 2004; Veeresha vd., 2019; Prakasha vd., 2019; Ünal ve Gökdoğan, 2017; Tariq ve Akram, 2017; Shah vd., 2020; Shah vd., 20019; Shen vd., 2021; Sherriffe vd., 2021; Merdan vd., 2019; Al-Smadi vd., 2020; Ali vd., 2018; Ali vd., 2020; Anaç vd., 2020; Anaç, 2022; Anaç ve Avit, 2022). Bu tür disiplinlerde karşılaşılan keyfi mertebeli diferansiyel denklemlerin hem analitik hem de sayısal çözümleri, günlük yaşamda karşılaşılan doğrusal olmayan problemlerin dinamiklerini ve davranışlarını anlamada kritik bir rol üstlenmektedir.

Kesirli mertebeli modeller, türevlenebilirlik anlayışımızı genişletmekte ve uzay-zaman kesirli türevleri aracılığıyla yerel olmayan etkileri ve sistem belleğini hesaba katarak daha kapsamlı modeller geliştirmeye imkân tanımaktadır. Bu tür modeller, problemi küçük parçalara ayırmaksızın, çoklu zaman ve uzay ölçeklerinde fiziksel olayları tanımlamamıza olanak sağlar. Kesirli türevlerin bu ölçekleri ne ölçüde kapsayabileceği ise, bu türevlerin karmaşık olguların ayırt edici özelliklerini temsil edebilme kabiliyetine ilişkin temel bir varsayıma dayanır. Klasik türevler yalnızca yerel bilgiyi içerdiklerinden, bir noktadaki değişimleri tanımlayabilirken; kesirli türevler, belirli bir aralık boyunca meydana gelen değişimleri de dikkate alarak daha genel bir temsil sunar. Bu nedenle, kesirli türevler; deprem titreşimleri, difüzyon süreçleri, elastik davranışlar, sinyal analizi ve kuantum mekaniği gibi pek çok fiziksel olgunun modellenmesinde uygun bir çerçeve sunar. Disiplinler arası çalışmalarda, birçok sistemin kesirli diferansiyel denklemlerle daha hassas ve esnek biçimde tanımlanabileceği gösterilmiştir. Günümüzde kesirli türevler, karmaşık yapıdaki birçok problemi çözmek amacıyla yaygın biçimde kullanılmaktadır. Örneğin, viskoelastik

malzemelerin matematiksel modellenmesi, kesirli kalkülüs aracılığıyla incelenmiştir (Meral vd., 2010). Uyumlu türev içeren kesirli Burgers tipi denklemlerin yaklaşık analitik çözümü, güç serileri yöntemi ile araştırılmıştır (Şenol vd., 2019). Zaman-kesirli eşlenik Drinfel'd–Sokolov–Wilson denklemlerinin tam hareket eden dalga çözümleri, polinom yöntemi ve tam ayırım sistemleri yardımıyla elde edilmiştir (Chen vd., 2018). Jacobi eliptik fonksiyonlarına dayanan yeni bir yöntemle, uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin katsayılı çözümleri üzerine çalışmalar yapılmıştır (Zheng B., 2014). Literatürde birçok yazar, kesirli kalkülüsü karmaşık problemlerin yapısını ve davranışını anlamaya yönelik güçlü bir araç olarak değerlendirmiştir (Metzler ve Nonnenmacher, 2002; Rida vd., 2017; Zhang vd., 2014; Yaslan, 2017; Yaslan ve Girgin, 2018, Metzler ve Khater vd., 2017; Kexue, 2011; Hilfer, 2000; Prakasha vd., 2019; Rezazadeh ve Ziabarya, 2016; Zafar vd., 2020; Ray, 2015; Sahoo vd., 2020, Sahoo ve Ray, 2016, Xie vd., 2001; Wu ve Lee, 2010; Wang vd., 2017; Wang ve Chen, 2015).

Öte yandan, son otuz yıl içerisinde, doğrusal olmayan kesirli diferansiyel sistemlerin açıklanmasına yönelik yeni yöntemlerin keşfi ile birlikte, çeşitli hesaplama algoritmalarının ve sembolik programlama yaklaşımlarının geliştirilmesi de önemli ölçüde ivme kazanmıştır. Doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri oldukça büyük öneme sahiptir; zira birçok karmaşık olgu, matematiksel olarak bu tür denklemlerle modellenmektedir. Bu doğrultuda, literatürde söz konusu denklemleri çözmeye yönelik pek çok yöntem önerilmiştir. Bunlar arasında Adomian Ayırıştırma Yöntemi (AAY) (Adomian, 1984), Homotopi Analiz Yöntemi (HAY) (Liao, 1997), Varyasyonel Yineleme Yöntemi (VYY) (He, 1999), Homotopi Pertürbasyon Yöntemi (HPY) (He, 2003) ve Doğal Dönüşüm Yöntemi (DDY) (Belgacem ve Silambarasan, 2012) öne çıkmaktadır. Kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov denklemleri ise; VIM (Molliq vd., 2009), HPTM (Kumar vd., 2014), pertürbasyon-yinelemeli algoritma, artık güç serisi yöntemi (Şenol vd., 2018) ve yeni yinelemeli Sumudu dönüşüm yöntemi (YYSDY) (Prakash vd., 2018) gibi çeşitli tekniklerle incelenmiştir. Bu çalışmanın amacı, q-HSATM ve kesirli Shehu dönüşümü ayırıştırma metodu yardımıyla kesirli Zakharov–Kuznetsov denklemlerini nümerik olarak çözmektir. 1992 yılında Liao Shijun, homotopi kavramını (diferansiyel geometri ve topolojide temel bir kavram) uygulayarak Homotopi Analiz Yöntemi'ni (HAY) geliştirmiştir (Liao, 1992; Liao, 1997). HAY, bilim ve teknolojiye karşılaşılan problemlerin yaklaşık analitik çözümlerini, doğrusallaştırma ve pertürbasyon gerektirmeksizin elde etmekte etkin bir araç olarak kullanılmıştır. Bununla birlikte,

klasik HAY yöntemi yüksek hesaplama maliyeti ve büyük bellek gereksinimi gibi sınırlamalara sahiptir. Bu dezavantajları aşmak amacıyla mevcut dönüşüm teknikleriyle birleştirilmiş varyantlara ihtiyaç duyulmuştur.

Bu kapsamda Singh vd. (2016), q-homotopi analiz metodu (q-HAM) ile Laplace dönüşümünün zarif bir birleşimi olan q-homotopi analiz dönüşüm metodunu (q-HADM) önermiştir.

q-HADM, kısa bir tanım bölgesi içerisinde hızlı şekilde kesin çözüme yakınsayan seri çözümleri kontrol edebilme ve yönlendirme imkânı sunar. Bu teknik, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için hem analitik hem de sayısal çözümlerin elde edilmesini sağlayan iki güçlü algoritmanın birleşimidir. Önerilen yaklaşım; yerel olmayan etkileri hesaba katması, doğrudan çözüm sağlaması, geniş bir yakınsama bölgesi sunması ve herhangi bir varsayım, ayrıklaştırma ya da karmaşıklık gerektirmemesi açısından oldukça avantajlıdır. Ayrıca, yarı-analitik tekniklerle birleştirilen Laplace dönüşümünün, karmaşık doğrusal olmayan fiziksel modellerin çözümünde daha az işlemci zamanı gerektirdiği vurgulanmalıdır. q-HADM yaklaşımı, çözüm yakınsamasını kontrol etmede yardımcı olan iki serbest parametre ($\hbar$ ve n) içerir. Bu özellik sayesinde, elde edilen sonuçların verimliliği yüksek tutulurken, klasik yöntemlere kıyasla zaman ve işlem yükünde belirgin azalmalar sağlanabilmektedir.

Son dönem çalışmalarda birçok araştırmacı bu yöntemi çeşitli problemler üzerinde uygulamıştır. Örneğin, Srivastava vd. (2017) keyfi mertebeli titreşim denklemi modelini incelemiş; Singh vd. (2018) adveksiyon-dağılım denkleminin çözümünde bu yöntemi kullanmış; Bulut vd. (2018) rastgele mertebeli HIV enfeksiyonu modelini analiz etmiş; Prakash vd. (2019) kesirli çok boyutlu telgraf denklemi için yaklaşık analitik çözümler elde etmiş; Kumar vd. (2018) Lienard denklemi üzerinde çalışmalar yapmış ve birçok araştırmacı doğrusal olmayan sistemlerin analitik çözümlerinde bu tekniği başarıyla kullanmıştır (Pillai, 1990; Mohyud-Din vd., 2010; Veeresha vd., 2019; Prakasha vd., 2019; Morgado ve Rebelo, 2015; Odibat ve Kumar, 2019; Veeresha ve Prakasha, 2021).

Mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi birçok alanda, mevcut problemleri açıklamak amacıyla matematiksel modellerin kurulması büyük bir önem taşımaktadır. Bu modellerde, ortaya çıkan problemleri çözebilmek için diferansiyel denklemler gereklidir. Doğadaki problemlerin modellenmesinde, tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler genellikle fiziksel olayları açıklamada yetersiz kalırken, bu eksiklikleri giderebilmek ve daha iyi bir modelleme yapmak için kesirli mertebeli

diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Son yıllarda, kesirli hesap konusu giderek daha fazla önem kazanmaktadır. Korozyon elektrokimyası, kimyasal fizik, optik ve sinyal işleme gibi birçok uygulama alanında kesirli hesap yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bununla birlikte, kesirli hesap günümüzde önemli bir konu olsa da temelleri oldukça eskidir ve 1695 yılına kadar uzanır. Leibniz, Eylül 1695'te L'Hospital'e sorduğu bir soru ile bu alandaki çalışmaların temellerini atmıştır. Ardından, 1730'da Euler, 1772'de Lagrange, 1812'de Laplace, 1819'da Lacroix, 1822'de Fourier, 1832'de Liouville, 1847'de Riemann, 1865'te Holmgren, 1867'de Grünwald, 1868'de Letnikov, 1869'da Sonin, 1884'te Laurent, 1888'de Nekrassov, 1890'da Krug ve 1917'de Weyl gibi pek çok matematikçi, kesirli hesap üzerine önemli çalışmalar yapmıştır (Kilbas vd., 2006).

Son yüzyıl içinde, kesirli hesap teorisi ve uygulamaları önemli bir gelişim göstermiştir. Riesz, 1949 yılında çok değişkenli fonksiyonlar için kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. Erdelyi ise 1964 yılında kesirli hesabı matematiksel denklemlere uygulamıştır. Higgins, 1967 yılında diferansiyel denklemleri çözmek amacıyla kesirli integral operatörlerini kullanmıştır. Aynı dönemde, Caputo, kesirli türev kavramına yeni bir boyut kazandırarak daha avantajlı bir kesirli türev tanımı getirmiştir. Bu gelişmeler doğrultusunda, reoloji alanında 1947'de Scott Blair, 1949'da Caffyn ve 1961'de Graham, elektrokimya alanında ise 1964'te Blavin, 1969'da Oldham, 1970'te Spanier ve 1972'de Grenness, kimyasal fizik alanında 1970'te Somorjai ve Bishop, genel taşıma problemleri içinse 1972'de Oldham ve Spanier önemli katkılar yapmışlardır (Oldham ve Spanier, 1974).

Kesirli hesap üzerine ilk uluslararası konferans, 1974 yılında Bertram Ross tarafından New Haven Üniversitesi'nde düzenlenmiştir. Bu konferansa birçok seçkin matematikçi katılmıştır. Konferansta kesirli hesap tüm yönleriyle ele alınmış ve özellikle genelleştirilmiş fonksiyonlar, kesirli hesap kullanılarak elde edilen eşitsizlikler ve kesirli hesapların olasılık teorisine uygulanması gibi konulara yoğunlaşmıştır. Bu konferanstan on yıl sonra, 1984 yılında İskoçya'daki Strathclyde Üniversitesi'nde kesirli hesap üzerine ikinci uluslararası konferans gerçekleştirilmiştir. Bu konferansa da birçok ünlü matematikçi katılmıştır. Konferansta, "Tam sayı olmayan mertebeli bir kesirli türev için geometrik bir yorum yapmak mümkün müdür?" sorusuna dikkat çekilmiştir (Miller ve Ross, 1993).

Japonya'da, 1980'lerde S. Owa, M. Saigo ve K. Nishimoto, kesirli hesap alanındaki gelişmelere önemli katkılar sağlamışlardır. K. Nishimoto, kesirli hesap ve bunun adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması üzerine kapsamlı bir çalışma

yayımlamıştır. Ayrıca, kesirli hesap ve uygulamalarına dair ansiklopedik bir kitap, S. Samko, O. Marichev ve A. Kilbas tarafından kaleme alınmıştır (Samko vd., 1993).

Kesirli hesap, günümüzde birçok gerçek dünya probleminin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Dünya genelindeki problemleri kesirli matematiksel yöntemlerle modelleme oranı önemli ölçüde artmıştır. Bu nedenle, pek çok araştırmacı kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, çeşitli bilim dallarında pek çok olguyu tanımlamak için kullanılmaktadır (Baleanu vd., 2009; Dehghan vd., 2010; Baleanu vd., 2018; Bekir ve Güner, 2013; Butera, S. ve Di Paola, 2014; Ding, 2016; Duan vd., 2012; El-Sayed ve Kaya, 2005; Golmankhaneh vd., 2011; Gambo vd., 2014; Güner ve Atik, 2016; Güner vd., 2015).

Kesirli türevlerin klasik türevlerden en önemli farkı, kesirli türev için tek bir tanımın bulunmamasıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının mevcut olması, problemin türüne en uygun olanını seçme imkânı sağlar. Kesirli türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Atangana-Baleanu, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi tanımları içermektedir. Bu tanımlar arasında en yaygın kullanılanlar, Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir (Kilbas vd., 2006; Atangana vd., 2015; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1998). Literatürdeki bu tanımlar, birbirleri arasında geçişler sağlasa da, fiziksel yorumları bakımından farklılıklar göstermektedir.

Son zamanlarda, Khalil ve arkadaşları kesirli türev ve kesirli integral için yeni bir tanım sunmuşlardır. Bu yeni tanımın, klasik analizde verilen klasik türev özelliklerini sağladığını ve klasik türev tanımındaki limit formunu benimsediğini göstermişlerdir. Çalışmalarında, bu yeni kesirli türev tanımı için çarpım kuralı, bölüm kuralı, zincir kuralı, kesirsel Rolle teoremi ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sunmuşlardır (Khalil vd., 2014).

Bu alanda önemli bir diğer katkı ise Abdeljawad tarafından yapılmıştır. Abdeljawad, bu yeni teoriyi geliştirerek, sol ve sağ uyumlu kesirli türev tanımlarını, $\alpha > 1$ için yüksek mertebeden kesirli integral tanımını, kesirsel Gronwall eşitsizliğini, uyumlu kesirli türevler için zincir kuralını, kısmi integrasyon formüllerini, kesirsel kuvvet seri açılımını ve Laplace dönüşümünü ortaya koymuştur (Abdeljawad, 2014).

Son yıllarda çözünen madde taşıma problemi, fizikçiler ve matematikçiler gibi çeşitli bilim adamlarından oldukça büyük ilgi görmüştür. Klasik iki boyutlu çözünen madde taşıma denklemi (KİBÇMTD) şu şekilde verilmektedir (Bullo vd., 2021; Sunitha vd., 2023):

$$\begin{aligned} & \frac{z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z) \\ & = \sigma(x, y, t), (x, y, t) \in \Omega \times T \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 1})$$

Burada σ , x , y ve t 'nin bir fonksiyonu, θ toprak nem yoğunluğu, $v = \alpha \theta^{-1}$ $\alpha \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]^T$ üzerinden su akışının ortalama delik hızı, σ birim zamanda ve birim hacimde toprakta oluşan veya kaybolan çözünen madde miktarı, ε_1 ve ε_2 sırasıyla x ve y yönlerindeki su akıları, e_1 ve e_2 x ve y yönlerindeki hidrodinamik dispersiyon katsayılarıdır.

Bu tez çalışması kapsamında (1) eşitliğindeki KİBÇMTD' i uyumlu kesirli türev kullanılarak ve $\sigma(x, y, t) = 0$ alınarak

$$\begin{aligned} & D_t^\mu z(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z) = 0, \mu \in (0, 1] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 2})$$

uyumlu kesirli KİBÇMTD (UKKİBÇMTD) hale getirilip

$$z(x, y, 0) = \exp \left(-\frac{(x-0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y-0.5)}{e_2(v, \theta)} \right) \quad (\text{Eşitlik 3})$$

başlangıç şartı ile analiz edilmiştir.

Bu tezde, son yıllarda trend olan şekillendirilebilir integral dönüşümü öncelikle uyumlu kesirli olarak tanımlanmış ve q-homotopi analiz dönüşüm metodu ile birleştirilip yeni bir hibrit metot olan uyumlu kesirli q-şekillendirilebilir homotopi analiz dönüşüm metodu (UKq-ŞHADMD) elde edilmiştir. Bu bağlamda hem literatüre yeni bir metot katılmış hem de uyumlu kesirli mertebeden çözünen madde taşıma probleminin üretilen UKq-ŞHADMD ile nümerik çözümleri elde edilmiştir. Önerilen yöntemlerin etkinliğini ve güvenilirliğini doğrulamak amacıyla çeşitli sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sayısal çözümler ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırmalar, her iki yeni yöntemin de doğrusal olmayan uyumlu kesirli problemleri çözmede basit, etkili ve güçlü araçlar olduğunu ortaya koymaktadır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılan genel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 1 (Hilfer, 2000). $g \in C_\mu, \mu \geq -1$ fonksiyonunun $a \geq 0$ mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral operatörü

$$I^\mu g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x - \tau)^{\mu-1} g(\tau) d\tau, & \mu > 0, x > 0, \\ I^0 g(x) = g(x), & \mu = 0. \end{cases} \quad (\text{Eşitlik 4})$$

formunda tanımlanmaktadır. Burada $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonunu göstermektedir.

Tanım 2 (Hilfer, 2000; Samko vd., 1993). Bir $g(x)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$D^\mu g(x) = I^{\mu-n} D^n g(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^x (x - \tau)^{n-\mu-1} g^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (\text{Eşitlik 5})$$

Burada $\mu \in (n - 1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $g \in C_{-1}^n$.

Tanım 3 (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014); Ala vd., 2014; Gözütok ve Gözütok, 2017). $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde, $\forall x > 0$ için, g nin μ mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\mu(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(x + \varepsilon x^{1-\mu}) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \mu \in (0, 1] \quad (\text{Eşitlik 6})$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Teorem 1 (Khalil vd., 2014). $\mu \in (0, 1]$ ve g, h bir $x > 0$ noktasında μ -türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O halde, uyumul kesirli türevün

$$\begin{aligned} \text{a)} & \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ için, } T_\mu(a_1 g + a_2 h) = a_1 T_\mu(g) + a_2 T_\mu(h), \\ \text{b)} & \forall \eta \in \mathbb{R} \text{ için,} \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 7})$$

$$T_\mu(x^\eta) = \eta x^{\eta-1}, \quad (\text{Eşitlik 8})$$

$$\text{c) } \forall \eta \in \mathbb{R} \text{ için } g(t) = \eta \text{ olmak üzere } T_\mu(\eta) = 0, \quad (\text{Eşitlik 9})$$

$$\text{d) } T_\mu(gh) = gT_\mu(h) + hT_\mu(g), \quad (\text{Eşitlik 10})$$

$$\text{e) } T_\mu\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{gT_\mu(h) - hT_\mu(g)}{h^2}, \quad (\text{Eşitlik 11})$$

$$\text{f) } g, \text{ diferansiyellenebilir ise } T_\mu(g)(t) = t^{1-\mu} \frac{d}{dt} g(t). \quad (\text{Eşitlik 12})$$

özellikleri vardır.

Tanım 4 (Saadeh ve Ghazal, 2021). $\mu \in (0, 1]$ olmak üzere bir $g(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonunun şekillendirilebilir integral dönüşümü

$$W = \left\{ g(t): \exists K \in [0, \infty), \varphi_1, \varphi_2 > 0, |g(t)| < K \exp\left(\frac{t}{\varphi_i}\right), \text{ if } t \in [0, \infty) \right\} \quad (\text{Eşitlik 13})$$

fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$\mathcal{F}[g(t)] = V(s, u) = s \int_0^\infty \exp(-st) g(ut) dt \quad (\text{Eşitlik 14})$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5. $\mathcal{F}[g(t)] = V(s, u)$ olsun. O halde uyumlu kesirli türevin uyumlu şekillendirilebilir dönüşümü

$${}^u\mathcal{F}_\mu = [D_t^\mu g(t)] = \left(\frac{s}{u}\right)^\mu V(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k} g^{(k)}(0) \quad (\text{Eşitlik 15})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $n - 1 < \mu \leq n$ ' dir.

3. ÜRETİLEN YÖNTEM

Bu kısımda, tezde üretilen yöntem verilmektedir.

3.1. Uyumlu Kesirli q-Şekillendirilebilir Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (UKq-ŞHADM)

$$D_t^\mu v(x, y, t) + Av(x, y, t) + Hv(x, y, t) = \omega(x, y, t), \mu \in (n-1, n], \quad (\text{Eşitlik 16})$$

uyumlu kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada A doğrusal operatörü, H doğrusal olmayan operatörü, $\omega(x, y, t)$ homojen olmayan terimi göstermektedir. D_t^μ , μ mertebeli bir uyumlu kesirli türev operatörüdür.

Şimdi, (16) denklemine uyumlu kesirli şekillendirilebilir dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\left(\frac{s}{u}\right)^\mu {}^U\mathcal{F}_\mu [v(x, y, t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k} v^{(k)}(x, y, 0) + {}^U\mathcal{F}_\mu [Av(x, y, t) + Hv(x, y, t) - \omega(x, y, t)] = 0. \quad (\text{Eşitlik 17})$$

eşitliği bulunmaktadır

(17) denklemini sadeleştirilirse,

$${}^U\mathcal{F}_\mu [v(x, y, t)] - \left(\frac{u}{s}\right)^\mu \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k} v^{(k)}(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\mu {}^U\mathcal{F}_\mu [Av(x, y, t) + Hv(x, y, t) - \omega(x, y, t)] = 0 \quad (\text{Eşitlik 18})$$

olur. Reel $\psi(x, y, t; q)$ fonksiyonu için homotopi analiz metodu (HAM) yardımıyla doğrusal olmayan operatörü

$$N[\psi(x, y, t; q)] = {}^U\mathcal{F}_\mu [\psi(x, y, t; q)] - \left(\frac{u}{s}\right)^\mu \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k} \psi^{(k)}(x, y, t; q)(0^+) + \left(\frac{u}{s}\right)^\mu \times \{ {}^U\mathcal{F}_\mu [A\psi(x, y, t; q) + H\psi(x, y, t; q) - \omega(x, y, t)] \} \quad (\text{Eşitlik 19})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, dir.

Şimdi,

$$(1 - nq) {}^U\mathcal{F}_\mu [\psi(x, y, t; q) - v_0(x, y, t)] = hqH(x, y, t)N[\psi(x, y, t; q)]. \quad (\text{Eşitlik 20})$$

şeklinde bir homotopi oluşturulmaktadır. Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve ${}^U\mathcal{F}_\mu$, uyumlu kesirli şekillendirilebilir dönüşümünü göstermektedir. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için, (20) denklemindeki sonuçlar sırasıyla sağlanır:

$$\psi(x, y, t; 0) = v_0(x, y, t), \quad \psi\left(x, y, t; \frac{1}{n}\right) = v(x, y, t). \quad (\text{Eşitlik 21})$$

Bu nedenle, q 'yu 0'dan $\frac{1}{n}$ 'ye yükselterek, $\psi(x, y, t; q)$ çözümü $v_0(x, y, t)$ 'den $v(x, y, t)$ çözümüne yakınsar. Taylor teoremini q civarında açılıp $\psi(x, y, t; q)$ 'yu genişleterek,

$$\psi(x, y, t; q) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t)q^m. \quad (\text{Eşitlik 22})$$

şeklinde bulunur.

Burada,

$$v_m(x, y, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x, y, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (\text{Eşitlik 23})$$

' dir. (22) eşitliğinde, $q = \frac{1}{n}$ 'de uygun n ve h için $v_0(x, y, t)$ 'ye yakınsamaktadır. Böylece, orijinal doğrusal olmayan denkleminin çözümlerinden biri

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 24})$$

olur.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m –kez türevi alınıp, $m!$ ile bölünür ve $q = 0$ için

$${}^U\mathcal{F}_\mu [v_m(\vec{v}_{m-1}) - \varpi_m v_{m-1}(x, y, t)] = hH(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1}) \quad (\text{Eşitlik 25})$$

olarak bulunur.

Burada vektörler

$$\vec{v}_m = \{v_0(x, y, t), v_1(x, y, t), \dots, v_m(x, y, t)\}. \quad (\text{Eşitlik 26})$$

ile tanımlanmaktadır. (25) denkleminde ters uyumlu kesirli şekillendirilebilir dönüşümü uygulanırsa

$$v_m(x, y, t) = \varpi_m v_{m-1}(x, y, t) + h \left({}^U\mathcal{F}_\mu \right)^{-1} [H(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 27})$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1}) &= {}^U\mathcal{F}_\mu [v_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{\varpi_m}{n}\right) \left(\frac{u}{s}\right)^\mu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k} v^{(k)}(x, y, t; q)(0^+)\right) \\ &+ {}^U\mathcal{F}_\mu [\omega(x, y, t)] + \left(\frac{u}{s}\right)^\mu {}^U\mathcal{F}_\mu [Av_{m-1}(x, y, t) + H_{m-1}] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 28})$$

‘ dir. Ayrıca

$$\varpi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (\text{Eşitlik 29})$$

‘ dir. Burada, H_m bir homotopi polinomu ve

$$H_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x, y, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \text{ ve } \psi(x, y, t; q) = \psi_0 + q\psi_1 + q^2\psi_2 + \dots. \quad (\text{Eşitlik 30})$$

şeklinde tanımlıdır.

(27) ve (28) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} v_m(x, y, t) &= (\varpi_m + h)v_{m-1}(x, y, t) - \left(1 - \frac{\varpi_m}{n}\right) \\ &\times \left({}^U\mathcal{F}_\mu \right)^{-1} \left(\left(\frac{u}{s}\right)^\mu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k} v^{(k)}(x, y, t; q)(0^+)\right) + {}^U\mathcal{F}_\mu [\omega(x, y, t)] \right) \\ &+ h \left({}^U\mathcal{F}_\mu \right)^{-1} \left[\left(\frac{u}{s}\right)^\mu {}^U\mathcal{F}_\mu (Av_{m-1}(x, y, t) + H_{m-1}(x, y, t)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 31})$$

olur. UKq-ŞHADM ile (16) denkleminin nümerik çözümü

$$v(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t)$$

(Eşitlik 32)

olarak bulnur.



4. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu kısımda, uyumlu kesirli KİBÇMTD (UKKİBÇMTD)' nin UKq-ŞHADM ile analizi yapılacaktır.

Örnek 4.1. (2) eşitliği ile verilen

$$\begin{aligned} D_t^\mu z(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z) = 0, \mu \in (0, 1] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 33})$$

uyumlu kesirli KİBÇMTD (UKKİBÇMTD)' ni ele alalım.

Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$z(x, y, 0) = \exp \left(-\frac{(x - 0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y - 0.5)}{e_2(v, \theta)} \right) \quad (\text{Eşitlik 34})$$

'dır.

4.1. UKKİBÇMTD için UKq-ŞHADM Çözümü

Şimdi, (33) denklemine uyumlu kesirli şekillendirilebilir dönüşümü uygulanırsa ve (34) başlangıç koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{s}{u} {}^u\mathcal{F}_\mu [z(x, y, t)] - \frac{s}{u} \left(\exp \left(-\frac{(x - 0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y - 0.5)}{e_2(v, \theta)} \right) \right) \\ + {}^u\mathcal{F}_\mu \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z) \right] \quad (\text{Eşitlik 35}) \\ = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

(35) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
{}^U\mathcal{F}_\mu [z(x, y, t)] &= \left(\exp \left(-\frac{(x-0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y-0.5)}{e_2(v, \theta)} \right) \right) \\
&- \frac{u}{s} {}^U\mathcal{F}_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z) \right]
\end{aligned} \tag{Eşitlik 36}$$

olur. (36) eşitliği için doğrusal olmayan operatör,

$$\begin{aligned}
N[\psi(x, y, t; q)] &= {}^U\mathcal{F}_\mu [\psi(x, y, t; q)] \\
&- \left(\exp \left(-\frac{(x-0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y-0.5)}{e_2(v, \theta)} \right) \right) \\
&- \frac{u}{s} {}^U\mathcal{F}_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial \psi(x, y, t; q)}{\partial x} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial \psi(x, y, t; q)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 \psi(x, y, t; q)) \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 \psi(x, y, t; q)) \right]
\end{aligned} \tag{Eşitlik 37}$$

ile tanımlanmaktadır. Önerilen algoritma kullanılarak, m . dereceden deformasyon denklemi

$${}^U\mathcal{F}_\mu [z_m(x, y, t) - \varpi_m z_{m-1}(x, y, t)] = h \mathfrak{R}_m[\vec{z}_{m-1}] \tag{Eşitlik 38}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Burada,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_m[\vec{z}_{m-1}] &= {}^U\mathcal{F}_\mu [z_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{\varpi_m}{n} \right) \left(\exp \left(-\frac{(x-0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y-0.5)}{e_2(v, \theta)} \right) \right) \\
&- \frac{u}{s} {}^U\mathcal{F}_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z_{m-1}(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z_{m-1}(x, y, t)}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z_{m-1}(x, y, t)) - \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z_{m-1}(x, y, t)) \right]
\end{aligned} \tag{Eşitlik 39}$$

‘ dir. (38) eşitliğine ters uyumlu kesirli şekillendirilebilir dönüşümü uygulandığında,

$$z_m(x, y, t) = \varpi_m z_{m-1}(x, y, t) + h \left({}^U\mathcal{F}_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_m[\vec{z}_{m-1}]] \tag{Eşitlik 40}$$

elde edilmektedir. Başlangıç şartının kullanılmasıyla,

$$z_0(x, y, t) = \exp\left(-\frac{(x-0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y-0.5)}{e_2(v, \theta)}\right) \quad (\text{Eşitlik 41})$$

olarak bulunur.

$z_1(x, y, t)$ ifadesini elde etmek için, (39)-(40) eşitliklerinde $m = 1$ koyarak ,

$$z_1(x, y, t) = \varpi_1 z_0(x, y, t) + h \left({}^U\mathcal{F}_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_1[\vec{z}_0]] \quad (\text{Eşitlik 42})$$

eşitliği elde edilir.

(39) denklemini kullanılarak $m = 1$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1[\vec{z}_0] = & {}^U\mathcal{F}_\mu [\vec{z}_0(x, y, t)] - \left(1 - \frac{0}{n}\right) \left(\exp\left(-\frac{(x-0.5)}{e_1(v, \theta)} - \frac{(y-0.5)}{e_2(v, \theta)}\right) \right) \\ & - \frac{u}{s} {}^U\mathcal{F}_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e_1(v, \theta) \frac{\partial z_0(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e_2(v, \theta) \frac{\partial z_0(x, y, t)}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_1 z_0(x, y, t)) - \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_2 z_0(x, y, t)) \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 43})$$

olur. (43) eşitliği, (42) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} z_1(x, y, t) = & -\frac{ht^\mu}{\mu} \exp\left(\frac{-e_2x + 0.5e_2 - e_1y + 0.5e_1}{e_1e_2}\right) \\ & \times \frac{(e_1 + e_2 + e_1\varepsilon_2 + e_2\varepsilon_1)}{e_1e_2}. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 44})$$

elde edilmektedir. Benzer şekilde, $z_2(x, y, t)$, ifadesini elde etmek için, (39)-(40) eşitliklerinde $m = 2$ koyarak

$$\begin{aligned} z_2(x, y, t) = & -\frac{(n+h)ht^\mu}{t^\mu} \left[\exp\left(\frac{-e_2x + 0.5e_2 - e_1y + 0.5e_1}{e_1e_2}\right) \right. \\ & \times \frac{(e_1 + e_2 + e_1\varepsilon_2 + e_2\varepsilon_1)}{e_1e_2} \left. \right] + \frac{\hbar^2 t^{2\mu}}{2\mu^2} \exp\left(\frac{-e_2x + 0.5e_2 - e_1y + 0.5e_1}{e_1e_2}\right) \\ & \times \left(\frac{e_1 + e_2 + e_1\varepsilon_2 + e_2\varepsilon_1}{e_1e_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 45})$$

olur. Bu şekilde, kalan iterasyonlar bulunabilir. Böylece, (33) denkleminin UKq-ŞHADM çözümü

$$z(x, y, t) = z_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} z_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 46})$$

olarak bulunur. (46) eşitliğinde $\mu = 1, n = 1, h = -1$ konulursa, bulunan nümerik çözüm $K \rightarrow \infty$ iken

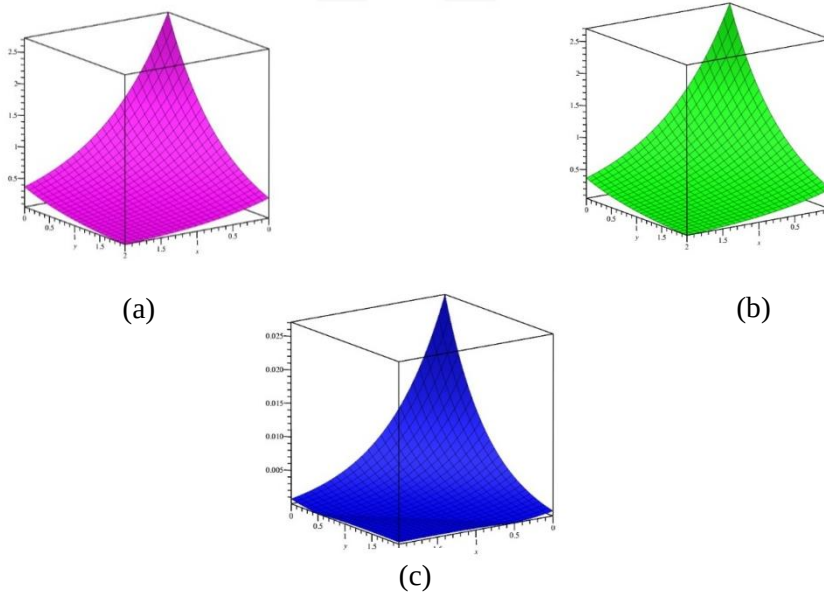
$$\sum_{m=1}^K z_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 47})$$

ifadesi, UKKİBÇMTD' nin aşağıdaki analitik çözümüne yakınsamaktadır.

$$z(x, y, t) = \frac{1}{4t+1} \exp\left(-\frac{(x-0.5-\varepsilon_1 t)}{e_1(v,\theta)(4t+1)} - \frac{(y-0.5-\varepsilon_2 t)}{e_2(v,\theta)(4t+1)}\right). \quad (\text{Eşitlik 48})$$

Örnekte ele alınan $z(x, y, t)$ değişkeninin davranışını daha iyi analiz edebilmek amacıyla Şekil 1'de üç boyutlu olarak verilmiştir. Şekil 1 incelendiğinde, elde edilen çözümlerin yüksek doğruluk düzeyine sahip olduğu açıkça gözlemlenmektedir.

Şekil 1' de $\mu = 1, n = 1, h = -1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 1, e_2 = 1, t = 0.001$ sayısal değerleri kullanılmıştır.

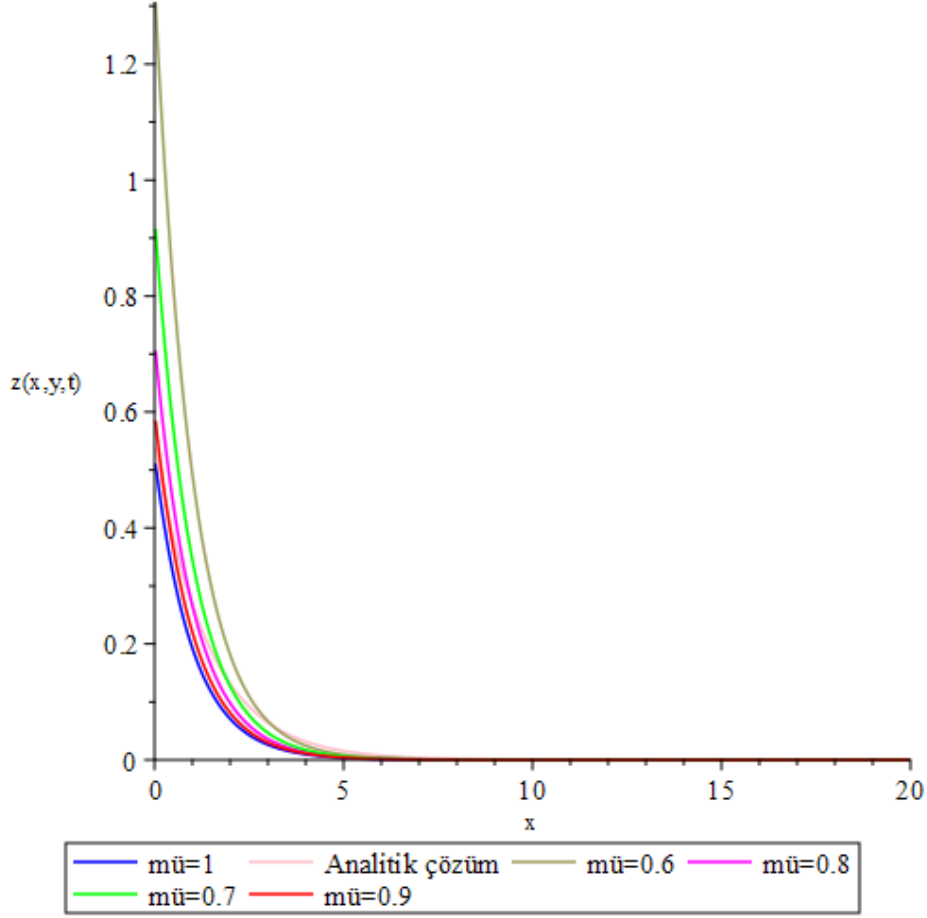


Şekil 1. Örnek 4.1 için $t = 0.001, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 1, e_2 = 1, h = -1,$

$n = 1, \mu = 1$ olmak üzere (a) UKq-ŞHADMD çözümü (b) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü (c) Mutlak hata $= |z_{analitik} - z_{UKq-ŞHADMD}|$

Şekil 2, (33) denkleminin analitik çözümünün ve UKq-ŞHADMD ile elde edilen nümerik $z(x, y, t)$ çözümünün farklı μ değerleri için iki boyutlu grafiklerini $n = 1, h =$

$-1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 1, e_2 = 1, t = 0.1, y = 2$ sayısal değerleri alınarak göstermektedir.



Şekil 2. Örnek 4.1 için $n = 1, \hbar = -1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 1, e_2 = 1, t = 0.1, y = 2$ olmak üzere farklı μ değerleri için UKq-ŞHADM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 1' de, $n = 1, \hbar = -1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, t = 0.001, y = 2, \mu = 1$ sayısal değerlerinde farklı x değerleri için (33) denkleminin UKq-ŞHADM nümerik çözümleri, diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) (Sunitha vd., 2023) ve sonlu fark metodu (SFM) (Sunitha vd., 2023) nümerik çözümlerinin (33) denkleminin analitik çözümü arasındaki mutlak hatalar gösterilmektedir.

Tablo 1.Örnek 4.1’ de $n = 1, \hbar = -1, \varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 0.8, e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, t = 0.001, y = 2, \mu = 1$ olmak üzere, (33) denkleminin analitik çözümünün, UKq-ŞHADM, DDM (Sunitha vd., 2023) ve (SFM) (Sunitha vd., 2023) çözümlerinin karşılaştırılması

x	$ Z_{analitik} - Z_{UKq-ŞHADM} $	$ Z_{analitik} - Z_{DDM} $	$ Z_{analitik} - Z_{SFM} $
1.00	1.20×10^{-10}	1.20×10^{-10}	1.20×10^{-10}
1.25	1.17×10^{-11}	1.17×10^{-11}	1.17×10^{-11}
1.50	1.11×10^{-12}	1.11×10^{-12}	1.11×10^{-12}
1.75	1.04×10^{-13}	1.04×10^{-13}	1.04×10^{-13}
2.00	9.63×10^{-15}	9.63×10^{-15}	9.63×10^{-15}

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, klasik türev tanımının bir genellemesi olan uyumlu kesirli türev yaklaşımıyla modellenmiş iki boyutlu çözünen madde taşıma probleminin çözümüne yönelik, yeni bir nümerik yöntem önerilmiş ve uygulanmıştır. Uyumlu kesirli q -şekillendirilebilir homotopi analiz dönüşüm metodu (UKq-ŞHADM), literatürde var olan homotopi analiz yöntemi ile şekillendirilebilir dönüşümün güçlü yönlerini birleştiren hibrit bir tekniktir. Tezin amacı, bu yeni yöntemi hem teorik hem uygulamalı olarak ortaya koymak ve etkinliğini çeşitli örnek problemler aracılığıyla doğrulamaktır.

Model olarak kullanılan çözünen madde taşıma problemi (UKİBÇMTD), doğada karşılaşılan difüzyon, taşınım ve kimyasal reaksiyon süreçlerinin daha gerçekçi biçimde modellenmesini sağlamaktadır. Uyumlu kesirli türevlerin kullanılması, sistemin hafıza etkisini ve zaman gecikmelerini de içeren daha esnek ve güçlü bir matematiksel temsil sunar.

Örnek 4.1’ de, uyumlu kesirli çözünen madde taşıma denkleminin hem analitik çözümü hem de UKq-ŞHADM yöntemi ile elde edilen sayısal çözümü üzerinden detaylı olarak incelenmiştir. Bu örnek özelinde yapılan analizlerde, hem şekil hem de tablo yorumları ile yöntemin başarısı ortaya konmuştur.

Şekil 1’de UKq-ŞHADM ile elde edilen çözüm, analitik çözüm ve bu iki çözüm arasındaki mutlak hata üç boyutlu grafiklerle görselleştirilmiştir. Grafikler incelendiğinde, önerilen yöntemin yüksek hassasiyetle analitik çözüme yakınsadığı görülmektedir. Şekil 2’de farklı μ değerleri için elde edilen UKq-ŞHADM çözümleri, analitik çözümle karşılaştırılmış; kesirli merteye arttıkça çözümün davranışındaki değişim başarıyla gözlemlenmiştir. Bu durum, yöntemin kesirli mertebelere duyarlılığını göstermesi açısından önemlidir.

Tablo 1’de analitik çözüm ile UKq-ŞHADM, diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) ve sonlu fark metodu (SFM) ile elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır. Farklı μ değerleri için hesaplanan mutlak hatalar incelendiğinde, UKq-ŞHADM’nin diğer yöntemlere kıyasla daha düşük hata değerlerine sahip olduğu ve analitik çözüme daha yakın sonuçlar verdiği açıkça görülmektedir. Bu tablo, önerilen yöntemin doğruluğunu nicel olarak da desteklemektedir.

Bu çalışma çerçevesinde yapılan sayısal simülasyonlar ve elde edilen sonuçlar ışığında aşağıdaki genel değerlendirmeler yapılabilir:

- **Yöntem Doğruluğu ve Yakınsama Performansı:**

UKq-ŞHADM yöntemi, serilere dayalı yapısı sayesinde çözümde yüksek doğruluk sağlamak ve hızlı yakınsama özelliği göstermektedir. Özellikle düşük iterasyon sayılarında bile, analitik çözümlere oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir.

- **Sayısal Kararlılık ve Hata Analizi:**

Yöntemin mutlak hata analizleri, çok düşük hata düzeylerine ulaşılabildiğini göstermiştir. Grafiksel analizlerle desteklenen bu sonuçlar, yöntemin hem kararlı hem de güvenilir olduğunu göstermektedir.

- **Yöntemin Esnekliği ve Uygulanabilirliği:**

Önerilen yöntem, farklı kesirli mertebe değerleri için uygulanabilirliğini korumakta ve sistemin fiziksel davranışındaki değişiklikleri doğru bir şekilde yansıtabilmektedir. Bu da yöntemin farklı fiziksel problemlere uyarlanabilirliğini artırmaktadır.

- **Yöntemin Literatürdeki Yöntemlerle Karşılaştırılması:**

UKq-ŞHADM, literatürde yaygın olarak kullanılan DDM ve SFM gibi yöntemlere kıyasla daha düşük hata oranları sunmuş; hem analitik çözüme yakın sonuçlar hem de hesaplama açısından daha avantajlı bir yaklaşım sağlamıştır.

- **Uygulama Alanları ve Gelecek Çalışmalar:**

Bu yöntem yalnızca çözünen madde taşıma problemiyle sınırlı kalmayıp, biyomedikal mühendislik, çevre mühendisliği, jeofizik ve malzeme bilimi gibi birçok alanda karşılaşılan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Özellikle sistem belleği içeren problemlerde bu yöntem önemli avantajlar sunmaktadır.

Bu tezde geliştirilen UKq-ŞHADM, hem teorik olarak sağlam temellere dayanmakta hem de uygulamalı olarak doğrulanmış güçlü bir nümerik yöntemdir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde ortaya koyduğu yüksek doğruluk, düşük hata oranı, hesaplama kolaylığı ve esneklik gibi özelliklerle literatüre değerli bir katkı sunmaktadır. Bu yöntem, gelecekte daha karmaşık sistemlerin modellenmesi ve çözümünde kullanılabilecek etkili bir araç olma potansiyeline sahiptir.

KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Ala, V., Demirbilek, U. ve Mamedov, K. R. (2014). Exact solutions of a conformable fractional equation via Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method. *In 9th International Eurasian Conference On* 264, 106.
- Ali, A., Seadawy, A. R. ve Baleanu, D. (2020). Computational solutions of conformable space-time derivatives dynamical wave equations: Analytical mathematical techniques. *Results in Physics*, 19, 103419.
- Ali, A., Shah, K. ve Khan, R. A. (2018). Numerical treatment for traveling wave solutions of fractional Whitham-Broer-Kaup equations. *Alexandria engineering journal*, 57(3), 1991-1998.
- Al-Smadi, M., Arqub, O. A. ve Hadid, S. (2020). An attractive analytical technique for coupled system of fractional partial differential equations in shallow water waves with conformable derivative. *Communications in Theoretical Physics*, 72(8), 085001.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2020). Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method. *SN Applied Sciences*, 2(6), 1-11.
- Anaç, H., (2022). A New Method For Solving The Conformable Time-Fractional Jaulent-Miodek Equations. The International IFS and Contemporary Mathematics Conference, 16-19 Haziran 2022, Mersin, s. 18-19
- Anaç, H., Avit, Ö. (2022). The New Numerical Solutions for Conformable Fractional Kuramoto-Sivashinsky by Using Two Effective Techniques. International Symposium on Applied Mathematics and Engineering (ISAME-2022), 21-23 Ocak 2022, İstanbul.
- Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13(1).
- Ayaz, F. (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657.
- Baleanu, D., Deftlerli, O. ve Agrawal, O. P. (2009). A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15(4), 583-597.

- Baleanu, D., Jajarmi, A., Bonyah, E. ve Hajipour, M. (2018). New aspects of poor nutrition in the life cycle within the fractional calculus. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-14.
- Bekir, A. ve Güner, Ö. (2013). Exact solutions of nonlinear fractional differential equations by (G'/G)-expansion method. *Chinese Physics B*, 22(11), 110202.
- Butera, S. ve Di Paola, M. (2014). Fractional differential equations solved by using Mellin transform. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(7), 2220-2227.
- Chen, S., Liu, Y., Wei, L., & Guan, B. (2018). Exact solutions to fractional Drinfel'd–Sokolov–Wilson equations. *Chinese journal of physics*, 56(2), 708-720.
- Dehghan, M., Manafian, J. ve Saadatmandi, A. (2010). Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 26(2), 448-479.
- Ding, H. (2016). General Padé approximation method for time–space fractional diffusion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 299, 221-228.
- Duan, J. S., Rach, R., Baleanu, D., ve Wazwaz, A. M. (2012). A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations. *Communications in Fractional Calculus*, 3(2), 73-99.
- El-Sayed, S. M. ve Kaya, D. (2005). Exact and numerical traveling wave solutions of Whitham–Broer–Kaup equations. *Applied mathematics and computation*, 167(2), 1339-1349.
- Gambo, Y. Y., Jarad, F., Baleanu, D. ve Abdeljawad, T. (2014). On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2014(1), 1-12.
- Golmankhaneh, A. K., Golmankhaneh, A. K. ve Baleanu, D. (2011). On nonlinear fractional Klein–Gordon equation. *Signal Processing*, 91(3), 446-451.
- Gözütok, N. Y. ve Gözütok, U. (2017). Multivariable conformable fractional calculus. *arXiv preprint arXiv:1701.00616*.
- Guner, O. ve Atik, H. (2016). Soliton solution of fractional-order nonlinear differential equations based on the exp-function method. *Optik*, 127(20), 10076-10083.
- Güner, O., Bekir, A. ve Cevikel, A. C. (2015). A variety of exact solutions for the time fractional Cahn–Allen equation. *The European Physical Journal Plus*, 130(7), 1-13.

- He, J. H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4), 699-708.
- He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and computation*, 135(1), 73-79.
- Hilfer, R. (Ed.). (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific. 472.
- Kexue, L. ve Jigen, P. (2011). Fractional abstract Cauchy problems. *Integral Equations and Operator Theory*, 70(3), 333-361.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.
- Khater, M. M., Seadawy, A. R. ve Lu, D. (2017). Elliptic and solitary wave solutions for Bogoyavlenskii equations system, couple Boiti-Leon-Pempinelli equations system and Time-fractional Cahn-Allen equation. *Results in physics*, 7, 2325-2333.
- Mainardi, F. (2022). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2022, (2), 583.
- Merdan, M., Anaç, H., Bekiryazıcı, Z. ve Kesemen, T. (2019). Solving of some random partial differential equations by using differential transformation method and laplace-padé method. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(1), 108-118.
- Metzler, R. ve Nonnenmacher, T. F. (2002). Space-and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker–Planck equations, and physical motivation. *Chemical Physics*, 284(1-2), 67-90.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, 1993, 376.
- Mohyud-Din, S. T., Yıldırım, A. ve Demirli, G. (2010). Traveling wave solutions of Whitham–Broer–Kaup equations by homotopy perturbation method. *Journal of King Saud University-Science*, 22(3), 173-176.
- Morgado, M. L. ve Rebelo, M. (2015). Numerical approximation of distributed order reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 275, 216-227.
- Odibat, Z. ve Kumar, S. (2019). A robust computational algorithm of homotopy asymptotic method for solving systems of fractional differential equations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 14(8), 081004.

- Oldham, K. ve Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974,(3),234.
- Pillai, R. N. (1990). On Mittag-Leffler functions and related distributions. *Annals of the Institute of statistical Mathematics*, 42(1), 157-161.
- Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, Elsevier, 198, 340.
- Rezazadeh, H. ve Ziabarya, B. P. (2016). Sub-equation method for the conformable fractional generalized kuramoto sivashinsky equation. *Computational Research Progress in Applied Science ve Engineering*, 2(3), 106-109.
- Saha Ray, S. (2015). A novel method for travelling wave solutions of fractional Whitham–Broer–Kaup, fractional modified Boussinesq and fractional approximate long wave equations in shallow water. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(7), 1352-1368.
- Sahoo, S., Saha Ray, S., Abdou, M. A. M., Inc, M., ve Chu, Y. M. (2020). New soliton solutions of fractional Jaulent-Miodek system with symmetry analysis. *Symmetry*, 12(6), 1001.
- Sahoo, S. ve Ray, S. S. (2016). Solitary wave solutions for time fractional third order modified KdV equation using two reliable techniques (G'/G)-expansion method and improved (G'/G)-expansion method. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 448, 265-282.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives* (1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and breach science publishers, Yverdon.
- Shah, R., Khan, H., Baleanu, D., Kumam, P., ve Arif, M. (2020). A semi-analytical method to solve family of Kuramoto–Sivashinsky equations. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 402-411.
- Shah, R., Khan, H. ve Baleanu, D. (2019). Fractional Whitham–Broer–Kaup equations within modified analytical approaches. *Axioms*, 8(4), 125.
- Shen, G., Manafian, J., Zia, S. M., Huy, D. T. N. ve Le, T. H. (2021). The New Solitary Solutions to the Time-Fractional Coupled Jaulent–Miodek Equation. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2021.
- Sherriffe, D., Behera, D. ve Nagarani, P. (2021). Analytical new soliton wave solutions of the nonlinear conformable time-fractional coupled Whitham–Broer–Kaup equations. *Modern Physics Letters B*, 35(32), 2150492.

- Sunitha, M., Gamaoun, F., Abdulrahman, A., Malagi, N. S., Singh, S., Gowda, R. J., & Gowda, R. P. (2023). An efficient analytical approach with novel integral transform to study the two-dimensional solute transport problem. *Ain Shams Engineering Journal*, 14(3), 101878.
- Tariq, H. ve Akram, G. (2017). New approach for exact solutions of time fractional Cahn–Allen equation and time fractional Phi-4 equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473, 352-362.
- Ünal, E. ve Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik*, 128, 264-273.
- Veerasha, P., Prakasha, D. G. ve Baskonus, H. M. (2019). Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method. *Mathematical Sciences*, 13(2), 115-128.
- Veerasha, P. ve Prakasha, D. G. (2021). Solution for fractional Kuramoto–Sivashinsky equation using novel computational technique. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 7(2), 1-22.
- Wang, L. ve Chen, X. (2015). Approximate analytical solutions of time fractional Whitham–Broer–Kaup equations by a residual power series method. *Entropy*, 17(9), 6519-6533.
- Wang, Y., Zhang, Y. F., Liu, Z. J., ve Iqbal, M. (2017). A fractional Whitham–Broer–Kaup equation and its possible application to tsunami prevention. *Thermal Science*, 21(4), 1847-1855.
- Wu, G. C. ve Lee, E. W. M. (2010). Fractional variational iteration method and its application. *Physics Letters A*, 374(25), 2506-2509.
- Xie, F., Yan, Z. ve Zhang, H. (2001). Explicit and exact traveling wave solutions of Whitham–Broer–Kaup shallow water equations. *Physics Letters A*, 285(1-2), 76-80.
- Yaslan, H. Ç. (2017). New analytic solutions of the conformable space–time fractional Kawahara equation. *Optik*, 140, 123-126.
- Yaslan, H. ve Girgin, A. (2018). Sitem for the conformable space-time fractional coupled kd equations. *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 3(3), 223-233.
- Zafar, A., Bekir, A., Khalid, B. ve Rezazadeh, H. (2020). Abundant solitary wave solutions for the fractional coupled Jaulent–Miodek equations arising in applied physics. *International Journal of Modern Physics B*, 34(29), 2050279.

- Zhang, X., Zhao, J., Liu, J. ve Tang, B. (2014). Homotopy perturbation method for two dimensional time-fractional wave equation. *Applied Mathematical Modelling*, 38(23), 5545-5552.
- Zheng, B. (2014). A new fractional Jacobi elliptic equation method for solving fractional partial differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2014(1), 228.



ÖZGEÇMİŞ

Gulnar Pashayeva liseden mezun olup, Azerbaycan Beynelhalk Üniversitesinin Matamatik bölümünü kazandı. 2005 yılında üniversiteyi bitirdi. 2011 yılında 45 sayılı okulda öğretmenlik yaptı. 2017 yılında Mecburi Köçkün okulunda Okul Müdür Yardımcılığı görevi yaptı.

2023 yılında Türkiye Cumhuriyetinde Gümüşhane Üniversitesi Matamatik mühendisliği tezli yüksek lisans bölümünü kazandı.

Evli ve iki çocuğu bulunmaktadır. Çocukları da Türkiye Cumhuriyetin de üniversite eğitimini sürdürmektedirler.

