

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN EPİDEMİK VE UYUMLU KESİRLİ
MERTEBEDEN SİGARA İÇME MODELLERİNİN YENİ BİR NÜMERİK
METOTLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS

Selda Gökçen KİBAR

KASIM-2025
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN EPİDEMİK VE UYUMLU KESİRLİ
MERTEBEDEN SİGARA İÇME MODELLERİNİN YENİ BİR NÜMERİK
METOTLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**THE NUMERICAL SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL
EPIDEMIC AND CONFORMABLE FRACTIONAL SMOKING MODELS
WITH A NEW NUMERICAL METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Selda Gökçen KİBAR

**KASIM -2025
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN EPİDEMİK VE UYUMLU KESİRLİ
MERTEBEDEN SİGARA İÇME MODELLERİNİN YENİ BİR NÜMERİK
METOTLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**THE NUMERICAL SOLUTIONS OF CONFORMABLE FRACTIONAL
EPIDEMIC AND CONFORMABLE FRACTIONAL SMOKING MODELS
WITH A NEW NUMERICAL METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Selda Gökçen KİBAR

Danışman: Doç. Dr. Halil ANAÇ

**KASIM-2025
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Uyumlu Kesirli Mertebeden Epidemik Ve Uyumlu Kesirli Mertebeden Sigara İçme Modellerinin Yeni Bir Nümerik Metotla Sayısal Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

07/11/2025

.....
Selda Gökçen KİBAR

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans tez çalışmam süresince bana yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen, kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Halil ANAÇ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca verdikleri emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün değerli hocalarına teşekkürlerimi borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca hep yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli eşim Abdullah KİBAR'a ve yaşam kaynağım olan kızım Elif Sare KİBAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Selda Gökçen KİBAR
GÜMÜŞHANE-2025

ÖZET

Bu tez, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türev, uyumlu kesirli türev ve bunların sigara içme ve epidemik modellere uygulamalar hakkında genel bilgiler sunmaktadır. İkinci bölümde gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde üretilen yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise uyumlu kesirli sigara içme modeli (UKSİM) ve uyumlu kesirli epidemik modeli (UKEM) için uyumlu q -Kushare homotopi analiz dönüşüm metodu (U q -KHADM) olarak adlandırılan yeni bir yöntem kullanılarak sayısal çözümler araştırılmıştır. Bu yöntemin etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için iki boyutlu grafikler elde edilmiştir. Son bölümde ise yeni önerilen yöntemin doğrusal olmayan uyumlu kesirli problemleri çözmek için basit, güçlü ve etkili olduğu vurgulanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli epidemik modeli, Uyumlu kesirli Kushare integral dönüşümü, Uyumlu kesirli sigara içme modeli, Uyumlu q -Kushare homotopi analiz dönüşüm metodu

SUMMARY

This thesis consists of five main chapters. The first chapter provides general background information on fractional calculus, conformable fractional derivatives, and their applications to smoking and epidemic models. The second chapter presents the necessary definitions and theorems. The third chapter describes the methodology developed in this study. In the fourth chapter, numerical solutions for the conformable fractional smoking model (CFSM) and the conformable fractional epidemic model (CFEM) are investigated using a newly proposed technique, designated as the conformable q -Kushare homotopy analysis transform method (Cq-KHATM). Two-dimensional graphical representations are obtained to validate the efficacy and reliability of the proposed method. Finally, the fifth chapter emphasizes that the newly introduced method is simple, robust, and highly effective for solving nonlinear conformable fractional problems.

Keywords: Conformable fractional epidemic model, Conformable fractional Kushare integral transform, Conformable fractional smoking model, conformable q -Kushare homotopy analysis transform method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
3. ÜRETİLEN METOD	9
3.1. Uyumlu q-Kushare Homotopi Analizi Dönüşüm Metodu	9
4. UYUMLU KESİRLİ SİĞARA İÇME MODELİ ve UYUMLU ve UYUMLU KESİRLİ EPİDEMİK MODELİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	12
4.1. Uyumlu Kesirli Sigara İçme Modeli	12
4.2. Uyumlu Kesirli Epidemik Model.....	20
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	33
KAYNAKÇA.....	35
ÖZGEÇMİŞ	38

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. [Veeresha vd., 2019] (46)-(50) eşitliklerinde kullanılan parametrelerin tanımı ve belirli değerleri.	12
Tablo 2. [Yadav vd., 2021] (99)-(104) eşitliklerinde kullanılan parametrelerin tanımı ve belirli değerleri.	22



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $A\tau$ için 2B grafik.....	18
Şekil 2. $C\tau$ için 2B grafik.....	18
Şekil 3. $G\tau$ için 2B grafik.....	19
Şekil 4. $R\tau$ için 2B grafik.....	19
Şekil 5. $Z\tau$ için 2B grafik.....	20
Şekil 6. $E\tau$ için 2B grafik.....	30
Şekil 7. $F\tau$ için 2B grafik.....	30
Şekil 8. $R\tau$ için 2B grafik.....	31
Şekil 9. $S\tau$ için 2B grafik.....	31
Şekil 10. $O\tau$ için 2B grafik.....	32
Şekil 11. $G\tau$ için 2B grafik.....	32

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$({}^c K_\mu)^{-1}$	: Caputo anlamda ters uyumlu kesirli Kushare dönüşümü
${}^c K_\mu$	: Caputo anlamda uyumlu kesirli Kushare dönüşümü
E_α	: Mittag-Leffler fonksiyonu
H_m	: Homotopi polinomu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$T_\alpha(f)$	: f 'nin α mertebeden uyumlu kesirli türevi
UKEM	: Uyumlu kesirli epidemik modeli
UKKİD	: Uyumlu kesirli Kushare integral dönüşümü
UKSİM	: Uyumlu kesirli sigara içme modeli

1. GİRİŞ

Mühendislik, fizik, kimya ve biyoloji gibi disiplinlerde karşılaşılan pek çok karmaşık problem, matematiksel modelleme yoluyla analiz edilmekte ve çözüme kavuşturulmaya çalışılmaktadır. Bu süreçte, sistemin dinamik yapısını ve fiziksel davranışını en doğru şekilde yansıtmak amacıyla diferansiyel denklemler yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak geleneksel olarak tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerle kurulan modellerin, özellikle hafıza etkisi, uzun menzilli bağımlılık ve anormal difüzyon gibi doğada sıkça rastlanan bazı olguları yeterince karakterize edememesi, alternatif yaklaşım arayışlarını gündeme getirmiştir. Bu bağlamda, sistem dinamiklerini daha gerçekçi ve kapsamlı bir biçimde betimleyebilme potansiyeline sahip olan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, son yıllarda artan bir ilgiyle çalışılmaktadır. Kesirli hesap, korozyon elektrokimyası, kimyasal fizik, optik, sinyal işleme ve biyomedikal mühendisliği gibi çok çeşitli uygulama alanlarında etkin sonuçlar vermiş ve klasik modellerin ötesine geçilmesine olanak tanımıştır. Kesirli hesabın kökenleri, 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yönelttiği "türevin yarı mertebesi tanımlanabilir mi?" sorusuna kadar uzanmakla birlikte, bu alanın kuramsal temelleri 18. ve 19. yüzyıllarda Euler, Lagrange, Laplace, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov ve Weyl gibi öncü matematikçilerin katkılarıyla şekillenmiştir (Kilbas vd., 2006; Hilfer, 2000; Mainardi, 2010; Odibat ve Kumar, 2019). Günümüzde ise, hem teorik hem de uygulamalı araştırmalarda hızla gelişen bu alan, karmaşık sistemlerin modellenmesinde vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir (Kilbas vd., 2006; Atangana vd., 2015; Kexue ve Jigen, 2011; Anaç vd., 2020; Merdan vd., 2019; Ortugueira, 2011).

Geçtiğimiz yüzyılda, kesirli hesabın hem kuramsal temelleri hem de uygulama alanları açısından dikkate değer ilerlemeler kaydedilmiştir. Riesz (1949), çok değişkenli fonksiyonlar için kesirli integrasyon teorisini geliştirmiş; Erdélyi (1964), kesirli hesabı matematiksel denklemlerin çözümünde etkin bir araç olarak kullanmıştır. Higgins (1967), diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik kesirli integral operatörlerini sistematik biçimde uygulayarak bu alana önemli bir katkı sunmuştur. Aynı dönemde Caputo, klasik tanımlara kıyasla başlangıç koşullarının fiziksel yorumlanabilirliği açısından daha avantajlı bir kesirli türev tanımı önermiş ve bu yaklaşım, özellikle mühendislik ve fizikte yaygın kabul görmüştür (Oldham ve Spanier, 1974).

Bu kuramsal gelişmeler paralelinde, kesirli hesap çeşitli uygulama alanlarında da etkin biçimde kullanılmaya başlanmıştır. Reoloji alanında Scott Blair (1947), Caffyn (1949) ve Graham (1961); elektrokimyada Blavin (1964), Oldham (1969), Spainer (1970) ve Grenness (1972); kimyasal fizikte Somorjai ve Bishop (1970); genel taşıma olaylarının modellenmesinde ise Oldham ile Spainer (1972) gibi araştırmacılar, kesirli operatörlerin bu disiplinlerdeki modelleme gücünü ortaya koymuşlardır (Oldham ve Spanier, 1974).

Kesirli hesabın uluslararası alanda tanınması ve disiplinlerarası etkileşiminin güçlenmesi yönünde önemli bir adım, Bertram Ross tarafından 1974 yılında New Haven Üniversitesi'nde düzenlenen ilk uluslararası konferansla atılmıştır. Bu toplantıya dünyanın önde gelen matematikçileri katılmış; kesirli hesabın genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi, elde edilen analitik eşitsizlikler ve olasılık teorisine uygulanabilirliği gibi temel konular kapsamlı biçimde tartışılmıştır. Bu girişimin ardından, 1984 yılında İskoçya'daki Strathclyde Üniversitesi'nde ikinci uluslararası konferans gerçekleştirilmiştir. Söz konusu toplantıda, "Tam sayı olmayan mertebeli bir kesirli türevin geometrik yorumu mümkün müdür?" sorusu, alanın kuramsal sınırlarını sorgulayan temel bir araştırma ağırlığı olarak öne çıkarılmıştır (Miller ve Ross, 1993).

1980'li yıllarda Japonya'da S. Owa, M. Saigo ve özellikle K. Nishimoto'nun çalışmaları, kesirli hesabın adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması bağlamında dikkat çekici gelişmelere zemin hazırlamıştır. Nishimoto'nun bu alandaki kapsamlı araştırmaları, kesirli analizin çözüm yöntemlerine dair literatüre önemli katkılarda bulunmuştur. Bu gelişmelerin birikimiyle, S. Samko, A. Kilbas ve O. Marichev tarafından 1993 yılında yayımlanan Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications başlıklı ansiklopedik nitelikteki eser, kesirli hesabın modern kuramının temel başvuru kaynağı haline gelmiştir (Samko vd., 1993).

Günümüzde kesirli hesap, doğada ve mühendislik uygulamalarında karşılaşılan pek çok gerçek dünya probleminin modellenmesinde etkin bir araç olarak kullanılmaktadır. Özellikle son yıllarda, karmaşık sistemlerin hafıza etkisi, uzun menzilli bağımlılık ve anormal dinamik davranış gibi özelliklerini daha gerçekçi biçimde yansıtabilmesi nedeniyle, dünya çapında kesirli matematiksel modelleme çalışmalarında önemli bir artış gözlemlenmiştir. Bu gelişmeler doğrultusunda, araştırmacılar özellikle kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (fractional partial differential equations) üzerine yoğunlaşmış; söz konusu denklemler, fizik, biyoloji, kimya, finans ve mühendislik gibi çok çeşitli bilim dallarında doğal ve yapay olguların modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır (Baleanu vd., 2009;

Baleanu vd., 2018).

Kesirli türevin klasik (tamsayı mertebeli) türevden temel farklarından biri, tek ve evrensel bir tanımının bulunmamasıdır. Kesirli analiz literatüründe, problem yapısına ve fiziksel bağlama göre farklı avantajlar sunan birden fazla türev tanımı mevcuttur. Bu tanımlar arasında Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi isimler yer almakta olup, bunlar arasında en yaygın olarak kullanılanlar Riemann–Liouville, Grünwald–Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir (Kilbas vd., 2006; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1997; Podlubny, 1999). Bu tanımlar matematiksel olarak birbirlerine dönüştürülebilir olmakla birlikte, başlangıç koşullarının yorumlanabilirliği, sınır değer problemlerine uygunluk ve fiziksel anlam taşıma gibi yönlerden önemli farklılıklar sergilemektedir.

Son yıllarda kesirli analiz alanına yeni bir perspektif kazandıran önemli bir gelişme, Khalil ve arkadaşları (2014) tarafından önerilen “uyumlu kesirli türev” (conformable fractional derivative) tanımı ile ortaya çıkmıştır. Bu yaklaşım, klasik türevin temel özelliklerini -örneğin limit tabanlı bir yapı, çarpım ve bölüm kuralları, zincir kuralı gibi- koruyarak kesirli türev kavramını yeniden tanımlamayı amaçlamaktadır. Yazarlar, bu yeni tanım çerçevesinde kesirli Rolle teoremi ve kesirli ortalama değer teoremi gibi temel analiz sonuçlarını da geliştirmişlerdir. Khalil ve arkadaşlarının çalışması, kesirli hesabın klasik analizle daha tutarlı bir şekilde bütünleşmesine olanak tanıyan yeni bir araştırma aksını başlatmıştır (Khalil vd., 2014).

Bu yeni çerçeveye yapılan katkılar hızla artmış; özellikle Abdeljawad (2015), uyumlu kesirli türev teorisini genişleterek sol ve sağ uyumlu türev tanımlarını, $\alpha > 1$ durumu için yüksek mertebeden kesirli integral kavramını, kesirli Gronwall eşitsizliğini, zincir kuralını, kısmi integrasyon formüllerini, kesirli kuvvet serisi açılımlarını ve Laplace dönüşümü gibi temel analitik araçları bu yeni yapıya uyarlamıştır. Bu gelişmeler, hem kuramsal hem de uygulamalı düzeyde kesirli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerine yeni boyutlar kazandırmış ve alandaki araştırma dinamiklerini önemli ölçüde etkilemiştir (Abdeljawad, 2015).

Bu tezin temel amacı, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik mevcut analitik ve nümerik yöntemlere alternatif olabilecek yeni bir hibrit yaklaşım geliştirerek, gerçek dünya dinamiklerinin daha gerçekçi biçimde modellenmesini sağlamaktır. Bu çerçevede öncelikle Kushare integral dönüşümü, literatürde ilk kez uyumlu kesirli mertebe çerçevesinde tanımlanmıştır. Ayrıca, halk sağlığı ve epidemiyoloji alanlarında yaygın olarak kullanılan sigara içme modeli ile epidemik yayılım modeli, klasik formlarından hareketle uyumlu kesirli türev operatörü kullanılarak yeniden formüle

edilmiştir. Bu modellerin çözümü amacıyla, bu çalışmada uyumlu q -Kushare homotopi analiz dönüşüm metodu adı altında yeni bir hibrit çözüm tekniği önerilmiştir. Söz konusu yöntem, homotopi analiz yönteminin yakınsaklık kontrolü, q -seri teorisinin esnek yapısı ve Kushare integral dönüşümünün çözüm kolaylığı avantajlarını bir araya getirerek, doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin etkin bir şekilde çözülmesine imkân tanımaktadır. Geliştirilen yaklaşım, söz konusu modellerin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde başarıyla uygulanmış; elde edilen sonuçlar, iki ve üç boyutlu grafiksel sunumlar aracılığıyla yorumlanarak, model dinamiklerinin kesirli merteye parametresine olan duyarlılığı detaylı biçimde analiz edilmiştir. Bu çalışma, uyumlu kesirli analiz ile integral dönüşüm tekniklerinin sentezlenmesi açısından literatüre orijinal bir katkı sunmaktadır.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 2.1 (Khalil vd., 2017): $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O halde, $\forall x > 0$ için, h fonksiyonunun μ mertebeden uyumlu kesirli türevi:

$${}^C D_t^\mu h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(x + \varepsilon x^{1-\mu}) - h(x)}{\varepsilon}, \quad \mu \in (0, 1] \quad (\text{Eşitlik 1})$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1 (Khalil vd., 2014): $\mu \in (0, 1], \kappa \in \mathbb{R}$ ve h_1, h_2 bir $x > 0$ noktasında μ -türevlenebilir olsun. Öyleyse,

a) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için, ${}^C D_t^\mu (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 {}^C D_t^\mu (h_1) + \lambda_2 {}^C D_t^\mu (h_2)$, (Eşitlik 2)

b) $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ için, ${}^C D_t^\mu (x^\sigma) = \sigma x^{\sigma-1}$, (Eşitlik 3)

c) $h(t) = \kappa$ için ${}^C D_t^\mu (\kappa) = 0$, (Eşitlik 4)

d) ${}^C D_t^\mu (h_1 h_2) = h_1 {}^C D_t^\mu (h_2) + h_2 {}^C D_t^\mu (h_1)$, (Eşitlik 5)

e) ${}^C D_t^\mu \left(\frac{h_1}{h_2} \right) = \frac{h_2 {}^C D_t^\mu (h_1) - h_1 {}^C D_t^\mu (h_2)}{h_2^2}$, (Eşitlik 6)

f) h diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise ${}^C D_t^\mu h(t) = t^{1-\mu} \frac{d}{dt} h(t)$. (Eşitlik 7)

Tanım 2.2 (Khalil vd., 2014): $h, x > 0$ için x noktasında n -defa türevlenebilir olsun. h fonksiyonunun μ mertebeli uyumlu kesirli türevi şu şekilde tanımlanır;

$${}^C D_t^\mu h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h^{([\mu]-1)}(x + \varepsilon x^{([\mu]-\mu)}) - h^{([\mu]-1)}(x)}{\varepsilon}, \quad \mu \in (n, n + 1]. \quad (\text{Eşitlik 8})$$

Burada, $[\mu]$ gösterimi μ 'ye eşit veya daha büyük en küçük tamsayıdır.

Teorem 2.2 (Khalil vd., 2014): $h, x > 0$ için x noktasında n –defa türevlenebilir olsun. O halde, $\forall x > 0, \mu \in (n, n + 1]$ için

$${}^C D_t^\mu h(x) = x^{[\mu]-\mu} h^{[\mu]}(x) \quad (\text{Eşitlik 9})$$

‘ tir.

Teorem 2.3 (Abdeljawad, 2015): $h : [\mu, \infty) \rightarrow \infty$ iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $1 < \mu + \gamma \leq 2$ ve $0 < \mu, \gamma \leq 1$ olsun. O halde

$$D_\mu^\mu D_\gamma^\mu (h)(t) = D_{\mu+\gamma}^\mu (h)(t) + (1 - \gamma)(t - \mu)^{-\gamma} D_\mu^\mu h(t) \quad (\text{Eşitlik 10})$$

olarak yazılabilir.

Lemma 2.1 (Khalil vd., 2014): Bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıda verilmiştir:

$$\text{a)} \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad \text{ için } e^{\frac{1}{\mu} t^\mu} (t^p) = p t^{p-\mu}, \quad (\text{Eşitlik 11})$$

$$\text{b)} \quad {}^C D_t^\mu h(x)(1) = 0, \quad (\text{Eşitlik 12})$$

$$\text{c)} \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{ için } {}^C D_t^\mu (e^{cx}) = c x^{1-\mu} e^{cx}, \quad (\text{Eşitlik 13})$$

$$\text{d)} \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{ için } {}^C D_t^\mu (\sin bx) = b x^{1-\mu} \cos bx, \quad (\text{Eşitlik 14})$$

$$\text{e)} \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{ için } {}^C D_t^\mu (\cos bx) = -b x^{1-\mu} \sin bx, \quad (\text{Eşitlik 15})$$

$$\text{f)} \quad {}^C D_t^\mu \left(\frac{1}{\mu} t^\mu \right) = 1, \quad (\text{Eşitlik 16})$$

$$\text{g)} \quad {}^C D_t^\mu \left(\sin \frac{1}{\mu} t^\mu \right) = \cos \frac{1}{\mu} t^\mu, \quad (\text{Eşitlik 17})$$

$$\text{h)} \quad {}^C D_t^\mu \left(\cos \frac{1}{\mu} t^\mu \right) = -\sin \frac{1}{\mu} t^\mu, \quad (\text{Eşitlik 18})$$

$$\text{i)} \quad {}^C D_t^\mu \left(e^{\frac{1}{\mu} t^\mu} \right) = e^{\frac{1}{\mu} t^\mu}, \quad (\text{Eşitlik 19})$$

Teorem 2.4 (Ünal ve Gökdoğan, 2017): h , bir t_0 komşuluğunda bazı $0 < \mu \leq 1$ ler için, sonsuz μ -mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. h fonksiyonunun kesirli kuvvet serisi açılımı,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{({}^C D_t^{\mu} h)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\mu}}{\mu^k k!}, t_0 < t < t_0 + R^{\frac{1}{\mu}}, R > 0 \quad (\text{Eşitlik 20})$$

şeklinde olur. Burada $({}^C D_t^{\mu} h)^{(k)}(t_0)$ ifadesi kesirli türevin k kez uygulanması anlamına gelir.

Tanım 2.3 (Kushare vd., 2021). $A = \left\{ h(t): \exists M \in \mathbb{R}, \tau_1, \tau_2 > 0, |h(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir h fonksiyonu için Kushare integral dönüşümü, $h(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$K[h(t)](w) = S(w) = w \int_0^{\infty} h(t) e^{-tw^{\alpha}} dt, t \geq 0, \tau_1 \leq w \leq \tau_2 \quad (\text{Eşitlik 21})$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.4. $\mu \in (0, 1]$ ve $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda h fonksiyonunun μ -yüncü için uyumlu kesirli Kushare integral dönüşümü (UKKİD)

$${}^C K_{\mu} [h(t)](w) = S_{\mu}(w) = w \int_0^{\infty} h(t) e^{-\frac{t^{\mu}}{\mu} w^{\alpha}} t^{\mu-1} d_{\mu} t \quad (\text{Eşitlik 22})$$

ile tanımlanmaktadır.

Lemma 2.2. (Mahgoub, 2016; Elzaki, 2011, Shrinath ve Bhadane, 2019; Udhayasankar vd., 2025). Kushare dönüşümünde $\mu = 1, \mu = 2$ ve $\mu = -1$ için sırasıyla Mahgoub, Pourreza ve Elzaki dönüşümlerinin tanımlarını vermektedir. Bu tanımlar sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\text{i. } \mu = 1 \text{ için } {}^C K_{\mu} [h(t)](w) = S_{\mu}(w) = w \int_0^{\infty} h(t) e^{-tw} dt \quad (\text{Eşitlik 23})$$

ii.

$$\text{iii. } \mu = 2 \text{ için } {}^C K_{\mu} [h(t)](w) = S_{\mu}(w) = w \int_0^{\infty} h(t) e^{-tw^2} d_2 t \quad (\text{Eşitlik 24})$$

$$\text{iv. } \mu = -1 \text{ için } {}^C K_{\mu} [h(t)](w) = S_{\mu}(w) = w \int_0^{\infty} h(t) e^{-tw^{-1}} d_{-1} t \quad (\text{Eşitlik 25})$$

Tanım 2.5. $\mu \in (0, 1]$ ve $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonunun μ -mertebeden uyumlu kesirli Kushare dönüşümü $S_\mu(w)$ olsun. $h(t)$ fonksiyonuna S_μ nün ters uyumlu Kushare dönüşümü denir ve $({}^c K_\mu)^{-1}\{S_\mu(w)\} = h(t)$ ile gösterilmektedir.

Teorem 2.5. $\mu \in (0, 1]$ ve $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda h fonksiyonunun μ mertebeden uyumlu kesirli türevinin uyumlu kesirli Kushare integral dönüşümü

$${}^c K_\mu [{}^c D_t^\mu(h(t))](w) = w^\alpha {}^c K_\mu [h(t)](w) - wh(0). \quad (\text{Eşitlik 26})$$

Teorem 2.6. $w > 0$ için, ${}^c K_\mu [h(t)](w) = S_\mu(w)$ olsun. Öyleyse,

1. ϑ bir sabit ise,

$${}^c K_\mu [\vartheta] = \frac{\vartheta}{w^{\alpha-1}}, \quad (\text{Eşitlik 27})$$

‘ dir.

2. ϑ bir sabit ve $h(t) = t^\vartheta$ ise, o zaman;

$${}^c K_\mu [t^\vartheta] = \mu^\mu \frac{\Gamma(1+\frac{\vartheta}{\mu})}{\vartheta^{\alpha(\frac{\vartheta}{\mu}+1)-1}} \quad (\text{Eşitlik 28})$$

‘ dir.

3. ÜRETİLEN METOD

Bu kısımda, çalışmada kullanılan yöntemler verilmiştir.

3.1. Uyumlu q-Kushare Homotopi Analizi Dönüşüm Metodu

Uq-KHADM' nin temel prensibini sunmak için,

$${}^C D_t^\mu \varrho(x, t) + A\varrho(x, t) + H\varrho(x, t) = \varpi(x, t), t > 0, n - 1 < \mu \leq n, \quad (\text{Eşitlik 29})$$

uyumlu kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi türevli denklemini incelenmektedir. Burada A doğrusal operatörü, H doğrusal olmayan operatörü, $\varpi(x, t)$ homojen olmayan terimi göstermektedir ve ${}^C D_t^\mu$ μ mertebeden uyumlu bir kesirli türev operatörüdür. Şimdi, (29) denklemine uyumlu kesirli Kushare integral dönüşümü uygulanarak ve başlangıç koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned} w^\alpha {}^C K_\mu [\varrho(x, t)] - w\varrho(x, 0) + {}^C K_\mu [A\varrho(x, t)] \\ + {}^C K_\mu [H\varrho(x, t)] = {}^C K_\mu [\varpi(x, t)] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 30})$$

eşitliği bulunmaktadır.

(30) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} {}^C K_\mu [\varrho(x, t)] - w^{1-\alpha} \varrho(x, 0) + \frac{1}{w^\alpha} {}^C K_\mu [A\varrho(x, t) + H\varrho(x, t) - \varpi(x, t)] \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 31})$$

olur. Reel $\eta(x, t; q)$ fonksiyonu için homotopi analiz metodu (HAM) yardımıyla doğrusal olmayan operatörü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} N[\eta(x, t; q)] = {}^C K_\mu [\eta(x, t; q)] - w^{1-\alpha} \eta(x, t; q)(0^+) + \frac{1}{w^\alpha} {}^C K_\mu [A\eta(x, t; q) + \\ H\eta(x, t; q) - \varpi(x, t)]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 32})$$

Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, dir.

Aşağıdaki gibi bir homotopi kuralım.

$$(1 - nq) {}^c K_\mu [\eta(x, t; q) - \varrho_0(x, t)] = hqH^*(x, t)N[\eta(x, t; q)]. \quad (\text{Eşitlik 33})$$

Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve ${}^c K_\mu$ uyumlu Kushare dönüşümünü ifade etmektedir. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için, (33) denklemindeki sonuçlar sırasıyla sağlanır:

$$\eta(x, t; 0) = \varrho_0(x, t), \quad \eta\left(x, t; \frac{1}{n}\right) = \varrho(x, t). \quad (\text{Eşitlik 34})$$

Bu nedenle, q 'yu 0'dan $\frac{1}{n}$ 'ye yükselterek $\eta(x, t; q)$ çözümü $\varrho_0(x, t)$ 'den $\varrho(x, t)$ çözümüne yakınsar. Taylor teoremini q civarında açılıp $\eta(x, t; q)$ 'yi genişletilirse,

$$\eta(x, t; q) = \varrho_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m(x, t)q^m \quad (\text{Eşitlik 35})$$

ifadesi bulunur. Burada,

$$\varrho_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \eta(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (\text{Eşitlik 36})$$

'dır. (35) denklemi, $q = \frac{1}{n}$ 'de uygun n ve h için $\varrho_0(x, t)$ 'ye yakınsar. Böylece orijinal denklemin çözümlerinden biri

$$\varrho(x, t) = \varrho_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m. \quad (\text{Eşitlik 37})$$

formunda bulunur.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m –kez türevi alınırsa ve $m!$ 'ye bölersek, sonra $q = 0$ için

$${}^c K_\mu [\varrho_m(x, t) - k_m \varrho_{m-1}(x, t)] = hH^*(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{\varrho}_{m-1}) \quad (\text{Eşitlik 38})$$

olur.

Burada vektörler

$$\vec{\varrho}_m = \{\varrho_0(x, t), \varrho_1(x, t), \dots, \varrho_m(x, t)\}. \quad (\text{Eşitlik 39})$$

ile tanımlıdır. (38) denkleminin ters uyumlu Koshare integral dönüşümü uyguladığımızda;

$$\varrho_m(x, t) = k_m \varrho_{m-1}(x, t) + h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} [H^*(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{\varrho}_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 40})$$

ifadesi bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{\varrho}_{m-1}) = \\ {}^c K_\mu [\varrho_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) w^{1-\alpha} \varrho_0(x, t) + \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu (A \varrho_{m-1}(x, t) + \\ H_{m-1}^*(x, t) - \varpi(x, t)) \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 41})$$

ve

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (\text{Eşitlik 42})$$

‘ dir. Burada, H_m^* homotopi polinomudur ve

$$\begin{aligned} H_{m-1} &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \varphi(x, t; q)}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad \text{ve} \\ \varphi(x, t; q) &= \varphi_0 + q \varphi_1 + q^2 \varphi_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 43})$$

şeklinde gösterilmektedir. (40) ve (41) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \varrho_m(x, t) &= (k_m + h) \varrho_{m-1}(x, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) w^{1-\alpha} \varrho_0(x, t) \\ &+ h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu (A \varrho_{m-1}(x, t) + H_{m-1}^*(x, t) - \varpi(x, t)) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 44})$$

olarak elde edilir. Uq-KHADM kullanılarak denkelemin seri çözümü

$$\varrho(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m(x, t). \quad (\text{Eşitlik 45})$$

şeklinde bulunur.

4. UYUMLU KESİRLİ SİGARA İÇME MODELİ ve UYUMLU KESİRLİ EPİDEMİK MODELİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu kısımda uyumlu kesirli sigara içme modeli ve uyumlu kesirli epidemik modelin sayısal çözümleri verilmektedir.

4.1. Uyumlu Kesirli Sigara İçme Modeli

Örnek 4.1 (Veeresha vd., 2019): Aşağıdaki uyumlu kesirli mertebeden sigara içme modelini inceleyelim.

$${}^cD_t^\mu A(\tau) = \lambda - \beta A(\tau)G(\tau) - \eta A(\tau), \quad (\text{Eşitlik 46})$$

$${}^cD_t^\mu C(\tau) = \beta A(\tau)G(\tau) - \alpha_1 C(\tau) - \eta C(\tau), \quad (\text{Eşitlik 47})$$

$${}^cD_t^\mu G(\tau) = \alpha_1 C(\tau) + \alpha_2 G(\tau)R(\tau) - (\eta + \gamma)G(\tau), \quad (\text{Eşitlik 48})$$

$${}^cD_t^\mu R(\tau) = -\alpha_2 G(\tau)R(\tau) - \eta R(\tau) + \gamma(1 - \delta)G(\tau), \quad (\text{Eşitlik 49})$$

$${}^cD_t^\mu Z(\tau) = \delta\gamma G(\tau) - \eta Z(\tau). \quad (\text{Eşitlik 50})$$

Burada A potansiyel sigara içici, C sigara içici, G ara sıra sigara içen, R sigarayı kalıcı olarak bırakan, Z sigarayı geçici olarak bırakan kişileri göstermektedir.

(46)–(50) eşitliklerinde kullanılan parametreler Tablo 1’de belirtilmiştir.

Tablo 1. [Veeresha vd., 2019] (46)-(50) eşitliklerinde kullanılan parametrelerin tanımı ve belirli değerleri.

λ	Potansiyel sigara içicisi grubuna katılım oranı,	1
β	Sigara içenler (C) ile potansiyel içiciler (A) arasındaki etkili temas oranı,	0.14
η	Doğal ölüm oranı,	0.05
α_1	Ara sıra sigara içenlerin düzenli içici hâline gelme oranı,	0.002

Tablo 1. (Devamı)

α_2	Sigara içenler ile geçici olarak bırakıp tekrar başlayanlar arasındaki temas oranı,	0.0025
γ	Sigarayı bırakma oranı	0.8
δ	Kalıcı olarak sigarayı bırakanların oranı	0.1

Bu modelin başlangıç şartları,

$$A(0) = \varepsilon_1, C(0) = \varepsilon_2, G(0) = \varepsilon_3, R(0) = \varepsilon_4, Z(0) = \varepsilon_5 \quad (\text{Eşitlik 51})$$

‘ tir.

Şimdi, (46)-(50) denklemlerine UKKİD uygulayarak ve (51) başlangıç şartlarını kullanarak,

$$w^\alpha {}^c K_\mu [A(\tau)] - wA(0) = {}^c K_\mu [\lambda - \beta A(\tau)G(\tau) - \eta A(\tau)], \quad (\text{Eşitlik 52})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [C(\tau)] - wC(0) = {}^c K_\mu [\beta A(\tau)G(\tau) - \alpha_1 C(\tau) - \eta C(\tau)], \quad (\text{Eşitlik 53})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [G(\tau)] - wG(0) = {}^c K_\mu [\alpha_1 C(\tau) + \alpha_2 G(\tau)R(\tau) - (\eta + \gamma)G(\tau)] \quad (\text{Eşitlik 54})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [R(\tau)] - wR(0) = {}^c K_\mu [-\alpha_2 G(\tau)R(\tau) - \eta R(\tau) + \gamma(1 - \delta)G(\tau)] \quad (\text{Eşitlik 55})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [Z(\tau)] - wZ(0) = {}^c K_\mu [\delta \gamma G(\tau) - \eta Z(\tau)] \quad (\text{Eşitlik 56})$$

elde edilir.

(46)-(50) denklemlerini tekrar düzenlersek,

$${}^c K_\mu [A(\tau)] - w^{1-\alpha} A(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\lambda - \beta A(\tau)G(\tau) - \eta A(\tau)] = 0, \quad (\text{Eşitlik 57})$$

$${}^c K_\mu [C(\tau)] - w^{1-\alpha} C(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\beta A(\tau)G(\tau) - \alpha_1 C(\tau) - \eta C(\tau)] = 0, \quad (\text{Eşitlik 58})$$

$$\begin{aligned} {}^c K_\mu [G(\tau)] - w^{1-\alpha} G(0) \\ - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\alpha_1 C(\tau) + \alpha_2 G(\tau)R(\tau) - (\eta + \gamma)G(\tau)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 59})$$

$$\begin{aligned} {}^c K_\mu [R(\tau)] - w^{1-\alpha} R(0) \\ - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [-\alpha_2 G(\tau)R(\tau) - \eta R(\tau) + \gamma(1 - \delta)G(\tau)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 60})$$

$${}^c K_\mu [Z(\tau)] - w^{1-\alpha} Z(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\delta\gamma G(\tau) - \eta Z(\tau)] = 0 \quad (\text{Eşitlik 61})$$

olur. (57)-(61) denklemlerini kullanarak doğrusal olmayan operatörleri,

$$\begin{aligned} & \Phi^1[\Lambda_1(\tau; q), \Lambda_2(\tau; q), \Lambda_3(\tau; q), \Lambda_4(\tau; q), \Lambda_5(\tau; q)] \\ &= {}^c K_\mu [\Lambda_1(\tau; q)] - w^{1-\alpha} \Lambda_1(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\lambda - \beta \Lambda_1(\tau; q) \Lambda_3(\tau; q) \\ & - \eta \Lambda_1(\tau; q)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 62})$$

$$\begin{aligned} & \Phi^2[\Lambda_1(\tau; q), \Lambda_2(\tau; q), \Lambda_3(\tau; q), \Lambda_4(\tau; q), \Lambda_5(\tau; q)] \\ &= {}^{CF} D_\tau^\mu [\Lambda_2(\tau; q)] - w^{1-\alpha} \Lambda_2(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\beta \Lambda_1(\tau; q) \Lambda_3(\tau; q) \\ & - \alpha_1 \Lambda_2(\tau; q) - \eta \Lambda_2(\tau; q)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 63})$$

$$\begin{aligned} & \Phi^3[\Lambda_1(\tau; q), \Lambda_2(\tau; q), \Lambda_3(\tau; q), \Lambda_4(\tau; q), \Lambda_5(\tau; q)] \\ &= {}^{CF} D_\tau^\mu [\Lambda_3(\tau; q)] - w^{1-\alpha} \Lambda_3(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\alpha_1 \Lambda_2(\tau; q) \\ & + \alpha_2 \Lambda_3(\tau; q) \Lambda_4(\tau; q) - (\eta + \gamma) \Lambda_3(\tau; q)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 64})$$

$$\begin{aligned} & \Phi^4[\Lambda_1(\tau; q), \Lambda_2(\tau; q), \Lambda_3(\tau; q), \Lambda_4(\tau; q), \Lambda_5(\tau; q)] \\ &= {}^{CF} D_\tau^\mu [\Lambda_4(\tau; q)] - w^{1-\alpha} \Lambda_4(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [-\alpha_2 \Lambda_3(\tau; q) \Lambda_4(\tau; q) \\ & - \eta \Lambda_4(\tau; q) + \gamma(1 - \delta) \Lambda_3(\tau; q)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 65})$$

$$\begin{aligned} & \Phi^5[\Lambda_1(\tau; q), \Lambda_2(\tau; q), \Lambda_3(\tau; q), \Lambda_4(\tau; q), \Lambda_5(\tau; q)] \\ &= {}^{CF} D_\tau^\mu [\Lambda_5(\tau; q)] - w^{1-\alpha} \Lambda_5(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\delta\gamma \Lambda_3(\tau; q) \\ & - \eta \Lambda_5(\tau; q)] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 66})$$

şeklinde tanımlanır. Önerilen algoritma uygulanarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$${}^c K_\mu [A_m(\tau) - k_m A_{m-1}(\tau)] = h \mathfrak{R}_{1,m}(A_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 67})$$

$${}^c K_\mu [C_m(\tau) - k_m C_{m-1}(\tau)] = h \mathfrak{R}_{2,m}(C_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 68})$$

$${}^c K_\mu [G_m(\tau) - k_m G_{m-1}(\tau)] = h \mathfrak{R}_{3,m}(G_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 69})$$

$${}^c K_\mu [R_m(\tau) - k_m R_{m-1}(\tau)] = h \mathfrak{R}_{4,m}(R_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 70})$$

$${}^c K_\mu [Z_m(\tau) - k_m Z_{m-1}(\tau)] = h \mathfrak{R}_{5,m}(Z_{m-1}). \quad (\text{Eşitlik 71})$$

Burada,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{1,m}(A_{m-1}) &= {}^c K_\mu [A_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) A_0(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu \left[\lambda - \beta \sum_{j=0}^{m-1} A_j(\tau) G_{m-1-j}(\tau) - \eta A_{m-1}(\tau) \right],\end{aligned}\tag{Eşitlik 72}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{2,m}(C_{m-1}) &= {}^c K_\mu [C_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) C_0(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu \left[\beta \sum_{j=0}^{m-1} A_j(\tau) G_{m-1-j}(\tau) - \alpha_1 C_{m-1}(\tau) - \eta C_{m-1}(\tau) \right],\end{aligned}\tag{Eşitlik 73}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{3,m}(G_{m-1}) &= {}^c K_\mu [G_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) G_0(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu \left[\alpha_1 C_{m-1}(\tau) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{m-1} G_j(\tau) R_{m-1-j}(\tau) - (\eta + \gamma) G_{m-1}(\tau) \right],\end{aligned}\tag{Eşitlik 74}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{4,m}(R_{m-1}) &= {}^c K_\mu [R_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) R_0(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu \left[-\alpha_2 \sum_{j=0}^{m-1} G_j(\tau) R_{m-1-j}(\tau) - \eta R_{m-1}(\tau) + \gamma(1 - \delta) \alpha G_{m-1}(\tau) \right],\end{aligned}\tag{Eşitlik 75}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{5,m}(Z_{m-1}) &= {}^c K_\mu [Z_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) Z_0(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\delta \gamma G_{m-1}(\tau) - \eta Z_{m-1}(\tau)]\end{aligned}\tag{Eşitlik 76}$$

olur. (72)-(76) denklemlerine ters UKKİD uygulandığında,

$$A_m(\tau) = k_m A_{m-1}(\tau) + h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_{1,m}(A_{m-1})],\tag{Eşitlik 77}$$

$$C_m(\tau) = k_m C_{m-1}(\tau) + h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_{2,m}(C_{m-1})],\tag{Eşitlik 78}$$

$$G_m(\tau) = k_m G_{m-1}(\tau) + h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_{3,m}(G_{m-1})],\tag{Eşitlik 79}$$

$$R_m(\tau) = k_m R_{m-1}(\tau) + h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_{4,m}(R_{m-1})],\tag{Eşitlik 80}$$

$$Z_m(\tau) = k_m Z_{m-1}(\tau) + h \left({}^c K_\mu \right)^{-1} [\mathfrak{R}_{5,m}(Z_{m-1})]\tag{Eşitlik 81}$$

olur. Başlangıç koşullarının kullanılması ile,

$$A_0(\tau) = 40, C_0(\tau) = 10, G_0(\tau) = 20, R_0(\tau) = 10, Z_0(\tau) = 5 \quad (\text{Eşitlik 82})$$

olarak bulunur.

$A_1(\tau), C_1(\tau), G_1(\tau), R_1(\tau), Z_1(\tau)$ değerlerini bulmak için, (77)-(81) eşitliklerinde $m = 1$ koyarak ,

$$A_1(\tau) = h(-\lambda + 800\beta + 40\eta) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 83})$$

$$C_1(\tau) = h(800\beta - 10\eta - 10\alpha_1) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 84})$$

$$G_1(\tau) = h(-10\alpha_1 - 200\alpha_2 + 20(\eta + \gamma)) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 85})$$

$$R_1(\tau) = h(200\alpha_2 + 10\eta - 20\gamma(1 - \delta)) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 86})$$

$$Z_1(\tau) = h(5\eta - 20\delta\gamma) \frac{\tau^\mu}{\mu} \quad (\text{Eşitlik 87})$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, $A_2(\tau), C_2(\tau), G_2(\tau), R_2(\tau), Z_2(\tau)$ değerlerini bulmak için, (77)-(81) eşitliklerinde $m = 2$ koyarak,

$$A_2(\tau) = (n + h)h(-\lambda + 800\beta + 40\eta) \frac{\tau^\mu}{\mu} \times (-h^2(-\lambda + \eta(-\lambda + 800\beta + 40\eta) + 20\beta(80\beta + 40\gamma + 80\eta) - \lambda - 20\alpha_1 - 200\alpha_2) \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2} \quad (\text{Eşitlik 88})$$

$$C_2(\tau) = (n + h)h(800\beta - 10\eta - 10\alpha_1) \frac{\tau^\mu}{\mu} \times (10h^2(-1600\beta^2 - 80\beta\gamma - 240\beta\eta + \eta^2 + 2\beta\lambda + (-40\beta + 2\eta)\alpha_1 + \alpha_2^2 + 800\beta\alpha_2)) \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2} \quad (\text{Eşitlik 89})$$

$$G_2(\tau) = (n + h)h(-10\alpha_1 + 20(\gamma + \eta - 10\alpha_2)) \frac{\tau^\mu}{\mu} \times (-10h^2(\alpha_1^2 + \alpha_1(-80\beta + \gamma + 2\eta - 10\alpha_2) - 2(\gamma + \eta)^2 - 10(2\gamma\delta + 3\eta)\alpha_2 - 100\alpha_1^2)) \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2} \quad (\text{Eşitlik 90})$$

$$R_2(\tau) = (n+h)h(10(2\gamma(-1+\delta) + \eta + 20\alpha_2))\frac{\tau^\mu}{\mu} \times (10h^2(-2\gamma^2 + 2\gamma^2\delta - 4\gamma\delta + 4\gamma\delta\eta + \eta^2 + \alpha_1(\gamma - \gamma\delta - 10\alpha_2) + 20(\gamma\delta + 3\eta)\alpha_2 + 200\alpha_2^2))\frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2} \quad (\text{Eşitlik 91})$$

$$Z_2(\tau) = (n+h)h(-20\gamma + 5\eta)\frac{\tau^\mu}{\mu} \times (5h^2(-4\gamma^2\delta - \delta\gamma\delta\eta + \eta^2 + 2\gamma\delta\alpha_1 + 40\gamma\delta\alpha_2)) \quad (92) \quad (\text{Eşitlik 92})$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, UKSİM modelinin Uq-KHADM çözümleri

$$A(\tau) = A_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 93})$$

$$C(\tau) = C_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 94})$$

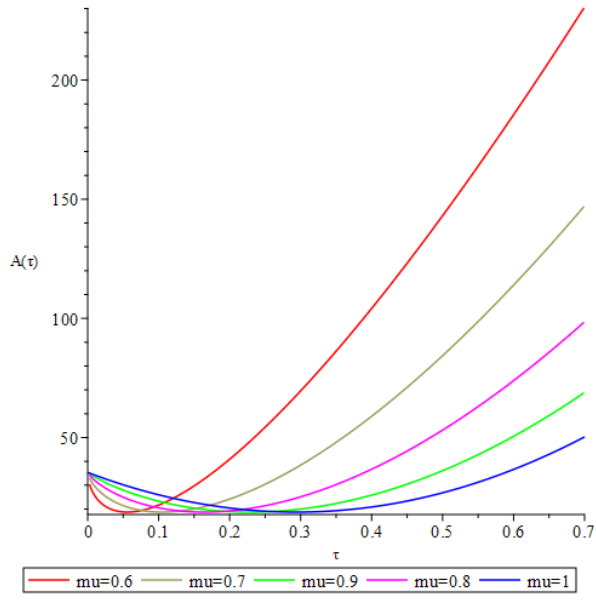
$$G(\tau) = G_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 95})$$

$$R(\tau) = R_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 96})$$

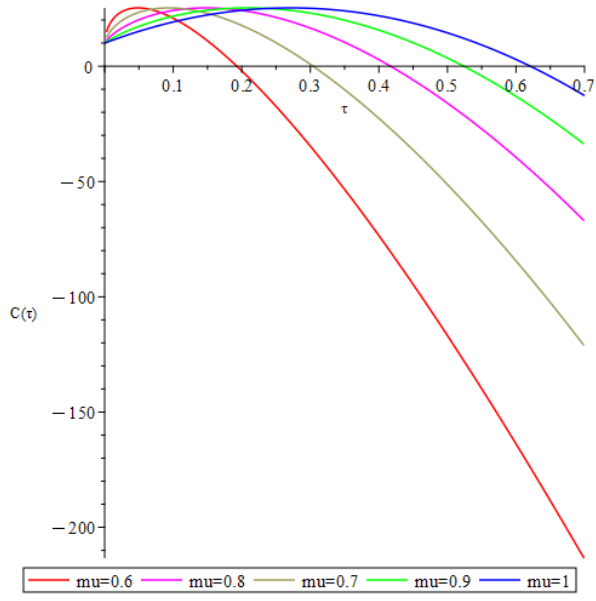
$$Z(\tau) = Z_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 97})$$

şeklinde elde edilmektedir.

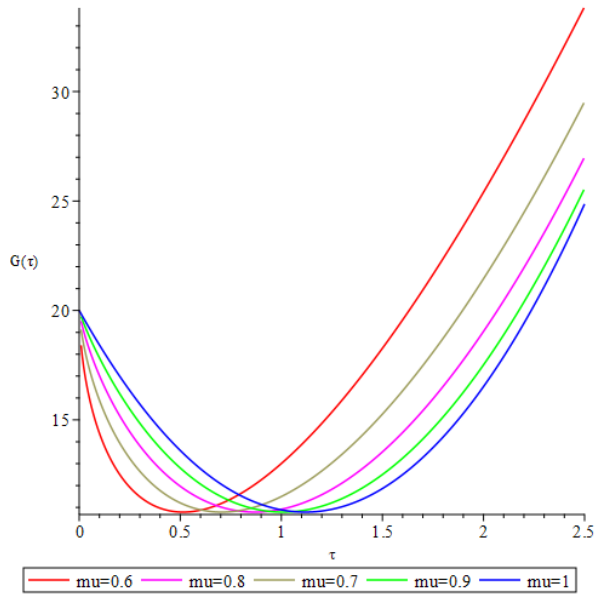
UKSİM için Uq-KHADM ile $\hbar = -1, n = 1$ 'de farklı μ değerleri kullanılarak ve Tablo 1' deki değerler kullanılarak elde edilen $A(\tau), C(\tau), G(\tau), R(\tau), Z(\tau)$ çözümlerine ait 2B grafikler Şekil 1-5'te gösterilmiştir.



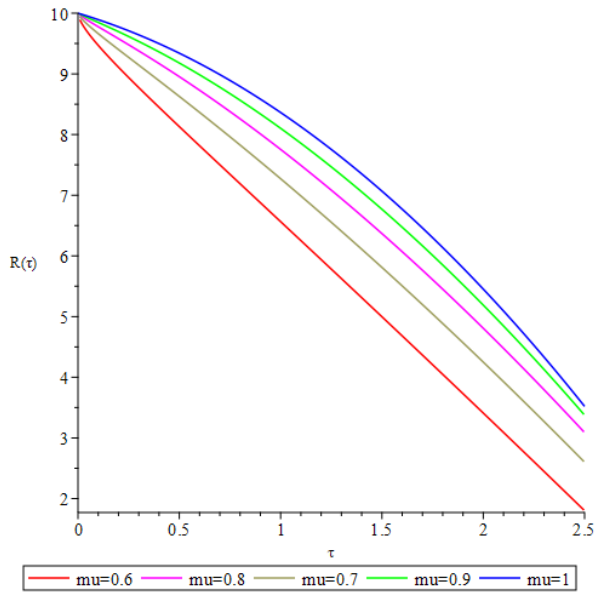
Şekil 1. $A(\tau)$ için 2B grafik.



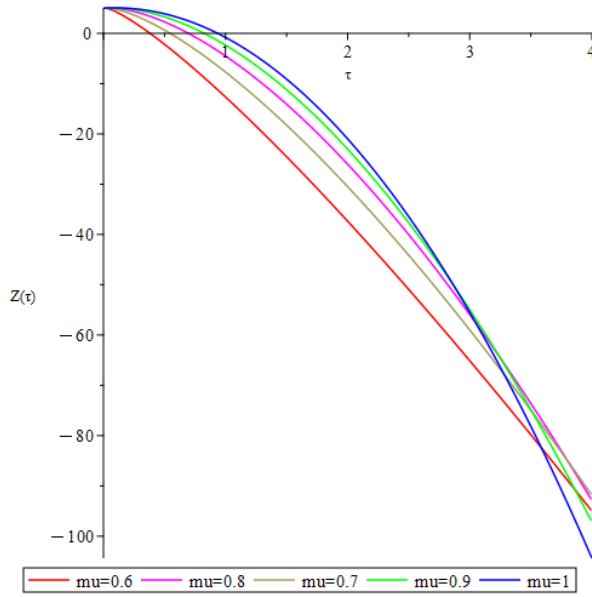
Şekil 2. $C(\tau)$ için 2B grafik.



Şekil 3. $G(\tau)$ için 2B grafik.



Şekil 4. $R(\tau)$ için 2B grafik.



Şekil 5. $Z(\tau)$ için 2B grafik.

4.2. Uyumlu Kesirli Epidemik Model

Chen vd., (2020), enfeksiyon kaynağında bireylere bulaşım sürecini simüle eden bir model önermişlerdir. Bu çalışmada, modelde yer alan tüm parametrelerin ve değişkenlerin bireysel topluluk içinde negatif olmayan değerler aldığı varsayılmaktadır. Toplam birey sayısı $N(\tau)$ olarak ifade edilmekte ve bu popülasyon beş ayrı duyarlı $A(\tau)$, maruz kalmış $C(\tau)$, semptomatik enfekte $H(\tau)$, asemptomatik enfekte $Z(\tau)$ ve iyileşmiş $M(\tau)$ bireyler olmak üzere altı kompartmana ayrılmaktadır.

Modelin kurulmasında aşağıdaki varsayımlar temel alınmıştır:

Bireylerin topluma katkısı, duyarlı grubun büyüklüğünü sabit bir oran olan ξ ile artırır. Bireylerin doğum oranı ve doğal ölüm oranı sırasıyla Π ve δ parametreleri ile gösterilir. Duyarlı bir birey, enfekte bireyler $H(\tau)$ ile çok sayıda temastan sonar

$$\beta \frac{A(\tau)H(\tau)}{N}$$

terimi aracılığıyla enfekte olur; burada temas oranı β , hastalık bulaşma katsayısıdır.

Asemptomatik enfekte birey $Z(\tau)$ ile duyarlı birey $A(\tau)$ arasındaki bulaşım

$$\beta\psi \frac{A(\tau)Z(\tau)}{N}$$

biçiminde gerçekleşir; burada $\psi \in [0,1]$, $Z(\tau)$ sınıfının $H(\tau)$ sınıfına göre bulaştırmacılık çarpanıdır. Eğer $\psi = 0$ ise bulaştırmacılık yoktur ve bu terim kaybolur; $\psi = 1$ ise bulaştırmacılık düzeyi semptomatik enfeksiyonla aynıdır. φ parametresi, asemptomatik enfeksiyonun oranını temsil eder. θ ve ϕ parametreleri sırasıyla kuluçka süresini tamamlayıp $H(\tau)$ ve $Z(\tau)$ sınıflarına katılan bireylerin geçiş hızlarını ifade eder.

Semptomatik $H(\tau)$ ve asemptomatik $Z(\tau)$ gruplarındaki bireyler, sırasıyla γ ve α iyileşme oranlarıyla iyileşerek $M(\tau)$ kompartmanına geçerler.

Duyarlı bir birey, rezervuar veya deniz ürünleri pazarı sınıfı $V(\tau)$ ile etkileşime girerek

$$\eta \frac{A(\tau)V(\tau)}{N}$$

terimiyle enfekte olur; burada η , $A(\tau)$ 'den $V(\tau)$ 'ye hastalık bulaşma katsayısıdır. $H(\tau)$ ve $Z(\tau)$ bireyleri, virüsü rezervuar veya deniz ürünleri pazarı sınıfı $V(\tau)$ 'ye sırasıyla ϖ ve ε sabit oranlarıyla katkıda bulunurlar. Virüsün rezervuardan veya deniz ürünleri pazarı sınıfı $V(\tau)$ 'den uzaklaşma (bozunma) hızı k ile gösterilir.

Örnek 4.2 (Abdl-Rahim vd., 2022): Aşağıda uyumlu kesirli mertebeden epidemik modeli inceleyelim.

$${}^c D_t^\mu A(\tau) = \xi - \beta \frac{AH}{N} - \beta \psi \frac{AZ}{N} - \eta \frac{AV}{N} - \delta A, \quad (\text{Eşitlik 98})$$

$${}^c D_t^\mu C(\tau) = \beta \frac{AH}{N} + \beta \psi \frac{AZ}{N} + \eta \frac{AV}{N} - (1 - \phi)\theta C - \phi\varphi C - \delta C, \quad (\text{Eşitlik 99})$$

$${}^c D_t^\mu H(\tau) = (1 - \phi)\theta C - \gamma H - \delta H, \quad (\text{Eşitlik 100})$$

$${}^c D_t^\mu Z(\tau) = \phi\varphi C - \alpha Z - \delta Z, \quad (\text{Eşitlik 101})$$

$${}^c D_t^\mu M(\tau) = \gamma H + \alpha Z - \delta M, \quad (\text{Eşitlik 102})$$

$${}^c D_t^\mu V(\tau) = \varpi H + \varepsilon Z - kV. \quad (\text{Eşitlik 103})$$

Bu modelin başlangıç şartları,

$$A(0) = A_0, C(0) = C_0, H(0) = H_0, Z(0) = Z_0, M(0) = M_0, V(0) = V_0 \quad (\text{Eşitlik 104})$$

şeklindedir.

(98)-(103) denklemlerinde nüfus bölmeleri, mevcut durum değişkenleri kullanılarak N ile normalize edilebilir.

Bu durumda,

$$E = \frac{A}{N}, F = \frac{C}{N}, R = \frac{H}{N}, S = \frac{L}{N}, O = \frac{M}{N}, G = \frac{V}{N}, \xi = \frac{\Pi}{N} \quad (\text{Eşitlik 105})$$

şekilde ifade edelim. Toplam nüfus normalize edilerek, model aşağıda verilen şekilde boyutsuz forma dönüştürülmüştür.

$${}^c D_t^\mu E(\tau) = \Pi - \beta ER - \beta \psi ES - \eta EG - \delta E, \quad (\text{Eşitlik 106})$$

$${}^c D_t^\mu F(\tau) = \beta ER + \beta \psi ES + \eta EG - (1 - \phi)\theta F - \phi \varphi F - \delta F, \quad (\text{Eşitlik 107})$$

$${}^c D_t^\mu R(\tau) = (1 - \phi)\theta F - \gamma R - \delta R, \quad (\text{Eşitlik 108})$$

$${}^c D_t^\mu S(\tau) = \phi \varphi F - \alpha S - \delta S, \quad (\text{Eşitlik 109})$$

$${}^c D_t^\mu O(\tau) = \gamma R + \alpha S - \delta O, \quad (\text{Eşitlik 110})$$

$${}^c D_t^\mu G(\tau) = \varpi R + \varepsilon S - kG. \quad (\text{Eşitlik 111})$$

Başlangıç şartları da

$$\begin{aligned} E(0) = E_0 \geq 0, F(0) = F_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0, S(0) = S_0 \geq 0, O(0) \\ = O_0 \\ \geq 0, G(0) = G_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 112})$$

şekline dönüşmüştür.

Tablo 2. [Yadav vd., 2021] (99)-(104) eşitliklerinde kullanılan parametrelerin tanımı ve belirli değerleri.

Π	Doğum oranı,	0.0018
δ	Doğal ölüm oranı,	0.01439
β	İnsandan insana hastalık bulaşma katsayısı,	0.05
ψ	Aseptomatik bireylerin semptomatik bireylere göre bulaştırıcılık oranı ($\psi \in [0,1]$),	0.02
η	Çevresel rezervuardan duyarlı bireylere hastalık bulaşma katsayısı,	1.231×10^{-6}

Tablo 2.(Devamı)

ϕ	Maruz kalan bireylerin asemptomatik enfeksiyona ilerleme oranı	0.01243
θ	Maruz kalan bireylerin kuluçka süresini tamamlayıp semptomatik enfekte birey sınıfına geçiş hızı	0.1923
φ	Maruz kalan bireylerin kuluçka süresini tamamlayıp asemptomatik enfekte birey sınıfına geçiş hızı	0.1923
γ	Semptomatik enfekte bireylerin iyileşme hızı	0.1724
α	Asemptomatik enfekte bireylerin iyileşme hızı	0.07
ω	Semptomatik bireylerin çevresel rezervuara virüs katkısı oranı	0.1
ε	Asemptomatik bireylerin çevresel rezervuara virüs katkısı oranı	0.05
k	Çevresel rezervuardan virüsün uzaklaşma (bozunma) hızı	0.01

Şimdi, (106)-(111) denklemlerine UKKİD uygulayarak ve (112) başlangıç şartlarını kullanarak,

$$w^\alpha {}^c K_\mu [E(\tau)] - wE(0) = {}^c K_\mu [\Pi - \beta E(\tau)R(\tau) + \beta \psi E(\tau)S(\tau) + \eta E(\tau)G(\tau) - \delta E(\tau)], \quad (\text{Eşitlik 113})$$

$$\begin{aligned} w^\alpha {}^c K_\mu [F(\tau)] - wF(0) &= {}^c K_\mu [\beta E(\tau)R(\tau) + \beta \psi E(\tau)S(\tau) + \eta E(\tau)G(\tau) \\ &\quad - (1 - \phi)\theta F(\tau) - \phi \varphi F(\tau) - \delta F(\tau)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 114})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [R(\tau)] - wR(0) = {}^c K_\mu [(1 - \phi)\theta F(\tau) - \gamma R(\tau) - \delta R(\tau)], \quad (\text{Eşitlik 115})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [S(\tau)] - wS(0) = {}^c K_\mu [\phi \varphi F(\tau) - \alpha S(\tau) - \delta S(\tau)], \quad (\text{Eşitlik 116})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [O(\tau)] - wO(0) = {}^c K_\mu [\gamma R(\tau) + \alpha S(\tau) - \delta O(\tau)], \quad (\text{Eşitlik 117})$$

$$w^\alpha {}^c K_\mu [G(\tau)] - wG(0) = {}^c K_\mu [\varpi R(\tau) + \varepsilon S(\tau) - kG(\tau)] \quad (\text{Eşitlik 118})$$

elde edilir.

(113)-(118) denklemlerini tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} {}^c K_\mu [E(\tau)] - w^{1-\alpha} E(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\Pi - \beta E(\tau)R(\tau) + \beta \psi E(\tau)S(\tau) \\ + \eta E(\tau)G(\tau) - \delta E(\tau)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 119})$$

$$\begin{aligned} {}^c K_\mu [F(\tau)] - w^{1-\alpha} F(0) \\ - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\beta E(\tau)R(\tau) + \beta \psi E(\tau)S(\tau) + \eta E(\tau)G(\tau) \\ - (1 - \phi)\theta F(\tau) - \phi \varphi F(\tau) - \delta F(\tau)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 120})$$

$$\begin{aligned} {}^c K_\mu [R(\tau)] - w^{1-\alpha} R(0) \\ - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [(1 - \phi)\theta F(\tau) - \gamma R(\tau) - \delta R(\tau)] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 121})$$

$$\begin{aligned} {}^c K_\mu [S(\tau)] - w^{1-\alpha} S(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\phi \varphi F(\tau) - \alpha S(\tau) - \delta S(\tau)] \\ = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 122})$$

$${}^c K_\mu [O(\tau)] - w^{1-\alpha} O(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\gamma R(\tau) + \alpha S(\tau) - \delta O(\tau)] = 0, \quad (\text{Eşitlik 123})$$

$${}^c K_\mu [G(\tau)] - w^{1-\alpha} G(0) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\varpi R(\tau) + \varepsilon S(\tau) - kG(\tau)] = 0 \quad (\text{Eşitlik 124})$$

olarak elde edilir. (119)-(124) denklemlerini kullanarak doğrusal olmayan operatörleri,

$$\begin{aligned} Q^1[Y_1(\tau; q), Y_2(\tau; q), Y_3(\tau; q), Y_4(\tau; q), Y_5(\tau; q), Y_6(\tau; q)] = {}^{CF}D_\tau^\mu[Y_1(\tau; q)] \\ - w^{1-\alpha} Y_1(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\Pi - \beta Y_1(\tau; q) Y_3(\tau; q) + \beta \psi Y_1(\tau; q) Y_4(\tau; q) \\ + \eta Y_1(\tau; q) Y_6(\tau; q) - \delta Y_1(\tau; q)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 125})$$

$$\begin{aligned} Q^2[Y_1(\tau; q), Y_2(\tau; q), Y_3(\tau; q), Y_4(\tau; q), Y_5(\tau; q), Y_6(\tau; q)] = {}^{CF}D_\tau^\mu[Y_2(\tau; q)] \\ - w^{1-\alpha} Y_2(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\beta Y_1(\tau; q) Y_1(\tau; q) + \beta \psi Y_1(\tau; q) Y_4(\tau; q) \\ + \eta Y_1(\tau; q) Y_6(\tau; q) - (1 - \phi)\theta Y_2(\tau; q) - \phi \varphi Y_2(\tau; q) - \delta Y_2(\tau; q)], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 126})$$

$$Q^3[Y_1(\tau; q), Y_2(\tau; q), Y_3(\tau; q), Y_4(\tau; q), Y_5(\tau; q), Y_6(\tau; q)] = {}^{CF}D_\tau^\mu[Y_3(\tau; q)] \quad (\text{Eşitlik 127})$$

$$-w^{1-\alpha}Y_3(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^cK_\mu [(1-\phi)\theta Y_2(\tau; q) - \gamma Y_3(\tau; q) - \delta Y_3(\tau; q)],$$

$$Q^4[Y_1(\tau; q), Y_2(\tau; q), Y_3(\tau; q), Y_4(\tau; q), Y_5(\tau; q), Y_6(\tau; q)] = {}^{CF}D_\tau^\mu[Y_4(\tau; q)] \quad (\text{Eşitlik 128})$$

$$-w^{1-\alpha}Y_4(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^cK_\mu [\Phi\varphi Y_2(\tau; q) - \alpha Y_4(\tau; q) - \delta Y_4(\tau; q)],$$

$$Q^5[Y_1(\tau; q), Y_2(\tau; q), Y_3(\tau; q), Y_4(\tau; q), Y_5(\tau; q), Y_6(\tau; q)] = {}^{CF}D_\tau^\mu[Y_5(\tau; q)] \quad (\text{Eşitlik 129})$$

$$-w^{1-\alpha}Y_5(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^cK_\mu [\gamma Y_3(\tau; q) + \alpha Y_4(\tau; q) - \delta Y_5(\tau; q)],$$

$$Q^6[Y_1(\tau; q), Y_2(\tau; q), Y_3(\tau; q), Y_4(\tau; q), Y_5(\tau; q), Y_6(\tau; q)] = {}^{CF}D_\tau^\mu[Y_6(\tau; q)] \quad (\text{Eşitlik 130})$$

$$-w^{1-\alpha}Y_6(\tau; q)(0^+) - \frac{1}{w^\alpha} {}^cK_\mu [\varpi Y_3(\tau; q) + \varepsilon Y_4(\tau; q) - k Y_6(\tau; q)]$$

şeklinde tanımlanır. Önerilen algoritma uygulanarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$${}^cK_\mu [E_m(\tau) - k_m E_{m-1}(\tau)] = h\mathfrak{R}_{1,m}(E_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 131})$$

$${}^cK_\mu [F_m(\tau) - k_m F_{m-1}(\tau)] = h\mathfrak{R}_{2,m}(F_{m-1}) \quad (\text{Eşitlik 132})$$

$${}^cK_\mu [R_m(\tau) - k_m R_{m-1}(\tau)] = h\mathfrak{R}_{3,m}(R_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 133})$$

$${}^cK_\mu [S_m(\tau) - k_m S_{m-1}(\tau)] = h\mathfrak{R}_{4,m}(S_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 134})$$

$${}^cK_\mu [O_m(\tau) - k_m O_{m-1}(\tau)] = h\mathfrak{R}_{5,m}(O_{m-1}), \quad (\text{Eşitlik 135})$$

$${}^cK_\mu [G_m(\tau) - k_m G_{m-1}(\tau)] = h\mathfrak{R}_{6,m}(G_{m-1}). \quad (\text{Eşitlik 136})$$

Burada,

$$\mathfrak{R}_{1,m}(E_{m-1}) = {}^c K_\mu [E_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) E_0(\tau) \quad (\text{Eşitlik 137})$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu \left[\Pi - \beta \sum_{j=0}^{m-1} E_j(\tau) R_{m-1-j}(\tau) + \beta \psi \sum_{j=0}^{m-1} E_j(\tau) S_{m-1-j}(\tau) \right. \\ & \left. + \eta \sum_{j=0}^{m-1} E_j(\tau) G_{m-1-j}(\tau) - \delta E_{m-1}(\tau) \right], \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R}_{2,m}(F_{m-1}) = {}^c K_\mu [F_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) F_0(\tau) \quad (\text{Eşitlik 138})$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu \left[\beta \sum_{j=0}^{m-1} E_j(\tau) R_{m-1-j}(\tau) + \beta \psi \sum_{j=0}^{m-1} E_j(\tau) S_{m-1-j}(\tau) \right. \\ & \left. + \eta \sum_{j=0}^{m-1} E_j(\tau) G_{m-1-j}(\tau) - (1 - \phi) \theta F_{m-1}(\tau) - \phi \varphi F_{m-1}(\tau) - \delta F_{m-1}(\tau) \right], \end{aligned}$$

$$\mathfrak{R}_{3,m}(R_{m-1}) = {}^c K_\mu [R_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) R_0(\tau) \quad (\text{Eşitlik 139})$$

$$- \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [(1 - \phi) \theta F_{m-1}(\tau) - \gamma R_{m-1}(\tau) - \delta R_{m-1}(\tau)],$$

$$\mathfrak{R}_{4,m}(S_{m-1}) = {}^c K_\mu [S_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) S_0(\tau) \quad (\text{Eşitlik 140})$$

$$- \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\phi \varphi F_{m-1}(\tau) - \alpha S_{m-1}(\tau) - \delta G_{m-1}(\tau)],$$

$$\mathfrak{R}_{5,m}(O_{m-1}) = {}^c K_\mu [O_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) O_0(\tau) \quad (\text{Eşitlik 141})$$

$$- \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\gamma R_{m-1}(\tau) + \alpha S_{m-1}(\tau) - \delta O_{m-1}(\tau)],$$

$$\mathfrak{R}_{6,m}(G_{m-1}) = {}^c K_\mu [G_{m-1}(\tau)] - w^{1-\alpha} \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) G_0(\tau) \quad (\text{Eşitlik 142})$$

$$- \frac{1}{w^\alpha} {}^c K_\mu [\varpi R_{m-1}(\tau) + \varepsilon S_{m-1}(\tau) - k G_{m-1}(\tau)]$$

şeklinde olur. (131)-(136) denklemlerine ters UKKİD uygulandığında,

$$E_m(\tau) = k_m E_{m-1}(\tau) + h({}^c K_\mu)^{-1} [\mathfrak{R}_{1,m}(E_{m-1})], \quad (\text{Eşitlik 143})$$

$$F_m(\tau) = k_m F_{m-1}(\tau) + h({}^c K_\mu)^{-1} [\mathfrak{R}_{2,m}(F_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 144})$$

$$R_m(\tau) = k_m R_{m-1}(\tau) + h({}^c K_\mu)^{-1} [\mathfrak{R}_{3,m}(R_{m-1})], \quad (\text{Eşitlik 145})$$

$$S_m(\tau) = k_m S_{m-1}(\tau) + h({}^c K_\mu)^{-1} [\mathfrak{R}_{4,m}(S_{m-1})], \quad (\text{Eşitlik 146})$$

$$O_m(\tau) = k_m O_{m-1}(\tau) + h({}^c K_\mu)^{-1} [\mathfrak{R}_{5,m}(O_{m-1})], \quad (\text{Eşitlik 147})$$

$$G_m(\tau) = k_m G_{m-1}(\tau) + h({}^c K_\mu)^{-1} [\mathfrak{R}_{6,m}(G_{m-1})]. \quad (\text{Eşitlik 148})$$

olur. Başlangıç koşullarının kullanılması ile,

$$\begin{aligned} E_0(\tau) = 0.6, F_0(\tau) = 0.25, R_0(\tau) = 0.2, S_0(\tau) = 0.05, O_0(\tau) = 0.02, \\ G_0(\tau) = 0.01 \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 149})$$

olarak bulunur.

$E_1(\tau), F_1(\tau), R_1(\tau), S_1(\tau), O_1(\tau), G_1(\tau)$ değerlerini bulmak için, (143)-(148) eşitliklerinde $m = 1$ koyarak,

$$E_1(\tau) = -h(\Pi - \beta E_0 R_0 + \beta \psi E_0 S_0 + \eta E_0 G_0 - \delta E_0) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 150})$$

$$\begin{aligned} F_1(\tau) = -h(\beta E_0 R_0 + \beta \psi E_0 S_0 + \eta E_0 G_0 - (1 - \phi)\theta F_0 - \phi \varphi F_0 \\ - \delta F_0) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 151})$$

$$R_1(\tau) = -h((1 - \phi)\theta F_0 - \gamma R_0 - \delta R_0) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 152})$$

$$S_1(\tau) = -h(\phi \varphi F_0 - \alpha S_0 - \delta S_0) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 153})$$

$$O_1(\tau) = -h(\gamma R_0 + \alpha S_0 - \delta O_0) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 154})$$

$$G_1(\tau) = -h(\varpi R_0 + \varepsilon S_0 - k G_0) \frac{\tau^\mu}{\mu} \quad (\text{Eşitlik 155})$$

denklemleri bulunur. $E_0(\tau), F_0(\tau), R_0(\tau), S_0(\tau), O_0(\tau), G_0(\tau)$ değerlerini (150)-(155) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$E_1(\tau) = -h(\Pi - 0,12\beta + 0,03\beta\psi + 0,06\eta - 0,6\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 156})$$

$$F_1(\tau) = -h(0,12\beta + 0,03\beta\psi + 0,006\eta - 0,25(1 - \phi)\theta - 0,025\phi\varphi - 0,250\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 157})$$

$$R_1(\tau) = -h(0,25(1 - \phi)\theta - 0,2\gamma - 0,2\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 158})$$

$$S_1(\tau) = -h(0,25\phi\varphi - 0,05\alpha - 0,050\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 159})$$

$$O_1(\tau) = -h(0,2\gamma + 0,05\alpha - 0,02\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu}, \quad (\text{Eşitlik 160})$$

$$G_1(\tau) = -h(0,2\varpi + 0,05\varepsilon - 0,01k) \frac{\tau^\mu}{\mu} \quad (\text{Eşitlik 161})$$

elde edilir.

$E_2(\tau), F_2(\tau), R_2(\tau), S_2(\tau), O_2(\tau), G_2(\tau)$ değerlerini bulmak için, (143)-(148) eşitliklerinde $m = 2$ koyarak,

$$E_2(\tau) = -(n + h)h(\Pi - 0,12\beta + 0,03\beta\psi + 0,06\eta - 0,6\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu} - h^2[\Pi - 0,024\beta - 0,024\beta\psi + 0,012\eta - 0,06\delta] \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2}, \quad (\text{Eşitlik 162})$$

$$F_2(\tau) = (n + h)h(0,12\beta + 0,03\beta\psi + 0,006\eta - 0,25(1 - \phi)\theta - 0,025\phi\varphi - 0,250\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu} - h^2[0,024\beta - 0,024\beta\psi + 0,0126\eta - 0,2(1 - \phi)\theta - 0,2\phi\varphi - 0,2\delta] \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2}, \quad (\text{Eşitlik 163})$$

$$R_2(\tau) = -(n+h)h(0,25(1-\phi)\theta - 0,2\gamma - 0,2\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu} - h^2[0,2(1-\phi)\theta - 0,02\gamma - 0,02\delta] \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2}, \quad (\text{Eşitlik 164})$$

$$S_2(\tau) = -(n+h)h(0,25\phi\varphi - 0,05\alpha - ,050\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu} - h^2[0,2\phi\varphi + 0,02\eta + 0,02\delta] \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2}, \quad (\text{Eşitlik 165})$$

$$O_2(\tau) = -(n+h)h(0,2\gamma + 0,05\alpha - 0,02\delta) \frac{\tau^\mu}{\mu} - h^2[0,02\gamma - 0,02\eta - 0,0007\delta] \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2}, \quad (\text{Eşitlik 166})$$

$$G_2(\tau) = -(n+h)h(0,2\delta + 0,05\varepsilon - 0,01k) \frac{\tau^\mu}{\mu} - h^2[0,02\varpi - 0,02\varepsilon - 0,02k] \frac{\tau^{2\mu}}{\mu^2} \quad (\text{Eşitlik 167})$$

bulunur. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, UKEM modelinin Uq-KHADM çözümleri

$$E(\tau) = E_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} E_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 168})$$

$$F(\tau) = F_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 169})$$

$$R(\tau) = R_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 170})$$

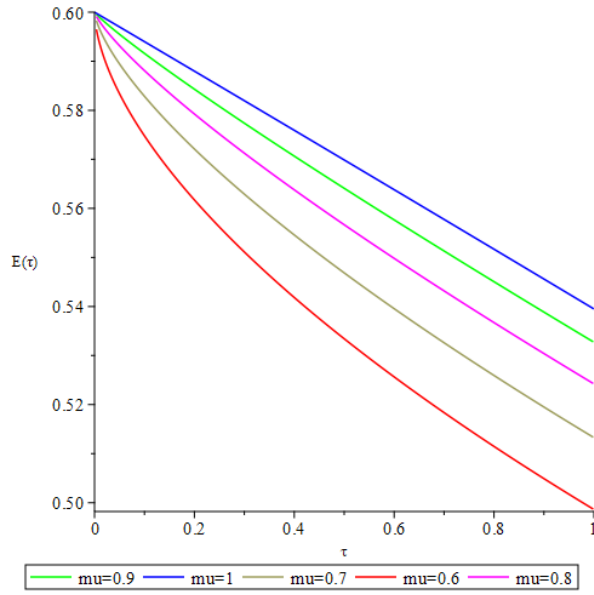
$$S(\tau) = S_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 171})$$

$$O(\tau) = O_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} O_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 172})$$

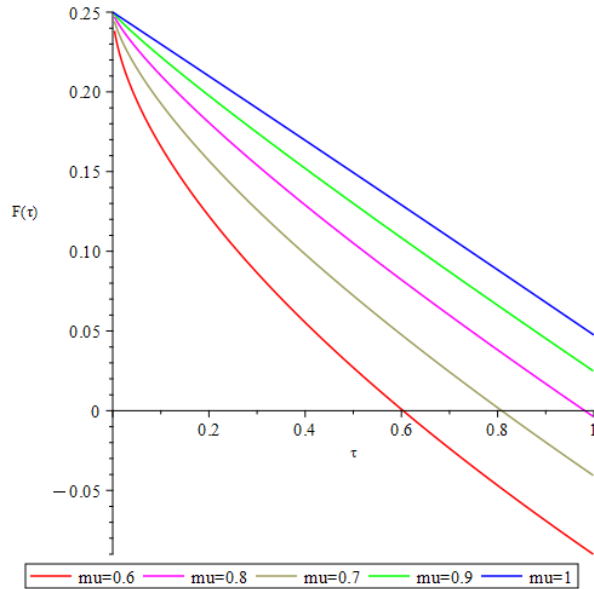
$$G(\tau) = G_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(\tau) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 173})$$

şeklinde elde edilmektedir.

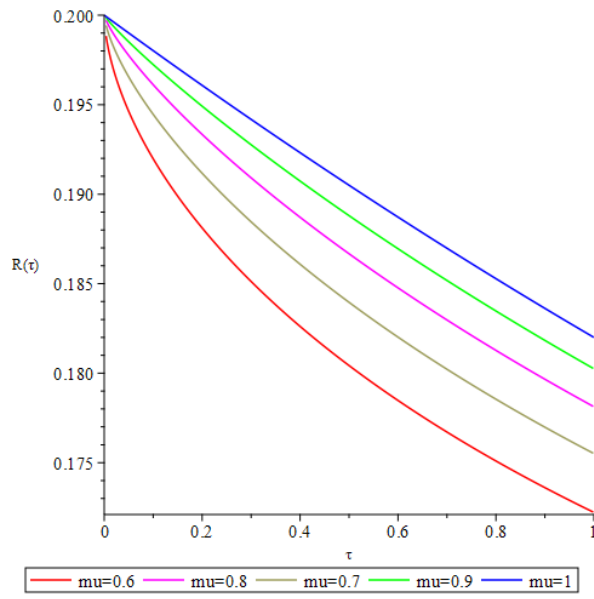
UKEM için Uq-KHATM ile $\hbar = -1, n = 1$ 'de farklı μ değerleri kullanılarak ve Tablo 2' deki değerler kullanılarak elde edilen $E(\tau), F(\tau), R(\tau), S(\tau), O(\tau), G(\tau)$ çözümlerine ait 2B grafikler Şekil 6-11' de gösterilmiştir.



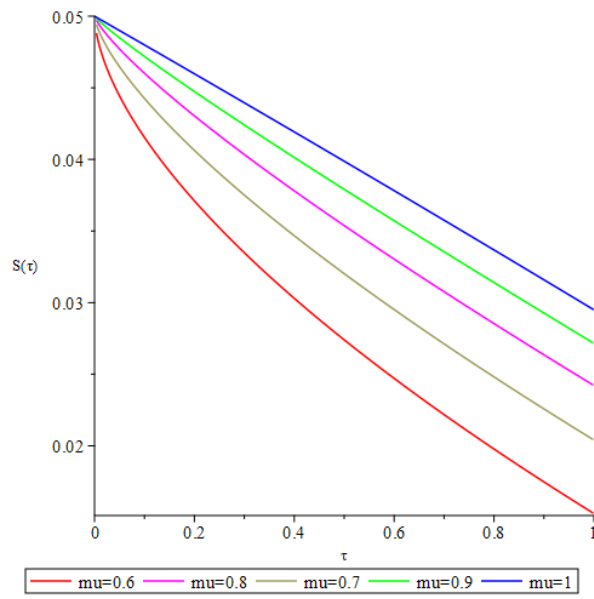
Şekil 6. $E(\tau)$ için 2B grafik



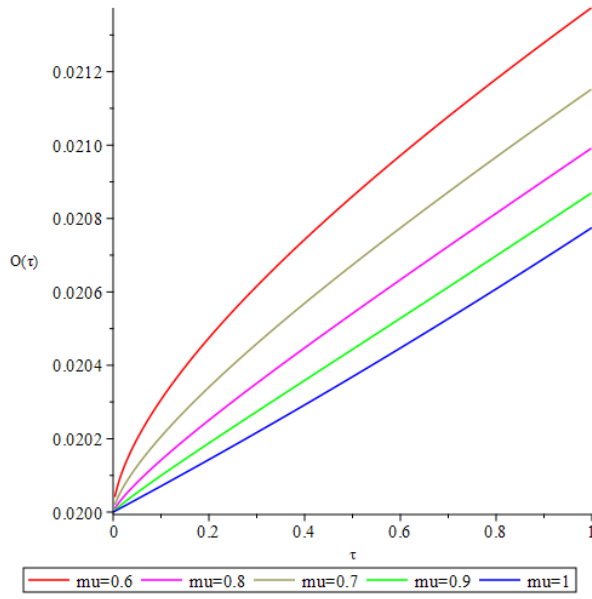
Şekil 7. $F(\tau)$ için 2B grafik



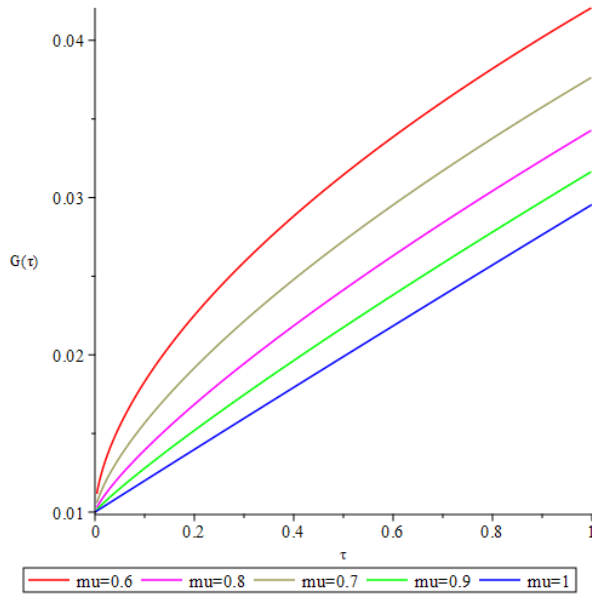
Şekil 8. $R(\tau)$ için 2B grafik



Şekil 9. $S(\tau)$ için 2B grafik



Şekil 10. $O(\tau)$ için 2B grafik



Şekil 11. $G(\tau)$ için 2B grafik

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, doğrusal olmayan dinamik sistemlerin modellenmesinde giderek artan bir öneme sahip olan uyumlu kesirli türev yaklaşımı çerçevesinde, sigara içme yayılımı ve epidemik süreçlerin matematiksel modellenmesi ele alınmıştır. Söz konusu modeller, klasik tamsayı mertebeden türevler yerine, hafıza etkisi ve lokal olmayan yapı gibi gerçek dünya dinamiklerini daha iyi yansıtabilen uyumlu kesirli türev operatörleri kullanılarak yeniden formüle edilmiştir. Bu bağlamda, hem teorik hem de sayısal açıdan yenilikçi bir yaklaşım sunmak amacıyla, uyumlu q -Kushare homotopi analiz dönüşüm metodu (Uq-KHADM) önerilmiş ve söz konusu yöntemin etkinliği, doğruluğu ve uygulanabilirliği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Elde edilen bulgular, önerilen Uq-KHADM yönteminin doğrusal olmayan uyumlu kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde son derece başarılı olduğunu göstermektedir. Yöntem, hem analitik esneklik hem de sayısal kararlılık açısından dengeli bir yapı sunmakta; aynı zamanda çözüm sürecinde küçük parametrelere veya doğrusallaştırmalara olan gereksinimi ortadan kaldırmaktadır. Özellikle sigara içme ve epidemik modellerine uygulanan sayısal simülasyonlar, elde edilen çözümlerin fiziksel olarak anlamlı, tutarlı ve mevcut literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında üstün olduğunu ortaya koymuştur. İki boyutlu grafiksel analizler, sistemin dinamik davranışının kesirli mertebe parametresine olan hassasiyetini net bir şekilde sergilemiş; bu da modellerin gerçek yaşam senaryolarına uyarlanabilirliğini güçlendirmiştir.

Ayrıca, uyumlu kesirli türevin, klasik türevlere kıyasla daha zengin bir dinamik yelpaze sunma potansiyeline sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, özellikle biyolojik ve sosyal yayılım süreçlerinde zamanla değişen bulaşma oranları, alışkanlık geçişleri veya müdahale etkilerinin daha gerçekçi bir şekilde modellenmesine olanak tanımaktadır. Önerilen yöntemin, yalnızca bu çalışmada incelenen modellere değil, daha geniş bir sınıf doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklem sistemlerine de başarıyla uygulanabileceği düşünülmektedir.

Sonuç olarak, bu tezde geliştirilen Uq-KHADM yöntemi, uyumlu kesirli modelleme alanında hem teorik hem de uygulamalı açıdan önemli bir katkı sunmaktadır. Yöntemin basitliği, güçlü yakınsama özellikleri ve sayısal verimliliği, onu hem araştırmacılar hem de uygulamacılar için değerli bir araç haline getirmektedir. Gelecekteki çalışmalarda, önerilen yaklaşımın stokastik etkiler, zaman gecikmeleri veya

çoklu kesirli mertebeler gibi daha karmaşık senaryolara entegrasyonu, bu alandaki modelleme kapasitesini daha da genişletebilir.



KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Abdl-Rahim, H. R., Zayed, M. ve Ismail, G. M. (2022). Analytical study of fractional epidemic model via natural transform homotopy analysis method. *Symmetry*, 14(8), 1695.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2020). Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method. *SN Applied Sciences*, 2(6), 1-11.
- Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13(1).
- Baleanu, D., Defterli, O. ve Agrawal, O. P. (2009). A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15(4), 583-597.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., Bonyah, E. ve Hajipour, M. (2018). New aspects of poor nutrition in the life cycle within the fractional calculus. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-14.
- Chen, T. M., Rui, J., Wang, Q. P., Zhao, Z. Y., Cui, J. A., ve Yin, L. (2020). A mathematical model for simulating the phase-based transmissibility of a novel coronavirus. *Infectious diseases of poverty*, 9(1), 24.
- Elzaki, T. M. (2011). The new integral transform Elzaki transform. *Global Journal of pure and applied mathematics*, 7(1), 57-64.
- Hilfer, R. (Ed.). (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific.
- Kexue, L., ve Jigen, P. (2011). Fractional abstract Cauchy problems. *Integral Equations and Operator Theory*, 70(3), 333-361.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Cilt. 204). elsevier.
- Kushare, S. R., Patil, D. P., ve Takate, A. M. (2021). The new integral transform, "Kushare transform". *International Journal of Advances in Engineering and Management*, 3(9), 1589-1592.

- Mainardi, F. (2010). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. World Scientific.
- Merdan, M., Anaç, H., Bekiryazıcı, Z., ve Kesemen, T. (2019). Solving of some random partial differential equations by using differential transformation method and laplace-padé method. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(1), 108-118.
- Mahgoub, M. A. M. (2016). The new integral transform “Mahgoub Transform”. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 11(4), 391-398.
- Miller KS, Ross B (1993) An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley
- Odibat, Z. ve Kumar, S. (2019). A robust computational algorithm of homotopy asymptotic method for solving systems of fractional differential equations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 14(8), 081004.
- Oldham, K. ve Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier.
- Ortigueira, M. D. (2011). *Fractional calculus for scientists and engineers* (Vol. 84). Springer Science ve Business Media.
- Podlubny, I. (1997). The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order. *arXiv preprint funct-an/9710005*.
- Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1), 208-214.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives* (Vol. 1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and breach science publishers, Yverdon.
- Shrinath, M. ve Bhadane, A. (2019). New conformable fractional ELZAKI transformation: Theory and applications. *Malaya Journal of Matematik (MJM)*, 1, 619-625.
- Udhayasankar, P., Gunasekar, T., Raghavendran, P., ve Suba, M. (2025). Application of Pourreza transform to solve fractional integro-differential equations. *Journal of Applied Mathematics ve Informatics*, 43(3), 659-673.
- Ünal, E. ve Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik*, 128, 264-273.
- Veerasha, P., Prakasha, D. G., ve Baskonus, H. M. (2019). Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method. *Mathematical Sciences*, 13(2), 115-128.

Yadav, S., Kumar, D., Singh, J., ve Baleanu, D. (2021). Analysis and dynamics of fractional order Covid-19 model with memory effect. *Results in physics*, 24, 104017.



ÖZGEÇMİŞ

Selda Gökçen KİBAR, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2016 yılında tamamladı. Ağrı'da Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı kadrolu lise öğretmeni olarak çalışmaya başlamıştır. Şu an Trabzon'da görev yapmaktadır. Evlidir ve bir çocuk annesidir.

