

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN NOYES FIELD MODELİNİN
İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS

Bedir Kaan ÖNER

KASIM-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN NOYES FIELD MODELİNİN
İNCELENMESİ**

**EXAMINATION OF THE CONFORMABLE FRACTIONAL NOYES FIELD
MODEL**

YÜKSEK LİSANS

Bedir Kaan ÖNER

**KASIM-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN NOYES FIELD MODELİNİN
İNCELENMESİ**

**EXAMINATION OF THE CONFORMABLE FRACTIONAL NOYES FIELD
MODEL**

YÜKSEK LİSANS

Bedir Kaan ÖNER

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Halil ANAÇ

**KASIM-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Uyumlu Kesirli Mertebeden Noyes Field Modelinin İncelenmesi**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

09/11/2023

.....
Bedir Kaan ÖNER

TEŞEKKÜR

Çalışmalarında bana ilgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli zamanını ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün kıymetli hocalarına teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Bedir Kaan ÖNER
GÜMÜŞHANE-2023

ÖZET

Bu tez, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diferansiyel denklemler hakkındaki genel bilgilerden söz edilmektedir. İkinci bölümde, temel tanımlar ve teoremler sunulmaktadır. Üçüncü bölümde üretilen yöntemler verilmektedir. Dördüncü bölümde, uyumlu kesirli mertebeden Noyes Field modeli, uyumlu q-Sawi homotopi analiz dönüşüm metodu (Uq-SHADM), ve uyumlu kesirli Sawi ayrıştırma metodu (UKSAM) olarak isimlendirilen iki yeni metottan faydalanılarak yeni nümerik çözümler bulunmuştur. Önerilen metotların etkin ve güvenilir olduğunu göstermek üzere nümerik simülasyonlar yapılmaktadır. Mutlak hata hesapları yapılmaktadır. Sonuç bölümünde, yeni üretilen her iki metodun da lineer olmayan uyumlu kesirli mertebeden matematiksel modelleri analiz etmek için etkili olduğu öngörülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu q-Sawi homotopi analiz dönüşüm metodu, Uyumlu kesirli Sawi ayrıştırma metodu

SUMMARY

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, general information about differential equations is mentioned. In the second part, basic definitions and theorems are presented. In the third section, the produced methods are given. In the fourth chapter, new numerical solutions have been found by making use of two new methods called the conformable fractional order Noyes Field model, the conformable q-Sawi homotopy analysis transform method (Cq-SHATM), and the conformable fractional Sawi decomposition method (CFSDM). Numerical simulations are performed to show that the proposed methods are effective and reliable. Absolute error calculations are made. In the conclusion section, it is predicted that both newly produced methods are effective for analyzing nonlinear conformable fractional order mathematical models.

Keywords: Conformable q-Sawi homotopy analysis transform method, Conformable fractional Sawi decomposition method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	6
3. ÜRETİLEN METOTLAR	8
3.1. Uyumlu q-Sawi Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (Uq-SHADM)	8
3.2. Uyumlu Kesirli Sawi Ayrıştırma Metodu (UKSAM).....	11
4.YAPILAN ÇALIŞMALAR	13
4.1. Durum (i) : UKMNF Modeli için Uq-SHADM çözümü	13
4.2. Durum (ii): UKMNF Modeli için UKSAM çözümü	18
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	29
KAYNAKÇA.....	30
ÖZGEÇMİŞ	33

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 4.1 de $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için $\rho x, t'$ nin Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM (Akinyemi, 2020) sayısal çözümlerinin karşılaştırılması	28
Tablo 2. Örnek 4.1 de $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için wx, t' nin Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM (Akinyemi, 2020) sayısal çözümlerinin karşılaştırılması	28



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Örnek 4.1 için $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1, n = 1$ olmak üzere

(a) UKMNF modelinin Uq-SHADM ile $\rho x, t$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $\rho x, t$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $\rho_{analitik} - \rho_{Uq-SHADM}$ 23

Şekil 2. Örnek 4.1 için $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1, n = 1$ olmak üzere

(a) UKMNF modelinin UKSAM ile $\rho x, t$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $\rho x, t$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $\rho_{analitik} - \rho_{UKSAM}$ 24

Şekil 3. Örnek 4.1 için $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1, n = 1$ olmak üzere

(a) UKMNF modelinin Uq-SHADM ile $w x, t$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $w x, t$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $w_{analitik} - w_{Uq-SHADM}$ 25

Şekil 4. Örnek 4.1 için $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1, n = 1$ olmak üzere

(a) UKMNF modelinin UKSAM ile $w x, t$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $w x, t$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $w_{analitik} - w_{UKSAM}$ 26

Şekil 5. Örnek 4.1 için $x = 0.5, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için

(a) Uq-SHADM ile $\rho x, t$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

(b) UKSAM ile $\rho x, t$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması27

Şekil 6. Örnek 4.1 için $x = 0.5, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için

(a) Uq-SHADM ile $w x, t$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

(b) UKSAM ile $w x, t$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması27

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

UKMNF	: Uyumlu Kesirli Mertebeden Noyes Field
Uq-SHADM	: Uyumlu q-Sawi homotopi analiz dönüşüm metodu
UKSAM	: Uyumlu Kesirli Sawi ayrıştırma metodu
KİDDM	: Kesirli İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu
$T_{\mu}(f)$	: f fonksiyonunun μ mertebeden uyumlu kesirli türevi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
E_{μ}	: Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_cS_{\mu}$	: Uyumlu kesirli Sawi dönüşümü
$({}_cS_{\mu})^{-1}$	: Ters uyumlu kesirli Sawi dönüşümü
H_m	: Homotopi polinomu

1. GİRİŞ

Birçok bilim alanında oluşan problemlerin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin kurulması oldukça önemlidir. Bu modellemelerde ortaya konulan problemlerin çözülebilmesi ihtiyacı karşımıza diferansiyel denklemleri çıkartmaktadır. Doğada var olan problemlerin modellenmesinde tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler ile fiziksel olayları açıklamadaki eksiklikleri giderebilmesi ve bu problemlerin daha iyi modellenebilmesi için kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Son yıllarda kesirli hesap konusu oldukça önem kazanmaktadır. Güncel bir konu olmasına rağmen kesirli hesap temelleri oldukça eski olup, 1695 yılına dayanmaktadır. Leibniz' in, Eylül 1695' te, L' Hospital' e sorduğu “‘tamsayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?’” sorusuyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1730’ da Euler, 1772 ’de Lagrange, 1812’ de Laplace, 1819’ da Lacroix, 1822’de Fourier, 1832’de Liouville, 1847’de Riemann, 1865’ de Holmgren, 1867’ de Grünwald, 1868’ de Letnikov, 1869’ da Sonin, 1884’ te Laurent, 1888’ de Nekrassov, 1890’ da Krug ve 1917’ de Weyl gibi birçok matematikçi tarafından kesirli hesap üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır (Kilbas vd., 2006).

Kalkülüsün tamsayı mertebesinin ötesinde, kesirli kalkülüsün (FC) keyfi mertebesi vardır. Ünlü bilim insanları Leibniz ve L'Hospital yaklaşık 1695 yılında birbirleriyle ilk kez konuştuklarında, bu konu tartışılmıştır. Kesirli kalkülüs çok çeşitli doğrusal olmayan olguları doğru bir şekilde tanımlamak için kullanılabileceğinden, son zamanlarda birçok yazar bunu araştırmaya başlamıştır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin hem genetik materyal hem de yerel olmayan materyal özellikleri üzerinde etkisi vardır. Birçok tanınmış matematikçi kesirli kalkülüs üzerine çalışmış ve yazmıştır. Çalışmalarıyla kesirli hesabın temelini oluşturdular. Günümüzde, zamanla değişen sistemler sıklıkla incelenmekte ve kesirli kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak doğrusal olmayan modeller oluşturulmaktadır. Kaos teorisi de dahil olmak üzere çok sayıda kavram kesirli mertebeden kalkülüs teorisine bağlanmıştır. Doğrusal olmayan doğal sistemlerin özelliklerini karakterize etmek için kesirli diferansiyel denklemler kullanılır. Doğrusal olmayan süreçleri modelleyen kesirli diferansiyel denklemlere çeşitli analitik ve sayısal teknikler kullanarak kesin cevaplar elde ediyoruz Son yıllarda, kesirli hesap birçok gerçek problemin modellenmesinde kullanılmaktadır. Dünya problemlerinin kesirli matematiksel modellenmesi hızlı bir şekilde artmaktadır. Bu sebeplerden dolayı, birçok araştırmacı kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler üzerinde çalışmaktadır.

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, farklı bilim alanlarında birçok olayı analiz etmek için kullanılmaktadır (Baleanu vd., 2009).

Mohand ve Mahgoub, Sawi dönüşümü olarak bilinen yeni bir integral dönüşümü tanıtmıştır. Nüfus artışı ve azalması ile ilgili problemler Sawi dönüşümü kullanılarak tatmin edici bir şekilde açıklanmıştır. Volterra integral denklemlerinin çözümü için yeni bir yaklaşım olan "Sawi ayrıştırma yöntemi" ve uygulaması tanıtılmıştır. Sawi dönüşümü, adi diferansiyel denklem sistemleri için çözümlerin hesaplanmasında, özellikle de bir seri kimyasal reaksiyonda yer alan kimyasal reaktanların konsantrasyonunun belirlenmesi bağlamında kullanılmaktadır. Çift bulanık Sawi dönüşümü olarak adlandırılan yeni bir çift bulanık dönüşüm önerilmiştir. Bu makale, tek bulanık Sawi dönüşümü ve çift bulanık Sawi dönüşümü ile ilişkili temel özelliklerin resmi bir kanıtını sunmaktadır. Bu çalışma, homojen olmayan doğrusal bulanık telgraf denkleminin kesin çözümünü türetmek için genelleştirilmiş bir Hukuhara kısmi türevlenebilirliğini içeren bir teknik kullanmaktadır (Mahgoub ve Mohand, 2019; Singh ve Aggarwal, 2019; Higazy vd., 2020; Higazy ve Aggarwal, 2021).

Kesirli mertebeden türevlerinin matematiksel temeli, özellikle Liouville, Riemann, Caputo olmak üzere Miller ve Ross, Podlubny ve diğerleri gibi öncülerin ortak çabalarıyla atılmıştır (Miller ve Ross, 1993). Kesirli mertebeli hesap teorisi pratik projelerle ilişkilendirilmiştir. Kimyasal fizik, kaos teorisi, elektrodinamik, optik ve sinyal işleme gibi çeşitli uygulama alanlarında kesirli hesap sıklıkla kullanılmaktadır (Veeresha vd., 2019; Prakasha vd., 2019). Yukarıdaki olaylarda ortaya çıkan keyfi mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri, günlük hayatta ortaya çıkan doğrusal olmayan problemlerin doğasını ve davranışını tanımlamada önemli bir rol oynamaktadır.

Kesirli türevin klasik türevden en önemli farkı, kesirli türevin tek bir tanımının olmamasıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması olanağını sağlamaktadır. Bu türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi tanımlardır. Bu tanımların en çok kullanılanları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir (Kilbas vd, 2006; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999). Literatürde olan bu tanımlar birbirleri arasında geçişler sağlamasına rağmen fiziksel yorumları açısından farklılıklar göstermektedir.

Kesirli mertebeden modeller, türevlenebilirlik kavramlarını genişletir, uzay ve zaman kesirli mertebe türevleri aracılığıyla yerel olmayan ve sistem belleği etkilerini birleştirir. Bu özellikler, sorunu küçük ve daha küçük bölümlere ayırmadan olayları çoklu

zaman ve uzay ölçeklerinde modellememize izin verir. Kesirli dereceli bir modelin çoklu ölçekleri ne ölçüde kapsayacağı, kesirli türevlerin karmaşık olayların göze çarpan özelliklerini sınırlayabileceği veya yakalayabileceği temeldeki bir varsayıma dayanır. Ayrıca, klasik türevler doğası gereği yereldir, yani klasik türevleri kullanarak bir noktanın komşuluğundaki değişiklikleri tanımlayabiliriz, ancak kesirli türevleri kullanarak bir aralıktaki değişiklikleri tanımlayabiliriz. Bu özellik, deprem titreşimleri, difüzyon, esneklik, sinyal analizi, kuantum mekaniği ve diğerleri gibi daha fazla fiziksel olayı simüle etmek için keyfi mertebeden türevlerini uygun hale getirir. Disiplinler arası alanlarda birçok sistemin kesirli diferansiyel denklemler ile daha doğru ve daha rahat bir şekilde tanımlanabileceği bulunmuştur. Son zamanlarda, kesirli türevler, çeşitli karmaşık problemleri analiz etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, visko-elastik malzemelerin matematiksel modellenmesi, kesirli hesap yardımıyla incelenmektedir. Uyumlu türevi olan kesirli Burgers tipi denklemlerin yaklaşık analitik çözümü artık güç serileri yöntemi yardımıyla araştırılmıştır (Kurt vd., 2019). Polinom yöntemi için tam bir ayrım sisteminin yardımıyla zaman-kesirli birleştirilmiş Drinfel'd–Sokolov–Wilson denklemlerinin tam hareket eden dalga çözümlerini elde etmişlerdir (Singh vd., 2018). Zaman-kesirli Phi-4 denkleminin yeni analitik çözümü, Rezazadeh vd. nin 2018'de yaptığı çalışmadaki uyumlu kesirli türev aracılığıyla genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntem kullanılarak araştırılmıştır ve birçok bilim insanı, kesirli hesabı karmaşık problemlerin doğasını anlamak için bir araç olarak düşünmektedir (Hilfer, 2000; Prakasha vd., 2019).

Caputo anlamında uyumlu zaman-kesirli türevi olan Belousov-Zhabotinsky doğrusal olmayan salınım sistemi dikkate alınmıştır. Salınımlı kimyasal reaksiyonların Belousov-Zhabotinsky ailesi ilgi çekicidir çünkü hem uzaysal ilerleyen konsantrasyon dalgaları hem de zamansal salınımlar sergileyebilmekte, bunların her ikisine de çarpıcı renk değişiklikleri ile eşlik etmektedir. Kapalı bir sistemde bu reaksiyon binlerce salınım döngüsü üretebilmekte, bu da reaktanları sürekli olarak değiştirmek zorunda kalmadan kimyasal dalgaların ve modellerin incelenmesini mümkün kılmaktadır (Gibbs, 1980).

Öte yandan, son otuz yılda bir takım keşfedilen yeni yöntemler, yeni hesaplama algoritmaları ve geliştirilen sembolik programlamalar doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerini açıklamaya yardımcı olmuştur. Doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için analitik ve sayısal çözümler oldukça önemlidir. Çünkü karmaşık olayların çoğu matematiksel olarak doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Bununla bağlantılı olarak literatürde bu denklemleri çözmek için birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler; Adomian

ayırıştırma yöntemi (AAY) (Wazwaz, 1999), diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) (Ayaz, 2004; Abazari ve Ganji, 2011), homotopi analiz yöntemi (HAY) (Liao, 2004; Alkan, 2022), varyasyonel yineleme yöntemi (VYY) (He,1999; Chen ve Wang, 2010;Singh ve Kumar, 2017), q-homotopy Shehu analiz dönüşüm metodu (q-HSADM) (Bektaş ve Anaç, 2023); homotopi pertürbasyon metodu (HPM) (He,2003; Biazar ve Ghanbari, 2012; Sakar vd., 2016)' dir.

1992'de Liao Shijun, homotopi adı verilen temel diferansiyel geometri ve topoloji kavramını uygulayarak homotopi analiz yöntemini (HAY) (Liao, 1992; Liao, 1999) önermiştir. HAY, bilim ve teknolojiye ortaya çıkan problemler için doğrusallaştırma ve pertürbasyon olmaksızın yaklaşık analitik çözümü bulmak için etkin bir şekilde kullanılmıştır. Bu nedenle, bu sınırlamaların üstesinden gelmek için, bu algoritmanın hali hazırda mevcut dönüştürme teknikleri ile bir kombinasyonuna ihtiyaç duyulmuştur. Singh ve arkadaşları tarafından (Singh vd., 2016) q-homotopi analiz metodu (q-HAM) ve Laplace dönüşümünün bir birleşimi olan, q-homotopi analiz dönüşüm metodu (q-HADM) önerilmiştir. Bu yöntem, izin verilen kısa bir bölgede hızlı bir şekilde kesin çözüme yakınsayan seri çözümü kontrol etmekte ve sonuca ulaştırmaktadır. Önerilen tekniğin geliştirilmesi, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri hem sayısal hem de analitik olarak çözmek için iki güçlü algoritmayı birleştirme kapasitesidir. Yarı-analitik tekniklerle Laplace dönüşümünün, bilim ve teknolojiye ortaya çıkan doğrusal olmayan karmaşık modeller ve olayların çözümlerini hesaplamak için daha az işlem zamanı gerektirdiğini ortaya koymaktadır. q-HADM çözümü, iki yardımcı parametre $\hbar$ ve n ' yi içerir, bu da çözümün yakınsamasını ayarlanmasına ve kontrol edilmesine olanak sağlamaktadır. Önerilen tekniğin, elde edilen sonuçların büyük verimliliğini korurken, diğer geleneksel tekniklerle karşılaştırıldığında zaman ve işin hesaplanmasını azaltabileceğini söyleyebiliriz. Son zamanlarda, Srivastava ve arkadaşları gibi birçok bilin insanı, kesirli mertebeden titreşim denklemi modeli incelemektedir (Srivastava vd., 2017), Singh ve arkadaşları tarafından, ısı-dağılım denkleminin çözümünü bulmak için bu yöntem kullanılır (Singh vd., 2018), Bulut ve arkadaşları rastgele mertebeden HIV enfeksiyonu modelini analiz etmişlerdir (Bulut vd., 2018), Prakash ve arkadaşları kesirli mertebeden çok boyutlu telgraf denklemi için yaklaşık analitik çözümü bulmuşlardır (Prakash vd., 2019), Kumar ve arkadaşları Lienard denkleminin modelini analiz etmişlerdir (Kumar vd., 2018) ve birçok yazar doğrusal olmayan problemler için yaklaşık analitik çözüm bulmaktadırlar (Veeresha vd., 2019; Prakash vd., 2019).

Bu tezde, iki yeni sayısal metot önerilmektedir. Bu metotlardan ilki; uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm metodunu, uyumlu kesirli Sawi dönüşümü ile birleşmesinden

oluşan uyumlu q -Sawi homotopi analiz dönüşüm metodu (U q -SHADM), diğeri ise, Adomian ayrıştırma metodunun, uyumlu kesirli Sawi dönüşümü ile birleşmesinden oluşan uyumlu kesirli Sawi ayrıştırma metodudur (UKSAM). Önerilen yöntemler, yeni hibrit metotlardır. Uyumlu kesirli mertebeden Noyes Field (UKMNF) modelinin önerilen metotlar kullanılarak yeni sayısal çözümleri elde edilmektedir. Sunulan metotların etkili ve güvenilir olduğunu göstermek üzere nümerik simülasyonlar yapılmıştır. Mutlak hata hesapları yapılmaktadır. Yeni üretilen her iki metodun da lineer olmayan uyumlu kesirli mertebeden matematiksel modelleri analiz etmek için etkili olduğu öngörülmektedir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 2.1 (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014): $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O halde, $\forall x > 0$ için, f' in μ mertebeden uyumlu kesirli türevi:

$$T_{\mu}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \mu \in (0, 1] \quad (1)$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1 (Khalil vd., 2014): $\mu \in (0, 1]$ ve f, g bir $x > 0$ noktasında μ –türevlenebilir olsun. Öyleyse,

$$\text{a) } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için, } T_{\mu}(af + bg) = aT_{\mu}(f) + bT_{\mu}(g), \quad (2)$$

$$\text{b) } \forall p \in \mathbb{R} \text{ için, } T_{\mu}(x^p) = px^{p-1}, \quad (3)$$

$$\text{c) } f(t) = \lambda \text{ için } T_{\mu}(\lambda) = 0, \quad (4)$$

$$\text{d) } T_{\mu}(fg) = fT_{\mu}(g) + gT_{\mu}(f), \quad (5)$$

$$\text{e) } T_{\mu}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\mu}(f) - fT_{\mu}(g)}{g^2}, \quad (6)$$

$$\text{f) } f, \text{ diferansiyellenebilir ise } T_{\mu}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t). \quad (7)$$

Tanım 2.2 (Khalil vd., 2014): f, x 'te n –defa türevlenebilir olsun. $\forall x > 0$ için, f 'in μ mertebeli uyumlu kesirli türevi şu şekilde tanımlıdır;

$$T_{\mu}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x + \varepsilon x^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(x)}{\varepsilon}, \quad \mu \in (n, n + 1]. \quad (8)$$

Burada, $[\mu]$ gösterimi μ' ya eşit veya daha büyük en küçük tamsayıdır.

Teorem 2.2 (Khalil vd., 2014): f, x 'te n –defa türevlenebilir olsun. Öyleyse, $\forall x > 0, \mu \in (n, n + 1]$ için

$$T_{\mu}(f(x)) = x^{[\mu]-\mu} f^{[\mu]}(x) \quad (9)$$

tir.

Tanım 2.3 (Mittag-Leffler, 1903): Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\mu}}{\Gamma(n\mu + 1)}. \quad (10)$$

ile verilir. Mittag-Leffler fonksiyonu E_{μ} ile gösterilir.

Tanım 2.4 $0 < \mu \leq 1$ olmak üzere, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. f 'nin μ derecesindeki uyumlu kesirli Sawi dönüşümü

$${}_cS_{\mu}[f(t)](v) = R_{\mu}(v) = \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-t^{\mu}}{v\mu}\right) f(t) t^{\mu-1} dt, v > 0 \quad (11)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.5 $0 < \mu \leq 1$ olmak üzere, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. $f(t)$ 'nin uyumlu kesirli mertebeden türevinin uyumlu kesirli Sawi dönüşümü

$${}_cS_{\mu}[T_{\mu}f(t)](v) = \frac{1}{v^{\mu}} R_{\mu}(v) - \sum_{k=0}^{\sigma-1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\mu-(k-1)} f^{(k)}(0^+), \sigma - 1 < \mu \quad (12)$$

şeklinde tanımlıdır.

3. ÜRETİLEN METOTLAR

Bu kısımda, tezde kullanılan yöntemler verilmektedir.

3.1. Uyumlu q-Sawi Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (Uq-SHADM)

$${}_tT_\mu w(x, t) + Aw(x, t) + Hw(x, t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \mu \leq n \quad (13)$$

Uyumlu kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada A lineer operatörü, H lineer olmayan operatörü, $f(x, t)$ kaynak terimini göstermektedir. ${}_tT_\mu, \mu$. mertebeden bir uyumlu kesirli türev operatörüdür.

Şimdi, (13) denkleminde uyumlu kesirli Sawi dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\frac{{}_cS_\mu[w(x, t)]}{v^\mu} - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\mu-(k-1)} w^{(k)}(x, 0) = {}_cS_\mu[f(x, t) - Aw(x, t) - Hw(x, t)] \quad (14)$$

eşitliği elde edilir.

(14) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &{}_cS_\mu[w(x, t)] - v^\mu \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\mu-(k-1)} w^{(k)}(x, 0) + v^\mu {}_cS_\mu[Aw(x, t) + Hw(x, t)] \\ &- v^\mu {}_cS_\mu[f(x, t)] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

elde edilir. Reel $\varphi(x, t; q)$ fonksiyonu için homotopi analiz metodu (HAM) yardımıyla doğrusal olmayan operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, t; q)] &= {}_cS_\mu[\varphi(x, t; q)] - v^\mu \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\mu-(k-1)} \varphi^{(k)}(x, t; q)(0^+) \\ &+ v^\mu {}_cS_\mu[A\varphi(x, t; q) + H\varphi(x, t; q)] - v^\mu {}_cM_\alpha[f(x, t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ dir.

Aşağıdaki gibi bir homotopi kurulur:

$$(1 - nq) {}_cS_\alpha[\varphi(x, t; q) - w_0(x, t)] = hqH^*(x, t)H[\varphi(x, t; q)]. \quad (17)$$

Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve ${}_cS_\alpha$, uyumlu kesirli Sawi dönüşümünü göstermektedir. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için, (9) denklemindeki sonuçlar sırasıyla sağlanır:

$$\varphi(x, t; 0) = w_0(x, t), \varphi\left(x, t; \frac{1}{n}\right) = w(x, t). \quad (18)$$

Bu nedenle, q' 'yu 0' dan $\frac{1}{n}$ 'ye yükselterek, $\varphi(x, t; q)$ çözümü $w_0(x, t)$ 'den $w(x, t)$ çözümüne yakınsar. Taylor teoremi q civarında açılıp $\varphi(x, t; q)$ 'yu genişleterek, şu ifade elde edilir:

$$\varphi(x, t; q) = w_0(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_m(x, t)q^m. \quad (19)$$

Burada,

$$w_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (20)$$

dır. (18) denklemi, $q = \frac{1}{n}$ 'de uygun n ve h için $w_0(x, t)$ 'ye yakınsar. Ardından, orijinal doğrusal olmayan denkleminin çözümü

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (21)$$

şeklinde bulunur.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m -kez türevi alınır ve $m!$ ye bölersek, sonra $q = 0$ için

$${}_cS_\mu[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = hH^*(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \quad (22)$$

olarak bulunur.

Burada vektörler

$$\vec{w}_m = \{w_0(x, t), w_1(x, t), \dots, w_m(x, t)\} \quad (23)$$

ile tanımlıdır. (21) denkleminde ters uyumlu kesirli Sawi dönüşümü uygulandığında

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h \left({}_c S_\mu \right)^{-1} [H^*(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \quad (24)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = & {}_c S_\mu [w_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{v} w_0(x, t) + v^\mu {}_c S_\mu [Aw_{m-1}(x, t) \\ & + H_{m-1}(x, t) - f(x, t)] \end{aligned} \quad (25)$$

dir.

Burada

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (26)$$

dir. Burada, H_m homotopi polinomudur ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} H_m^* &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad \text{ve} \\ \varphi(x, t; q) &= \varphi_0 + q\varphi_1 + q^2\varphi_2 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

(23) ve (24) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} w_m(x, t) = & (k_m + h)w_{m-1}(x, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) w_0(x, t) \\ & + h \left({}_c S_\mu \right)^{-1} [v^\mu {}_c S_\mu [Aw_{m-1}(x, t) + H_{m-1}(x, t)]. \end{aligned} \quad (28)$$

şeklinde bulunur. Uq-SHADM kullanılarak seri çözümü

$$w(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (29)$$

olarak bulunur.

3.2. Uyumlu Kesirli Sawi Ayrıştırma Metodu (UKSAM)

$${}_tT_\mu w(x, t) + Aw(x, t) + Hw(x, t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \mu \leq n \quad (30)$$

uyumlu kesirli mertebeden lineer olmayan oransal gecikmeli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada A lineer operatörü, H lineer olmayan operatörü, $f(x, t)$ dış kuvveti göstermektedir. ${}_tT_\mu$, μ -yüncü mertebeden bir uyumlu kesirli türev operatörüdür. Şimdi, (29) denklemine uyumlu kesirli Sawi dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\frac{{}_cS_\mu[w(x, t)]}{v^\mu} - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\mu-(k-1)} w^{(k)}(x, 0) = {}_cS_\mu[f(x, t) - Aw(x, t) - Hw(x, t)] \quad (31)$$

eşitliği bulunmaktadır

(31) denklemini düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} &{}_cS_\mu[w(x, t)] - v^\mu \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\mu-(k-1)} w^{(k)}(x, 0) + v^\mu {}_cS_\mu[Aw(x, t) + Hw(x, t)] \\ &- v^\mu {}_cS_\mu[f(x, t)] = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

olarak elde edilir.

(32) denklemine ters uyumlu kesirli Sawi dönüşümü uygulanırsa,

$$w(x, t) = A(x, t) - \left({}_cS_\mu\right)^{-1} \{v^\mu {}_cS_\mu[Aw(x, t) + Hw(x, t)]\} \quad (33)$$

olur. Burada $A(x, t)$, başlangıç koşulundan ve homojen olmayan terimden elde edilen terimi göstermektedir. Şimdi, sonsuz seri çözümünün şu şekilde olduğunu varsayalım:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (34)$$

dir.

(32) ve (33) denklemlerini kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = A(x, t) - \left({}_c S_{\mu} \right)^{-1} \left\{ v^{\mu} {}_c S_{\mu} \left[A \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(w_n(x, t)) \right] \right\} \quad (35)$$

elde edilir. Burada B_n , Adomian polinomunu göstermektedir. (34) denkleminin her iki tarafı karşılaştırılırsa,

$$w_0(x, t) = A(x, t), \quad (36)$$

$$w_1(x, t) = -\left({}_c S_{\mu} \right)^{-1} \{ v^{\mu} {}_c S_{\mu} [w_0(\rho_i x, \sigma_i t) + B_0] \}, \quad (37)$$

$$w_2(x, t) = -\left({}_c S_{\mu} \right)^{-1} \{ v^{\mu} {}_c S_{\mu} [w_1(\rho_i x, \sigma_i t) + B_1] \}, \quad (38)$$

$\vdots$

olur. Benzer şekilde, genelleştirilirse

$$w_{n+1}(x, t) = -\left({}_c S_{\mu} \right)^{-1} \{ v^{\mu} {}_c S_{\mu} [w_n(x, t) + B_n] \}, m \geq 1 \quad (39)$$

elde edilir.

Böylece, yaklaşık çözüm $w(x, t)$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (40)$$

olur.

4.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Örnek 4.1 (Akinyemi, 2020): Uyumlu kesirli mertebeden Noyes Field (UKMNF) modelini ele alalım.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\mu \rho(x, t)}{\partial t^\mu} = \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + \rho - \rho^2 - \delta \rho w(x, t), \\ \frac{\partial^\mu w(x, t)}{\partial t^\mu} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho w(x, t) \end{cases} \quad (41)$$

dir.

Bu modelin başlangıç koşulları,

$$\begin{cases} \rho(x, 0) = \frac{1}{\left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x\right) + 1 \right)^2}, \\ w(x, 0) = \frac{(1 - \lambda) \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x\right) \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x\right) + 1 \right)}{\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x\right) + 1 \right)^2} \end{cases} \quad (42)$$

dır. Burada $\lambda \neq 1$ ve δ olmak üzere pozitif sabitlerdir. $x \in [-10, 10], t \in [0, 1], 0 < \mu \leq 1$ dir.

4.1. Durum (i) : UKMNF Modeli için Uq-SHADM çözümü

Şimdi, (41) denkleminin uyumlu kesirli Sawi dönüşümünü uygulayarak ve (42) başlangıç koşullarını kullanarak,

$$\frac{{}_c S_\mu[\rho(x, t)]}{v} - \frac{\rho(x, 0)}{v^2} = {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + \rho - \rho^2 - \delta \rho w(x, t) \right], \quad (43)$$

$$\frac{{}_c S_\mu[w(x, t)]}{v} - \frac{w(x, 0)}{v^2} = {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho w(x, t) \right] \quad (44)$$

(43) ve (44) denklemleri düzenlendiğinde,

$${}_cS_\mu[\rho(x, t)] = \frac{\rho(x, 0)}{v} + v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + \rho - \rho^2 - \delta \rho w(x, t) \right], \quad (45)$$

$${}_cS_\mu[w(x, t)] = \frac{w(x, 0)}{v} + v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho(x, t) w(x, t) \right]. \quad (46)$$

eşitlikleri bulunur.

(45) ve (46) eşitlikleri kullanıldığında lineer olmayan operatörler,

$$\begin{aligned} N^1[\varphi(x, t; q)] &= {}_cS_\mu[\varphi(x, t; q)] - \frac{1}{v \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2} \\ &+ v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, t; q)}{\partial x^2} + \varphi(x, t; q) - \varphi^2(x, t; q) - \delta \varphi(x, t; q) \psi(x, t; q) \right], \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} N^2[\psi(x, t; q)] &= {}_cS_\mu[\psi(x, t; q)] - \frac{(1 - \lambda) \exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)}{\delta v \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2} \\ &+ v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \psi(x, t; q)}{\partial x^2} - \lambda \varphi(x, t; q) \psi(x, t; q) \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

olarak tanımlanır.

Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemleri şu şekilde tanımlanır:

$${}_cS_\mu[\rho_m(x, t) - k_m \rho_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_{1,m}[\vec{\rho}_{m-1}], \quad (49)$$

$${}_cS_\mu[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_{2,m}[\vec{w}_{m-1}] \quad (50)$$

Burada,

$$\mathcal{R}_{1,m}[\vec{\rho}_{m-1}] = {}_cS_\mu[\vec{\rho}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{v \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2}$$

$$\begin{aligned} & -v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + \rho_{m-1}(x, t) - \sum_{r=0}^{m-1} \rho_r(x, t) \rho_{m-1-r}(x, t) \right. \\ & \left. - \delta \sum_{r=0}^{m-1} \rho_r(x, t) w_{m-1-r}(x, t) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,m}[\vec{w}_{m-1}] &= {}_cS_\mu[\vec{w}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{(1 - \lambda) \exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right)}{\delta v \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2} \\ & \times \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right) - v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - \lambda \sum_{r=0}^{m-1} \rho_r(x, t) w_{m-1-r}(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

‘ dir. (49)-(50) denklemlerine ters uyumlu kesirli Sawi dönüşümü uygulandığında,

$$\rho_m(x, t) = k_m \rho_{m-1}(x, t) + h \left({}_cS_\alpha \right)^{-1} \{ \mathcal{R}_{1,m}[\vec{\rho}_{m-1}] \}, \quad (53)$$

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h \left({}_cS_\alpha \right)^{-1} \{ \mathcal{R}_{2,m}[\vec{w}_{m-1}] \} \quad (54)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşullarının kullanılmasıyla,

$$\rho_0(x, t) = \frac{1}{\left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2}, \quad (55)$$

$$w_0(x, t) = \frac{(1 - \lambda) \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)}{\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)^2}, \quad (56)$$

olur.

$\rho_1(x, t)$ ve $w_1(x, t)$ değerlerini bulmak için, (53)-(54) eşitliklerinde $m = 1$ koyarak,

$$\rho_1(x, t) = \frac{-2ht^\mu \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) \left\{ \left[\left(\frac{3}{2} + \lambda\right) \delta + \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2} \right] \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) \right.}{3\mu\delta \left(\exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + 1\right)^4} \quad (57)$$

$$\left. + \left(-\frac{\lambda}{2} + 3\right) \delta + 3\lambda - 3 \right\}$$

$$w_1(x, t) = -\frac{5}{3}h \frac{t^\mu(-1 + \lambda)\lambda \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right)}{\mu\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)^3}. \quad (58)$$

olarak elde edilir.

Benzer olarak, $\rho_2(x, t)$ ve $w_2(x, t)$ değerlerini bulmak için, (53)-(54) eşitliklerinde $m = 2$ koyarak

$$\begin{aligned} \rho_2(x, t) = & -\frac{2}{3} \frac{h(n+h)t^\mu \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right)}{\mu\delta \left(\exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + 1\right)^4} \left(\left(\left(\frac{3}{2} + \lambda\right) \delta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}\right) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + \left(-\frac{\lambda}{2} + 3\right) \delta + 3\lambda - 3 \right) \\ & + \frac{2}{9\mu^2\delta^2 \left(\exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + 1\right)^6} \left[h^2 t^{2\mu} \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) \right. \\ & \left. \times \left(\frac{9}{4}(-1 + \lambda) ((\lambda - 3)\delta - 4\lambda + 4)(\delta - 1) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\lambda + \frac{3}{2} \right) \delta + \frac{3}{2} \lambda - \frac{3}{2} \right)^2 \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{2} \right) + \left(\left(\frac{-33}{8} \lambda^2 + \frac{9\lambda}{2} + 9 \right) \delta^2 \right. \\
& + \left(\frac{9\lambda^2}{2} + \frac{27\lambda}{2} - 18 \right) \delta + 9(-1 + \lambda)^2 \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{3} \right) \\
& \left. - \frac{1}{8} \delta ((\lambda - 6)^2 \delta + 24\lambda^2 + 12\lambda - 36) \right) \Bigg), \tag{59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(x, t) = & \frac{-5h(n + h)t^\mu(-1 + \lambda)\lambda \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right)}{3\mu\delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^3} + \frac{8}{9\mu^2\delta^2 \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^6} \\
& \times \left[h^2 t^{2\mu} \lambda (-1 + \lambda) \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) \left(\frac{-9}{4} (-1 + \lambda)(\delta - 1) \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) \right. \right. \\
& + \left(\left(\delta + \frac{9}{16} \right) \lambda + \frac{9}{16} \delta - \frac{9}{16} \right) \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) \\
& \left. \left. + \frac{3}{4} \left(-3 + \left(3 + \frac{\delta}{8} \right) \lambda + 3\delta \right) \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) - \frac{25}{32} \lambda \delta \right) \right]. \tag{60}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, UKMNF modelinin Uq-SHADM çözümleri

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m, \tag{61}$$

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m. \tag{62}$$

ile verilmektedir.

Eğer (61)-(62) denklemlerinde $\mu = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $M \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^M \rho_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (63)$$

$$\sum_{m=1}^M w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (64)$$

serileri, UKMNF modelinin analitik çözümleri olan

$$\rho(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{5\lambda}{3}t\right)}{\left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + \exp\left(\frac{5\lambda}{6}t\right)\right)^2}, \quad (65)$$

$$w(x, t) = \frac{(1 - \lambda) \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 2 \exp\left(\frac{5\lambda}{6}t\right)\right)}{\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + \exp\left(\frac{5\lambda}{6}t\right)\right)^2} \quad (66)$$

'ye yakınsar.

4.2. Durum (ii): UKMNF Modeli için UKSAM çözümü

Şimdi, (41) denkleminde uyumlu kesirli Sawi dönüşümünü uygulayarak ve (42) başlangıç koşullarını kullanarak,

$$\frac{cS_\mu[\rho(x, t)]}{v} - \frac{\rho(x, 0)}{v^2} = cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + \rho - \rho^2 - \delta \rho w(x, t) \right] \quad (67)$$

$$\frac{cS_\mu[w(x, t)]}{v} - \frac{w(x, 0)}{v^2} = cS_\mu \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho w(x, t) \right] \quad (68)$$

olarak elde edilir. (67) ve (68) denklemleri düzenlendiğinde,

$$cS_\mu[\rho(x, t)] = \frac{\rho(x, 0)}{v} + v cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + \rho - \rho^2 - \delta \rho w(x, t) \right], \quad (69)$$

$$cS_\mu[w(x, t)] = \frac{w(x, 0)}{v} + v cS_\mu \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho(x, t) w(x, t) \right] \quad (70)$$

olur.

(69) ve (70) denklemlerinde ters uyumlu kesirli Sawi dönüşümü uygulandığında,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)^2} + ({}_cS_\mu)^{-1} \left\{ v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} + \rho - \rho^2 - \delta \rho w(x, t) \right] \right\}, \quad (71)$$

$$w(x, t) = \frac{(1 - \lambda) \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)}{\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)^2} + ({}_cS_\mu)^{-1} \left\{ v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho(x, t) w(x, t) \right] \right\} \quad (72)$$

$\rho(x, t)$ ve $w(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonlarının sonsuz seri çözümlerinin

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(x, t) \quad (73)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (74)$$

olduğunu varsayalım. Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak,

$$\rho_0(x, t) = \frac{1}{\left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)^2}, \quad (75)$$

$$w_0(x, t) = \frac{(1 - \lambda) \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)}{\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1\right)^2}, \quad (76)$$

olarak elde edilir.

$$\rho_{s+1}(x, t) = ({}_c S_\mu)^{-1} \left[v {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho_s(x, t)}{\partial x^2} + \rho_s(x, t) - (\rho_s(x, t))^2 - \delta \rho_s(x, t) w_s(x, t) \right] \right], s = 0, 1, 2, \dots \quad (77)$$

$$w_{s+1}(x, t) = ({}_c S_\mu)^{-1} \left[v {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 w_s(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho_s(x, t) w_s(x, t) \right] \right], \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (78)$$

olarak elde edilir. (77) ve (78) denklemlerinin her iki tarafını karşılaştırarak, (42) başlangıç koşulların ve (77)-(78) iterasyonundan faydalanılarak

$$\rho_0(x, t) = \frac{1}{\left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2}, \quad (79)$$

$$w_0(x, t) = \frac{(1 - \lambda) \exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)}{\delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^2}, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \rho_1(x, t) &= ({}_c S_\mu)^{-1} \left[v {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho_0(x, t)}{\partial x^2} + \rho_0(x, t) - (\rho_0(x, t))^2 - \delta \rho_0(x, t) w_0(x, t) \right] \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{t^\mu \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) \left(\left(\left(\left(\frac{3}{2} + \lambda \right) \delta + \frac{3}{2} \lambda - \frac{3}{2} \right) \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) + \left(-\frac{\lambda}{2} + 3 \right) \delta + 3\lambda - 3 \right) \right)}{\mu \delta \left(\exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right) + 1 \right)^4}, \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= ({}_c S_\mu)^{-1} \left[v {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho_0(x, t) w_0(x, t) \right] \right] \\ w_1(x, t) &= \frac{5}{3} \frac{t^{\mu(-1+\lambda)} \lambda \exp \left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6} \right)}{\mu \delta \left(\exp \left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}} x \right) + 1 \right)^3}, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(x, t) &= ({}_c S_\mu)^{-1} \left[v {}_c S_\mu \left[\frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial x^2} + \rho_1(x, t) - (\rho_1(x, t))^2 - \delta \rho_1(x, t) w_1(x, t) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{9\mu^2\delta^2 \left(\exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + 1 \right)^6} \left[t^{2\mu} \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) \left(\frac{9}{4}(-1+\lambda)((\lambda-3)\delta - 4\lambda + 4) \right. \right. \\
&\quad \times (\delta-1) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + \left(\left(\lambda + \frac{3}{2} \right) \delta + \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2} \right)^2 \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{2}\right) + \left(\left(\frac{-33}{8}\lambda^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9\lambda}{2} + 9 \right) \delta^2 + \left(\frac{9\lambda^2}{2} + \frac{27\lambda}{2} - 18 \right) \delta + 9(-1+\lambda)^2 \right) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{3}\right) \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{8} \delta ((\lambda-6)^2\delta + 24\lambda^2 + 12\lambda - 36) \right) \right], \tag{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(x, t) &= ({}_cS_\mu)^{-1} \left[v {}_cS_\mu \left[\frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho_1(x, t) w_1(x, t) \right] \right] \\
&= \frac{8}{9\mu^2\delta^2 \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 1 \right)^6} \left[t^{2\mu} \lambda (-1+\lambda) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) \left(\frac{-9}{4}(-1+\lambda)(\delta-1) \right. \right. \\
&\quad \times \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + \left(\left(\delta + \frac{9}{16} \right) \lambda + \frac{9}{16}\delta - \frac{9}{16} \right) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) + \frac{3}{4} \left(-3 + \left(3 + \frac{\delta}{8} \right) \lambda \right. \\
&\quad \left. \left. + 3\delta \right) \exp\left(\frac{x\sqrt{6\lambda}}{6}\right) - \frac{25}{32}\lambda\delta \right) \right] \tag{84}
\end{aligned}$$

⋮

iterasyonları elde edilir. Benzer şekilde

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(x, t) = \rho_0(x, t) + \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t) + \dots \tag{85}$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots \tag{86}$$

(85)-(86) eşitliklerinde UKMNF modelinin UKSAM çözümleri

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (87)$$

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (88)$$

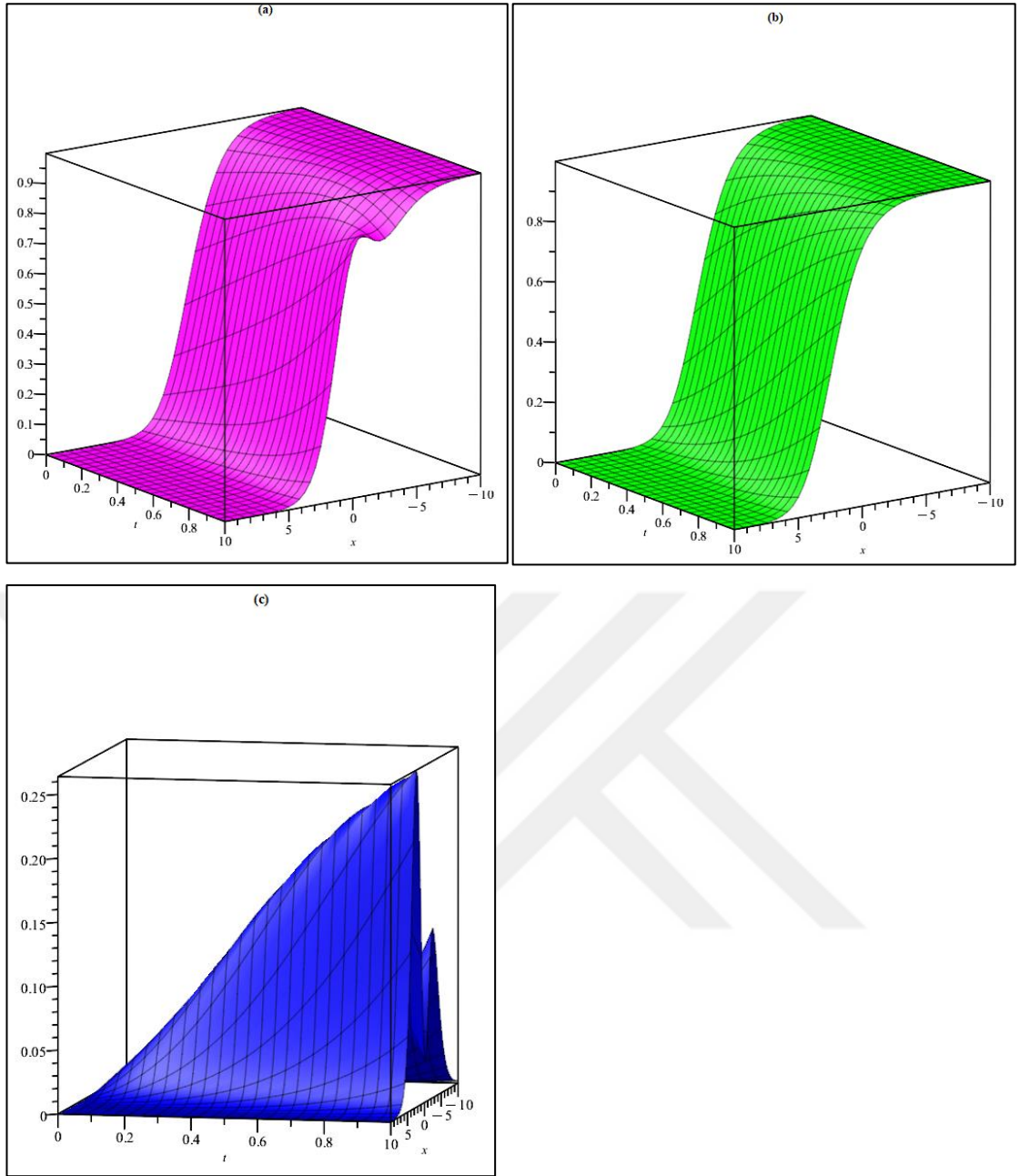
olarak elde edilir. (85)-(86) eşitliklerinde $\mu = 1, n = 1, h = -1$ değerleri için

$$\rho(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{5\lambda}{3}t\right)}{\left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + \exp\left(\frac{5\lambda}{6}t\right)\right)^2}, \quad (89)$$

$$w(x, t) = \frac{(1 - \lambda) \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + 2 \exp\left(\frac{5\lambda}{6}t\right)\right)}{\delta \left(\exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{6}}x\right) + \exp\left(\frac{5\lambda}{6}t\right)\right)^2} \quad (90)$$

UKMNF modelinin analitik çözümlerine yakınsar.

$\rho(x, t)'$ nin Uq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekil 2' de $\rho(x, t)'$ nin UKSAM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları verilmiştir. $w(x, t)'$ nin Uq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları Şekil 3' te gösterilmiştir. Şekil 4' te $w(x, t)'$ nin UKSAM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları verilmiştir. Farklı μ değerleri için $\rho(x, t)'$ nin Uq-SHADM, UKSAM ve kesin çözümlerin karşılaştırılması iki boyutlu grafiklerde Şekil 5' te gösterilmiştir. Şekil 6' da, farklı μ değerleri için $w(x, t)'$ nin Uq-SHADM, UKSAM ve kesin çözümlerin karşılaştırılması iki boyutlu grafiklerde gösterilmiştir.

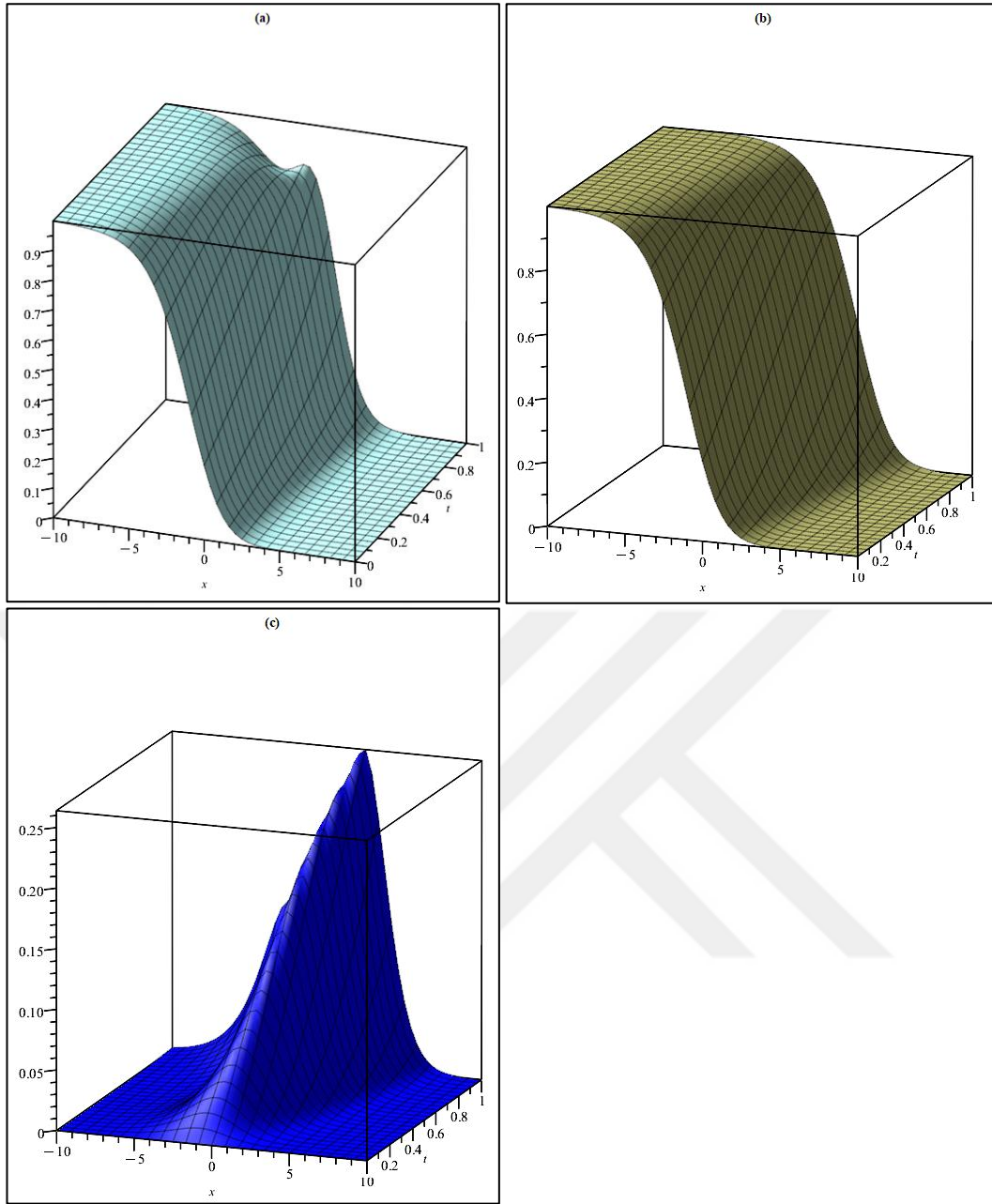


Şekil 1. Örnek 4.1 için $\mu = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ olmak üzere

(a) UKMNF modelinin Uq-SHADM ile $\rho(x, t)$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $\rho(x, t)$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $|\rho_{analitik} - \rho_{Uq-SHADM}|$

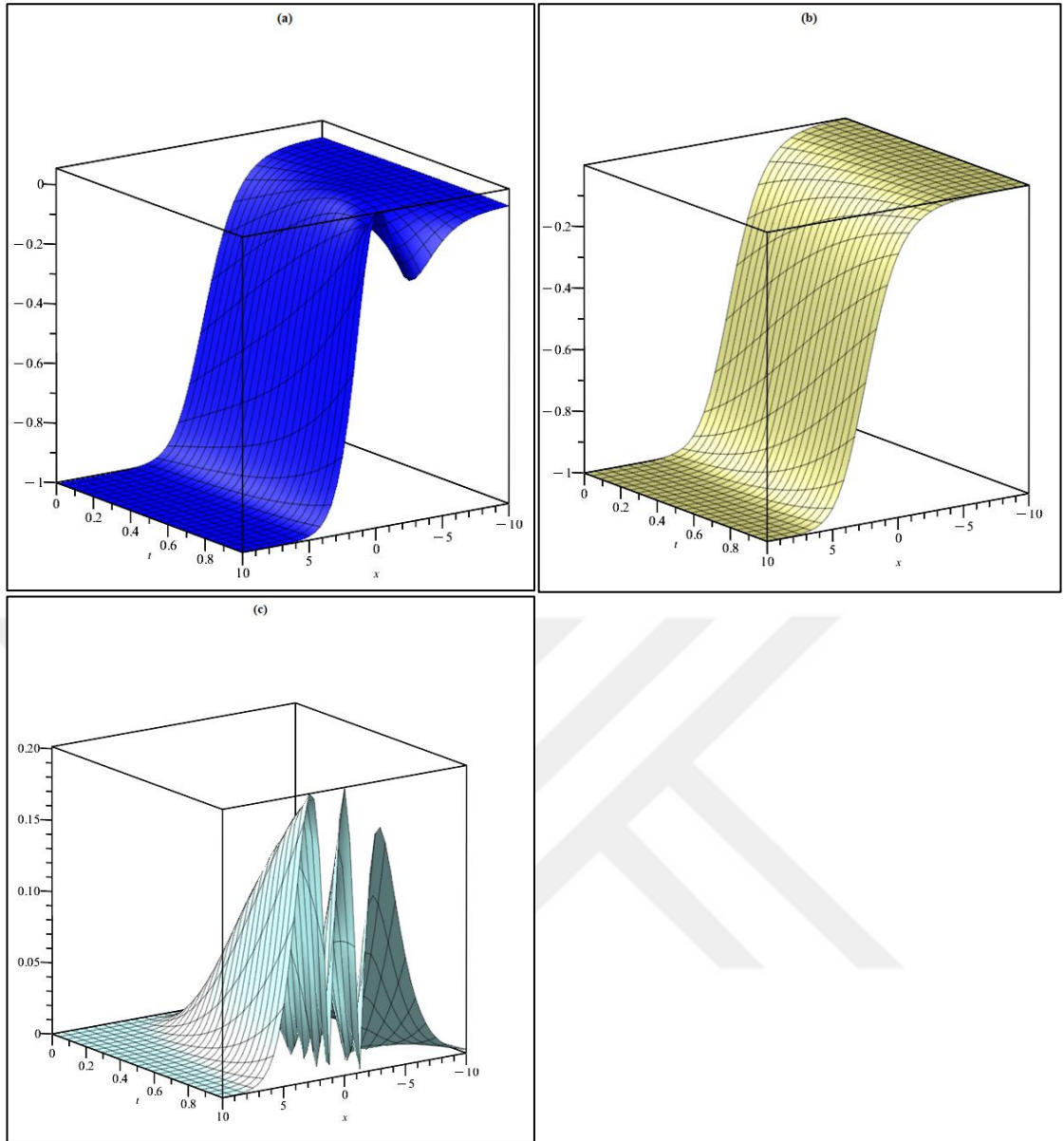


Şekil 2. Örnek 4.1 için $\mu = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ olmak üzere

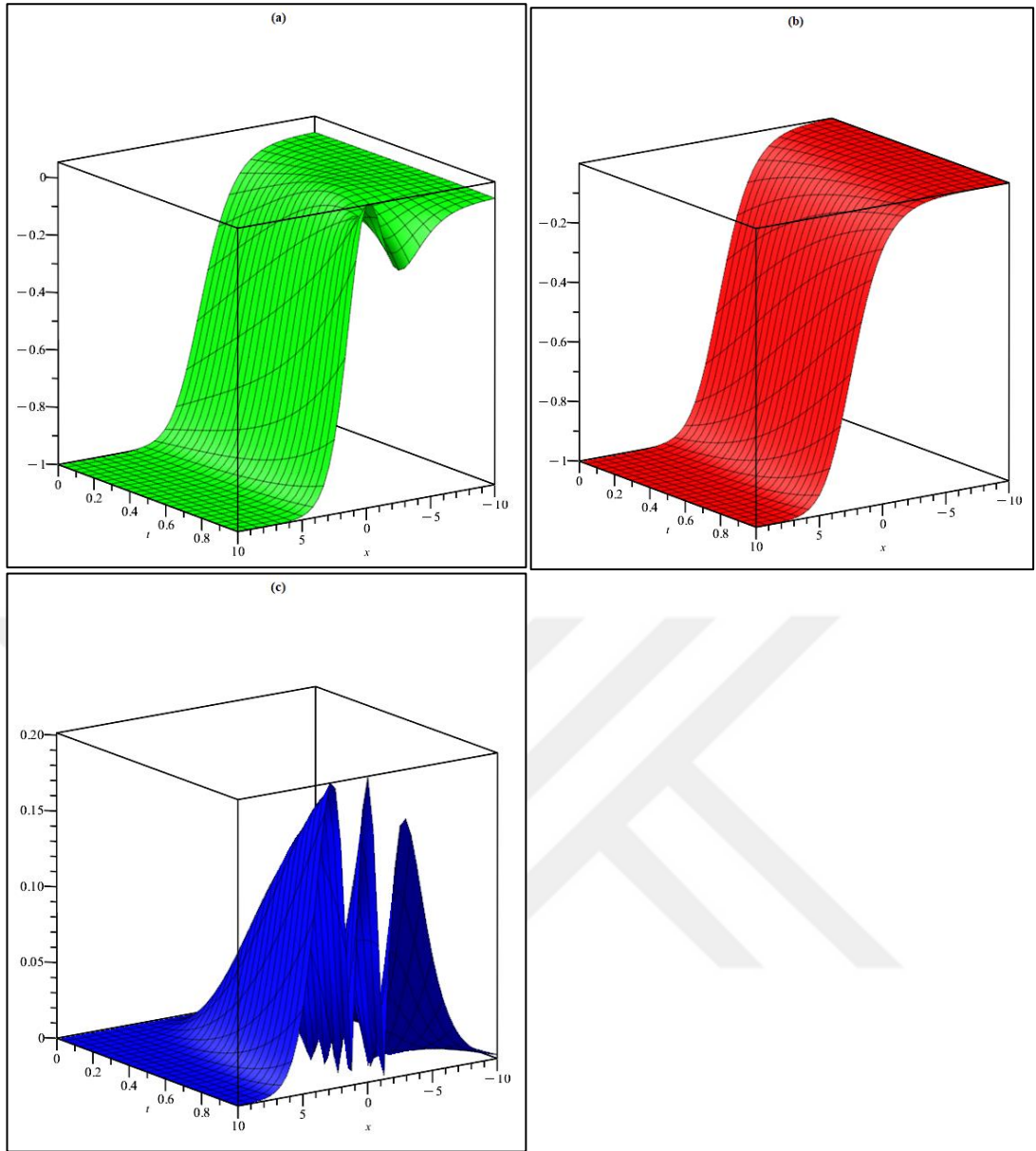
(a) UKMNF modelinin UKSAM ile $\rho(x, t)$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $\rho(x, t)$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $|\rho_{analitik} - \rho_{UKSAM}|$



Şekil 3. Örnek 4.1 için $\mu = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ olmak üzere
 (a) UKMNF modelinin Uq-SHADM ile $w(x, t)$ çözümü
 (b) UKMNF modelinin $w(x, t)$ analitik çözümü
 (c) Mutlak hata = $|w_{\text{analitik}} - w_{\text{Uq-SHADM}}|$

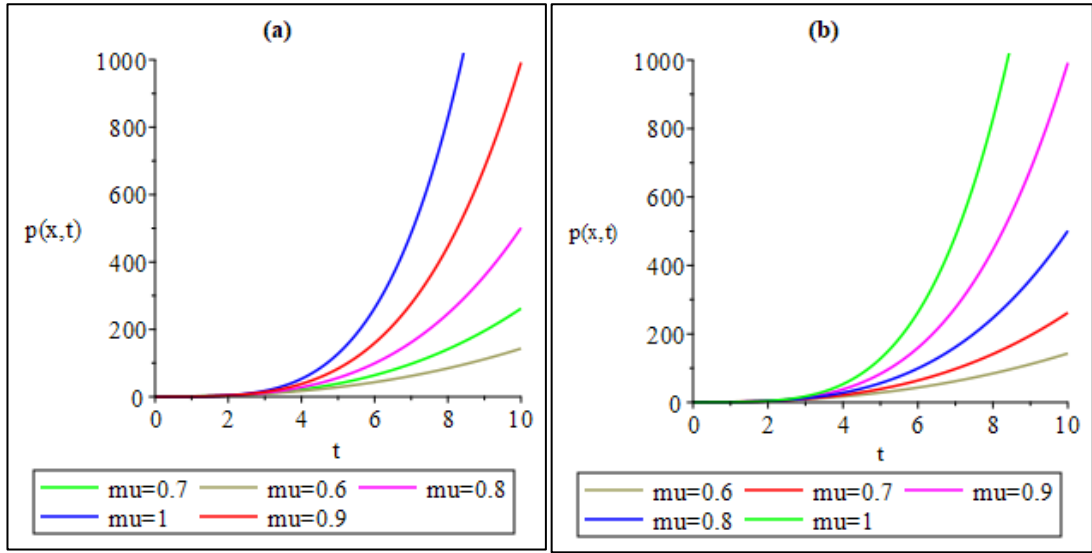


Şekil 4. Örnek 4.1 için $\mu = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ olmak üzere

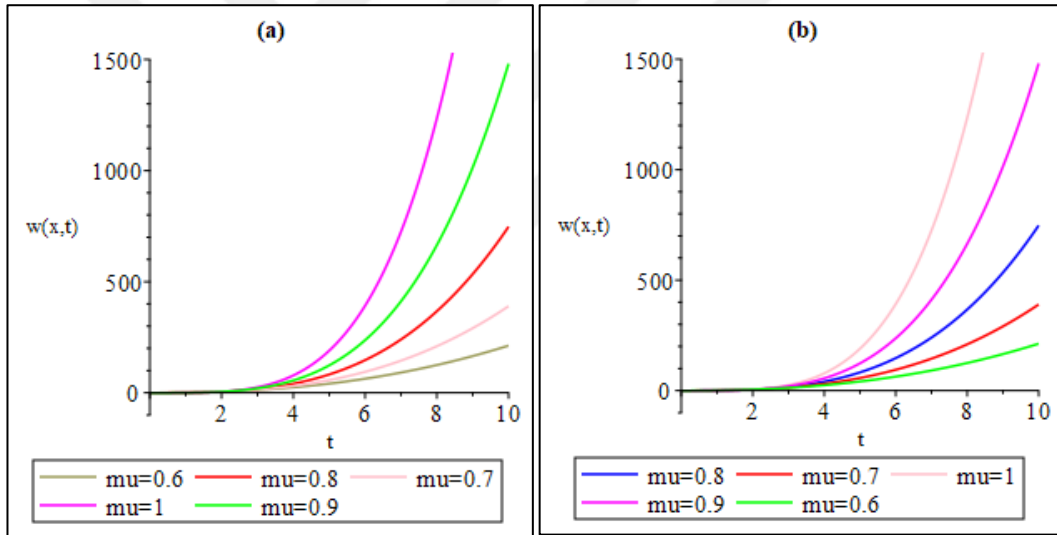
(a) UKMNF modelinin UKSAM ile $w(x, t)$ çözümü

(b) UKMNF modelinin $w(x, t)$ analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{UKSAM}|$



Şekil 5. Örnek 4.1 için $x = 0.5$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için
(a) Uq-SHADM ile $\rho(x, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
(b) UKSAM ile $\rho(x, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması



Şekil 6. Örnek 4.1 için $x = 0.5$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için
(a) Uq-SHADM ile $w(x, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
(b) UKSAM ile $w(x, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

UKMNF modeli için $\mu = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ ile Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM (Akinyemi, 2020) arasında $\rho(x, t)$ için mutlak hata karşılaştırması Tablo 1'de sunulmuştur. Ayrıca, UKMNF modeli için $\mu = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$, $h = -1$, $n = 1$ ile Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM (Akinyemi, 2020) arasında $w(x, t)$ için mutlak hata karşılaştırması Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 1. Örnek 4.1 de $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için $\rho(x, t)$ ' nin Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM (Akinyemi, 2020) sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

x		t			
		0.001	0.003	0.005	0.007
Uq-SHADM	0.00	0.0001878902	0.0005660070	0.0009472246	0.0013315278
UKSAM		0.0001878902	0.0005660070	0.0009472246	0.0013315278
KİDDM		1.0149996100	1.0137464930	1.0124902750	1.0112309720
Uq-SHADM	1.00	0.0000976247	0.0002956422	0.0004973550	0.0007027695
UKSAM		0.0000976247	0.0002956422	0.0004973550	0.0007027695
KİDDM		0.8256007700	0.8248666560	0.8241288453	0.8233873339
Uq-SHADM	2.00	0.0000370568	0.0001128071	0.0001907491	0.0002708944
UKSAM		0.0000370568	0.0001128071	0.0001907491	0.0002708944
KİDDM		0.4254561817	0.4251463250	0.4248342767	0.4245200242
Uq-SHADM	3.00	0.0000114341	0.0000349498	0.0000593341	0.0000845935
UKSAM		0.0000114341	0.0000349498	0.0000593341	0.0000845935
KİDDM		0.1584645226	0.1583613457	0.1582572998	0.1581523788

Tablo 2. Örnek 4.1 de $\mu = 1, \lambda = 3, \delta = 2, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için $w(x, t)$ ' nin Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM (Akinyemi, 2020) sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

x		t			
		0.001	0.003	0.005	0.007
Uq-SHADM	0.00	3.9×10^{-7}	3.5×10^{-6}	9.7×10^{-6}	1.9×10^{-5}
UKSAM		3.9×10^{-7}	3.5×10^{-6}	9.7×10^{-6}	1.9×10^{-5}
KİDDM		1.0149996100	1.0137464930	1.0124902750	1.0112309720
Uq-SHADM	1.00	4.6×10^{-7}	4.1×10^{-6}	0.0000115353	0.0000226217
UKSAM		4.6×10^{-7}	4.1×10^{-6}	0.0000115353	0.0000226217
KİDDM		0.8256007696	0.8248666555	0.8241288453	0.8233873341
Uq-SHADM	2.00	2.7×10^{-7}	2.4×10^{-6}	6.8×10^{-6}	0.0000134002
UKSAM		2.7×10^{-7}	2.4×10^{-6}	6.8×10^{-6}	0.0000134002
KİDDM		0.4254561817	0.4251463250	0.4248342767	0.4245200246
Uq-SHADM	3.00	1.0×10^{-7}	9.6×10^{-7}	2.7×10^{-6}	5.3×10^{-6}
UKSAM		1.0×10^{-7}	9.6×10^{-7}	2.7×10^{-6}	5.3×10^{-6}
KİDDM		0.1584645226	0.1583613454	0.1582572998	0.1581523789

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Uyumlu kesirli mertebeden Noyes Field (UKMNF) modelinin, uyumlu q-Sawi homotopi analiz dönüşüm metodu (Uq-SHADM) ve uyumlu kesirli Sawi ayrıştırma metodu (UKSAM) kullanılarak yeni sayısal çözümleri üretilmektedir.

Tablo 1’de, UKMNF modeli için $\mu = 1$ olmak üzere $\rho(x, t)$ ’nin Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM arasındaki mutlak hata karşılaştırması değerlendirilmektedir. Tablo 2’de, UKMNF modeli için $\mu = 1$ olmak üzere $w(x, t)$ ’nin Uq-SHADM, UKSAM ve KİDDM arasındaki mutlak hata karşılaştırması değerlendirilmektedir. $\rho(x, t)$ ’nin Uq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları Şekil 1’de gösterilmektedir. Şekil 2’de $\rho(x, t)$ ’nin UKSAM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları verilmektedir. $w(x, t)$ ’nin Uq-SHADM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları Şekil 3’te gösterilmektedir. Şekil 4’te $w(x, t)$ ’nin UKSAM çözümlerinin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hataları verilmektedir.

Farklı μ değerleri için $\rho(x, t)$ ’nin Uq-SHADM, UKSAM ve kesin çözümlerin karşılaştırılması iki boyutlu grafiklerde Şekil 5’te gösterilmektedir. Şekil 6’da, farklı μ değerleri için $w(x, t)$ ’nin Uq-SHADM, UKSAM ve kesin çözümlerin karşılaştırılması iki boyutlu grafiklerde gösterilmektedir. Yapılan çalışmalarda, tablo 1 ve tablo 2’de önerilen metotların, KİDDM kullanılarak elde edilenlerden daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Ayrıca, Uq-SHADM ve UKSAM kullanılarak uyumlu kesirli mertebeden Noyes Field (UKMNF) modelinin davranışları gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, MAPLE yazılımı kullanılarak çözümlerinin iki ve üç boyutlu grafikleri çizdirilmiştir. Sunulan yöntemlerin, uyumlu kesirli mertebeden modelleri incelemekte, lisansüstü tezlere ve bilimsel çalışmalara katkı sunacağı öngörülmektedir.

KAYNAKÇA

- Abazari, R. ve Ganji, M. (2011). Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(8), 1749-1762.
- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Akinyemi, L. (2020). A fractional analysis of Noyes–Field model for the nonlinear Belousov–Zhabotinsky reaction. *Computational and Applied Mathematics*, 39(3), 175.
- Alkan, A. (2022). Improving homotopy analysis method with an optimal parameter for time-fractional burgers equation. *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 4(2), 117-134.
- Ayaz, F. (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657.
- Baleanu, D., Defterli, O. ve Agrawal, O. P. (2009). A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15(4), 583-597.
- Bektaş, U. ve Anaç, H. (2023). Q-homotopy shehu analysis transform method of time-fractional coupled burgers equations. *Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences and Engineering*, 24(3), 177-191.
- Biazar, J. ve Ghanbari, B. (2012). The homotopy perturbation method for solving neutral functional–differential equations with proportional delays. *Journal of King Saud University-Science*, 24(1), 33-37.
- Bulut, H., Kumar, D., Singh, J., Swroop, R. ve Baskonus, H. M. (2018). Analytic study for a fractional model of HIV infection of CD4⁺ T lymphocyte cells. *Mathematics in Natural Science*, 2(1), 33-43.
- Chen, X. ve Wang, L. (2010). The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2696-2702.
- Gibbs, R. G. (1980). Traveling waves in the Belousov–Zhabotinskii reaction. *Journal on Applied Mathematics*, 38(3), 422-444.
- He, J. H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: Some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4), 699-708.

- He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, 135(1), 73-79.
- Higazy, M., Aggarwal, S. ve Nofal, T. A. (2020). Sawi decomposition method for Volterra integral equation with application. *Journal of Mathematics*, 1-13.
- Higazy, M. ve Aggarwal, S. (2021). Sawi transformation for system of ordinary differential equations with application. *Ain Shams Engineering Journal*, 12(3), 3173-3182.
- Hilfer, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. Singapur: World scientific.
- Jackiewicz, Z. ve Zubik-Kowal, B. (2006). Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 56(3-4), 433-443.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier.
- Kumar, P. S., Gomathi, P., Gowri, S. ve Viswanathan, A. (2018). Applications of Mohand transform to mechanics and electrical circuit problems. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(10), 2838-2840.
- Kumar, P. S., Saranya, C., Gnanavel, M. G. ve Viswanathan, A. (2018). Applications of Mohand transform for solving linear Volterra integral equations of first kind. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(10), 2786-2789.
- Kurt, A., Şenol, M., Tasbozan, O. ve Chand, M. (2019). Two reliable methods for the solution of fractional coupled Burgers' equation arising as a model of polydisperse sedimentation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(2), 523-534.
- Liao S. J. (1992). *The proposed homotopy analysis technique for the solution of non-linear problems*. Shanghai Jiao Tong University, China: Shanghai.
- Liao, S. J. (1999). An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4), 759-778.
- Liao, S. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics And Computation*, 147(2), 499-513.
- Mahgoub, M. A. ve Mohand, M. (2019). The new integral transform "Sawi Transform". *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 14(1), 81-87.

- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993) *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New Jersey: Wiley.
- Mittag-Leffler G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E\alpha(x)$. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 137, 554–558.
- Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, mathematics in science and engineering. New York: Academic Press, 365.
- Prakash, A., Goyal, M. ve Gupta, S. (2019). Fractional variational iteration method for solving time-fractional Newell-Whitehead-Segel equation. *Nonlinear Engineering*, 8(1), 164-171.
- Prakasha, D. G., Veeresha, P. ve Baskonus, H. M. (2019). Two novel computational techniques for fractional Gardner and Cahn-Hilliard equations. *Computational and Mathematical Methods*, 1(2), 1021.
- Sakar, M. G., Uludag, F. ve Erdogan, F. (2016). Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6639-6649.
- Singh, J., Kumar, D. ve Swroop, R. (2016). Numerical solution of time-and space-fractional coupled Burgers' equations via homotopy algorithm. *Alexandria Engineering Journal*, 55(2), 1753-1763.
- Singh, B. K. ve Kumar, P. (2017). Fractional variational iteration method for solving fractional partial differential equations with proportional delay. *International Journal of Differential Equations*, 2017.
- Singh, J., Kumar, D., Baleanu, D. ve Rathore, S. (2018). An efficient numerical algorithm for the fractional Drinfeld–Sokolov–Wilson equation. *Applied Mathematics and Computation*, 335, 12-24.
- Singh, G. P. ve Aggarwal, S. (2019). Sawi transform for population growth and decay problems. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 8(8), 157-162.
- Srivastava, H. M., Kumar, D. ve Singh, J. (2017). An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation. *Applied Mathematical Modelling*, 45, 192-204.
- Wazwaz, A. M. (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied Mathematics And Computation*, 102(1), 77-86.
- Veeresha, P., Prakasha, D. G. ve Baskonus, H. M. (2019). Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method. *Mathematical Sciences*, 13(2), 115-128.

ÖZGEÇMİŞ

Bedir Kaan ÖNER, 2010 yılında Gümüşhane Lisesi'nden mezun oldu. 2012 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2020 yılında tamamladı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladım.

