



**T.C.  
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**UYUMLU KESİRLİ TÜREVLİ GRİ MODELLEME**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ümmügülsüm ERDİNÇ**

**DANIŞMAN  
Prof. Dr. Halis BİLGİL**

**AKSARAY, 2022**

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342301 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Ümmügülsüm ERDİNÇ tarafından hazırlanan “**UYUMLU KESİRLİ TÜREVLİ GRİ MODELLEME**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL**

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

**Üye: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES**

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

**Üye: Doç. Dr. Uğur ULUSU**

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 23/12/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Ümmügülsüm ERDİNÇ

## TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun belirlenmesinde, hazırlanmasında ve çalışmalarım süresince değerli bilgileri ve tecrübeleri ile yardımını esirgemeyen kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Halis BİLGİL'e; tezi hazırlama sürecinde manevi desteklerinden ötürü mesai arkadaşlarıma; hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin gerçekleşmesinde 2210-A numaralı Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ümmügülsüm ERDİNÇ

AKSARAY, 2022

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| TEŞEKKÜR .....                                                                         | i         |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                      | ii        |
| ÖZET.....                                                                              | iii       |
| ABSTRACT .....                                                                         | iv        |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                                                  | v         |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                                                                | vi        |
| SİMGELER VE KISALTMALAR .....                                                          | vii       |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                                                  | <b>1</b>  |
| 1.1. Standart Gri Model.....                                                           | 3         |
| 1.2. Kesirli Türev Tanımları ve Özellikleri.....                                       | 8         |
| 1.2.1 Uyumlu kesirli türev .....                                                       | 8         |
| 1.2.1.1 Uyumlu kesirli birikim ve fark.....                                            | 9         |
| 1.2.2 Caputo kesirli türev .....                                                       | 10        |
| 1.2.3 Riemann-Liouville kesirli türev .....                                            | 10        |
| <b>2. OPTİMİZE EDİLMİŞ SÜREKLİ VE KESİR MERTEBEDEN YENİ BİR GRİ MODEL .....</b>        | <b>12</b> |
| 2.1. Önerilen Kesirli Gri Modelin Formülasyonu .....                                   | 12        |
| 2.2. Çözüm Fonksiyonu ve Tahminlerin Oluşturulması .....                               | 16        |
| 2.3. Modelin Tahmin Gücünün Değerlendirilmesi .....                                    | 18        |
| 2.4. Optimal $\alpha$ ve $r$ için Kaba Kuvvet Algoritması .....                        | 18        |
| 2.5. OCCFGM(1, 1) Modelinin Uygulamaları .....                                         | 20        |
| 2.5.1 Çalışma 1: Çin'in yerel enerji tüketimi .....                                    | 20        |
| 2.5.2 Çalışma 2: Rusya'nın $CO_2$ emisyonları .....                                    | 23        |
| 2.5.3 Çalışma 3: Türkiye'nin içme suyu tüketimi.....                                   | 27        |
| <b>3. YENİ BİR KESİR MERTEBEDEN ÜSTEL GRİ MODEL .....</b>                              | <b>32</b> |
| 3.1. Önerilen Modelin Formülasyonu .....                                               | 32        |
| 3.2. Parametrelerin Belirlenmesi.....                                                  | 33        |
| 3.3. Çözüm Fonksiyonu ve Tahminlerin Oluşturulması .....                               | 36        |
| 3.4. Tahmin Modelinin Performans Analizi .....                                         | 38        |
| 3.5. ECFGM(1, 1) Modelinin Uygulamaları.....                                           | 38        |
| 3.6. ECFGM(1, 1) Modelinin Gerçek Veri Seti Üzerine Uygulaması.....                    | 43        |
| <b>4. BASAMAĞIN BASKIN ROL OYNADIĞI YENİ BİR KESİRLİ GRİ MODEL .....</b>               | <b>48</b> |
| 4.1. Geliştirilen Modelin Formülasyonu .....                                           | 48        |
| 4.2. Çözüm Fonksiyonu ve Tahminlerin Oluşturulması .....                               | 52        |
| 4.3. FEXGM(1, 1) Modelinin Tahmin Performansının Değerlendirilmesi .....               | 53        |
| 4.4. FEXGM(1, 1) Modelinin Uygulamaları .....                                          | 55        |
| 4.5. FEXGM(1, 1) Modelinin Gerçek Veri Seti Üzerine Uygulaması.....                    | 60        |
| 4.5.1 FEXGM(1, 1) modeline bağlı olarak Çin'in karbondioksit emisyonunun tahmini ..... | 61        |
| 4.5.2 FEXGM(1, 1) modeline bağlı olarak Brezilya'nın $CO_2$ emisyonunun tahmini .....  | 66        |
| <b>5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>                                                   | <b>71</b> |
| <b>KAYNAKLAR .....</b>                                                                 | <b>74</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>                                                                   | <b>78</b> |

# YÜKSEK LİSANS TEZİ

## UYUMLU KESİRLİ TÜREVLİ GRİ MODELLEME

Ümmügülsüm ERDİNÇ

Aksaray Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

### ÖZET

Zaman serilerinin tahmininde gri modelleme, etkinliği ve uygunluğu nedeniyle son zamanlarda ilgi çeken çalışma alanlarından biri olmuştur. Kesirli gri modeller ise standart modellere göre daha etkili sonuçlar verdikleri için hesaplamalardaki zorluğa rağmen tercih edilir hale gelmiştir. Son yıllarda yapılan yeni tanım ve teoremler sayesinde kesirli birikim ve fark hesaplamalarındaki zorluklar aşılmaya başlanmıştır. Gri modellemede yeni eğilim, öncekilerden daha kullanışlı ve daha az hatayla sonuç veren modeller oluşturmaktır.

Bu tez çalışmasında, uyumlu kesirli basamaktan türetilen ve OCCFGM (1, 1), ECFGM (1, 1) ve FEXGM (1, 1) olarak kısaltılan üç yeni kesirli gri model oluşturuldu. Sonuçlar, bu yeni modellerin, karşılaştırılan diğer modellere göre daha yüksek tahmin doğruluğu ve daha iyi bir performans sergilediğini gösterdi.

Ayrıca, yeni modellerin farklı reel uygulamaları yapılarak elde edilen sonuçlar yorumlandı. Kesir mertebenin en uygun değerleri, Kaba Kuvvet yaklaşımı ile belirlendi. Modellerin yapısal parametreleri en küçük kareler yöntemi kullanılarak hesaplandı.

**Anahtar Kelimeler:** Uyumlu Kesirli Türev, Kaba Kuvvet Algoritması, Kesirli Gri Model, En Küçük Kareler Yöntemi.

**Aralık, 2022; 78 sayfa**

**M.Sc. THESIS**

**CONFORMABLE FRACTIONAL DERIVATIVE GREY MODELLING**

**Ümmügülsüm ERDİNÇ**

**Aksaray University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Halis BİLGİL**

**ABSTRACT**

The grey modelling in the prediction of time series has been one of the interesting study fields recently due to its efficiency and convenience. Fractional grey models, on the other hand, have become preferable, despite the difficulty in calculations, since they give more effective results than standard models. Difficulties in fractional accumulation and difference calculations have begun to be overcome thanks to new definitions and theorems made in recent years. The new trend in grey modelling is to compose models that are more useful than the previous ones and give results with less error.

In this thesis study, three new fractional grey models derived from the conformable fractional order and abbreviated as the OCCFGM(1, 1), ECFGM(1, 1) and FEXGM(1, 1) were created. The results show that these novel models demonstrated a higher predicted accuracy and more robust performance over the other models considered for comparison.

In addition, different real applications of the new models were made and the results obtained were interpreted. The optimal values of fractional order were determined by using the Brute-Force approach. The structural parameters of the models were calculated by using the least squares method.

**Keywords:** Conformable Fractional Derivative, Brute-Force Algorithm, Fractional Grey Model, Least Square Method.

**December, 2022; 78 pages**

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. Kaba Kuvvet algoritması için $(\alpha, r)$ noktaları.....                                                           | 19 |
| Şekil 2.2. Kaba Kuvvet algoritmasının çalışma prensibi.....                                                                    | 19 |
| Şekil 2.3. $\alpha - r$ bölgesi ve tüm $(\alpha, r)$ noktaları için MAPE değerleri.....                                        | 21 |
| Şekil 2.4. Çin'in yerli enerji tüketimi için yedi modelin simülasyonu. ....                                                    | 22 |
| Şekil 2.5. Çin'in yerli enerji tüketim verileri için modellerin tahmin hataları. ....                                          | 22 |
| Şekil 2.6. OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak Çin'in yerli enerji tüketim değerlerinin tahmini.....                              | 23 |
| Şekil 2.7. $\alpha - r$ bölgesi ve tüm $(\alpha, r)$ noktaları için MAPE değerleri.....                                        | 24 |
| Şekil 2.8. Rusya'nın $CO_2$ emisyon verileri için gerçek değerler ve farklı modellerle elde edilen veriler. ....               | 26 |
| Şekil 2.9. Rusya'nın $CO_2$ emisyo verileri için sekiz farklı modelin tahmin hata oranları.....                                | 26 |
| Şekil 2.10. Rusya'nın $CO_2$ emisyon verileri için OCCFGM(1, 1) modeli ile elde edilen sonuçlar ve tahminler. ....             | 27 |
| Şekil 2.11. $\alpha - r$ bölgesi ve tüm $(\alpha, r)$ noktaları için MAPE değerleri.....                                       | 28 |
| Şekil 2.12. Türkiye'nin içme suyu tüketimi için gerçek değerler ve farklı modellerle elde edilen eğriler.....                  | 29 |
| Şekil 2.13. Türkiye'nin içme suyu tüketimi için yedi farklı modelin tahmin hata oranları. ....                                 | 30 |
| Şekil 2.14. Türkiye'nin içme suyu tüketimi için OCCFGM(1, 1) tahminleri. ....                                                  | 31 |
| Şekil 3.1. $(0,1]$ aralığında her bir noktadaki MAPE değerleri. ....                                                           | 39 |
| Şekil 3.2. Gerçek değerler ve ECFGM(1, 1) modelinin tahmin değerleri.....                                                      | 41 |
| Şekil 3.3. ECFGM(1, 1) modelinin $\alpha \in (0,1]$ için MAPE değerleri ve optimal $\alpha$ ..                                 | 42 |
| Şekil 3.4. Gerçek değerler ve ECFGM(1, 1) modelinin tahmin değerleri.....                                                      | 43 |
| Şekil 3.5. ECFGM(1, 1) modelinin reel veri seti için MAPE değerleri.<br>(a) $\alpha \in 0,1$ , (b) $\alpha \in 1,2$ . ....     | 45 |
| Şekil 3.6. Yedi modelin MAPE değerleri. ....                                                                                   | 46 |
| Şekil 3.7. Çin'in rüzgar enerjisi tüketimi için gerçek, veri uydurma ve tahmin değerleri.....                                  | 47 |
| Şekil 4.1. $\alpha \in (0,1]$ için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri. ....                                                  | 56 |
| Şekil 4.2. Monoton artan dizi örneği için gerçek ve tahmin değerleri.....                                                      | 58 |
| Şekil 4.3. $\alpha \in (0,1]$ için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri. ....                                                  | 59 |
| Şekil 4.4. $\alpha \in (0,1]$ için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri. ....                                                  | 60 |
| Şekil 4.5. $\alpha \in (0,1)$ aralığında Çin'in $CO_2$ emisyonu için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.....                 | 62 |
| Şekil 4.6. Çin'in $CO_2$ emisyon verileri için modellerin MAPE değerleri, (a) veri uydurma, (b) tahmin, (c) toplam.....        | 64 |
| Şekil 4.7. Çin'in $CO_2$ emisyonları için altı gri model ile gerçek değerlerin simülasyonu. ....                               | 65 |
| Şekil 4.8. Çin'in $CO_2$ emisyonlarının gerçek değerleri ve tahmin değerleri. ....                                             | 65 |
| Şekil 4.9. $\alpha \in (0,1)$ aralığında Brezilya'nın $CO_2$ emisyonu için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.....           | 66 |
| Şekil 4.10. Brezilya'nın $CO_2$ emisyon verileri için modellerin MAPE değerleri, (a) veri uydurma, (b) tahmin, (c) toplam..... | 68 |
| Şekil 4.11. Brezilya'nın $CO_2$ emisyonları için altı gri model ile gerçek değerlerin simülasyonu.....                         | 69 |
| Şekil 4.12. Brezilya'nın $CO_2$ emisyonlarının gerçek değerleri ve tahmin değerleri. ....                                      | 70 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 2.1.</b> Çin'in yerli enerji tüketimi için FAGM, ANN, TDPGM, ARIMA, EXGM, SVR, CCFGM ve OCCFGM modelleri ile elde edilen sayısal sonuçları..... | 21 |
| <b>Çizelge 2.2.</b> OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak Çin'in yerli enerji tüketim değerlerinin tahmini.....                                                 | 23 |
| <b>Çizelge 2.3.</b> Rusya'nın $CO_2$ emisyonu için GM, ARIMA, NGMO, TDPGM, FAGM, FANGM, CCFGM ve OCCFGM modelleri ile elde edilen sayısal sonuçları. ....  | 25 |
| <b>Çizelge 2.4.</b> Rusya'nın $CO_2$ emisyonu için OCCFGM(1, 1) modeli ile yapılan tahminler.....                                                          | 27 |
| <b>Çizelge 2.5.</b> Türkiye'nin içme suyu tüketimi için EXGM, ARIMA, GM, ONGM, TDPGM, CFGM ve OCCFGM modelleri ile elde edilen sayısal sonuçlar.....       | 29 |
| <b>Çizelge 2.6.</b> Türkiye'nin içme suyu tüketimi tahminleri. ....                                                                                        | 30 |
| <b>Çizelge 3.1.</b> Gri modeller ve çözüm fonksiyonları. ....                                                                                              | 44 |
| <b>Çizelge 3.2.</b> Çin'in rüzgar enerjisi tüketimi (milyon ton petrol eş değeri) yedi model ile tahmini ve modellerin performansları. ....                | 45 |
| <b>Çizelge 3.3.</b> Çin'in 2025 yılına kadarki rüzgar enerjisi tüketim tahminleri. ....                                                                    | 46 |
| <b>Çizelge 4.1.</b> $\alpha \in (0,1]$ için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.....                                                                      | 56 |
| <b>Çizelge 4.2.</b> Çin'in $CO_2$ emisyon verileri için veri uydurma ve tahmin etme performansları.....                                                    | 63 |
| <b>Çizelge 4.3.</b> Çin'in $CO_2$ emisyon tahminlerinin $MAPE_{pre}$ değerleri.....                                                                        | 63 |
| <b>Çizelge 4.4.</b> Çin'in $CO_2$ emisyonlarının tahmin edilmesi.....                                                                                      | 64 |
| <b>Çizelge 4.5.</b> Çin'in $CO_2$ emisyon verileri için veri uydurma ve tahmin etme performansları. ....                                                   | 67 |
| <b>Çizelge 4.6.</b> Brezilya'nın $CO_2$ emisyon tahminlerinin $MAPE_{pre}$ değerleri.....                                                                  | 68 |
| <b>Çizelge 4.7.</b> Brezilya'nın $CO_2$ emisyonlarının tahmin edilmesi.....                                                                                | 69 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

|                           |                                            |
|---------------------------|--------------------------------------------|
| <b>AGO</b>                | Birikimli Üretim Operatörü                 |
| <b>CFA</b>                | Uyumlu Kesirli Birikimli Toplamlar Dizisi  |
| <b>ECFGM(1, 1)</b>        | Üstel Sürekli Kesirli Gri Model            |
| <b>FEXGM(1, 1)</b>        | Kesirli Üstel Gri Model                    |
| <b>GM(1, 1)</b>           | Standart Gri Model                         |
| <b>IAGO</b>               | Ters Birikimli Üretim Operatörü            |
| <b>MAPE</b>               | Ortalama Mutlak Yüzdelik Hata              |
| <b>MAPE<sub>fit</sub></b> | Veri Uydurma Hatası                        |
| <b>MAPE<sub>pre</sub></b> | Tahmin Hatası                              |
| <b>MAPE<sub>tot</sub></b> | Toplam Ortalama Mutlak Yüzdelik Hata       |
| <b>OCCFGM(1, 1)</b>       | Optimize Edilmiş Sürekli Kesirli Gri Model |
| <b>RPE</b>                | Göreceli Yüzdelik Hata                     |



## 1. GİRİŞ

1982 yılında Deng tarafından önerilen gri sistem teorisi, kontrol ve karar verme, modelleme, tahmin içeren bir sistem analizi olarak belirsizlik problemini inceleyen bir disiplindir [1]. Gri modelleme, zaman serilerinin tahmininde verimli ve kullanışlı olmasından dolayı son zamanların dikkat çekici konularından biri olmuştur. Bu teoriye göre sistemin bilinen, bilinmeyen ve yarı bilinen bilgileri sırasıyla beyaz, siyah ve gri olarak ifade edilir. Burada yarı bilinen terimi, çalışılan problem hakkında az sayıda bilgi olduğunu ifade eder. Makine öğrenimi modellerinden, hibrit modellerden, ampirik modellerden vb. farklı olarak, gri tahmin modelleri küçük örnekler ve sınırlı veri seti ile belirsiz veya düzensiz sistemlerin işleyişinde kullanışlı bir model olmuştur [2, 3]. Ek olarak, genellikle küçük veri seti ile yapılan tahminlemeler büyük veri setiyle yapılanlardan daha iyi tahmin performansına sahiptir. Çünkü çoğunlukla zaman serileri üzerine tahminler oluşturulduğundan dolayı çok eski veriler modelin parametrelerini olumsuz etkileyebilir. Buna rağmen, yakın geçmişe ait veri sayısı ne kadar çok ise modelin tahmin gücü o kadar kuvvetli olacaktır. Ham veri dizisi negatif olmayan ve monoton ise, standart gri model iyi tahminler yapabilmektedir [4]. Fakat ham verilerin düzensiz olması durumunda standart gri model  $GM(1, 1)$  yetersiz kalabilmektedir. Bu nedenle yeni modellerin geliştirilmesine ihtiyaç duyuldu. Günümüzde, gri tahmin modelleri bilim ve teknoloji, enerji, çevre sorunları, ekonomi, sağlık gibi çeşitli alanlarda yaygın ve başarılı bir şekilde uygulanmaktadır [5-12].

Gri modelleme üzerine yapılan son araştırmalar iki temel amaca odaklanmaktadır: Bunlar pratiklik ve tahmin doğruluğu. Bu amaçlar doğrultusunda son zamanlarda önemli çalışmalar yapıldı. Ma ve Liu [13], zaman gecikmeli polinomal gri tahmin modelini  $TDPGM(1, 1)$  önerdiler. Wei vd. [14] bir başka polinomal gri model önerdiler. Cui vd. [15]  $ONGM(1, 1, k)$  modelini geliştirmek için bir parametre optimizasyonu geliştirdiler. Kısa adı  $EXGM(1, 1)$  olan üstel bir gri model Bilgil [9] tarafından oluşturuldu. Bunlara ek olarak, Ma vd. [16] Bernoulli denklemine dayalı yeni bir lineer olmayan çok değişkenli gri tahmin modelini,  $NGBMC(1, n)$ , geliştirdiler. Wang vd. [17]  $SGM(1, 1)$  olarak adlandırılan yeni bir mevsimsel gri modeli tanıttılar. Wu vd. [18]  $BNGM(1, 1, t^2)$  olarak adlandırılan yeni bir gri model oluşturdular. Liu ve Wu [19]  $ANDGM$  modelini önererek uygulamalarını yaptılar. Ma [20] çekirdek tabanlı  $KARGM(1, 1)$  modelini önerdi. Li vd. [21] yapıya uyarlanabilir bir akıllı gri tahmin modeli geliştirdiler. Wu vd. [22] tarafından gri Riccati modeli

(GRM) geliştirildi. Liu vd. [23] tarafından sönümleme eğilim faktörü ile modifiye edilmiş bir gri tahmin model oluşturuldu. Jiang vd. [24] tarafından kısaca INGBM(1, 1) olarak adlandırılan geliştirilmiş parametrelerle lineer olmayan gri Bernoulli modeli önerildi.

Var olan gri modellerin çoğu birinci basamaktan beyazlatma diferensiyel denklemi ile yönetilmektedir. Ham veri seti, düzensiz bir dizi ise dizinin karakteristik özellikleri birinci basamaktan birikimli üretim operatörü tarafından tam olarak bulunamayabilir [25]. Ayrıca, birinci basamaktan türevle oluşturulan modeller, düzensiz verilerin tahmini için genellikle uygun olmayan modellerdir. Bunun bir sonucu olarak, modelin parametreleri, ham veri dizisinin ani ve büyük dalgalanmalı olması durumunda problemin özelliklerini yakalayamayabilir. Bundan dolayı, bu tür bir problemin üstesinden gelebilmek için kesirli birikim üreten operatör ve kesirli türev tanımlarının gri modele dahil edilmesi önerilir [25].

Wu vd. [26] FAGM(1, 1) adlı kesirli basamaktan birikim operatörü ile geleneksel GM(1, 1) modelini geliştirdiler. Bazı araştırmacılar son yıllarda FAGM(1, 1) modelini optimize etti ve daha iyi tahmin doğruluğuna ulaştılar. Wu vd. [27] FAGM(1, 1) modelinde sabit gri girdisi yerine zamanın lineer gri girdisi olarak yeni bir kesirli FAGMO(1, 1,  $k$ ) modeli önerdiler. Bu model için en ideal basamak değerine ve parametrelere ulaşmak için bir optimizasyon uyguladılar. Ayrıca, Mao vd. [28] kesirli gri modeli, FGM( $q$ , 1), tanıttılar. Zhang vd. [29] tarafından PFAGM adlı kesirli birikimli gri model tanıtıldı. Yuxiao vd. [25] CFGMC( $q$ ,  $N$ ) adlı çok değişkenli Caputo kesirli türevli gri modeli önerdiler. Xie vd. [30] ters yönde bir uyumlu kesirli gri modeli kısaca CFGOM(1, 1) geliştirdiler.

Bütün bunlarla birlikte, Wu vd. [26] tarafından verilen tanımda kesirli mertebeye alakalı bazı kısıtlamalar bulunmaktaydı. Bu kısıtlamaların temel nedeni, gri modellemede kullanılan tanımların kesirli mertebeden tanımlarla eşleştirmedeki zorluklardı. Yang ve Xu [31] sonsuz seriler içeren bir kesirli basamaktan model önerdiler ancak bu modelin kullanımı ve analizi, kesirli basamak hesabındaki karmaşıklıklardan dolayı zorluklar içermekteydi. Fakat bazı yeni operatörler sayesinde bu tür komplikasyonların üstesinden gelindi ve kesirli mertebeden gri modellerin geliştirilmesinin önü açıldı [32, 33].

Son zamanlarda, Khalil vd. [34], uyumlu kesirli türev olarak adlandırılan limit tabanlı kesirli türevi tanımladılar. Bu yeni kesirli türev tanımlarının yapısı, Caputo ve Riemann-Liouville türevleri gibi diğer popüler kesirli türevlerden daha kullanışlıdır. Daha sonra, Ma vd. [35], uyumlu türev tanım ve teoremlerini kullanarak, kesir mertebeden fark ile birikimli toplamlar için yeni ve kullanışlı tanımlar geliştirdiler. Bu tanımlar alışılmış olanlardan daha kullanışlı ve diğerlerinden sadedir. Bu tanımları kullanarak CFGM(1, 1) modelini oluşturdular. Son dönemde, uyumlu kesirli türevi kullanarak yeni bir model olan CCFGM adlı sürekli gri model Xie vd. [36] tarafından tanımlandı.

Bu tez çalışmasında kesir mertebeden üç yeni model geliştirilmiş olup reel uygulamalarla modellerin tahmin hatalarının önemli ölçüde düşük olduğu gösterilerek, çalışmada ele alınan veriler için sonraki yılların tahminleri yapıldı.

Tez çalışmasında iki temel amaç hedeflendi. Bunlardan ilki yeni modeller geliştirme mekanizmasının anlaşılması ve ortaya uygulanabilir, pratik ve etkili modeller koymaktır. Diğeri ise her bir model ile doğadaki gerçek verileri kullanarak, ilgili veri setinin ilerleyen süreçlerdeki davranışlarını tahmin etmektir. İki temel hedefe de başarı ile ulaşılmış olup ilk bölümde temel kavramlar ve literatür özeti verildi. Sonraki üç bölümde ise oluşturulan yeni modeller tanıtılarak uygulamalarına yer verildi. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar ve öneriler yer aldı.

### **1.1. Standart Gri Model**

Gri modellerin temel yapısını oluşturan ve en sık kullanılanlarından biri standart gri modeldir. Literatürde bulunan diğer modeller, bu modelin beyazlatma denkleminin geliştirilmesiyle elde edilmiştir. Kısaca GM(1, 1) olarak ifade edilir ve modeli uygulayabilmek için en az dört veriye ihtiyaç vardır. Burada parantez içerisindeki sayılar sırasıyla modeli yöneten diferansiyel denklemin mertebesini ve denklemde yer alan bağımsız değişken sayısını ifade eder. İlk olarak, modellemesi yapılacak olayla ilgili ham veriler dizisi oluşturulur. Bu dizinin ardışık elemanlarının zamana bağlı değişimlerini modele tesir ettirebilmek için bir birikimli üretim operatörü (AGO) oluşturulur. Daha sonra sistemin tahmin değerlerini elde etmek için modelin beyazlatma denklemi olarak adlandırılan diferansiyel denklem kurulur ve çözülür. Çözümde yer alan parametreler aslında modelde kullanılacak veriler yardımıyla elde

edilecektir. Bu verilerin modele girebilmesi için beyazlatma denklemi adı verilen diferansiyel denklem bir fark denklemine dönüştürülerek, bir denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sistemi elimizdeki ham verilerin sayısı kadar sayıda denklemden oluşur ve bütün ham veriler kullanılır. Parametreler belirlendikten sonra orijinal verinin tahmin değerleri ters birikimli üretim operatörü (IAGO) kullanılarak elde edilir. Standart GM(1, 1) modelinin yukarıda özetlenen işlem adımları aşağıda verilmektedir.

İlk olarak negatif olmayan ham veri dizisi  $X^{(0)}(k)$  oluşturulur. Burada  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  olup  $n$  modelde kullanılan örneklem sayısıdır.

$$X^{(0)}(k) = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)). \quad (1.1)$$

$x^{(0)}(1)$  ilk ham veriyi,  $x^{(0)}(2)$  ikinci ham veriyi ve genel olarak  $x^{(0)}(n)$  terimi  $n$ . ham veriyi temsil eder. (1.1) de oluşturulan negatif olmayan ham veri dizisi için  $X^{(1)}(k)$  birikimli üretim dizisi (AGO) aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$X^{(1)}(k) = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)). \quad (1.2)$$

Burada,

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1), \quad (1.3)$$

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (1.4)$$

olarak tanımlanır. Beyazlatma denklemi,

$$\frac{dx^{(1)}(k)}{dk} + ax^{(1)}(k) = b \quad (1.5)$$

olup, beyazlatma denklemi denilmesinin nedeni, bu denklemin çözümünün elimizdeki ham veriler ve sonrakiler için bir üreteç fonksiyonu olmasıdır. Yani bir kurala bağlı olmayan ham veriler için, bu denklemin çözümü sistematik bir formül verecektir.

Bu denklemin inşası temel olarak Malthusian modeli olarak bilinen klasik artma azalma problemine dayanır. Buna göre, “bir çokluğun zamana göre değişimi, o çokluğun mevcut miktarı ile orantılıdır” teorisinin ifadesi,

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = ax^{(1)}(t) \quad (1.6)$$

şeklinde olup burada  $a$  orantı sabitidir. Fakat bu modelde artma ya da azalmaya dışardan etki söz konusu olmayıp problemin doğasına göre değişim söz konusudur. Zaman serilerinde ise olaya dışarıdan bazı faktörler etki ederek verilerin düzensiz olmasına neden olur. Gri modelleme, Malthusian modeline bu tür dış etmenlerin katkısını belirleyecek bir parametre eklenerek oluşturulur. Bu parametre  $b$  parametresi olup modelin yönetici denklemi

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (1.7)$$

şeklinde yazılır. Burada  $k$  yerine daha çok zamanı temsil etmesinden dolayı  $t$  değişkeninin kullanılması uygundur.

Şimdi, parametreleri elde etmek için (1.5) denklemini fark denklemine dönüştürdüğümüzde kullanacağımız ortalama üretim dizisini tanıtalım.

$X^{(1)}(k)$  in ardışık komşuluklarının oluşturduğu diziye ortalama üretim dizisi denir ve

$$Z^{(1)}(k) = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)) \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)}{2}, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (1.9)$$

dir. Aslında bu tanımlamalar ileride kullanılacak kavramların ön hazırlığıdır.

Fark denklemine ulaşabilmek için (1.7) denkleminin terim terime  $k-1$  den  $k$  ya integrali alınırsa,

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = b \int_{k-1}^k dt$$

olup, buradan

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + a \frac{x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)}{2} = b$$

şeklinde hesaplanır. Burada ikinci integral yamuk kuralı uygulanarak hesaplandı. Yukarıdaki denklem düzenlenirse,

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (1.10)$$

olacağı aşıkardır.

(1.5) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$x^{(1)}(k) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (1.11)$$

olup, bu çözümdeki  $a$  ve  $b$  parametreleri (1.10) denkleminin genişletilmesiyle elde edilir. (1.10) denklemi

$$\begin{aligned} x^{(0)}(2) &= -az^{(1)}(2) + b \\ x^{(0)}(3) &= -az^{(1)}(3) + b \\ &\vdots \\ x^{(0)}(n) &= -az^{(1)}(n) + b \end{aligned} \quad (1.12)$$

olarak yazılır ve bu denklem sistemi matrissel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Y = B\rho. \quad (1.13)$$

Burada,

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

dir. Böylece (1.12) sistemine modelde kullanılacak ham veriler girilerek, bu verilerin parametrelerin belirlenmesine katkısı sağlanacaktır. Tekrar hatırlatalım ki, amacımız (1.11) çözümündeki parametreleri elde etmektir. En küçük kareler metodu kullanılarak GM(1, 1) modelinin parametre tahmini elde edilir.  $\rho$  parametre dizisinin tahmin değeri için (1.12) denkleminin sağ tarafın da  $-az^{(1)}(k) + b$  terimi denklemin sol tarafında ki  $x^{(0)}(k)$  teriminin yanına geçer ve  $\varepsilon = Y - B\rho$  hata dizisi elde edilir. Burada,

$$\varepsilon = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n]^T$$

ve  $k = 2, 3, \dots, n$  için  $\varepsilon_k$ , (1.12) sisteminde her bir denklem için hatayı temsil eder.

$S(\rho)$ , hataların karelerinin toplamı olarak ifade edilir. O halde

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \\ &= \varepsilon^T \varepsilon \\ &= (Y - B\rho)^T (Y - B\rho) \\ &= (Y^T - \rho^T B^T)(Y - B\rho) \\ &= Y^T Y - \rho^T B^T Y - Y^T B\rho + \rho^T B^T B\rho \\ &= Y^T Y - 2\rho^T B^T Y + \rho^T B^T B\rho. \end{aligned}$$

$S(\rho)$  minimum yapan  $\rho = [a, b]^T$  parametre vektörü

$$\frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} = -2B^T Y + 2B^T B\rho = 0,$$

buradan

$$B^T Y = B^T B\rho,$$

böylece

$$\rho = [a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

elde edilir. Sonuç olarak, en küçük kareler metodu kullanılarak parametreler belirlenmiş olur.

Böylece birikimli toplamlar dizisinin elemanları olan  $x^{(1)}(k)$  lar için hesaplama işlemleri tamamlanmış oldu. Fakat bizim hedefimiz  $x^{(0)}(k)$  ham veri dizisinin sonraki terimlerini tahmin etmek olduğundan dolayı  $x^{(1)}(k)$  lardan  $x^{(0)}(k)$  lara geçişi sağlamalıyız. (1.4) den dolayı,

$$\hat{x}^{(0)}(1) = x^{(1)}(1)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

olduğu açıktır. Burada,  $x^{(0)}(k)$  ve  $x^{(1)}(k)$  yerine sırasıyla  $\hat{x}^{(0)}(k)$  ve  $\hat{x}^{(1)}(k)$  yazmamızın nedeni tahmin değerlerini temsil etmesi olup yamuk kuralı ve en küçük kareler metodundan kaynaklanan hata paylarının olmasıdır.

## 1.2. Kesirli Türev Tanımları ve Özellikleri

Tezin sonraki bölümlerinde, kesir mertebeden gri modelleme teorisine yer verileceği için bu kısımda, bazı popüler kesir mertebeden türev tanım ve özelliklerine yer verildi. Literatürde en sık kullanılan kesir mertebeden türev tanımları Uyumlu (Conformable) kesirli türev, Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türevdir. Her ne kadar bu tez çalışmasında pratiklik açısından Uyumlu kesirli mertebeden türev özellikleri kullanılmış olsa da ileriki bölümlerde oluşturduğumuz modeller diğer kesirli türev tanımları için de geçerlidir.

### 1.2.1 Uyumlu kesirli türev

**Tanım 1.1.**  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $f$  nin  $\alpha \in (n, n+1]$  basamaktan uyumlu kesirli türevi [34]:

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = t^{[\alpha]-\alpha} \frac{df(t)}{dt}. \quad (1.14)$$

Burada  $[\cdot]$  ifadesi tavan fonksiyonudur.  $[\alpha]$ ,  $\alpha$  dan büyük en küçük tam sayıdır. Açıkta ki  $\alpha \in (0,1]$  için  $[\alpha] = 1$  dir. Böylece (1.14) denklemi  $\forall t > 0$  için

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}$$

olarak yazılır.

Yüksek basamaktan uyumlu kesirli türev tanımı

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(t + \varepsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} = t^{[\alpha]-\alpha} \frac{d^{n+1}f(t)}{dt^{n+1}}, \quad (1.15)$$

olup, burada  $\forall t > 0, \alpha \in (n, n+1], n \in \mathbb{N}$  ve  $f, (n+1)$  – diferansiyellenebilirdir [34].

Aşağıdaki teoremden, Tanım 1.1 in özelliklerinden bahsedilmektedir [34].

**Teorem 1.1.**  $f$  ve  $g$  diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun.  $\alpha \in (0,1]$  için

1.  $T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}$
2.  $T_{\alpha}(mf + ng) = mT_{\alpha}(f) + nT_{\alpha}(g) \quad (\forall m, n \in \mathbb{R})$
3.  $T_{\alpha}(f \cdot g) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$
4.  $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$
5.  $T_{\alpha}(c) = 0 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$
6.  $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha} \quad (\forall p \in \mathbb{R})$
7.  $T_{\alpha}(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx} \quad (\forall c \in \mathbb{R})$

dir [34].

### 1.2.1.1 Uyumlu kesirli birikim ve fark

Ma vd. [35] uyumlu kesirli birikimi (CFA) ve uyumlu kesirli farkı (CFD) hesaplamak için yeni tanımlar verdiler.

**Tanım 1.2.**  $\alpha$  basamaktan  $f$  fonksiyonunun uyumlu kesirli birikimli toplamı (CFA)

$$\nabla^{\alpha} f(k) = \nabla \left( \frac{f(k)}{k^{1-\alpha}} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{f(j)}{j^{1-\alpha}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (0, 1]$$

ve

$$\nabla^{\alpha} f(k) = \nabla^{n+1} \left( \frac{f(k)}{k^{[\alpha]-\alpha}} \right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (n, n+1]$$

olarak tanımlanır [35].

**Tanım 1.3.**  $\alpha$  basamaktan  $f$  fonksiyonunun uyumlu kesirli farkı (CFD)

$$\Delta^\alpha f(k) = k^{1-\alpha} \Delta f(k) = k^{1-\alpha} [f(k) - f(k-1)], \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (0, 1]$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha f(k) &= k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} f(k) \\ &= k^{[\alpha]-\alpha} \sum_{j=k-[\alpha]}^k (-1)^{k-j} \binom{[\alpha]}{k-j} f(j), \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (n, n+1] \end{aligned}$$

olarak tanımlanır [35].

### 1.2.2 Caputo kesirli türev

**Tanım 1.4.** Bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$  basamaktan Caputo türevi,  $n \in \mathbb{N}$  için

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n$$

dir. Burada  $a$  başlangıç değerini ifade eder ve genelde sıfır olarak alınır. Özel olarak,  $\alpha \in (0,1)$  için Caputo türev,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau$$

şeklindedir [36].

### 1.2.3 Riemann-Liouville kesirli türev

**Tanım 1.5.** Bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$  basamaktan Riemann- Liouville türevi,  $n \in \mathbb{N}$  için

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} {}_a D_t^{-(n-\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n$$

burada  $a$  başlangıç değerini ifade eder ve genelde sıfır olarak alınır [36].

Bu türev tanımlarından başka, literatürde daha farklı ya da modifiye edilmiş türev tanımları da yer almaktadır [37]. Bu tez çalışmasında kurulan modeller hem yukarıdakiler hem de burada bahsedilmeyen Grünwald-Letnikov, Riesz-Feller, Hilfer, Atangana-Baleanu vb. türev tanımları için de geçerlidir.



## 2. OPTİMİZE EDİLMİŞ SÜREKLİ VE KESİR MERTEBEDEN YENİ BİR GRİ MODEL

Daha önceden de bahsedildiği üzere gri modelleme teorisinde en önemli çalışma konularından birisi önceki modellerden daha iyi performans gösteren yeni modellerin geliştirilmesidir. Bu bazen var olan modellerin optimize edilmesi ile bazen ise yeniden model kurulmasıyla gerçekleştirilir.

Xi vd. [36] tarafından geliştirilen CCFGM(1, 1) modeli bazı yeni düşüncelerle optimize edilerek yeni bir gri model olan OCCFGM(1, 1) geliştirildi. Bu bölümdeki yenilikler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Literatürdeki gri modeller genellikle verilen veri setinin üstel artış göstermesi durumu için uygundur. Fakat ham verilerdeki ani artışlar tahmin kesinliğini negatif etkiler. Bu ani değişimler verileri kullanılan vakayı etkileyen beklenmedik olaylardan (savaş, afet, ekonomik kriz, icatlar vs.) kaynaklanabilir. Bu bölümdeki yeniliklerden biri beyazlatma diferansiyel denkleminin  $(e^{-t^r})$  şeklinde azalan bir terim eklenerek tahmin gücünü geliştirmektir. Monoton azalan bu terim tahmin hatasının büyümesini baskılayacaktır.
- Modelde en uygun kesir mertebelerin belirlenebilmesi için Kaba Kuvvet Algoritması kullanıldı.
- Oluşturulan OCCFGM(1, 1) modelini doğrulamak için üç reel veri seti üzerinde çalışma yapıldı.
- Üzerinde çalışılan veri setlerinin sayısal sonuçları bu bölümde geliştirilen yeni modelin, literatürdeki eş değer modellerden daha iyi tahmin performansına sahip olduğu görüldü.
- Sadece belirli tipten veri setleri için değil genel olarak bütün zaman serileri için düşük hata oranına sahip tahminler oluşturulabilecek bir model geliştirildi.
- Kesir basamağın ayrıca bir parametre olarak modelin gelişimine katkısı sağlandı.

### 2.1. Önerilen Kesirli Gri Modelin Formülasyonu

Bu kısımda Xie vd. [36] tarafından önerilen CCFGM(1, 1) modelini bir üstel gri etki miktarı eklenerek elde edilen OCCFGM(1, 1) modelinin genel mekanizması ve

hesaplamaları verildi. Eklenen bu terim çözüm aşamasında birçok farklılıklar doğurarak CCFGM(1, 1) modelinden çok daha farklı sonuçlar türetti.

İleriki zaman dilimleri için tahminlerin oluşturulacağı ham veri dizisi

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (2.1)$$

alınsın.  $\alpha$  basamaktan uyumlu kesirli birikim dizisi

$$X^{(\alpha)} = (x^{(\alpha)}(1), x^{(\alpha)}(2), \dots, x^{(\alpha)}(n)) \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada

$$x^{(\alpha)}(k) = \nabla^\alpha x^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-i \end{bmatrix} \frac{x^{(0)}(i)}{i^{[\alpha]-\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.3)$$

olup  $[\cdot]$  tavan fonksiyonu ve

$$\begin{bmatrix} [\alpha] \\ k-i \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(k-i+[\alpha])}{\Gamma(k-i+1)\Gamma([\alpha])} = \frac{(k-i+[\alpha]-1)!}{(k-i)!(\alpha-1)!}$$

şeklinde hesaplanır [38].

**Tanım 2.1.** OCCFGM(1, 1) modelinin  $r$  –basamaktan beyazlatma diferansiyel denklemi

$$\frac{d^r x^{(\alpha)}(t)}{dt^r} + ax^{(\alpha)}(t) = b + ce^{-t^r} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir, burada  $a$  gelişim katsayısı,  $b$  hareket katsayısı ve  $ce^{-t^r}$  bir üstel gri etki terimidir. Öyle ki,  $ce^{-t^r}$  monoton azalan terimi tahmin hatasının artmasını bastıracaktır.

Oluşturulan model  $c = 0$  için CCFGM(1, 1) modeline dönüşür [36]. Ek olarak, OCCFGM(1, 1) modeli  $r = 1$  ve  $c = 0$  için CFGM(1, 1) modeline dönüşmektedir [35]. Bu da gösterir ki bu bölümde geliştirilen model CFGM(1, 1) ve CCFGM(1, 1) modellerinin ikisini kapsar.

**Teorem 2.1.** Verilen kesirli basamaklar olan  $\alpha$  ve  $r$  değerleri ile ham veri dizisi için OCCFGM(1, 1) modelinin parametreleri olan  $a$ ,  $b$  ve  $c$

$$[\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2.5)$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 & 0.5(e^{-2^r} + e^{-1^r}) \\ -0.5(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 & 0.5(e^{-3^r} + e^{-2^r}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) & 1 & 0.5(e^{-n^r} + e^{-(n-1)^r}) \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(\alpha-r)}(2) \\ x^{(\alpha-r)}(3) \\ \vdots \\ x^{(\alpha-r)}(n) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix}$$

dir.

**İspat** (2.4) beyazlatma denkleminin kesikli formu denklemin tüm terimlerinin  $k-1$  den  $k$  ya integre edilmesiyle aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\iint \dots \int_{k-1}^k \frac{d^r x^{(\alpha)}(t)}{dt^r} dt^r + a \iint \dots \int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t) dt^r = \iint \dots \int_{k-1}^k (b + ce^{-t}) dt^r. \quad (2.7)$$

Sol tarafın birinci integrali aşağıdaki gibi kolayca hesaplanır,

$$\iint \dots \int_{k-1}^k \frac{d^r x^{(\alpha)}(t)}{dt^r} dt^r \approx \Delta^r x^{(\alpha)}(k) = x^{(\alpha-r)}(k). \quad (2.8)$$

Genelleştirilmiş yamuk formülü [36] kullanılarak, sol tarafın ikinci integrali

$$a \iint \dots \int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t) dt^r \approx \frac{a}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1)) \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Sağ taraftaki integral,

$$\iint \cdots \int_{k-1}^k (b + ce^{-t}) dt^r = b + \frac{c}{2} (e^{-k^r} + e^{-(k-1)^r}), \quad (2.10)$$

olarak elde edilir. Böylece (2.7) denklemi

$$x^{(\alpha-r)}(k) + \frac{a}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1)) = b + \frac{c}{2} (e^{-k^r} + e^{-(k-1)^r}) \quad (2.11)$$

olarak yazılır ( $k = 2, 3, \dots, n$ ).

Yukarıdaki (2.11) denklemi, aşağıdaki gibi lineer denklem sistemi olarak yazılır:

$$\begin{aligned} x^{(\alpha-r)}(2) &= -0.5a (x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) + b + 0.5c(e^{-2^r} + e^{-1^r}) \\ x^{(\alpha-r)}(3) &= -0.5a (x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) + b + 0.5c(e^{-3^r} + e^{-2^r}) \\ &\vdots \\ x^{(\alpha-r)}(n) &= -0.5a (x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) + b + 0.5c(e^{-n^r} + e^{-(n-1)^r}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) denklem sistemi matris formunda

$$Y = B\hat{\rho} \quad (2.13)$$

dir. (2.13) denkleminde göre, üzerinde çalışılan ham veriler ve belirlenen  $\alpha$  mertebesi ile  $[\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}]^T$  parametreleri en küçük kareler metodu kullanılarak

$$[\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (2.14)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} -0.5(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 & 0.5(e^{-2^r} + e^{-1^r}) \\ -0.5(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 & 0.5(e^{-3^r} + e^{-2^r}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) & 1 & 0.5(e^{-n^r} + e^{-(n-1)^r}) \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} x^{(\alpha-r)}(2) \\ x^{(\alpha-r)}(3) \\ \vdots \\ x^{(\alpha-r)}(n) \end{bmatrix}, \hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

dir. Burada  $n$  modelde kullanılan örneklem sayısıdır.

## 2.2. Çözüm Fonksiyonu ve Tahminlerin Oluşturulması

Önceki kısımlarda yeni oluşturduğumuz OCCFGM(1, 1) modelinin beyazlatma diferansiyel denklemi ve bu denklemdeki parametrelerin nasıl hesaplanacağı verildi. Burada ise beyazlatma diferansiyel denkleminin genel çözümü ile bu çözüm kullanılarak ham veri dizisi için tahminlerin elde edileceği çözüm fonksiyonu (yanıt fonksiyonu) ve kullanışlı denklemler elde edildi.

**Teorem 2.2.** OCCFGM(1, 1) modelinin çözüm fonksiyonunun kesikli formu  $k = 2, 3, \dots, n$  için,

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-r} e^{-1} \right) e^{\frac{a}{r}(1-k^r)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-r} e^{-k^r} \quad (2.16)$$

şeklindedir.

**İspat** Açıktır ki, Teorem 1.1 in ilk özelliği kullanılarak, (2.4) denklemi  $r$ . basamaktan beyazlatma diferansiyel denklemi

$$t^{1-r} \frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} + ax^{(\alpha)}(t) = b + ce^{-t^r} \quad (2.17)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem birinci basamaktan bir lineer diferansiyel denklem olup genel çözümünün

$$x^{(\alpha)}(t) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a-r} e^{-t^r} + d e^{-\frac{a}{r}t^r} \quad (2.18)$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada  $d$  integral sabitidir.  $x^{(\alpha)}(1) = x^{(0)}(1)$  başlangıç koşulu kullanılarak, bu integral sabiti

$$d = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-r} e^{-1} \right) e^{\frac{a}{r}}$$

olarak bulunur. Böylece (2.18) denkleminin gri tahmin fonksiyonu

$$\hat{x}^{(\alpha)}(t) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-r} e^{-1} \right) e^{\frac{a}{r}(1-t^r)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-r} e^{-t^r}$$

elde edilir ve çözüm fonksiyonunun kesikli formu

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-r} e^{-1} \right) e^{\frac{a}{r}(1-k^r)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-r} e^{-k^r}$$

şeklinde yazılır. Böylece ispat tamamlandı.

Buraya kadar beyazlatma denkleminin çözümü ve parametrelerin elde edilmesi tamamlandı. Fakat yukarıdaki teoreme göre elde edilen  $\hat{x}^{(\alpha)}(k)$  dir. Oysa amacımız,  $x^{(0)}(k)$  veri dizisi için tahminlerin oluşturulacağı bir formülizasyona ulaşmaktır. Aşağıdaki teoremden bu geçiş sağlandı.

**Teorem 2.3.**  $\alpha$  basamaktan birikimli toplam dizisinin elemanlarından  $\hat{x}^{(0)}(k)$  tahmin değerleri  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} \hat{x}^{(\alpha)}(k), \quad \alpha \in (n, n+1] \quad (2.19)$$

şeklinde hesaplanır [35].

**İspat** (2.3) denkleminde  $\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \nabla^\alpha \hat{x}^{(0)}(k)$  olduğu görülebilir.  $\Delta^\alpha$  ters operatörü her iki tarafa uygulanarak,

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k)$$

elde edilir. Tanım 1.3 den

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} \hat{x}^{(\alpha)}(k), \quad \alpha \in (n, n+1]$$

olduğu kolayca görülür.

Özel olarak,  $\alpha \in (0, 1]$  için

$$\hat{x}^{(0)}(k) = k^{1-\alpha} (\hat{x}^{(\alpha)}(k) - \hat{x}^{(\alpha)}(k-1)) \quad (2.20)$$

dir. Böylece ispat tamamlandı.

### 2.3. Modelin Tahmin Gücünün Değerlendirilmesi

Önerilen OCCFGM(1, 1) modelinin tahmin doğruluğunu değerlendirmek için, göreceli yüzdelik hata (RPE) ve ortalama mutlak yüzdelik hata (MAPE) kullanıldı. Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$RPE(k) = \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100 \quad (2.21)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n RPE(k) \quad (2.22)$$

burada  $x^{(0)}(k)$  orijinal veri dizisini ve  $\hat{x}^{(0)}(k)$  ise tahminleri temsil eder.

### 2.4. Optimal $\alpha$ ve $r$ için Kaba Kuvvet Algoritması

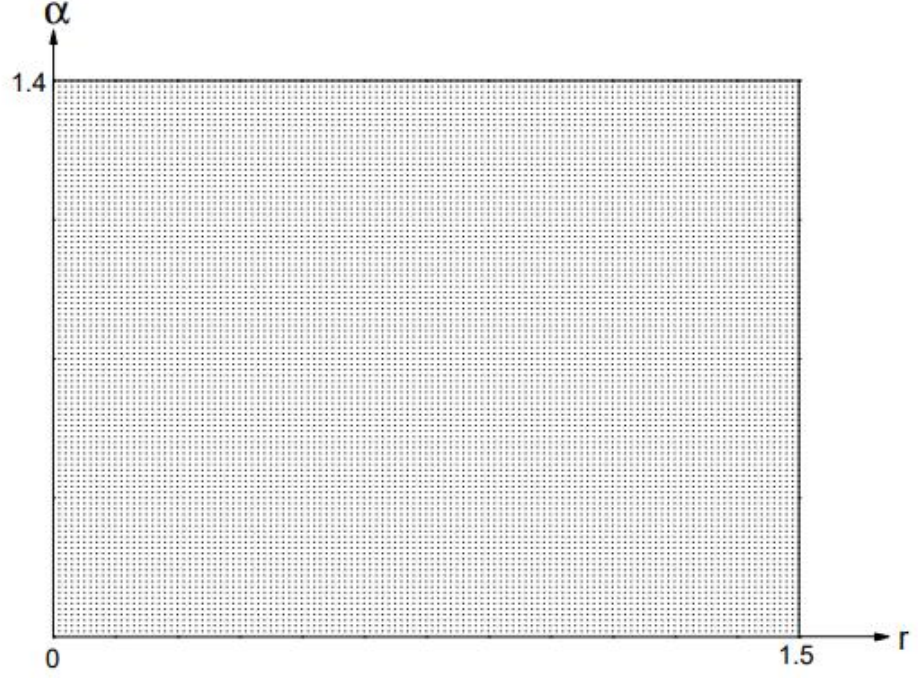
Bu bölümde, amacımız modelin ortalama mutlak yüzde hatasını (MAPE) minimum yapan optimum  $\alpha$  ve  $r$  parametrelerini belirlemektir.

Kaba Kuvvet (Brute Force) algoritması, optimizasyon problemlerini çözmek ve verimliliği artırmak için gelişmiş teknikler yerine her olasılığı deneyerek sonuca ulaşan ve Naive algoritması olarak da bilinen basit bir yaklaşımdır. Diğer popüler sürü zekâsı algoritmalarından farklı olarak, hata yapma ihtimalinin olmamasından dolayı Kaba Kuvvet algoritması çok çeşitli problemlere uygulanabilen ve çözüm alanında optimum değeri bulmak için hem etkili hem de kolay bir yöntemdir.

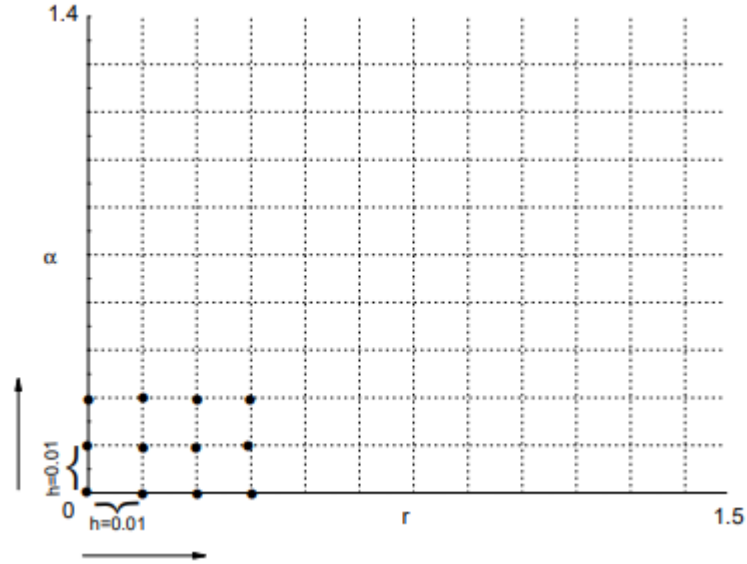
Diğer algoritmaların yakınsama hızı avantajlarına rağmen, global ekstremum yerine yerel ekstremum noktasına odaklanabilmeleri bir dezavantajdır. Ancak, Kaba Kuvvet algoritması tüm etki alanını tarar, her bir noktayı değerlendirir, ardından bu noktalarda ki MAPE leri hesaplar ve herhangi bir yanılgıya düşmeden optimum parametrelere ulaşır. Bir başka deyişle, çözüm bölgesindeki her nokta modelde yerine konularak hata oranları hesaplanır ve en düşük hata oranına sahip olan parametreler optimal değer olarak değerlendirilir.

Bu kısımda optimum  $(\alpha, r)$  değerleri  $\alpha \in (0, 1.4]$  ve  $r \in (0, 1.5]$  ile sınırlanan dikdörtgen alan içinde arandı (Şekil 2.1). Başlangıçta bölge daha geniş olarak alındı ancak bu aralığın dışında MAPE değerlerinin arttığı görüldü ve bu nedenle aralık

kısıtlandı. İlk olarak  $\alpha = 0$  sabitlenerek  $r$ ,  $h = 0.01$  adım genişliği ile 0 dan 1.5 a kadar olan tüm değerleri alır. Daha sonra  $\alpha = \alpha + h$  yi sabitleyerek  $r$ ,  $h = 0.01$  adım genişliği ile 0 dan 1.5 a kadar olan tüm değerleri alır (Şekil 2.2).



Şekil 2.1. Kaba Kuvvet algoritması için  $(\alpha, r)$  noktaları.



Şekil 2.2. Kaba Kuvvet algoritmasının çalışma prensibi.

Bu süreç, tüm bölge taranana kadar gerçekleştirilir. Bu şekilde bölgedeki bütün  $(\alpha, r)$  noktaları ve bu noktalardaki MAPE ler hesaplanır. Böylece hesaplanan MAPE lerin minimumunu veren  $\alpha$  ve  $r$  optimum parametreler olarak belirlenir.

## 2.5. OCCFGM(1, 1) Modelinin Uygulamaları

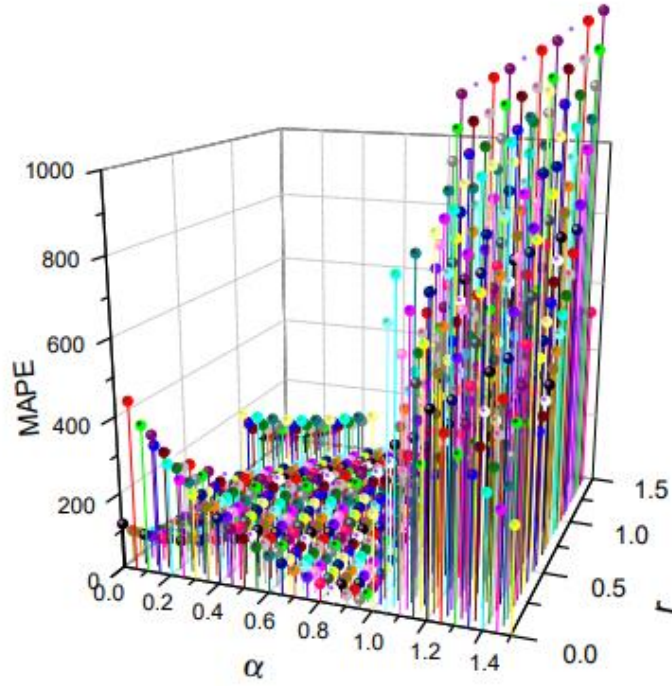
Bu bölümde bazı reel verilerin tahminleri önerilen OCCFGM(1, 1) ile oluşturularak hem ele alınan problemler üzerine çalışanlar için kaynak veri oluşturuldu hem de modelin etkinliği gösterildi.

### 2.5.1 Çalışma 1: Çin'in yerel enerji tüketimi

Günümüz dünyasında ülkelerin en önemli zenginlikleri arasında enerji ilk sırayı almaktadır. Bu durumda ülkelerin enerji tüketimleri, ihtiyaç duydukları enerji miktarını belirler ve tüm stratejiler buna göre yapılır. Bu kısımda, özel olarak Çin'in yerel enerji tüketimini tahmin etmek için yeni OCCFGM(1, 1) modeli kullanıldı. Ham veri seti ve farklı yöntemlerle hesaplanan bazı veriler Xie vd. [36] ile Bilgil [9] tarafından yapılan çalışmalardan alındı. Bu veri seti kullanılarak önerilen kesirli gri model yardımıyla tahminler elde edildi ve modelin uygulanabilirliği ile etkinliği test edildi.

Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak, optimum  $\alpha$  ve  $r$  değerleri 0.9583 MAPE ile  $\alpha = 0.92$  ve  $r = 1.02$  için elde edildi.  $\alpha - r$  bölgesinin içinde tüm noktaların MAPE leri hesaplandı ve Şekil 2.3 de gösterildi.

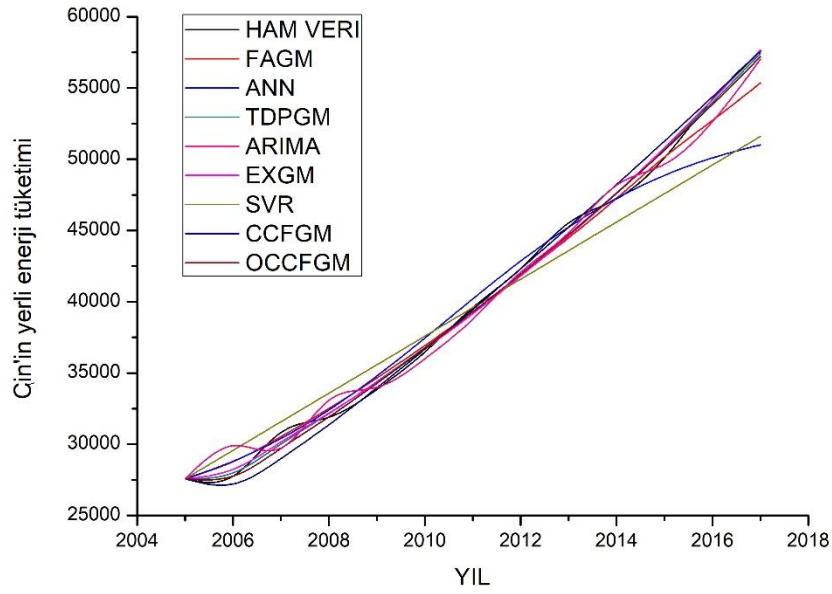
Ek olarak, OCCFGM(1, 1) modeli literatürde güçlü modeller olarak bilinen FAGM, ANN, TDPGM, ARIMA, EXGM, SVR ve CCFGM modelleri ile kıyaslandı. Çizelge 2.1 de görülmektedir ki OCCFGM(1, 1) modeli diğer güçlü modellerle kıyaslandığında en düşük MAPE değerini vermektedir. Çin'in yerel enerji tüketim ham verileri için yukarıdaki modellere ait simülasyonlar Şekil 2.4 de verildi. Diğer karşılaştırılan modellerin ve önerilen yeni modelin MAPE değerleri sırasıyla %1.73, %3.00, %1.00, %2.13, %1.57, %4.58, %1.38 ve **%0.96** olarak hesaplandı (Şekil 2.5).



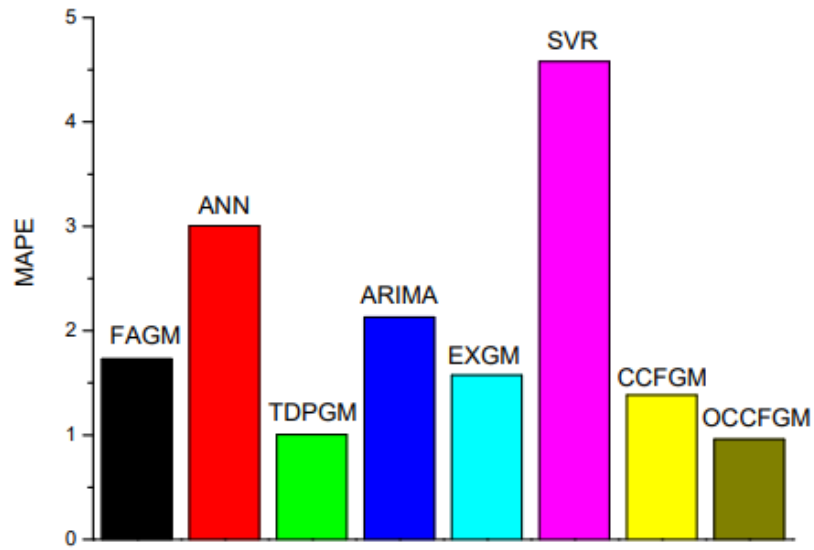
Şekil 2.3.  $\alpha - r$  bölgesi ve tüm  $(\alpha, r)$  noktaları için MAPE değerleri.

Çizelge 2.1. Çin'in yerli enerji tüketimi için FAGM, ANN, TDPGM, ARIMA, EXGM, SVR, CCFGM ve OCCFGM modelleri ile elde edilen sayısal sonuçları.

| YIL  | HAM VERİ | FAGM     | ANN      | TDPGM    | ARIMA    | EXGM     | SVR      | CCFGM    | OCCFGM   |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 2005 | 27573    | 27573.00 | 27576.24 | 27573.00 | 27573.00 | 27573.00 | 27572.90 | 27573.00 | 27573.00 |
| 2006 | 27765    | 28776.69 | 28801.47 | 27990.63 | 29893.26 | 28238.42 | 29574.73 | 27207.68 | 27763.98 |
| 2007 | 30814    | 30529.07 | 30403.47 | 30011.65 | 29728.94 | 30145.47 | 31576.57 | 28992.48 | 29705.97 |
| 2008 | 31898    | 32510.82 | 32409.59 | 32146.03 | 33080.51 | 32181.29 | 33578.40 | 31373.76 | 31919.92 |
| 2009 | 33843    | 34650.97 | 34790.27 | 34398.83 | 33991.82 | 34354.57 | 35580.23 | 33965.07 | 34275.81 |
| 2010 | 36470    | 36925.23 | 37441.64 | 36775.47 | 35987.78 | 36674.52 | 37582.07 | 36671.07 | 36730.58 |
| 2011 | 39584    | 39324.40 | 40193.56 | 39281.80 | 38770.78 | 39150.89 | 39583.90 | 39459.34 | 39280.02 |
| 2012 | 42306    | 41845.55 | 42848.65 | 41924.09 | 42069.85 | 41793.80 | 41585.73 | 42317.23 | 41933.19 |
| 2013 | 45531    | 44488.93 | 45235.79 | 44709.09 | 44834.2  | 44613.27 | 43587.57 | 45239.62 | 44702.68 |
| 2014 | 47212    | 47256.57 | 47249.65 | 47644.06 | 48177.2  | 47617.93 | 45589.40 | 48224.63 | 47601.47 |
| 2015 | 50099    | 50151.64 | 48859.33 | 50736.80 | 49648.76 | 50811.34 | 47591.23 | 51271.90 | 50642.18 |
| 2016 | 54209    | 52721.73 | 50091.35 | 53995.70 | 52627.12 | 54181.88 | 49593.07 | 54381.79 | 53837.07 |
| 2017 | 57620    | 55350.93 | 51003.38 | 57429.77 | 57016.85 | 57675.30 | 51594.90 | 57555.00 | 57198.20 |
| MAPE |          | 1.73     | 3.00     | 1.00     | 2.13     | 1.57     | 4.58     | 1.38     | 0.96     |



**Şekil 2.4.** Çin'in yerli enerji tüketimi için sekiz modelin simülasyonu.



**Şekil 2.5.** Çin'in yerli enerji tüketim verileri için modellerin tahmin hataları.

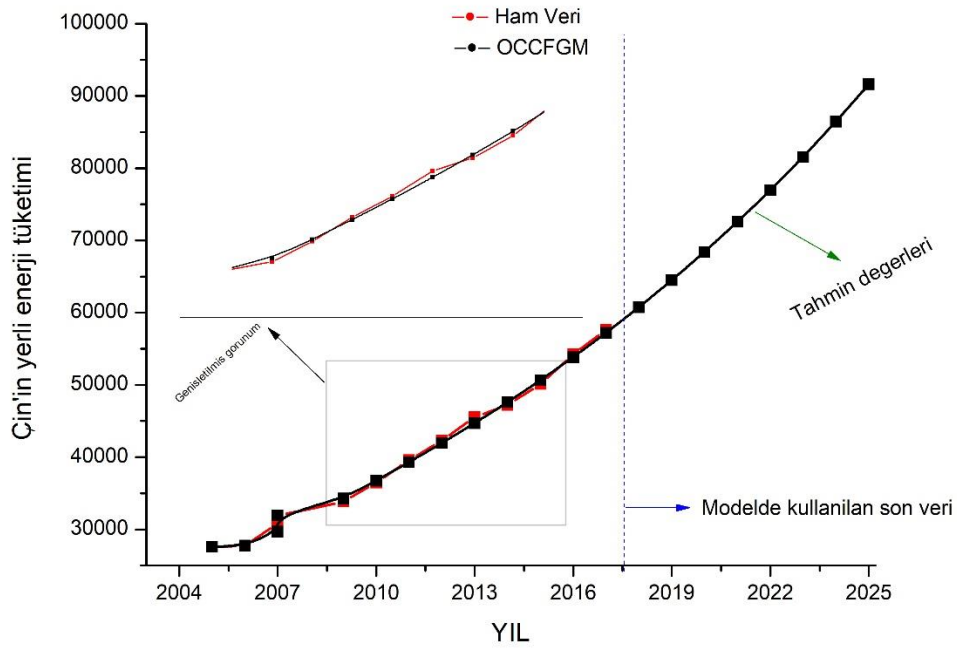
Elde edilen sonuçlara göre OCCFGM(1, 1) modeli diğer modellere kıyasla en düşük tahmin hatasını verdiği görüldü. Bu ise önerilen kesir mertebeden OCCFGM(1, 1) modelinin güçlü tahminleme özelliğine sahip olduğu anlamına gelmektedir.

OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak 2025 yılına kadar Çin'in yerel enerji tüketimine ilişkin tahmin değerleri Çizelge 2.2 ve Şekil 2.6 da verildi. Tahmin sonuçları, Çin'in

yerli enerji tüketiminin gözlem dönemi boyunca ne derecede artacağını göstermektedir.

**Çizelge 2.2.** OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak Çin'in yerli enerji tüketim değerlerinin tahmini.

| Yıllar | Tahmin değerleri |
|--------|------------------|
| 2018   | 60737.6424       |
| 2019   | 64467.6610       |
| 2020   | 68400.8194       |
| 2021   | 72550.1069       |
| 2022   | 76929.0258       |
| 2023   | 81551.6697       |
| 2024   | 86432.7943       |
| 2025   | 91587.8835       |



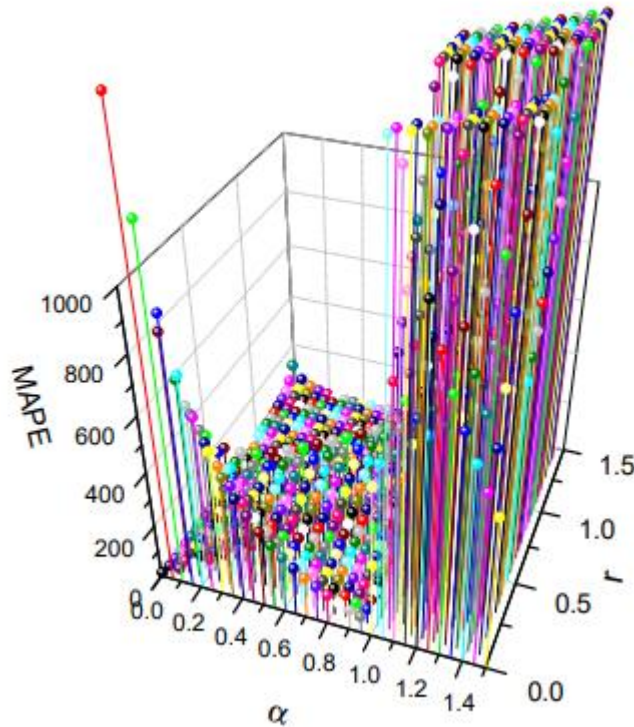
**Şekil 2.6.** OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak Çin'in yerli enerji tüketim değerlerinin tahmini.

### 2.5.2 Çalışma 2: Rusya'nın $CO_2$ emisyonları

Endüstri ve teknolojinin gelişmesi, buna paralel olarak enerji tüketimindeki artmaya ve tarımsal alanların azalmasına neden olur. Zincirleme gelişen bu ve daha başka olaylar tüm dünyada metan gazlarının havaya salınmasına, dünyayı bir battaniye gibi

saran ozon tabakasının kalınlaşmasına neden olurlar. Bu ise güneşten gelen ışınların yansımadan yer küre içerisinde hapsolarak tüm canlıların yaşamlarını olumsuz etkileyen küresel ısınmanın başlıca nedenini oluşturur. Metan gazlarından en önemlisi ve en çok miktarda atmosferde salınım göstereni karbondioksit ( $CO_2$ ) gazıdır. Bu kısımda Rusya'nın  $CO_2$  emisyon verileri üzerinde çalışıldı. Çalışmada kullanılan gerçek veriler ve bazı modellerle yapılan veri tahminleri Wu vd. [38] tarafından yapılan çalışmadan alındı. Aynı veriler için OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak sonuçlar elde edildi ve yorumlandı. Rusya'nın  $CO_2$  emisyon verileri monoton artan ya da azalan olmamasına yani dalgalı bir şekilde olmasına rağmen bu tez çalışmasında önerilen OCCFGM(1, 1) modelinin diğer yeni modellere kıyasla daha düşük hata oranlarında tahminler ürettiği görüldü.

Optimum  $\alpha$  ve  $r$  değerleri yine Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak  $\alpha = 0.84$  ve  $r = 0.97$  için  $MAPE = 1.499$  olarak elde edildi. Optimal parametrelerin arandığı bölge ve bu bölgedeki her bir noktanın MAPE değeri Şekil 2.7 de gösterildi.



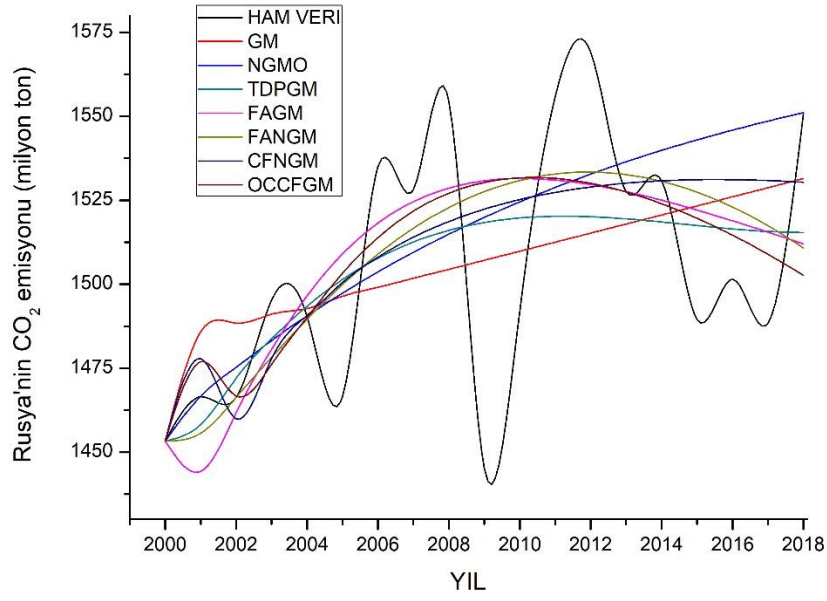
Şekil 2.7.  $\alpha - r$  bölgesi ve tüm  $(\alpha, r)$  noktaları için MAPE değerleri.

Belirlenen optimal  $\alpha$  ve  $r$  değerleri için, OCCFGM(1, 1) modeli GM, ARIMA, NGMO, TDPGM, FAGM, FANGM ve CFNGM modelleri ile kıyaslandı. Burada

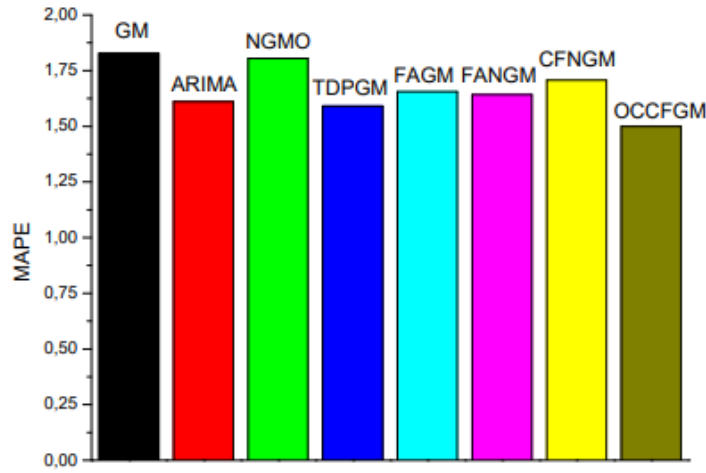
dikkat edilecek olursa, kıyaslama için bu modellerin bazıları önceki kısımda tercih edilenlerden farklıdır. Bunun nedeni, önerdiğimiz OCCFGM(1, 1) modelinin daha çok modelle kıyaslamasının yapılmasıdır. Yapılan hesaplamalar sonucunda OCCFGM(1, 1) modelinin diğer modellere kıyasla en düşük tahmin hatasını verdiği Çizelge 2.3 de gösterildi. Rusya'nın  $CO_2$  emisyonu için gerçek veriler ile bu modellerin sonuç verileri Şekil 2.8 de gösterildi. Kıyaslanan modeller ve yeni modelin MAPE değerleri sırasıyla %1.83, %1.61, %1.81, %1.59, %1.66, %1.64, %1.71 ve %**1.50** olarak hesaplandı (bkz. Şekil 2.9). Kısa ve orta zaman tahminleri için, OCCFGM(1, 1) modeli diğer modellere kıyasla daha düşük hata oranında sonuçlar verdiği görüldü. Böylece önerilen bu modelin yüksek tahmin gücüne sahip olduğu söylenebilir. Rusya'nın  $CO_2$  emisyonunun tahmin değerleri OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak 2025 yılına kadar Çizelge 2.4 ve Şekil 2.10 da verildi.

**Çizelge 2.3.** Rusya'nın  $CO_2$  emisyonu için GM, ARIMA, NGMO, TDPGM, FAGM, FANGM, CCFGM ve OCCFGM modelleri ile elde edilen sayısal sonuçları.

| YIL  | HAM VERİ | GM      | ARIMA   | NGMO    | TDPGM   | FAGM    | FANGM   | CFNGM   | OCCFGM  |
|------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2000 | 1453.30  | 1453.30 | 1453.30 | 1453.30 | 1453.30 | 1453.30 | 1453.30 | 1453.30 | 1453.30 |
| 2001 | 1466.50  | 1485.90 | 1472.3  | 1466.69 | 1458.21 | 1444.28 | 1455.65 | 1477.86 | 1476.91 |
| 2002 | 1466.30  | 1488.44 | 1482.64 | 1475.27 | 1472.03 | 1461.78 | 1466.31 | 1459.90 | 1466.67 |
| 2003 | 1495.20  | 1491.09 | 1484.91 | 1483.21 | 1483.73 | 1480.59 | 1478.18 | 1477.79 | 1476.13 |
| 2004 | 1490.30  | 1492.75 | 1502.46 | 1490.56 | 1493.48 | 1496.56 | 1489.58 | 1490.74 | 1490.15 |
| 2005 | 1466.60  | 1496.42 | 1500.2  | 1497.37 | 1501.43 | 1509.01 | 1499.94 | 1500.51 | 1503.28 |
| 2006 | 1535.00  | 1499.09 | 1491.06 | 1503.67 | 1507.73 | 1518.19 | 1508.99 | 1508.07 | 1513.88 |
| 2007 | 1528.10  | 1501.76 | 1529.85 | 1509.50 | 1512.55 | 1524.56 | 1516.63 | 1514.00 | 1521.74 |
| 2008 | 1554.30  | 1504.44 | 1522.5  | 1514.90 | 1516.04 | 1528.61 | 1522.83 | 1518.66 | 1527.09 |
| 2009 | 1445.30  | 1507.12 | 1535.24 | 1519.90 | 1518.37 | 1530.79 | 1527.57 | 1522.33 | 1530.29 |
| 2010 | 1492.20  | 1509.81 | 1478.16 | 1524.53 | 1519.71 | 1531.49 | 1530.90 | 1525.18 | 1531.67 |
| 2011 | 1555.90  | 1512.50 | 1512.28 | 1528.81 | 1520.23 | 1531.02 | 1532.82 | 1527.36 | 1531.51 |
| 2012 | 1569.10  | 1515.20 | 1544.16 | 1532.77 | 1520.09 | 1529.65 | 1533.39 | 1528.97 | 1530.05 |
| 2013 | 1527.70  | 1517.90 | 1545.99 | 1536.44 | 1519.47 | 1527.60 | 1532.65 | 1530.09 | 1527.48 |
| 2014 | 1530.80  | 1520.61 | 1521.96 | 1539.84 | 1518.54 | 1525.03 | 1530.63 | 1530.80 | 1523.96 |
| 2015 | 1489.50  | 1523.32 | 1524.94 | 1542.99 | 1517.48 | 1522.09 | 1527.39 | 1531.14 | 1519.62 |
| 2016 | 1501.50  | 1526.04 | 1503.95 | 1545.90 | 1516.48 | 1518.88 | 1522.98 | 1531.16 | 1514.57 |
| 2017 | 1488.40  | 1528.76 | 1514.62 | 1548.60 | 1515.71 | 1515.50 | 1517.42 | 1530.89 | 1508.89 |
| 2018 | 1550.80  | 1531.48 | 1510.06 | 1551.09 | 1515.36 | 1512.00 | 1510.78 | 1530.37 | 1502.67 |
| MAPE |          | 1.83    | 1.61    | 1.81    | 1.59    | 1.66    | 1.64    | 1.71    | 1.50    |



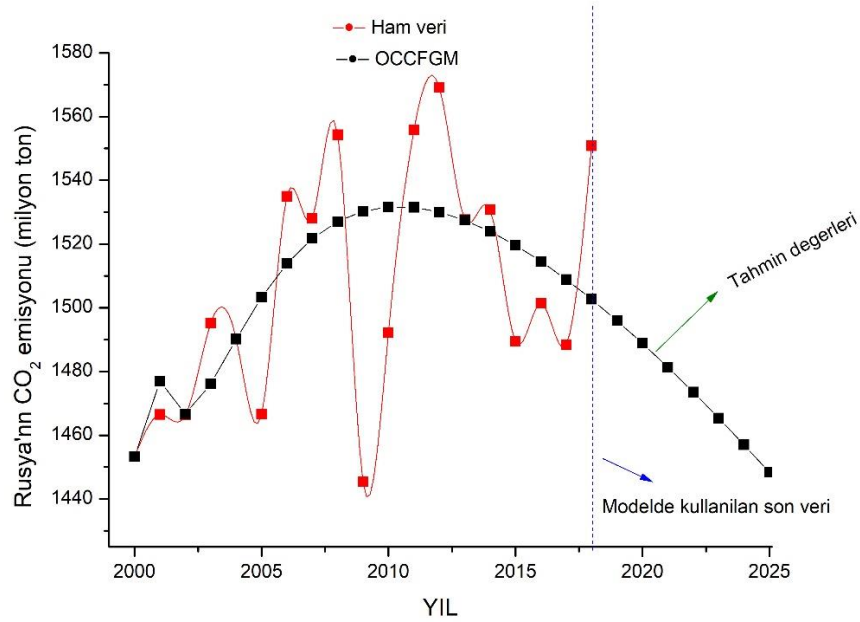
Şekil 2.8. Rusya'nın  $CO_2$  emisyon verileri için gerçek değerler ve farklı modellerle elde edilen veriler.



Şekil 2.9. Rusya'nın  $CO_2$  emisyon verileri için sekiz farklı modelin tahmin hata oranları.

**Çizelge 2.4.** Rusya'nın  $CO_2$  emisyonu için OCCFGM(1, 1) modeli ile yapılan tahminler.

| Yıllar | Tahmin değerleri |
|--------|------------------|
| 2019   | 1495.9629        |
| 2020   | 1488.8365        |
| 2021   | 1481.3359        |
| 2022   | 1473.5040        |
| 2023   | 1465.3785        |
| 2024   | 1456.9923        |
| 2025   | 1448.3752        |



**Şekil 2.10.** Rusya'nın  $CO_2$  emisyon verileri için OCCFGM(1, 1) modeli ile elde edilen sonuçlar ve tahminler.

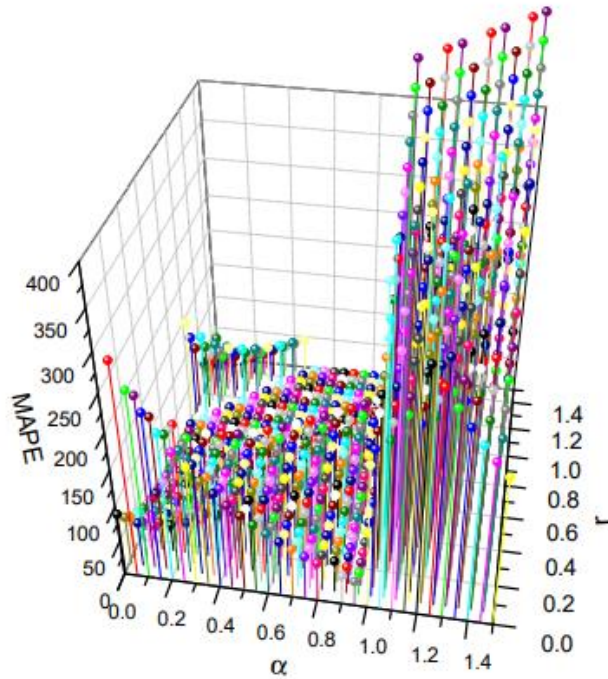
Elde edilen sonuçlara göre Rusya'nın  $CO_2$  emisyon verileri son yıllarda dalgalı bir şekilde azalıp çoğalmasına rağmen, bu dalgalanma tahmin değerlerinin civarında olacak ve dalga boyları giderek azalacaktır.

### 2.5.3 Çalışma 3: Türkiye'nin içme suyu tüketimi

Dünya genelinde iklim değişikliği ve kullanılan teknolojilerin verdiği tahribatlar neticesinde temiz içme suyuna ulaşımın zorlaştığı ve birçok ülkede bu konuda büyük yatırımların ya da önlemlerin alındığı bilinmektedir. Yakın zamanlarda, 2024 yılına

kadar Çin'in 31 bölgesindeki kişi başına su tüketiminin tahmini için FAGM(1, 1) modelinin kesirli basamaktan birikimli gri tahmin modeli uygulandı [39]. Bu alt bölümde ise Türkiye'nin önümüzdeki yıllardaki içme suyu ihtiyacı önerdiğimiz kesir basamaktan OCCFGM(1, 1) modeli ile öngörüldü. Böylece bu kısım, Türkiye için veri toplama, parametre tahmini, sonuç analizi ve gelecekteki içme suyu talebini içeren sistematik bir tahmin yöntemi sunmaktadır. Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) kesin, doğru ve resmi verileri rapor eder. Veriler, Türkiye'de 2008 ve 2018 yılları arasında ( $1000 m^3/yıl$ ) kaynaklardan çekilen toplam içme suyu miktarını içermektedir. Çekilen içme suyu aslında tüketilen miktarı temsil eder.

Modeldeki en ideal  $\alpha$  ve  $r$  değerleri Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak 0.6547 MAPE ile  $\alpha = 0.58$  ve  $r = 0.96$  olarak elde edildi. Bunun anlamı  $\alpha = 0.58$  ve  $r = 0.96$  için OCCFGM(1, 1) modeli ortalama yüzde 0.6547 kadar bir hata oranı ile tahmin oluşturmaktadır ki bu oran oldukça makul bir hata oranıdır. Basit bir bilgisayar kodu yazılarak kısa bir zamanda (yaklaşık 10 saniye de)  $\alpha - r$  bölgesinin içinde ki tüm noktalar için MAPE değerleri hesaplandı. Bölgedeki noktaların MAPE değerleri Şekil 2.11 de gösterildi.



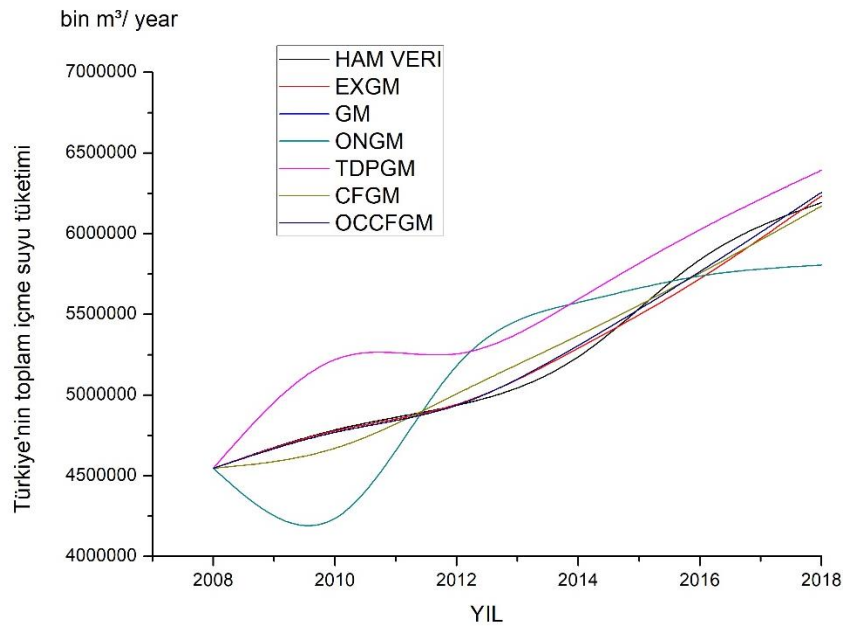
**Şekil 2.11.**  $\alpha - r$  bölgesi ve tüm  $(\alpha, r)$  noktaları için MAPE değerleri.

Ek olarak bu kısımda Ma vd. [35] tarafından geliştirilen CFGM(1, 1) modeli için optimum  $\alpha$  değeri Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak  $\alpha = 1$  olarak elde edildi. Buradaki amaç CFGM(1, 1) modelinin sonuçlarının da bu kısımda yapılan çalışmaya katılmasıdır. Böylece, CFGM(1, 1) modeli bu ham veriler için standart GM(1, 1) modeline dönüşür. Sonuç olarak, bu iki modelin tahmin değerleri aynıdır. Ayrıca, OCCFGM(1, 1) modeli altı etkili modelle (EXGM, ARIMA, GM, ONGM, TDPGM ve CFGM içeren) kıyaslanarak en düşük MAPE değerine sahip olduğu Çizelge 2.5 de gösterildi.

**Çizelge 2.5.** Türkiye'nin içme suyu tüketimi için EXGM, ARIMA, GM, ONGM, TDPGM, CFGM ve OCCFGM modelleri ile elde edilen sayısal sonuçlar.

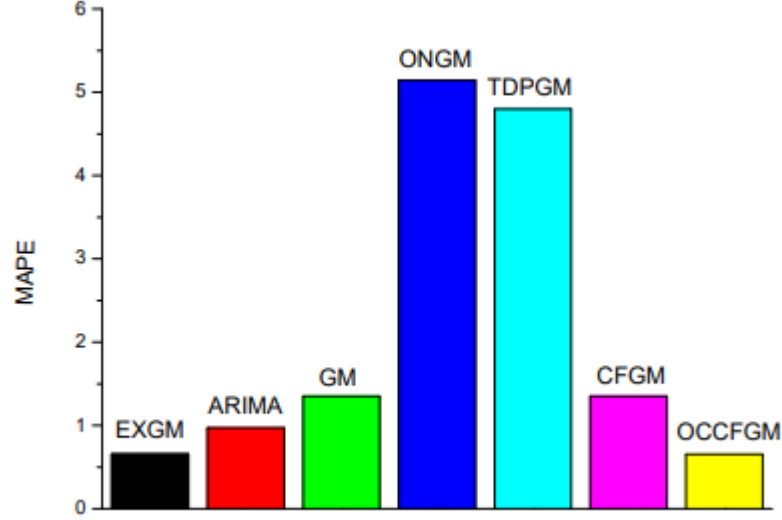
| YIL  | HAM VERİ   | EXGM       | ARIMA      | GM(1,1)    | ONGM(1,1)  | TDPGM      | CFGM       | OCCFGM     |
|------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 2008 | 4546574.00 | 4546574.00 | 4546574.00 | 4546574.00 | 4546574.00 | 4546574.00 | 4546574.00 | 4546574.00 |
| 2010 | 4784734.00 | 4778345.14 | 4823049.39 | 4670431.88 | 4235894.33 | 5220119.92 | 4670431.88 | 4768929.14 |
| 2012 | 4936342.00 | 4942384.36 | 5018419.60 | 5007438.87 | 5181165.10 | 5254997.91 | 5007438.87 | 4936652.24 |
| 2014 | 5237407.00 | 5289990.29 | 5179886.59 | 5368763.47 | 5574286.36 | 5593705.01 | 5368763.47 | 5307095.84 |
| 2016 | 5838561.27 | 5721038.75 | 5745807.76 | 5756160.36 | 5737778.48 | 6025127.79 | 5756160.36 | 5765923.61 |
| 2018 | 6193157.54 | 6234712.30 | 6232945.90 | 6171510.88 | 5805771.93 | 6393223.44 | 6171510.88 | 6256134.72 |
| MAPE |            | 0.66       | 0.97       | 1.35       | 5.14       | 4.80       | 1.35       | 0.65       |

Türkiye'nin içme suyu tüketiminin ham verileri ve yukarıdaki modellerin tahmini değerlerinin simülasyonu Şekil 2.12 de verildi.



**Şekil 2.12.** Türkiye'nin içme suyu tüketimi için gerçek değerler ve farklı modellerle elde edilen eğriler.

Kıyaslanan modeller ve yeni modelin MAPE değerleri sırasıyla %0.66, %0.97, %1.35, %5.14, %4.80, %1.35, %0.65 olarak elde edildi (bkz. Şekil 2.13).



**Şekil 2.13.** Türkiye'nin içme suyu tüketimi için yedi farklı modelin tahmin hata oranları.

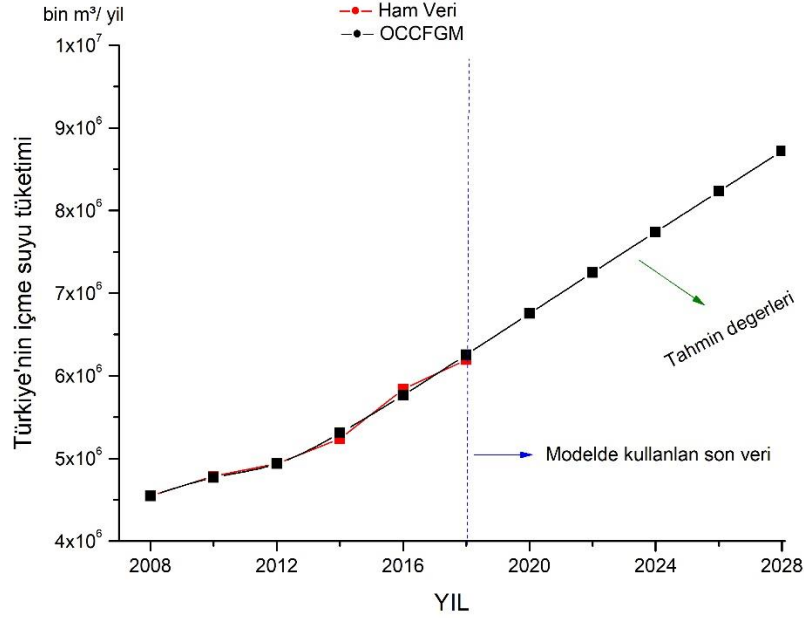
Açıkça görülür ki OCCFGM(1, 1) modeli diğer modellere kıyasla en düşük MAPE oranına sahiptir ve bu ise yeni modelin oldukça güvenilir bir tahmin gücüne sahip olduğu anlamına gelmektedir.

Gelecek yıllara ait içme suyu tüketiminin bilimsel simülasyonu ve doğru tahmin edilmesi, suyun arz-talep dengesini sağlamak için önemlidir. Türkiye'nin içme suyu tüketimi OCCFGM(1, 1) modeli kullanılarak 2020-2028 yılları arası tahmin edildi ve veriler Çizelge 2.6 da gösterildi.

**Çizelge 2.6.** Türkiye'nin içme suyu tüketimi tahminleri.

| Yıllar | Tahmin değerleri |
|--------|------------------|
| 2021   | 125.4042         |
| 2022   | 146.1105         |
| 2023   | 169.6550         |
| 2024   | 196.4082         |
| 2025   | 226.7862         |

Tahmin sonuçları, Türkiye'nin yıllık içme suyu bir başka deyişle temiz su tüketiminin artış eğiliminde olduğunu göstermektedir. Elde edilen bu veriler, tüketimdeki büyümenin ne derece olacağını öngörerek politika oluşturma ve proje planlaması için bir kılavuz olarak kullanılabilecektir (Şekil 2.14).



**Şekil 2.14.** Türkiye'nin içme suyu tüketimi için OCCFGM(1, 1) tahminleri.

Türkiye'nin içme suyu tüketimi için OCCFGM(1, 1) modelinin, diğer modellerle kıyaslandığında en düşük MAPE oranı ile tatmin edici bir doğruluğa sahip ve kullanımının oldukça pratik olduğu gözlemlendi. Buna rağmen diğer modellerin de kabul edilebilir ölçüde tahminler oluşturduğu söylenebilir.

### 3. YENİ BİR KESİR MERTEBEDEN ÜSTEL GRİ MODEL

Bu bölümde, Ma vd. [35] tarafından oluşturulan CFGM(1, 1) modeli temel alınarak yeni bir model geliştirildi. CFGM(1, 1) modeli üstel veriler için iyi sonuçlar vermesine rağmen ani yükseliş ya da düşüş gösteren noktasal verilerde tahmin hata oranı yüksek çıkabilmektedir. Bunu önlemek için beyazlatma denklemi üstel bir fonksiyonla zenginleştirilerek model optimize edildi. Bu üstel fonksiyonun önündeki parametre mevcut verilere göre belirlendiği için ani değişimlere gereken tepkiyi verecek şekilde kendini hazırlar. Böylece CFGM(1, 1) modelinin zayıf kaldığı bu kritik durum iyileştirilmeye çalışıldı. Önerdiğimiz bu yeni modele üstel uyumlu kesirli gri model, kısaca ECFGM(1, 1), adı verildi.

#### 3.1. Önerilen Modelin Formülasyonu

Orijinal veri seti

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

verilsin.  $\alpha$  basamaktan uyumlu kesirli birikimli toplamalar dizisi (CFA)

$$X^{(\alpha)} = (x^{(\alpha)}(1), x^{(\alpha)}(2), \dots, x^{(\alpha)}(n))$$

olup dizinin elemanları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$x^{(\alpha)}(k) = \nabla^{\alpha} x^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^k \left[ \begin{matrix} [\alpha] \\ k-i \end{matrix} \right] \frac{x^{(0)}(i)}{i^{[\alpha]-\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

burada  $\left[ \begin{matrix} [\alpha] \\ k-i \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(k-i+[\alpha])}{\Gamma(k-i+1)\Gamma([\alpha])} = \frac{(k-i+[\alpha]-1)!}{(k-i)!( [\alpha]-1)!}$  dir [38].

**Tanım 3.1.** ECFGM(1, 1) in birinci basamaktan beyazlatma diferensiyel denklemi

$$\frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} + ax^{(\alpha)}(t) = b + ce^{-t} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $a$  gelişim katsayısı,  $b$  hareket katsayısı ve  $ce^{-t}$  üstel gri etki miktarıdır.

Bu tanımdaki,  $ce^{-t}$  monoton terimi problemin çözümüne de etkileyeceği için çözümde farklı formlarda üstel fonksiyonlar yer alacaktır. Bu fonksiyonlar ise hızlı artış ya da azalış özelliklerine sahip olduğu için ham verilerdeki ani değişimlere cevap verebilecektir. Bu ise tahmin hatasının büyümesini önleyecektir.

$\alpha = 1$  durumunda, ECFGM(1, 1) modeli EXGM(1, 1) modeline dönüşür [9]. Ek olarak, önerilen model  $c = 0$  için CFGM(1, 1) modeline dönüşür [26].

### 3.2. Parametrelerin Belirlenmesi

**Teorem 3.1.** Belirlenen optimal  $\alpha$  parametresi için ECFGM(1, 1) modelinin  $a, b$  ve  $c$  sistem parametrelerini aşağıdaki denklemi sağlar:

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y, \quad (3.3)$$

burada  $B$  ve  $Y$  matrisleri

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 & (e-1)e^{-2} \\ -0.5(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 & (e-1)e^{-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) & 1 & (e-1)e^{-n} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\alpha)}(n) - x^{(\alpha)}(n-1) \end{bmatrix}$$

dir.

**İspat** ECFGM(1, 1) modelinin fark denklemi, (3.2) beyazlatma diferansiyel denkleminin her iki tarafının  $[k-1, k]$  aralığında integrali alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t) dt = \int_{k-1}^k (b + ce^{-t}) dt. \quad (3.5)$$

Newton-Leibniz formülüne göre, (3.5) denkleminin birinci integrali

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} dt = x^{(\alpha)}(k) - x^{(\alpha)}(k-1)$$

şeklinde ifade edilir. Açık ki  $\int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t)dt$  integrasyon terimi,  $[k-1, k]$  aralığında  $t$  –ekseni ve  $x^{(\alpha)}(t)$  eğrisi arasında alanı belirtir. Daha sonra bir çok yeni çalışmada olduğu gibi genelleştirilmiş yamuk formülü kullanılarak [18, 21, 22, 26, 28, 32, 35, 36], (3.5) denkleminin ikinci integrali

$$a \int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t)dt = \frac{a}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1))$$

şeklinde elde edilir ve (3.5) denklemin de sağ taraftaki integral

$$\int_{k-1}^k (b + ce^{-t})dt = b + c(e^{1-k} - e^{-k})$$

dir. Ayrı ayrı elde edilen integrallerin sonuçları, (3.5) denklemin de yerlerine konulursa  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$(x^{(\alpha)}(k) - x^{(\alpha)}(k-1)) + \frac{a}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1)) = b + c(e^{1-k} - e^{-k}) \quad (3.6)$$

elde edilir.

(3.6) lineer denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) &= -0.5a(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) + b + c(e^{-1} - e^{-2}) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) &= -0.5a(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) + b + c(e^{-2} - e^{-3}) \\ &\vdots \\ x^{(\alpha)}(n) - x^{(\alpha)}(n-1) &= -0.5a(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) + b + c(e^{1-n} - e^{-n}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

ve (3.7) sistemi matris gösterimi olarak

$$Y = B\rho$$

şeklinde yazılabilir ve  $n$ , modeli oluşturmak için kullanılan örnek sayısı olmak üzere, burada

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\alpha)}(n) - x^{(\alpha)}(n-1) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 & e^{-1} - e^{-2} \\ -0.5(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 & e^{-2} - e^{-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) & 1 & e^{1-n} - e^{-n} \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

dir.

En küçük kareler metodu kullanılarak ECFGM(1, 1) modelinin parametre değerleri belirlenir.  $\rho$  parametre dizisinin tahmin değeri için (3.7) denkleminin sağ tarafın da  $-0.5a(x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1)) + b + c(e^{1-k} - e^{-k})$  terimi denklemin sol tarafındaki  $x^{(\alpha)}(k) - x^{(\alpha)}(k-1)$  terimin yanına geçer ve  $\varepsilon = Y - B\rho$  hata dizisi elde edilir. Burada,

$$\varepsilon = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n]^T$$

ve  $k = 2, 3, \dots, n$  için  $\varepsilon_k$ , (3.7) sisteminin her bir denklemi için hatayı temsil eder.

$S(\rho)$ , hataların karelerinin toplamı olup

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \\ &= \varepsilon^T \varepsilon \\ &= (Y - B\rho)^T (Y - B\rho) \\ &= (Y^T - \rho^T B^T)(Y - B\rho) \\ &= Y^T Y - \rho^T B^T Y - Y^T B\rho + \rho^T B^T B\rho \\ &= Y^T Y - 2\rho^T B^T Y + \rho^T B^T B\rho. \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada amaç  $S(\rho)$  değerini minimum yapmaktır.

$S(\rho)$  değerini minimum yapan  $\rho = [a, b, c]^T$  parametre vektörü

$$\frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} = -2B^T Y + 2B^T B \rho = 0,$$

denklemini sağlamalıdır. Buradan

$$B^T Y = B^T B \rho,$$

olup

$$\rho = [a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

elde edilir. Sonuç olarak, en küçük kareler metodu kullanılarak ispat tamamlandı.

### 3.3. Çözüm Fonksiyonu ve Tahminlerin Oluşturulması

**Teorem 3.2.** ECFG $M(1, 1)$  modelinin çözüm fonksiyonunun kesikli biçimi  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-1} e^{-1} \right) e^{a(1-k)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-1} e^{-k} \quad (3.8)$$

şeklindedir.

**İspat** (3.2) beyazlatma diferensiyel denkleminin çözümü

$$x^{(\alpha)}(t) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a-1} e^{-t} + d e^{-at} \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilir ve burada  $d$  integral sabitidir.  $x^{(\alpha)}(1) = x^{(0)}(1)$  başlangıç koşulu kullanılarak,  $d$  integral sabiti

$$d = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-1} e^{-1} \right) e^a$$

olarak elde edilir.

Böylece modelin çözüm fonksiyonu

$$\hat{x}^{(\alpha)}(t) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-1} e^{-1} \right) e^{a(1-t)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-1} e^{-t}$$

şeklinde elde edilir. Bu çözümün kesikli hali

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c}{a-1} e^{-1} \right) e^{a(1-k)} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a-1} e^{-k}$$

olarak yazılır ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3.**  $\hat{x}^{(\alpha)}(k)$  değerlerinden, ham veri dizisinin tahmin değerleri olan  $\hat{x}^{(0)}(k)$  değerlerine geçiş  $k = 2, 3, \dots, n$  ve  $\alpha \in (n, n+1]$  için

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} \hat{x}^{(\alpha)}(k) \quad (3.10)$$

olarak verilir.

**İspat** (3.1) denkleminde  $\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \nabla^\alpha \hat{x}^{(0)}(k)$  olduğu kolayca görülebilir.  $\Delta^\alpha$  ters operatörü her iki tarafa uygulanırsa,

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k)$$

elde edilir. Tanım 1.3 den  $\alpha \in (n, n+1]$  için,

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} \hat{x}^{(\alpha)}(k)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Özel olarak  $\alpha \in (0,1]$  için

$$\hat{x}^{(0)}(k) = k^{1-\alpha} \left( \hat{x}^{(\alpha)}(k) - \hat{x}^{(\alpha)}(k-1) \right)$$

olarak yazılabileceği açıktır.

### 3.4. Tahmin Modelinin Performans Analizi

Bu kısımda hata analizi yapılırken iki farklı değerlendirme yapıldı. Ham veri setindeki bilinen en az bir veri modelin tahmin hatasını ölçmek için ayrıldı. Kalan verilerle model çalıştırıldı ve model de kullanılan bu veriler ile modelin ürettiği veriler kıyaslandı. Böylece veri uydurma hatası olan  $MAPE_{fit}$  hesaplandı. Daha sonra ayrılan veri ya da veriler ile modelin ürettiği veriler arasındaki tahmin hatası olan  $MAPE_{pre}$  hesaplandı. Böylece oluşturulan modelin veri uydurma ve tahmin oluşturma etkinlikleri ayrı ayrı ölçüldü. Daha sonra bunların ortalama mutlak yüzde hatası MAPE değeri hesaplandı.

Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$RPE(k) = \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\%$$
$$MAPE_{fit} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p RPE(k)$$
$$MAPE_{pre} = \frac{1}{n-p} \sum_{k=p+1}^n RPE(k)$$
$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n RPE(k)$$

burada  $p$ ,  $MAPE_{fit}$  değerini hesaplamak için ham veri setinden alınan örneklem sayısı,  $x^{(0)}(k)$  ham veri setinin elemanları,  $\hat{x}^{(0)}(k)$  tahmini oluşturulan veri setinin elemanlarını temsil eder.

### 3.5. ECFGM(1, 1) Modelinin Uygulamaları

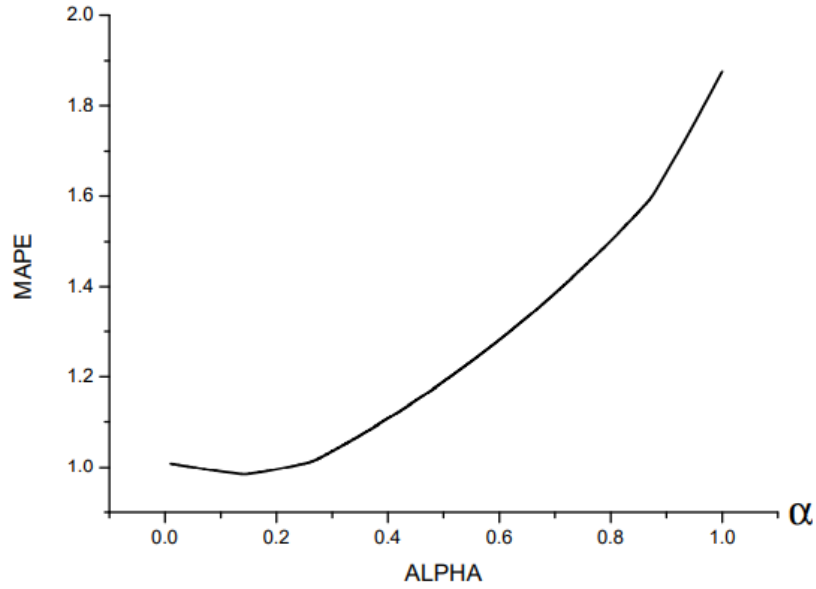
Bu kısımda modelin çalışma mekanizmasına ve etkinliğini göstermek için iki örnek üzerinde uygulaması yapıldı. Bu örneklerde ileriki verilerin tahminlerinin yapılmasının yerine daha çok modelin çalışma mekanizmasını ve hesaplama işleyişini aktarmak amaçlandı. Reel örnekler olmadığı için ileriki verilerin tahminlerine gerek duyulmadı.

### Örnek 3.1. Ham veriler

$$X^{(0)}(k) = (13.21, 18.82, 26.45, 36.04, 42.34, 51.00, 59.12)$$

olarak verilsin. Bu dizinin sonraki elemanlarının tahmini ECFGM(1, 1) modeli ile oluşturulacaktır.

İlk olarak verilen ham veri seti için Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak optimal  $\alpha$  değeri belirlendi. Bunun için (0,1] aralığı 0.01 adım genişliğiyle tarandı ve her nokta için model çalıştırılarak her biri için MAPE değerleri hesaplandı. Bu veri seti için optimal basamak  $\alpha = 0.14$  olarak tespit edildi ve bu durumda MAPE değeri 0.9843 olarak hesaplandı. Bunun anlamı, modelden elde edilen çözüm fonksiyonu mevcut verileri yüzde birin altında bir hata ile elde etti. MAPE değerindeki bu düşük değer modelin verilen veri seti için nokta uydurma başarısının çok iyi olduğunu göstererek, dizinin sonraki elemanlarının tahmini için de güven verdi.  $\alpha$  değerinin optimal değerden uzaklaştığında MAPE ortalama hata değerlerinin de büyüdüğü Şekil 3.1'den görülebilir.



Şekil 3.1. (0, 1] aralığında her bir noktadaki MAPE değerleri.

Modeldeki  $\alpha$  basamağının değeri belirlendikten sonra  $\alpha$  basamaktan birikimli toplamlar dizisi (3.1) denklemi kullanılarak,

$$X^{(0.14)}(k) = (13.2100, 23.5789, 33.8615, 44.8014, 55.4095, 66.3329, 77.4234)$$

olarak elde edildi. Bu durumda, en küçük kareler yöntemi ile modelin parametrelerinin belirlenmesine geçilebilir. Bu yöntemde kullanılacak matrisler (3.4) denkleminde

$$B = \begin{bmatrix} -18.3945 & 1 & 0.2325 \\ -28.7202 & 1 & 0.0855 \\ -39.3314 & 1 & 0.0315 \\ -50.1054 & 1 & 0.0116 \\ -60.8712 & 1 & 0.0043 \\ -71.8781 & 1 & 0.0016 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 10.3689 \\ 10.2826 \\ 10.9399 \\ 10.6081 \\ 10.9235 \\ 11.0905 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. En küçük kareler algoritması olarak,

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

matris işlemleri yapılsa,

$$a = -0.0136199261$$

$$b = 10.0950218700$$

$$c = -0.0670244100$$

elde edilir. Bu parametre değerleri, çözüm fonksiyonu olan (3.8) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\hat{x}^{(0.14)}(k) = 754.3807e^{-0.0136(1-k)} - 741.1951 + 0.06612e^{-k} \quad (3.11)$$

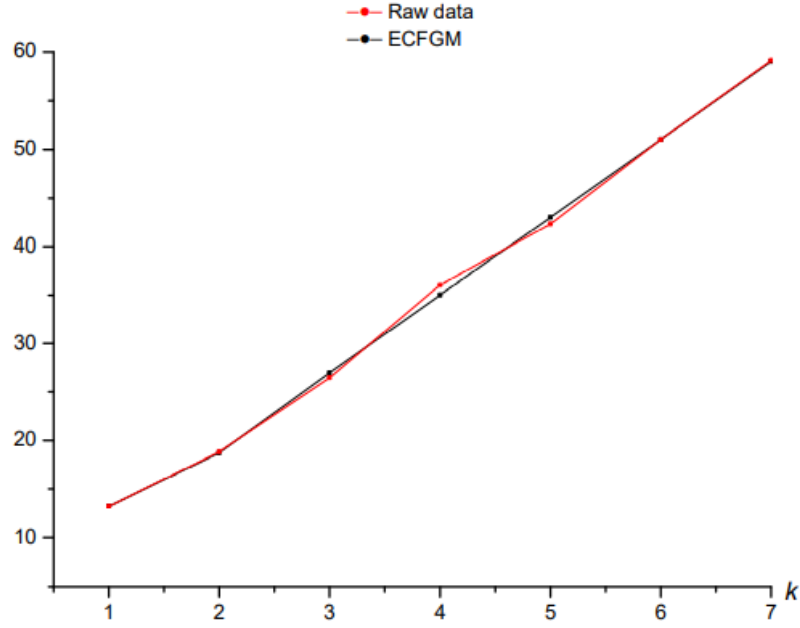
elde edilir. (3.11) denklemi, ham veri dizinin mevcut elemanlarını ve sonrakileri tahmin etmek için kullanılacak çözüm fonksiyonudur.  $k = 1, 2, \dots, 7$  için (3.11) denkleminde,

$$\hat{X}^{(0.14)}(k) = (13.2100, 23.5396, 34.0206, 44.6491, 55.4247, 66.3485, 77.4223)$$

elde edildi. Şimdi başlangıçta verilen ham verileri, ECFG(1, 1) modeli ile tahmin edecek olursak (bir başka deyişle nokta uydurma), denklem (3.10) dan

$$\hat{X}^{(0)}(k) = (13.2100, 18.7485, 26.9607, 35.0141, 43.0085, 51.0018, 59.0312)$$

elde edilir. Bunlar modelin uydurduğu veriler olup verilen verilerle kıyaslaması Şekil 3.2 de gösterildi.



**Şekil 3.2.** Gerçek değerler ve ECFGM(1, 1) modelinin tahmin değerleri.

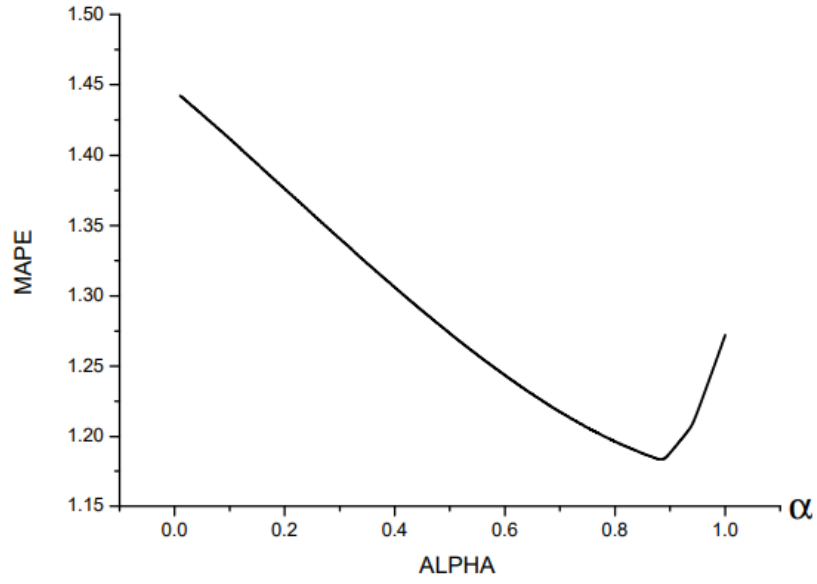
Verilen ham verilerin devamı da  $k = 8, 9, \dots, n$  için hesaplanabilir ancak burada bir hata ya da karşılaştırma yapılamayacağı için burada gerek duyulmadı.

**Örnek 3.2.** İlk örnekten farklı olarak burada monoton bir dizi yerine dalgalı değerler içeren bir ham veri dizisi alındı. Böylece modelin monoton artan ya da azalan olmayan (yani artıştan azalmaya ya da tam tersine geçebilen) ham veriler için ne derece etkin olduğunun da gösterilmesi hedeflendi.

Ham veri dizisi,

$$X^{(0)}(k) = (120.21, 131.83, 143.45, 150.02, 134.34, 121.04, 110.15)$$

olarak verilsin. İlk örnekteki mekanizma kullanılarak, optimal basamak  $\alpha = 0.89$  olarak elde edildi ve bu basamak için MAPE ortalama hata oranı 1.1836 olarak hesaplandı. Belirlenen aralıkta  $\alpha$  değerleri ve bunlara karşılık gelen MAPE büyüklükleri Şekil 3.3 de gösterildi.



**Şekil 3.3.** ECFGM(1, 1) modelinin  $\alpha \in (0, 1]$  için MAPE değerleri ve optimal  $\alpha$ .

$\alpha = 0.89$  için birikimli toplamlar dizisi,

$$X^{(0.89)}(k) = (120.2100, 242.3621, 369.4831, 498.2851, 610.8281, 710.2157, 799.1407)$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} -181.2861 & 1 & 0.2325 \\ -305.9223 & 1 & 0.0855 \\ -433.8841 & 1 & 0.0315 \\ -554.5566 & 1 & 0.0116 \\ -660.5219 & 1 & 0.0043 \\ -754.6782 & 1 & 0.0016 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 122.1521 \\ 127.1210 \\ 127.1210 \\ 112.5430 \\ 99.3876 \\ 88.9250 \end{bmatrix}$$

olmak üzere en küçük kareler yöntemi uygulanır. Yöntemin hesaplamaları,

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

şeklinde yapılarak, parametreler aşağıdaki gibi elde edildi:

$$a = 0.1266697621,$$

$$b = 184.88810740,$$

$$c = -174.9875634.$$

Böylece 0.89 basamaktan birikimli toplam tahminleri,

$$\hat{x}^{(0.89)}(k) = -1413.1086e^{0.12667(1-k)} + 1459.6073 + 200.3681e^{-k} \quad (3.12)$$

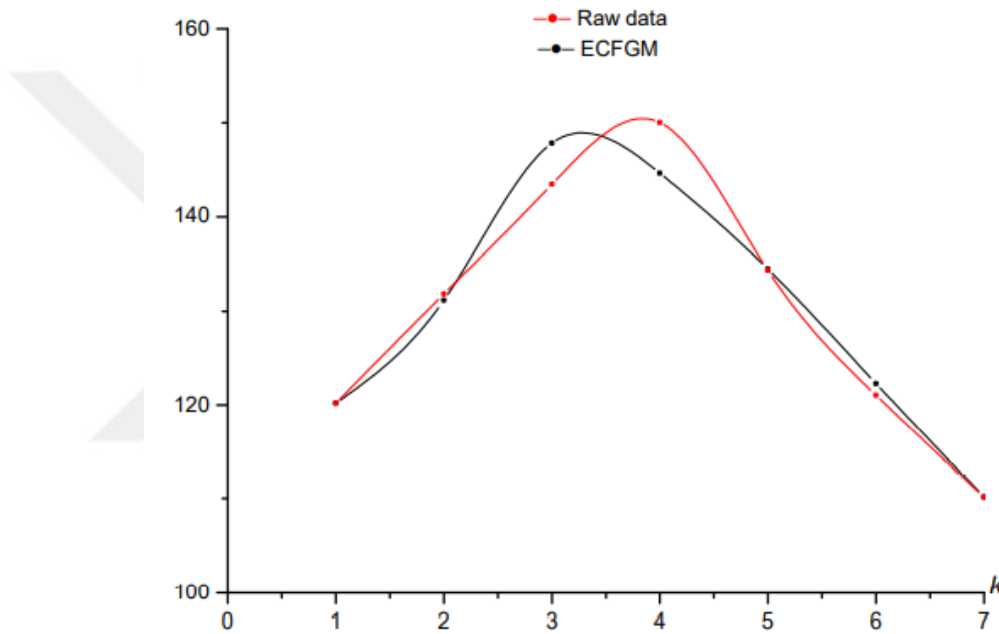
denklemleri ile elde edilir.  $k = 1, 2, \dots, 7$  için,

$$\hat{X}^{(0.89)}(k) = (120.2100, 241.7407, 372.7221, 496.9157, 609.5692, 710.0100, 798.9388)$$

olarak hesaplanır. Daha sonra (3.10) denkleminde ham veri dizisinin terimleri ECFGM(1, 1) modeli ile

$$\hat{X}^{(0)}(k) = (120.2100, 131.1594, 147.8062, 144.6525, 134.4718, 122.3227, 110.1547)$$

olarak elde edildi. Bu tahmini değerler ile gerçek ham veriler Şekil 3.4 de gösterildi.



**Şekil 3.4.** Gerçek değerler ve ECFGM(1, 1) modelinin tahmin değerleri.

Şekil 3.4 den açıkça görülebilir ki, ECFGM(1,1) modeli yine gerçek verilere oldukça yakın tahminler oluşturabildi.

Buraya kadarki örnekler hem modelin işleyişini ve gerekli hesaplamaları göstermeyi hem de geliştirilen modelin farklı yapıdaki veri setleri için ne derecede uyumlu sonuçlar vereceğini tespit etmeyi amaçladı. Bir sonraki kısımda ise ECFGM(1, 1) modelinin reel bir veri seti için uygulaması ve hata analizi yapılacaktır.

### 3.6. ECFGM(1, 1) Modelinin Gerçek Veri Seti Üzerine Uygulaması

Yenilenebilir temiz enerji kaynaklarından biri rüzgârdır. Genel olarak, diğer birçok enerji kaynağı ile karşılaştırıldığında, rüzgâr kullanılarak enerji üretiminin çevreye

etkisi daha azdır. Rüzgâr enerjisi üretiminde havayı veya suyu kirletebilecek emisyon salınımı yoktur ayrıca soğutma için suya ihtiyaç duyulmaz. Ek olarak, rüzgâr türbinleri fosil yakıtlardan elde edilen enerjiye ihtiyacı azaltarak hava kirliliğine neden olan karbondioksit emisyonunu azaltır. Tarih öncesinden günümüze kadar insanoğlu rüzgâr enerjisinin yelkencilik, yel değirmenleri ve rüzgâr türbinleri için kullanmıştır. Elektrik jeneratörleri, rüzgâr enerjisini elektrik enerjisine dönüştürür [35].

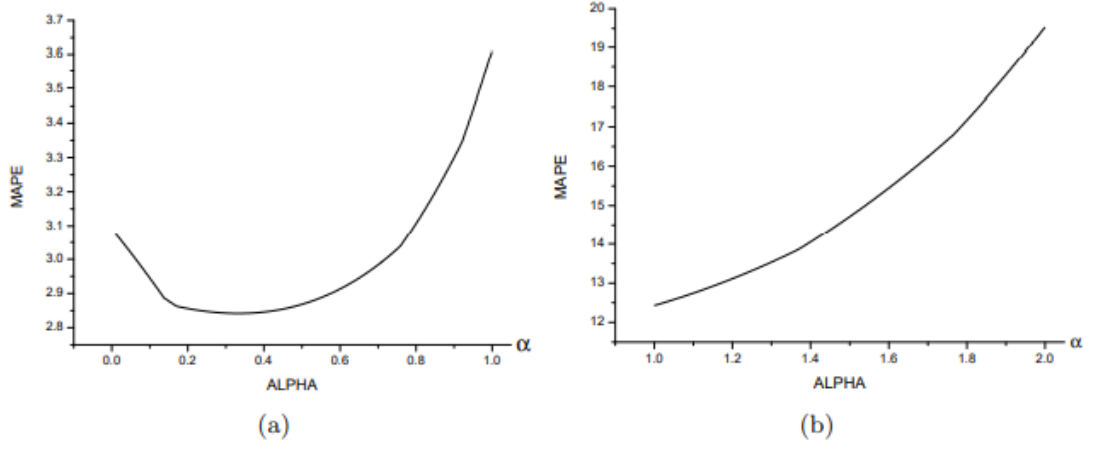
Geniş kara kütlesine ve kıyı şeridinde sahip en büyük ülkelerden biri olan Çin zengin rüzgâr kaynaklarına sahiptir. Dünyanın en kalabalık ülkesi olan Çin, enerji tüketiminde de önde gelen ülkelerin başındadır. Bu kısımda Çin'in rüzgâr enerjisi tüketimi için resmi veriler kullanılarak sonraki yıllardaki tahminler oluşturuldu. Resmi veriler güvenilir kaynaklardan [40,41,URL-1] alınarak önerilen model için kullanıldı. ECFGM(1, 1) modeli literatürdeki etkili altı farklı model ile karşılaştırıldı. Bunlar GM(1, 1), EXGM(1, 1), FAGM(1, 1), FAGMO(1, 1, k), PFAGM(1, 1) ve CFGM(1, 1) gri modelleridir. Bu modellerin çözüm fonksiyonları Çizelge 3.1 de verildi.

**Çizelge 3.1.** Gri modeller ve çözüm fonksiyonları.

| Gri Modeller   | Çözüm Fonksiyonları                                                             |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| GM(1, 1)       | $x^{(1)}(k) = 56.12166e^{0.22483(k-1)} - 49.87166$                              |
| EXGM(1, 1)     | $x^{(1)}(k) = 67.78567e^{-0.20588(1-k)} - 70.97226$                             |
| FAGM(1, 1)     | $x^{(0.36872)}(k) = 37.55924e^{0.17072(k-1)} - 31.35924$                        |
| FAGMO(1, 1, k) | $x^{(1.13366)}(k) = 283.1282e^{0.13851(k-1)} - 30.4471k - 246.4811$             |
| PFAGM(1, 1)    | $x^{(0.17874)}(k) = 19.69290e^{0.17874k} - 14.47094e^{-0.08124(k-1)} - 2.87604$ |
| CFGM(1, 1)     | $x^{(0.07)}(k) = 81.63469e^{0.06355(k-1)} - 75.38469$                           |
| ECFGM(1, 1)    | $x^{(0.3319)}(k) = 66.64788e^{0.10331(k-1)} + 3.98468e^{-k} - 61.86377$         |

Bu gri modellerin tahmin doğruluğu ortalama mutlak yüzde hatası (MAPE) ile ölçüldü. İlk olarak, ham veri seti iki parçaya bölündü. Bunlardan ilki, çözüm fonksiyonunun inşası için diğer kısmı ise modeli test etmek için kullanıldı. İlk veri grubu olarak 2009-2017 yılları arasındaki tüketimler alındı. Bu verilerle yukarıda adı geçen yedi model çalıştırıldı. İkinci veri grubu ise 2018-2020 yılları arasındaki tüketim verilerinden oluştu. Bunlar ise yukarıdaki modellerin tahmin kesinliğini ölçmek için kullanıldı. ECFGM(1, 1) modeli için optimum  $\alpha$  değeri ilk veri grubu için [0, 2] aralığının 0.0001 adım genişliği ile Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak  $\alpha = 0.3319$

olarak bulundu. Önerilen modelin  $[0,2]$  aralığındaki MAPE değerleri Şekil 3.5 de gösterildi.



Şekil 3.5. ECFGM(1, 1) modelinin reel veri seti için MAPE değerleri. (a)  $\alpha \in (0, 1]$ , (b)  $\alpha \in (1, 2]$ .

Belirlenen  $\alpha$  değeri için modelin parametreleri  $a = -0.10331, b = 6.39111$  ve  $c = -4.39633$  olarak belirlendi. Modellerin tahmin sonuçları ve tahmin hata oranları Çizelge 3.2 de gösterildi.

Çizelge 3.2. Çin'in rüzgâr enerjisi tüketimi (milyon ton petrol eş değeri) yedi model ile tahmini ve modellerin performansları.

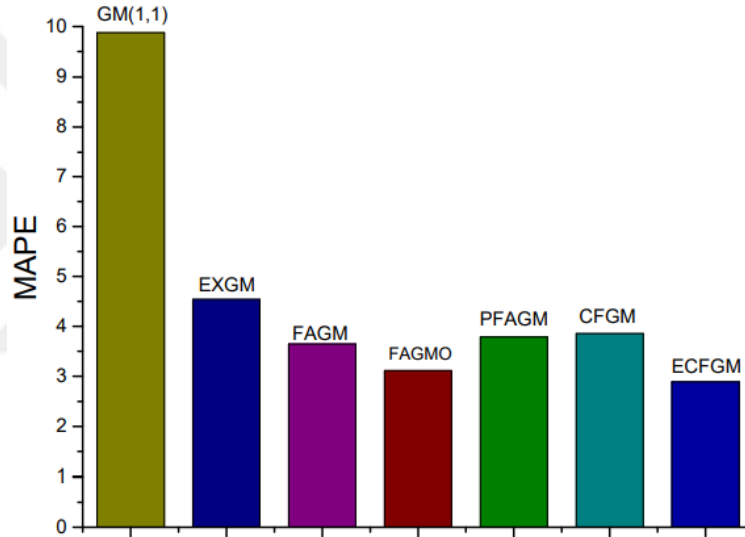
| YIL                 | HAM VERİ | GM(1,1)  | EXGM(1,1) | FAGM(1,1) | FAGMO(1,1,k) | PFAGM    | CFGM     | ECFGM         |
|---------------------|----------|----------|-----------|-----------|--------------|----------|----------|---------------|
| 2009                | 6.25     | 6.2500   | 6.2500    | 6.2500    | 6.2500       | 6.2500   | 6.2500   | 6.2500        |
| 2010                | 10.10    | 14.1489  | 9.5314    | 10.9059   | 10.7861      | 10.8294  | 10.2050  | 10.0534       |
| 2011                | 15.91    | 17.7160  | 16.8448   | 15.9000   | 15.9521      | 15.9001  | 15.8554  | 16.0464       |
| 2012                | 21.72    | 22.1824  | 22.5845   | 21.4733   | 21.7572      | 21.5803  | 22.0785  | 22.2010       |
| 2013                | 31.95    | 27.7749  | 28.4425   | 27.8495   | 28.3244      | 28.0628  | 28.9531  | 28.8472       |
| 2014                | 35.32    | 34.7772  | 35.2004   | 35.2395   | 35.7864      | 35.5571  | 36.5538  | 36.2435       |
| 2015                | 42.03    | 43.5450  | 43.3416   | 43.8718   | 44.2900      | 44.3005  | 44.9565  | 44.5937       |
| 2016                | 53.64    | 54.5231  | 53.2845   | 54.0032   | 53.9997      | 54.5677  | 54.2405  | 54.0796       |
| 2017                | 66.75    | 68.2690  | 65.4787   | 65.9310   | 65.1024      | 66.6817  | 64.4903  | 64.8821       |
| MAPE <sub>fit</sub> |          | 8.4111   | 3.6099    | 3.1595    | 3.1901       | 3.1104   | 3.0416   | <b>2.8418</b> |
| 2018                | 82.82    | 85.4804  | 80.4526   | 80.0030   | 77.8110      | 81.0239  | 75.7962  | 77.1931       |
| 2019                | 93.31    | 107.0310 | 98.8466   | 96.6289   | 92.3686      | 98.0478  | 88.2555  | 91.2232       |
| 2020                | 107.30   | 134.0148 | 121.4447  | 116.2921  | 109.0538     | 118.2925 | 101.9728 | 107.2063      |
| MAPE <sub>pre</sub> |          | 14.2714  | 7.3248    | 5.1128    | 2.8971       | 5.8303   | 6.2875   | <b>3.0392</b> |
| MAPE                |          | 9.8762   | 4.5386    | 3.6478    | 3.1169       | 3.7904   | 3.8531   | <b>2.8912</b> |

Çizelge 3.2 ye göre aşağıdaki sonuçlar çıkartıldı:

- Yedi farklı gri modelin MAPE<sub>fit</sub> değerleri sırasıyla %8.4111, %3.6099, %3.1595, %3.1901, %3.1104, %3.0416 ve **%2.8418** olarak

hesaplandı. Veri uydurma periyodunda ECFGM(1, 1) modeli en iyi performansı gösterdi.

- Çalışılan yedi farklı gri modelin  $MAPE_{pre}$  değerleri sırasıyla %14.2714, %7.3248, %5.1128, %2.8971, %5.8303, %6.2875 ve **%3.0392** olarak hesaplandı. Burada FAGMO(1, 1,  $k$ ) modelinin en iyi tahmin performansına sahip olduğu ECFGM(1, 1) modelinin de ikinci sırada en iyi performansa sahip olduğu görüldü.
- Çizelge 3.2 den açıkça görülür ki yedi modelin toplam MAPE değerleri sırasıyla %9.8762, %4.5386, %3.6478, %3.1169, %3.7904, %3.3581 ve **%2.8912** dir. Böylece tüm periyot boyunca ECFGM(1, 1) modeli en iyi performansa sahiptir (bkz. Şekil 3.6).



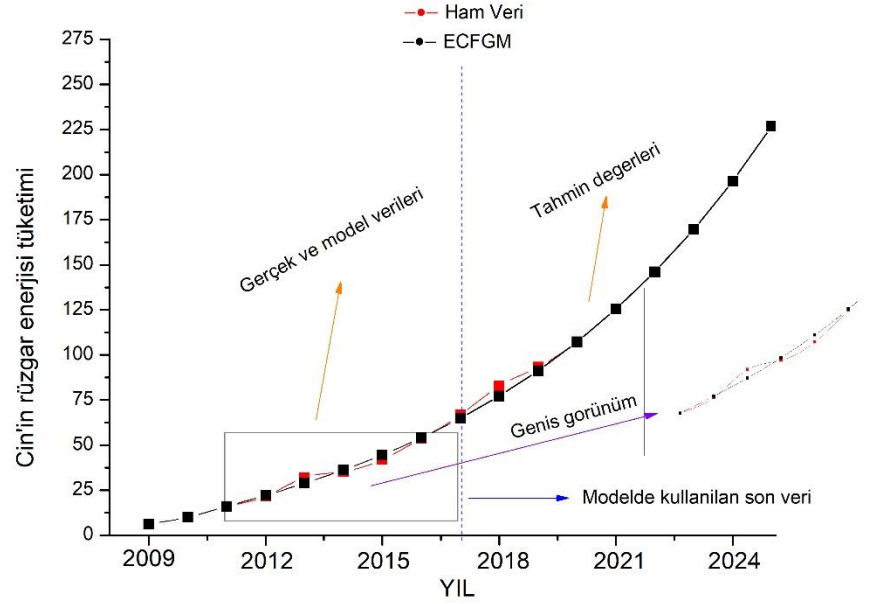
Şekil 3. 6. Yedi modelin MAPE değerleri.

- Çin'in rüzgar enerjisi tüketimi ECFGM(1, 1) modeli ile güvenli bir şekilde tahmin edilir. Buna göre tahmin değerleri Çizelge 3.3 de verildi.

Çizelge 3.3. Çin'in 2025 yılına kadarki rüzgar enerjisi tüketim tahminleri.

| Yıllar | Rüzgar enerji tüketiminin tahmin değerleri |
|--------|--------------------------------------------|
| 2021   | 125.4042                                   |
| 2022   | 146.1105                                   |
| 2023   | 169.6550                                   |
| 2024   | 196.4082                                   |
| 2025   | 226.7862                                   |

Şekil 3.7 de gerçek değerler kırmızı renkte çizgi ile tahmini değerler de siyah çizgi ile gösterildi. Açıkça görülür ki gerçek ve tahmini değerler birbirine oldukça yakındır.



**Şekil 3.7.** Çin'in rüzgâr enerjisi tüketimi için gerçek, veri uydurma ve tahmin değerleri.

Rüzgâr enerjisi global enerji dönüşümleri arasında çevre kirliliğine en az olumsuz etki bırakan enerji kaynaklarından biridir. Enerji üretimi, tüketim ile doğru orantılı olduğu için ne kadar enerji tüketimi olacağının tahmin edilmesi önemlidir. Bu bölümde önerilen uyumlu kesir mertebeden gri model kullanılarak Çin'in enerji tüketiminin ilerleyen yıllarda hızlı bir yükseliş gösterileceği ve 2025 yılına kadar yaklaşık olarak 200 milyon ton petrol eşdeğerine ulaşacağı öngörüldü.

Önerilen ECFGM(1, 1) modeli sadece yukarıda verilen uygulama için olmayıp başka zaman serilerinin tahminleri için kullanılabilir ve güvenilir bir modeldir.

#### 4. BASAMAĞIN BASKIN ROL OYNADIĞI YENİ BİR KESİRLİ GRİ MODEL

Önceki bölümlerde ve hatta literatürde bulunan gri modellerde genellikle basamak ya birikimli toplamın ya da türevin bir basamağı olarak yer alır. Bu bölümde yeni bir bakış açısı geliştirilerek, kesirli basamağın modelin bir çözüm parametresi olarak yer alması sağlandı. Yani  $\alpha$  parametresi, yönetici denklem olan beyazlatma diferansiyel denkleminin sağ tarafına uygun bir şekilde yerleştirilerek diğer parametrelerin ve çözüm fonksiyonunun belirlenmesinde baskın bir rol oynaması sağlandı. Bu durumda  $\alpha$  parametresinin her değişiminde sistemdeki bütün bilinmeyenler daha çok etkilenecek ve böylece belirlenen en uygun  $\alpha$  değeri doğru tahminler oluşturabilmek için daha anahtar bir rol üstlenecektir.  $\alpha$  parametresi denklemde üstel bir fonksiyon ile bütünleşik şekilde yerleştirildi. Bunun nedeni, önceki bölümlerde görüldüğü gibi beyazlatma denklemindeki üstel fonksiyonun, tahminleri geliştirmekte daha başarılı bir tercih olmasından dolayı bu durumu daha da güçlendirmektir. Geliştirilen bu kesir mertebeden gri modele FEXGM(1, 1) adı verildi.

##### 4.1. Geliştirilen Modelin Formülasyonu

Orijinal veri seti

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

verilsin.  $\alpha$  basamaktan kesirli birikimli toplamlar dizisi (CFA)

$$X^{(\alpha)} = (x^{(\alpha)}(1), x^{(\alpha)}(2), \dots, x^{(\alpha)}(n))$$

olup dizinin elemanları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$x^{(\alpha)}(k) = \nabla^{\alpha} x^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^k \left[ \begin{matrix} [\alpha] \\ k-i \end{matrix} \right] \frac{x^{(0)}(i)}{i^{[\alpha]-\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

burada  $\left[ \begin{matrix} [\alpha] \\ k-i \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(k-i+[\alpha])}{\Gamma(k-i+1)\Gamma([\alpha])} = \frac{(k-i+[\alpha]-1)!}{(k-i)!([\alpha]-1)!}$  dir [38].

**Tanım 4.1.** Birinci basamaktan

$$\frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} + ax^{(\alpha)}(t) = b + c(\alpha - [\alpha])e^{(\alpha - [\alpha])t} \quad (4.2)$$

beyazlatma diferansiyel denklemi FEXGM(1, 1) modelinin yönetici denklemi olarak tanımlanır. Burada  $a$  gelişim katsayısı,  $b$  hareket katsayısı ve  $c(\alpha - [\alpha])e^{(\alpha - [\alpha])t}$  üstel gri etki miktarıdır.

$c = 0$  durumunda, FEXGM(1, 1) modeli CFGM(1, 1) modeline dönüşür [26]. Ek olarak, önerilen model  $\alpha \in \mathbb{N}$  için standart GM(1, 1) modeline dönüşür [10].

**Teorem 4.1.** Belirlenen optimal  $\alpha$  parametresi için FEXGM(1, 1) modelinin  $a, b$  ve  $c$  sistem parametrelerini aşağıdaki denklem sağlar:

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y, \quad (4.3)$$

burada  $B$  ve  $Y$  matrisleri

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 & e^{2(\alpha - [\alpha])} - e^{(\alpha - [\alpha])} \\ -0.5(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 & e^{3(\alpha - [\alpha])} - e^{2(\alpha - [\alpha])} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) & 1 & e^{n(\alpha - [\alpha])} - e^{(n-1)(\alpha - [\alpha])} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\alpha)}(n) - x^{(\alpha)}(n-1) \end{bmatrix}$$

dir.

**İspat** FEXGM(1, 1) modelinin fark denklemi, (4.2) beyazlatma diferansiyel denkleminin her iki tarafının  $[k-1, k]$  aralığında integrali alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t) dt = \int_{k-1}^k (b + c(\alpha - [\alpha])e^{(\alpha - [\alpha])t}) dt \quad (4.5)$$

Newton-Leibniz formülüne göre, (4.5) denkleminin birinci integrali

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(\alpha)}(t)}{dt} dt = x^{(\alpha)}(k) - x^{(\alpha)}(k-1)$$

şeklindedir. Açık ki  $\int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t) dt$  integrasyon terimi,  $[k-1, k]$  aralığında  $t$  – eksen ve  $x^{(\alpha)}(t)$  eğrisi arasında kalan alanı belirtir. Daha sonra (4.5) denkleminin ikinci integrali genelleştirilmiş yamuk formülü kullanılarak

$$a \int_{k-1}^k x^{(\alpha)}(t) dt = \frac{a}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1))$$

şeklinde elde edilir ve (4.5) denkleminde sağ taraftaki integral

$$\int_{k-1}^k (b + c(\alpha - [\alpha])e^{(\alpha - [\alpha])t}) dt = b + c(e^{(\alpha - [\alpha])k} - e^{(\alpha - [\alpha])(k-1)})$$

dir. Ayrı ayrı elde edilen integrallerin sonuçları, (4.5) denklemin de yerlerine konulursa  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$(x^{(\alpha)}(k) - x^{(\alpha)}(k-1)) + \frac{a}{2} (x^{(\alpha)}(k) + x^{(\alpha)}(k-1)) = b + c(e^{(\alpha - [\alpha])k} - e^{(\alpha - [\alpha])(k-1)}) \quad (4.6)$$

elde edilir.

(4.6) lineer denklem sistemi,

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) &= -0.5a(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) + b + c(e^{2(\alpha - [\alpha])} - e^{(\alpha - [\alpha])}) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) &= -0.5a(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) + b + c(e^{3(\alpha - [\alpha])} - e^{2(\alpha - [\alpha])}) \\ &\vdots \\ x^{(\alpha)}(n) - x^{(\alpha)}(n-1) &= -0.5a(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) + b + c(e^{n(\alpha - [\alpha])} - e^{(n-1)(\alpha - [\alpha])}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. (4.7) sistemi matris gösterimi olarak

$$Y = B\rho \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(\alpha)}(2) + x^{(\alpha)}(1)) & 1 & e^{2(\alpha - [\alpha])} - e^{(\alpha - [\alpha])} \\ -0.5(x^{(\alpha)}(3) + x^{(\alpha)}(2)) & 1 & e^{3(\alpha - [\alpha])} - e^{2(\alpha - [\alpha])} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(\alpha)}(n) + x^{(\alpha)}(n-1)) & 1 & e^{n(\alpha - [\alpha])} - e^{(n-1)(\alpha - [\alpha])} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(\alpha)}(2) - x^{(\alpha)}(1) \\ x^{(\alpha)}(3) - x^{(\alpha)}(2) \\ \vdots \\ x^{(\alpha)}(n) - x^{(\alpha)}(n-1) \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

olup,  $n$  ise modelde kullanılan ham veri sayısıdır.

(4.8) denkleminden, parametreleri belirlemek için en küçük kareler metodu kullanıldı. Bunun için (4.7) sisteminde eşitlikler aynı tarafa toplanarak  $\varepsilon = Y - B\rho$  hata dizisi elde edilir. Burada,

$$\varepsilon = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n]^T$$

ve  $k = 2, 3, \dots, n$  için  $\varepsilon_k$ , (4.8) sisteminin her bir denklemi için hatayı temsil eder.

$S(\rho)$ , hataların karelerinin toplamı olup

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2 \\ &= \varepsilon^T \varepsilon \\ &= (Y - B\rho)^T (Y - B\rho) \\ &= (Y^T - \rho^T B^T)(Y - B\rho) \\ &= Y^T Y - \rho^T B^T Y - Y^T B\rho + \rho^T B^T B\rho \\ &= Y^T Y - 2\rho^T B^T Y + \rho^T B^T B\rho. \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada amaç  $S(\rho)$  değerini minimum yapmaktır.

$S(\rho)$  değerini minimum yapan  $\rho = [a, b, c]^T$  parametre vektörü

$$\frac{\partial S(\rho)}{\partial \rho} = -2B^T Y + 2B^T B\rho = 0,$$

denklemini sağlamalıdır. Buradan

$$B^T Y = B^T B \rho,$$

olup

$$\rho = [a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

elde edilir. Sonuç olarak, en küçük kareler metodu kullanılarak ispat tamamlandı.

#### 4.2. Çözüm Fonksiyonu ve Tahminlerin Oluşturulması

**Teorem 4.2.** FEXGM(1, 1) modelinin çözüm fonksiyonunun kesikli formu  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \frac{b}{a} + \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{(\alpha - [\alpha])k} + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{\alpha - [\alpha]} \right) e^{a(1-k)}$$

olarak tanımlanır.

**İspat** (4.2) birinci basamaktan lineer beyazlatma diferansiyel denkleminin çözümü

$$\hat{x}^{(\alpha)}(t) = \frac{b}{a} + \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{(\alpha - [\alpha])t} + K e^{-at} \quad (4.9)$$

şekilde elde edilir. Burada  $K$  integral sabitidir.  $x^{(\alpha)}(1) = x^{(0)}(1)$  başlangıç koşulu uygulanarak,  $K$  integral sabiti

$$K = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{\alpha - [\alpha]} \right) e^a$$

olarak elde edilir. Böylece modelin çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\hat{x}^{(\alpha)}(t) = \frac{b}{a} + \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{(\alpha - [\alpha])t} + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{\alpha - [\alpha]} \right) e^{a(1-t)}.$$

Çözüm fonksiyonunun kesikli formu  $t$  yerine  $k$  yazılarak,

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \frac{b}{a} + \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{(\alpha - [\alpha])k} + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} - \frac{c(\alpha - [\alpha])}{\alpha - [\alpha] + a} e^{\alpha - [\alpha]} \right) e^{a(1-k)}$$

şeklinde ifade edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3.** Çözüm fonksiyonundan ham veri dizisinin tahmin değerlerine geçiş  $k = 2, 3, \dots, n$  için

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} \hat{x}^{(\alpha)}(k), \quad \alpha \in (n, n+1]$$

olarak hesaplanır.

**İspat** (4.1) denkleminde  $\hat{x}^{(\alpha)}(k) = \nabla^\alpha \hat{x}^{(0)}(k)$  olduğu açıkça görülür.  $\Delta^\alpha$  ters operatörü her iki tarafa uygulanırsa,

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k)$$

elde edilir. Tanım 1.3 den  $\alpha \in (n, n+1]$  için,

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \Delta^\alpha \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} \hat{x}^{(\alpha)}(k)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Özel olarak  $\alpha \in (0, 1]$  için

$$\hat{x}^{(0)}(k) = k^{1-\alpha} \left( \hat{x}^{(\alpha)}(k) - \hat{x}^{(\alpha)}(k-1) \right)$$

olarak yazılabileceği aşıkardır.

#### 4.3. FEXGM(1, 1) Modelinin Tahmin Performansının Değerlendirilmesi

FEXGM(1, 1) modelinin tahmin kesinliğini ölçmek için relatif yüzde hata (RPE) ve ortalama mutlak yüzde hata (MAPE) kullanıldı. Bu kısımda hata analizi yapılırken iki farklı değerlendirme yapıldı. Ham veri setindeki bilinen en az bir veri modelin tahmin hatasını ölçmek için ayrıldı. Kalan verilerle model çalıştırıldı ve model de kullanılan bu veriler ile modelin ürettiği veriler kıyaslandı. Böylece veri uydurma hatası olan  $MAPE_{fit}$  hesaplandı. Daha sonra ayrılan veri ya da veriler ile modelin ürettiği veriler arasındaki tahmin hatası olan  $MAPE_{pre}$  hesaplandı. Böylece oluşturulan modelin veri uydurma ve tahmin oluşturma etkinlikleri ayrı ayrı ölçüldü. Daha sonra bunların ortalama mutlak yüzde hatası MAPE değeri hesaplandı.

Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
RPE(k) &= \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \\
MAPE_{fit} &= \frac{1}{p-1} \sum_{k=2}^p RPE(k) \\
MAPE_{pre} &= \frac{1}{n-p} \sum_{k=p+1}^n RPE(k) \\
MAPE &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n RPE(k) \\
MAPE_{tot} &= \frac{1}{n-1} \left( (p-1)MAPE_{fit} + (n-p)MAPE_{pre} \right)
\end{aligned}$$

burada  $p$ ,  $MAPE_{fit}$  değerini hesaplamak için ham veri setinden alınan örneklem sayısı,  $x^{(0)}(k)$  ham veri setinin elemanları,  $\hat{x}^{(0)}(k)$  tahmini oluşturulan veri setinin elemanlarını temsil eder. Toplam MAPE ( $MAPE_{tot}$ ) ise modelin tüm süreçteki performansını ölçer. Verilen data'lara göre en uygun  $\alpha$  basamağı Kaba Kuvvet algoritması ile hesaplanır.

Teorem 4.3 e göre  $\alpha \in (0,1]$  aralığı için  $\hat{x}^{(0)}(k)$  değerleri aşağıdaki gibi birinci mertebeden kesirli fark ile hesaplanır.

$$\hat{x}^{(0)}(k) = k^{1-\alpha} \left( \hat{x}^{(\alpha)}(k) - \hat{x}^{(\alpha)}(k-1) \right),$$

burada  $k = 2, 3, \dots, n$  dir. Bu ifade  $\hat{x}^{(0)}(k)$  değerleri uyumlu basamaktan kesirli birikimli toplamlar dizisinin iki elemanına bağlıdır. Eğer  $\alpha \in (1,2]$  ise  $\hat{x}^{(0)}(k)$  değerlerini belirlemek için aşağıdaki gibi ikinci mertebeden kesirli fark işlemi hesaplanır:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = k^{2-\alpha} \Delta^2 \hat{x}^{(\alpha)}(k) = k^{2-\alpha} \left( \hat{x}^{(\alpha)}(k) - 2\hat{x}^{(\alpha)}(k-1) + \hat{x}^{(\alpha)}(k-2) \right),$$

burada  $k = 3, 4, \dots, n$  dir. Çünkü  $k = 2$  olduğunda  $\hat{x}^{(0)}(2)$  değerini belirleyebilmemiz için  $\hat{x}^{(\alpha)}(0), \hat{x}^{(\alpha)}(1)$  ve  $\hat{x}^{(\alpha)}(2)$  değerlerinin biliniyor olması gerekir. Fakat

Teorem 4.2 ye göre kesirli birikimli toplam dizisinde  $\hat{x}^{(\alpha)}(0)$  değeri bulunmadığından dolayı ikinci mertebeden fark  $k = 3, 4, \dots, n$  için hesaplanır.

Literatürde bulunan çalışmalardan görülür ki CFGM(1, 1) modeli için optimal  $\alpha$  değeri %99 oranında (0, 1) aralığında tespit edilir. FGM(1, 1) modelinde ise optimal  $\alpha$  değeri %72 oranında (0, 1) aralığında tespit edilir. Çalışılan ham verilere göre FEXGM(1, 1) modelinde  $\alpha$  değeri %91 oranında (0, 1) aralığında, %9 oranında da 1 e eşit olduğu gözlemlendi. Ayrıca FEXGM(1, 1) modeli  $\alpha = 1$  için standart GM(1, 1) modeline dönüşür.

#### 4.4. FEXGM(1, 1) Modelinin Uygulamaları

Bu kısımda oluşturulan modelin etkinliğini ve yapılması gereken hesaplamaları göstermek için iki örnek verildi.

**Örnek 4.1.** Ham veriler olarak

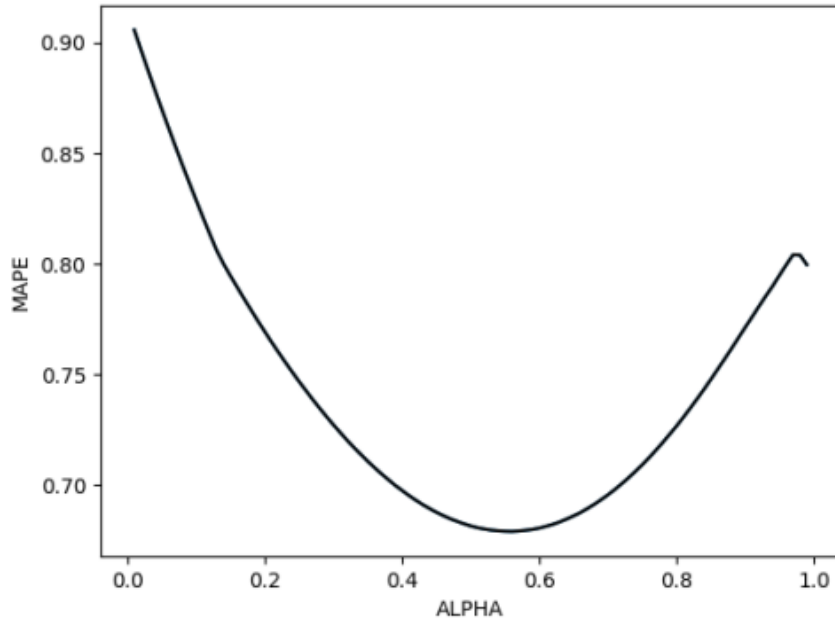
$$X^{(0)}(k) = (44.21, 51.57, 57.86, 61.80, 67.80, 70.31, 75.87)$$

verilsin. Monoton artan bu dizinin sonraki elemanlarının tahmini FEXGM(1, 1) modeli ile oluşturulacaktır.

İlk olarak verilen ham veri seti için Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak optimal  $\alpha$  değeri belirlendi. Bunun için (0,1] aralığı 0.01 adım genişliğiyle tarandı ve her nokta için model çalıştırılarak her biri için MAPE değerleri hesaplandı ve elde edilen bulgular Çizelge 4.1 ile Şekil 4.1 de gösterildi.

**Çizelge 4.1.**  $\alpha \in (0, 1]$  için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.

| $\alpha$ | MAPE   | $\alpha$ | MAPE   | $\alpha$    | MAPE          | $\alpha$ | MAPE   | $\alpha$ | MAPE   |
|----------|--------|----------|--------|-------------|---------------|----------|--------|----------|--------|
| 0.01     | 0.9058 | 0.21     | 0.7646 | 0.41        | 0.6952        | 0.61     | 0.6812 | 0.81     | 0.7305 |
| 0.02     | 0.8966 | 0.22     | 0.7600 | 0.42        | 0.6931        | 0.62     | 0.6821 | 0.82     | 0.7346 |
| 0.03     | 0.8876 | 0.23     | 0.7555 | 0.43        | 0.6911        | 0.63     | 0.6832 | 0.83     | 0.7388 |
| 0.04     | 0.8787 | 0.24     | 0.7511 | 0.44        | 0.6893        | 0.64     | 0.6845 | 0.84     | 0.7431 |
| 0.05     | 0.8700 | 0.25     | 0.7468 | 0.45        | 0.6876        | 0.65     | 0.6859 | 0.85     | 0.7476 |
| 0.06     | 0.8615 | 0.26     | 0.7427 | 0.46        | 0.6861        | 0.66     | 0.6874 | 0.86     | 0.7522 |
| 0.07     | 0.8531 | 0.27     | 0.7386 | 0.47        | 0.6847        | 0.67     | 0.6892 | 0.87     | 0.7568 |
| 0.08     | 0.8448 | 0.28     | 0.7347 | 0.48        | 0.6835        | 0.68     | 0.6911 | 0.88     | 0.7615 |
| 0.09     | 0.8368 | 0.29     | 0.7309 | 0.49        | 0.6824        | 0.69     | 0.6932 | 0.89     | 0.7663 |
| 0.10     | 0.8289 | 0.30     | 0.7272 | 0.50        | 0.6814        | 0.70     | 0.6954 | 0.90     | 0.7711 |
| 0.11     | 0.8211 | 0.31     | 0.7237 | 0.51        | 0.6806        | 0.71     | 0.6978 | 0.91     | 0.7758 |
| 0.12     | 0.8135 | 0.32     | 0.7202 | 0.52        | 0.6800        | 0.72     | 0.7004 | 0.92     | 0.7806 |
| 0.13     | 0.8061 | 0.33     | 0.7169 | 0.53        | 0.6795        | 0.73     | 0.7031 | 0.93     | 0.7853 |
| 0.14     | 0.8000 | 0.34     | 0.7138 | 0.54        | 0.6792        | 0.74     | 0.7060 | 0.94     | 0.7898 |
| 0.15     | 0.7946 | 0.35     | 0.7107 | 0.55        | 0.6790        | 0.75     | 0.7090 | 0.95     | 0.7947 |
| 0.16     | 0.7894 | 0.36     | 0.7078 | <b>0.56</b> | <b>0.6789</b> | 0.76     | 0.7122 | 0.96     | 0.7995 |
| 0.17     | 0.7842 | 0.37     | 0.7050 | 0.57        | 0.6791        | 0.77     | 0.7156 | 0.97     | 0.8041 |
| 0.18     | 0.7792 | 0.38     | 0.7024 | 0.58        | 0.6794        | 0.78     | 0.7191 | 0.98     | 0.8040 |
| 0.19     | 0.7742 | 0.39     | 0.6998 | 0.59        | 0.6798        | 0.79     | 0.7228 | 0.99     | 0.7996 |
| 0.20     | 0.7694 | 0.40     | 0.6975 | 0.60        | 0.6804        | 0.80     | 0.7265 | 1.00     |        |



**Şekil 4.1.**  $\alpha \in (0, 1]$  için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.

Bu veri seti için optimal basamak  $\alpha = 0.56$  olarak tespit edildi ve bu durumda MAPE değeri 0.6789 olarak hesaplandı. Bunun anlamı, modelden elde edilen çözüm fonksiyonu mevcut verileri yüzde birin altında bir hata ile elde etti. MAPE değerindeki bu düşük değer modelin verilen veri seti için nokta uydurma başarısının çok iyi olduğunu göstererek, dizinin sonraki elemanlarının tahmini için de güven verdi.  $\alpha$

değerinin optimal değerden uzaklaştığında MAPE ortalama hata değerlerinin de büyüdüğü görüldü.

Uyumlu basamaktan birikimli toplamlar dizisi (4.1) denklemi ile

$$X^{(0.56)}(k) = (44.2100, 82.2752, 117.7748, 151.6814, 184.6214, 216.9987, 249.0737)$$

şeklinde hesaplandı.  $B$  ve  $Y$  matrisleri

$$B = \begin{bmatrix} -63.2170 & 1 & -0.2292 \\ -100.0648 & 1 & -0.1476 \\ -134.6957 & 1 & -0.0950 \\ -168.1833 & 1 & -0.0612 \\ -200.8617 & 1 & -0.0394 \\ -232.9564 & 1 & -0.0254 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 38.0140 \\ 35.6816 \\ 33.5801 \\ 33.3951 \\ 31.9617 \\ 32.2275 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturuldu. En küçük kareler metodu ile  $a, b$  ve  $c$  parametreleri

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

eşitliği ile

$$a = -0.0053$$

$$b = 29.9630$$

$$c = -33.8532$$

elde edildi. Bu parametreler çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa,

$$\hat{x}^{(\alpha)}(k) = -5577.28509 - 33.44487e^{-0.44k} + 5643.034798e^{-0.00537(1-k)}$$

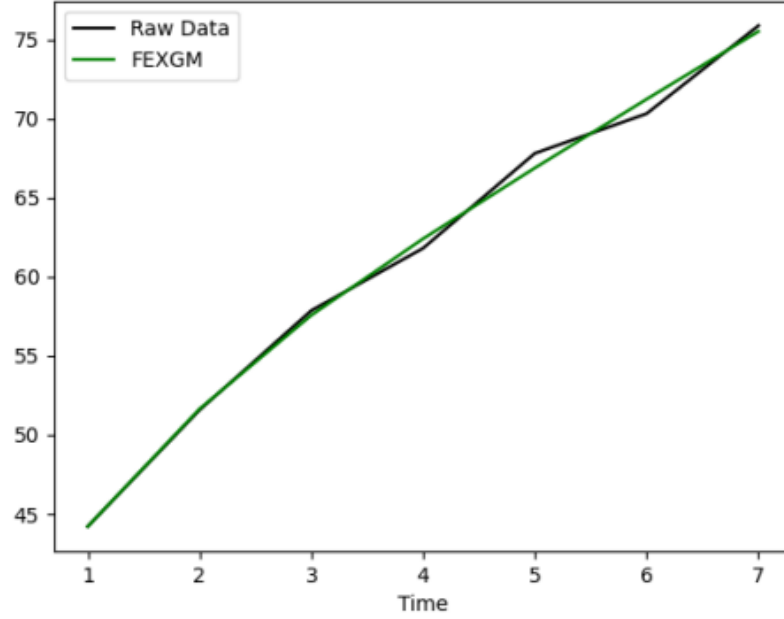
elde edildi. Bu ifade kullanılarak  $k = 1, 2, \dots, 7$  için 0.56 basamaktan birikimli toplamlar dizisi

$$\hat{X}^{(0.56)}(k) = (44.2100, 82.2752, 117.7748, 151.6814, 184.6214, 216.9987, 249.0737)$$

şeklinde elde edildi. Buradan

$$\hat{X}^{(0)}(k) = (44.2100, 51.6394, 57.5648, 62.4007, 66.8759, 71.2241, 75.5110)$$

olarak hesaplandı. Orijinal ham veriler olan  $X^{(0)}(k)$  ile modelin oluşturduğu  $\hat{X}^{(0)}(k)$  tahmini değerler Şekil 4.2 de gösterildi.



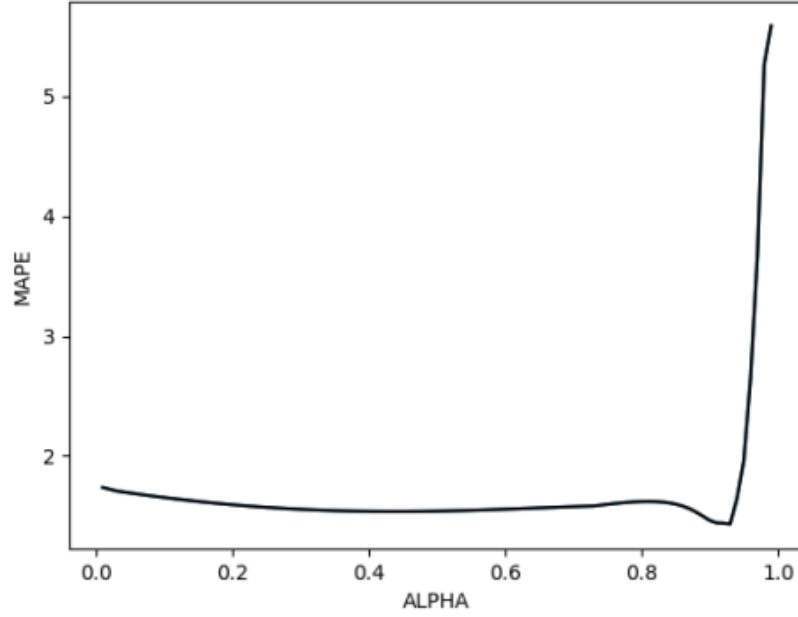
**Şekil 4.2.** Monoton artan dizi örneği için gerçek ve tahmin değerleri.

**Örnek 4.2.** İlk örnekten farklı olarak burada monoton bir dizi yerine dalgalı değerler içeren bir ham veri dizisi alındı. Böylece modelin monoton artan ya da azalan olmayan (yani artıştan azalmaya ya da tam tersine geçebilen) ham veriler için ne derece etkin olduğunun da gösterilmesi hedeflendi.

Ham veri dizisi,

$$X^{(0)}(k) = (123.3, 132.0, 146.5, 161.6, 157.5, 152.3, 140.9, 138.6, 129.5)$$

olarak verilsin. İlk örnekteki mekanizma kullanılarak, optimal basamak  $\alpha = 0.929$  olarak elde edildi ve bu basamak için MAPE ortalama hata oranı 1.4298 olarak hesaplandı.  $\alpha \in (0, 1)$  aralığında 0.01 adımla bunlara karşılık gelen MAPE büyüklükleri Şekil 4.3 de gösterildi.



Şekil 4.3.  $\alpha \in (0, 1]$  için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.

$\alpha = 0.929$  için kesirli birikimli toplamlar dizisi hesaplanarak

$$X^{(0.929)}(k) = (123.3, 248.9610, 384.4681, 530.9201, 671.4127, 805.5196, 928.2379, 1047.8138, 1158.6084)$$

elde edildi.  $B$  ve  $Y$  matrisleri ise

$$B = \begin{bmatrix} -186.1305 & 1 & -0.0638 \\ -316.7146 & 1 & -0.0594 \\ -457.6941 & 1 & -0.0553 \\ -601.1664 & 1 & -0.0515 \\ -738.4662 & 1 & -0.0480 \\ -866.8787 & 1 & -0.0447 \\ -988.0258 & 1 & -0.0416 \\ -1103.2111 & 1 & -0.0388 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 125.6610 \\ 135.5070 \\ 146.4519 \\ 140.4926 \\ 134.1069 \\ 122.7182 \\ 119.5759 \\ 110.7945 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturuldu. Önceki kısımlarda olduğu gibi küçük kareler yöntemi uygulanarak modelin parametreleri belirlendi.

Parametreler,

$$[a, b, c]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

denklemleri ile elde edilir. Gerekli işlemler yapılarak,

$$a = 0.6264$$

$$b = 1673.7260$$

$$c = 22447.0950 .$$

olarak hesaplandı. Bu parametreler çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak,

$$\hat{x}^{(0.929)}(k) = 2671.93483 - 2869.49173e^{-0.071k} + 124.18737e^{0.62641(1-k)}$$

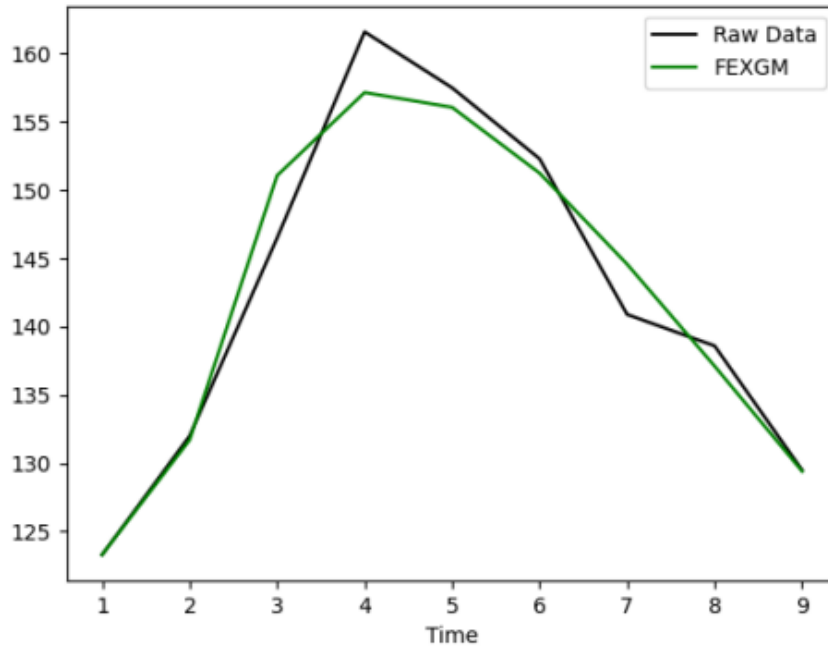
denklemini ile elde edildi.  $k = 1, 2, \dots, 7$  için,

$$\hat{X}^{(0.929)}(k) = (123.3000, 248.6818, 388.4175, 530.8415, 670.0600, 803.2409, 929.1669)$$

olarak hesaplandı. Daha sonra Teorem 4.2 den ham veri dizisinin terimleri FEXGM(1, 1) modeli ile

$$\hat{X}^{(0)}(k) = (123.3000, 131.7067, 151.0716, 157.1554, 156.0715, 151.2484, 144.5830, 137.1169, 129.4171)$$

olarak elde edildi. Bu tahmini değerler ile gerçek ham veriler Şekil 4.4 de gösterildi.



Şekil 4.4.  $\alpha \in (0, 1]$  için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.

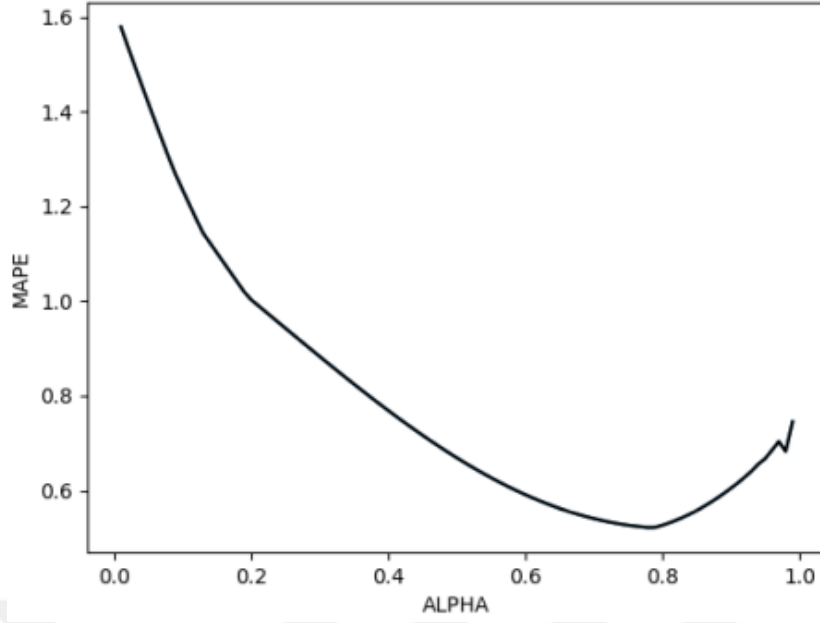
#### 4.5. FEXGM(1, 1) Modelinin Gerçek Veri Seti Üzerine Uygulaması

Bu kısımda, geliştirilen modelin etkinliğini göstermek için iki reel uygulamalar verildi. Artan nüfus ve gelişen teknolojinin sebep olduğu olumsuz doğa olaylarından biriside

sera gazlarının emisyonundaki artıştır. Doğaya salınan sera gazları atmosferi kalın bir örtü gibi sararak güneşten gelen ışınların yeryüzünden yansıyarak uzaya geri dönmesini engeller, bir başka deyişle bu ışınları hapseder. Bu ise küresel ısınmaya bağlı olarak başta iklim değişikliği ve kuraklık gibi birçok olumsuzluğa neden olur. Ülkelerin sera gazı emisyon değerlerini takip etmeleri ve kontrol altında tutmak için gerekli adımları atmaları oldukça önemlidir. Sera gazlarının büyük bir oranını karbondioksit ( $CO_2$ ) gazı oluşturur. Özellikle fosil yakıtların yakılması, tarımda kullanılan gübreleme ve atıkların geri dönüşümü nedeniyle atmosfere yayılan  $CO_2$  gazı oranı dinamik bir veri seti oluşturur. Bu kısımda önerdiğimiz modelin gerçek veri seti üzerine uygulaması tüm dünya için önem arz eden  $CO_2$  emisyonu verilerinin tahminine ayrıldı. Bunun için nüfus ve teknolojiye çok ileride olan Çin ile aksine nüfusunun fazla olmasına rağmen endüstride daha geri planda kalan Brezilya seçildi. Bu iki ülkedeki karbondioksit emisyon değerlerini tahmin etmek için FEXGM(1, 1) modeli uygulandı.

#### **4.5.1 FEXGM(1, 1) modeline bağlı olarak Çin'in karbondioksit emisyonunun tahmini**

Çin'in 2010-2020 yıllarındaki karbondioksit emisyon verileri önerilen modelin etkinliğini ve uygulanabilirliğini test etmek için kullanıldı [URL-2]. Ham veri dizisi, çözüm fonksiyonunu inşa etme ve çözüm fonksiyonunu test etme şeklinde iki gruba ayrıldı. Birinci grup olarak 2010 dan 2018 yılına kadar olan veriler alındı ve bu veriler literatürdeki güncel beş farklı gri model ile FEXGM(1, 1) modelinin veri uydurma kapasitelerini ölçmek için kullanıldı. İkinci grup ise 2019 ve 2020 yıllarındaki karbondioksit emisyon değerleri olarak alındı ve bu modellerin tahmin performansını test etmek için saklandı. FEXGM(1, 1) modelinin optimum  $\alpha$  değeri birinci grup için (0,1) aralığında 0.001 adım genişliği ile Kaba Kuvvet algoritması kullanılarak  $\alpha = 0.787$  olarak belirlendi. Bu optimum  $\alpha$  için  $MAPE_{fit}$  en düşük değeri aldı. Belirlenen aralık için her bir  $\alpha$  ya karşılık gelen  $MAPE_{fit}$  değerleri Şekil 4.5 de gösterildi. Açıkça görüldü ki  $\alpha$  optimum değerinden uzaklaştıkça  $MAPE_{fit}$  değerinin arttığı görülmektedir.



**Şekil 4.5.**  $\alpha \in (0, 1)$  aralığında Çin'in  $CO_2$  emisyonu için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.

Yukarıda belirlenen optimal basamak için modelin parametreleri

$$a = -0.011683$$

$$b = 4709.75726$$

$$c = -17838.65350$$

olarak hesaplandı. Elde edilen bu parametreler çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılarak

$$\hat{x}^{(0.787)}(k) = -403129.0987 - 16911.08449e^{-0.213k} + 424941.6954e^{0.011683(1-k)}$$

elde edildi. Bu 0.787 basamaktan birikimli toplamlar dizisinin üreteç fonksiyonudur. Teorem 4.3 kullanılarak  $\hat{x}^{(0)}(k)$  ham veri dizisinin tahminleri oluşturuldu. Böylece  $x^{(0)}(k)$  ham veri dizisi için modelin tahmin verileri oluşturularak veri uydurma etkinliği ölçüldü. FEXGM(1, 1) modelinin veri uydurma gücü GM(1, 1), EXGM(1, 1), CCFGM(1, 1), CFGM(1, 1) ve PFAGM(1, 1) modelleri ile kıyaslandı. Bu modellerin tahmin sonuçları ve ortalama mutlak yüzde hataları Çizelge 4.2 de gösterildi. Daha sonra modellerin tahmin performanslarını ölçmek için saklanan 2019 ve 2020 verileri kullanılarak modellerin tahmin hataları  $MAPE_{pre}$  hesaplandı. Son olarak hem veri uydurma hem de tahmin oluşturma sürecindeki toplam ortalama mutlak hatalar hesaplanarak çizelge de gösterildi.

**Çizelge 4.2.** Çin'in  $CO_2$  emisyon verileri için veri uydurma ve tahmin etme performansları.

| YIL                 | HAM VERİ | GM        | EXGM      | CCFGM     | CFGM      | PFAGM      | FEXGM         |
|---------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|---------------|
| 2010                | 8145.8   | 8145.8000 | 8145.8000 | 8145.8000 | 8145.8000 | 8145.8000  | 8145.8000     |
| 2011                | 8827.2   | 8919.8407 | 8828.1589 | 8827.3607 | 8835.4504 | 8827.1132  | 8827.2104     |
| 2012                | 9004.2   | 9013.9206 | 9035.2045 | 9019.3513 | 9018.6533 | 9057.0302  | 9062.0097     |
| 2013                | 9247.4   | 9108.9928 | 9157.6055 | 9156.0118 | 9151.6008 | 9183.6040  | 9168.3089     |
| 2014                | 9293.2   | 9205.0678 | 9249.2369 | 9261.8086 | 9256.5896 | 9254.9775  | 9236.3974     |
| 2015                | 9279.7   | 9302.1561 | 9329.9210 | 9347.8165 | 9343.6919 | 9298.4737  | 9302.3121     |
| 2016                | 9279.0   | 9400.2684 | 9406.9531 | 9420.0165 | 9418.3383 | 9341.0912  | 9381.1463     |
| 2017                | 9466.4   | 9499.4155 | 9483.0200 | 9482.0148 | 9483.7986 | 9428.0767  | 9478.6691     |
| 2018                | 9652.7   | 9599.6083 | 9559.1130 | 9536.1577 | 9542.1972 | 9658.5883  | 9596.2346     |
| MAPE <sub>fit</sub> |          | 0.7561    | 0.6079    | 0.6401    | 0.6503    | 0.3784     | <b>0.5208</b> |
| 2019                | 9810.5   | 9700.8579 | 9635.6000 | 9584.0594 | 9594.9938 | 10269.7628 | 9733.0974     |
| 2020                | 9899.3   | 9803.1754 | 9712.6194 | 9626.8788 | 9643.2354 | 11842.6113 | 9887.5750     |
| MAPE <sub>pre</sub> |          | 1.0443    | 1.8342    | 2.5300    | 2.3916    | 12.1560    | <b>0.4537</b> |
| MAPE <sub>tot</sub> |          | 0.8137    | 0.8532    | 1.0181    | 0.9986    | 2.7339     | <b>0.5074</b> |

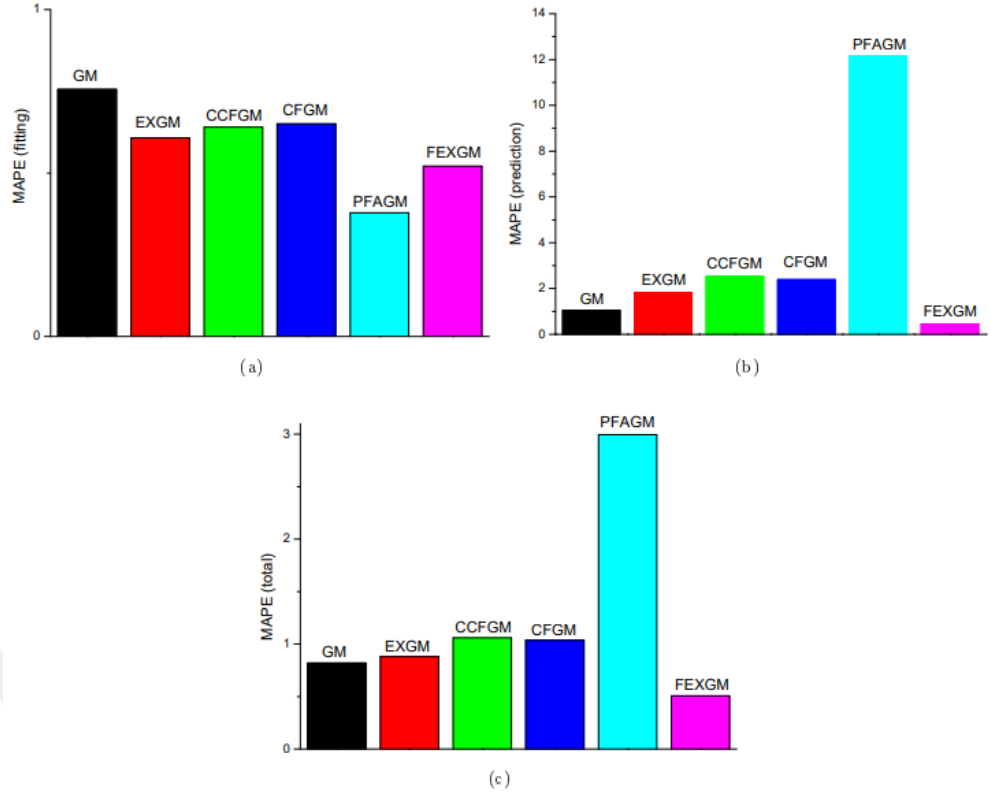
Çizelge 4.2 ye göre temel sonuçlar aşağıdaki gibi çıkarıldı:

- Çizelge 4.2 de görülmektedir ki altı gri modelin veri uydurma tahmin hata oranları (MAPE<sub>fit</sub>) sırasıyla %0.7561, %0.6079, %0.6401, %0.6503, %0.3784 ve **%0.5208** dir. Bu durumda PFAGM(1, 1) modeli veri uydurmada en küçük hata oranına sahip olup FEXGM(1, 1) modeli ikinci sırada en küçük hata oranına sahiptir.
- Altı gri modelin MAPE<sub>pre</sub> değerleri sırasıyla %1.0443, %1.8342, %2.5300, %2.3916, %12.1560 ve **%0.4537** olarak hesaplandı. Buradan veri uydurma sürecinde en iyi veri uydurma performansı FEXGM(1, 1) modeline aittir (bkz. Çizelge 4.3)

**Çizelge 4.3.** Çin'in  $CO_2$  emisyon tahminlerinin MAPE<sub>pre</sub> değerleri.

| YIL  | GM     | EXGM   | CCFGM  | CFGM   | PFAGM   | FEXGM  |
|------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|
| 2019 | 1.1175 | 1.7827 | 2.3081 | 2.1966 | 4.6813  | 0.7889 |
| 2020 | 0.9710 | 1.8857 | 2.7519 | 2.5866 | 19.6307 | 0.1184 |

- Bütün süreçler için altı modelin toplam MAPE değerleri sırasıyla %0.8137, %0.8532, %1.0181, %0.9986, %2.7339 ve **%0.5074** elde edildi. Sonuç olarak en iyi tahmin üretme performansına sahip model FEXGM(1, 1) olduğu görüldü (bkz. Şekil 4.6).



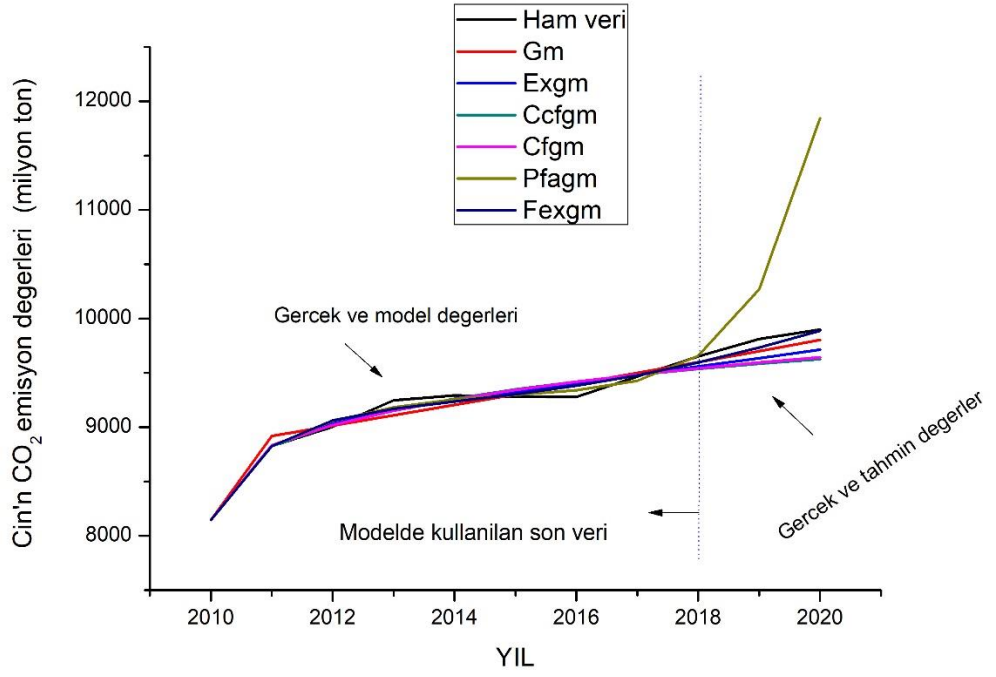
**Şekil 4.6.** Çin'in  $CO_2$  emisyon verileri için modellerin MAPE değerleri, (a) veri uydurma, (b) tahmin, (c) toplam.

Önerilen FEXGM(1, 1) modeli ile Çin'in karbondioksit emisyon değerleri tahmin edildi ve gelecek birkaç yılın tahmin değerleri Çizelge 4.4 de gösterildi.

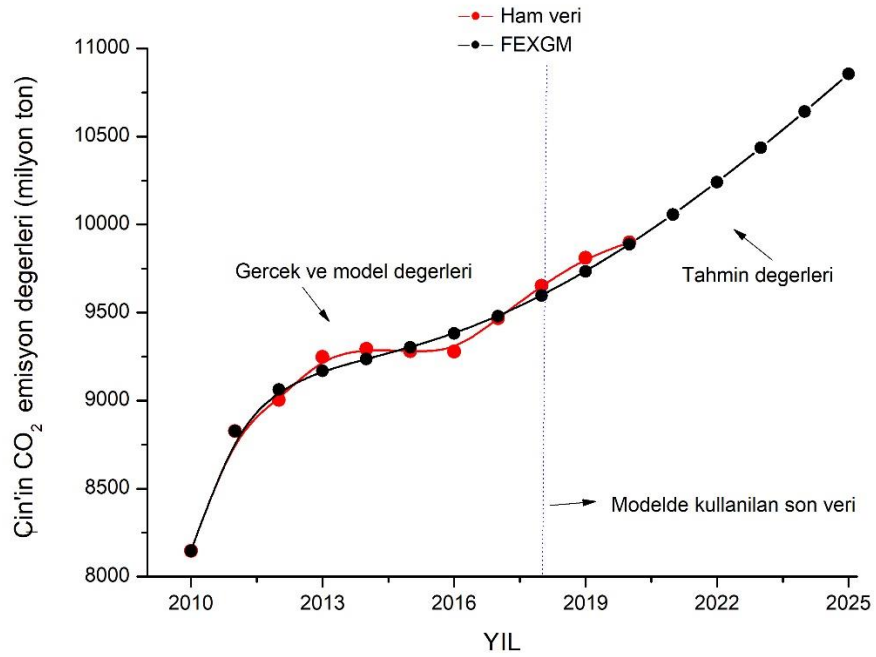
**Çizelge 4.4.** Çin'in  $CO_2$  emisyonlarının tahmin edilmesi.

| Yıllar | Tahmin Değerleri |
|--------|------------------|
| 2019   | 9733.0544        |
| 2020   | 9887.5248        |
| 2021   | 10057.5924       |
| 2022   | 10241.2161       |
| 2023   | 10436.4844       |
| 2024   | 10641.6887       |
| 2025   | 10855.3424       |

Çin'in karbondioksit emisyonlarının altı model ile elde edilen değerleri Şekil 4.7 de gösterildi. Ayrıca, ham veri dizisi ile FEXGM(1, 1) modeli ile elde edilen tahmin değerlerinin grafiksel olarak kıyası Şekil 4.8 de verildi.



Şekil 4.7. Çin'in  $CO_2$  emisyonları için altı gri model ile gerçek değerlerin simülasyonu.

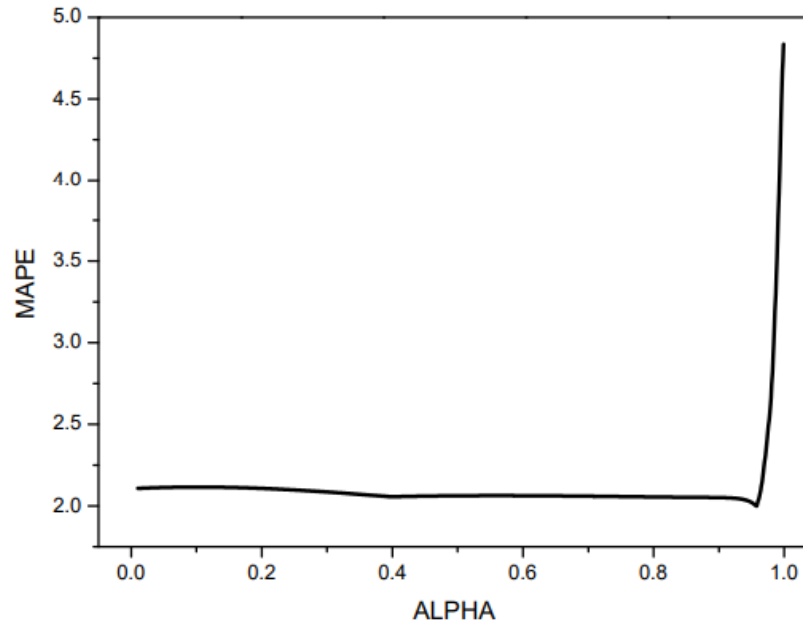


Şekil 4.8. Çin'in  $CO_2$  emisyonlarının gerçek değerleri ve tahmin değerleri.

#### 4.5.2 FEXGM(1, 1) modeline bağılı olarak Brezilya'nın $CO_2$ emisyonunun tahmini

Önerilen kesirli mertebeden gri modelin etkinliğini ve uygulanabilirliğini test etmek için Brezilya'nın  $CO_2$  emisyon değerleri alındı [URL-2]. FEXGM(1, 1) modeli, beş farklı gri model (GM(1, 1), EXGM(1, 1), CCFGM(1, 1), CFGM(1, 1) ve PFAGM(1, 1)) ile karşılaştırıldı. Bu gri modellerin tahmin hata oranlarını değerlendirmek için ortalama mutlak yüzde hata (MAPE) kullanıldı.

İlk olarak, ham veri dizisi iki gruba ayrıldı. Birinci grup veri olarak 2010-2018 yıllarındaki  $CO_2$  emisyon değerleri alınarak altı gri model için ayrı ayrı çözüm fonksiyonları oluşturuldu ve veri uydurma işlemi tamamlandı. İkinci grup veri olarak 2019 ve 2020 yıllarındaki  $CO_2$  emisyon değerleri gözönüne alınarak bu gri modellerin tahmin doğruluğunu onaylamak için kullanıldı.  $\alpha \in (0,1)$  aralığında 0.001 artışla taranarak optimum  $\alpha$  değeri arandı ve buna karşılık gelen  $MAPE_{fit}$  değeri hesaplandı. O halde optimum  $\alpha = 0.958$  değerine karşılık gelen  $MAPE_{fit}$  değerleri Şekil 4.9 da verildi. Şekil 4.9 da açıkça görülür ki optimum  $\alpha$  değerinden uzaklaştıkça  $MAPE_{fit}$  değerleri artmaktadır.



**Şekil 4.9.**  $\alpha \in (0, 1)$  aralığında Brezilya'nın  $CO_2$  emisyonu için FEXGM(1, 1) modelinin MAPE değerleri.

Yukarıda belirlenen optimal basamak için modelin parametreleri

$$a = 0.51865$$

$$b = 6966.76022$$

$$c = 158304.85660$$

olarak hesaplandı. Elde edilen bu parametreler çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılarak

$$\hat{x}^{(0.958)}(k) = 13432.47696 - 13949.01437e^{-0.042k} + 345.91139e^{0.51865(1-k)}$$

elde edildi. Daha sonra FEXGM(1, 1) modeli GM(1, 1), EXGM(1, 1), CCFGM(1, 1), CFGM(1, 1) ve PFAGM(1, 1) modelleri ile karşılaştırıldı. Bu modellerin tahmin sonuçları ve ortalama mutlak yüzde hataları Çizelge 4.5 de gösterildi.

**Çizelge 4.5.** Brezilya'nın  $CO_2$  emisyon verileri için veri uydurma ve tahmin etme performansları.

| YIL                 | HAM VERİ | GM       | EXGM     | CCFGM    | CFGM     | PFAGM    | FEXGM         |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------|
| 2010                | 403.1    | 403.1000 | 403.1000 | 403.1000 | 403.1000 | 403.1000 | 403.1000      |
| 2011                | 427.2    | 461.1000 | 418.6935 | 427.0956 | 423.2513 | 418.3009 | 422.1934      |
| 2012                | 445.7    | 462.1241 | 472.7672 | 465.4177 | 462.7722 | 465.6330 | 465.0973      |
| 2013                | 485.8    | 463.1505 | 486.0446 | 482.7810 | 480.9951 | 485.7938 | 483.5180      |
| 2014                | 508.0    | 464.1791 | 484.4510 | 487.3016 | 486.2523 | 489.5432 | 487.3056      |
| 2015                | 490.7    | 465.2100 | 477.5213 | 483.4346 | 483.0136 | 483.2497 | 482.4391      |
| 2016                | 454.1    | 466.2432 | 468.7601 | 473.9250 | 474.0195 | 471.3154 | 472.5432      |
| 2017                | 460.6    | 467.2787 | 459.4541 | 460.5897 | 461.0865 | 457.2633 | 459.8121      |
| 2018                | 445.5    | 468.3165 | 450.0739 | 444.6882 | 445.4795 | 444.4289 | 445.5734      |
| MAPE <sub>fit</sub> |          | 4.9186   | 2.4924   | 1.8969   | 2.0110   | 2.0580   | <b>1.9999</b> |
| 2019                | 444.9    | 469.3566 | 440.7901 | 427.1211 | 428.1078 | 436.5827 | 430.6289      |
| 2020                | 417.5    | 470.3990 | 431.6627 | 408.5450 | 409.6394 | 438.6691 | 415.4624      |
| MAPE <sub>pre</sub> |          | 9.0837   | 2.1580   | 3.0705   | 2.8285   | 3.4699   | <b>1.8478</b> |
| MAPE <sub>tot</sub> |          | 5.7516   | 2.4255   | 2.1316   | 2.1745   | 2.3403   | <b>1.9695</b> |

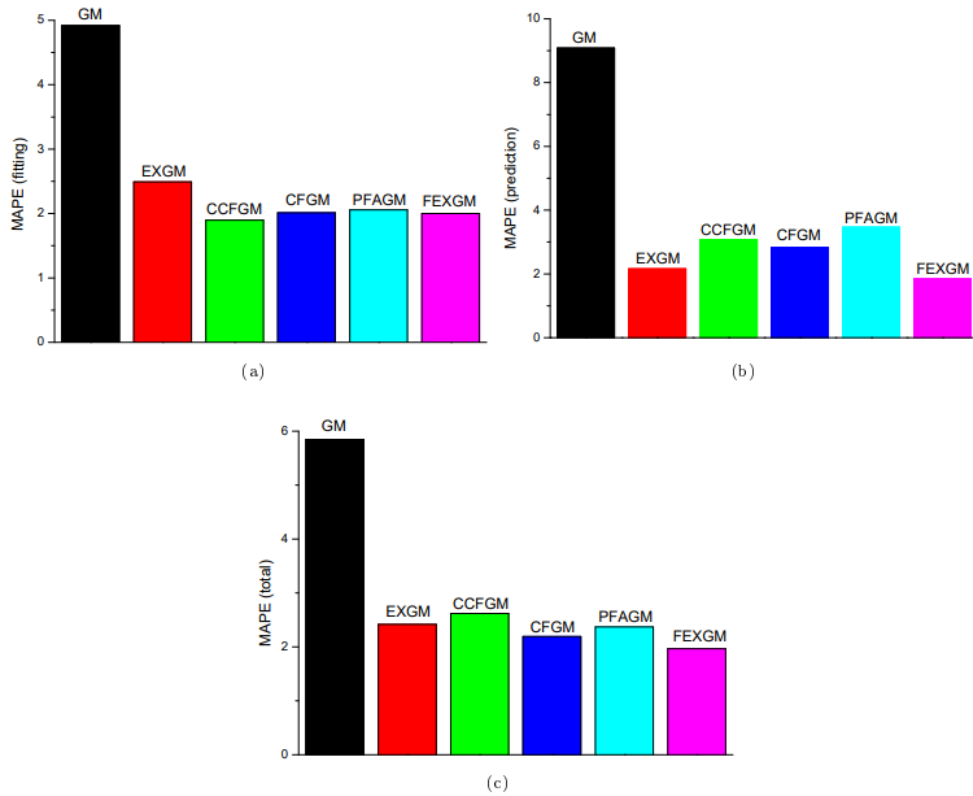
Çizelge 4.5'den elde edilen çıkarımlar aşağıda sıralandı:

- ❖ Altı gri modelin MAPE<sub>fit</sub> değerleri sırasıyla %4.9186, %2.4924, %1.8969, %2.0110, %2.0580 ve **%1.9999** dir. Buradan görülmektedir ki CCFGM(1, 1) modeli en düşük veri uydurma hata oranına sahiptir. Önerilen FEXGM(1, 1) modelinin en düşük veri uydurma hata oranı ise ikinci sırada yer almaktadır.
- ❖ Modellerin tahmin performanslarını ölçmek için saklanan 2019 ve 2020 yıllarındaki verileri kullanarak modellerin tahmin hataları (MAPE<sub>pre</sub>) sırasıyla %9.0837, %2.1580, %3.0705, %2.8285, %3.4699 ve **%1.8478** olarak hesaplandı. Böylece veri uydurma süresi boyunca en iyi tahmin performansı FEXGM(1, 1) modeline ait olduğu görüldü (bkz. Çizelge 4.6).

**Çizelge 4.6.** Brezilya'nın  $CO_2$  emisyon tahminlerinin  $MAPE_{pre}$  değerleri.

| YIL  | GM      | EXGM   | CCFGM  | CFGM   | PFAGM  | FEXGM  |
|------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2019 | 5.4971  | 0.9237 | 3.9961 | 3.7743 | 1.8694 | 3.2076 |
| 2020 | 12.6704 | 3.3922 | 2.1448 | 1.8827 | 5.0704 | 0.4880 |

- ❖ Bütün süreçler için altı modelin toplam MAPE değerleri sırasıyla %5.7516, %2.4255, %2.1316, %2.1745, %2.3403 ve **%1.9695** elde edildi. Sonuç olarak en iyi tahmin üretme performansına sahip model FEXGM(1, 1) olduğu görüldü (bkz. Şekil 4.10).



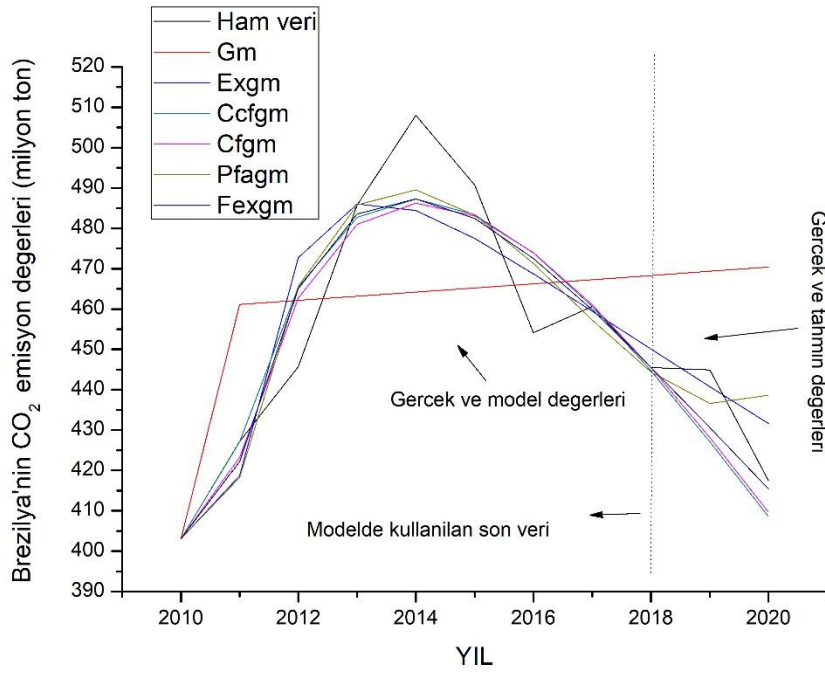
**Şekil 4.10.** Brezilya'nın  $CO_2$  emisyon verileri için modellerin MAPE değerleri, (a) veri uydurma, (b) tahmin, (c) toplam.

- ❖ Önerilen FEXGM(1, 1) modeli ile Brezilya'nın karbondioksit emisyon değerleri tahmin edildi ve gelecek birkaç yılın tahmin değerleri Çizelge 4.7 de gösterildi.

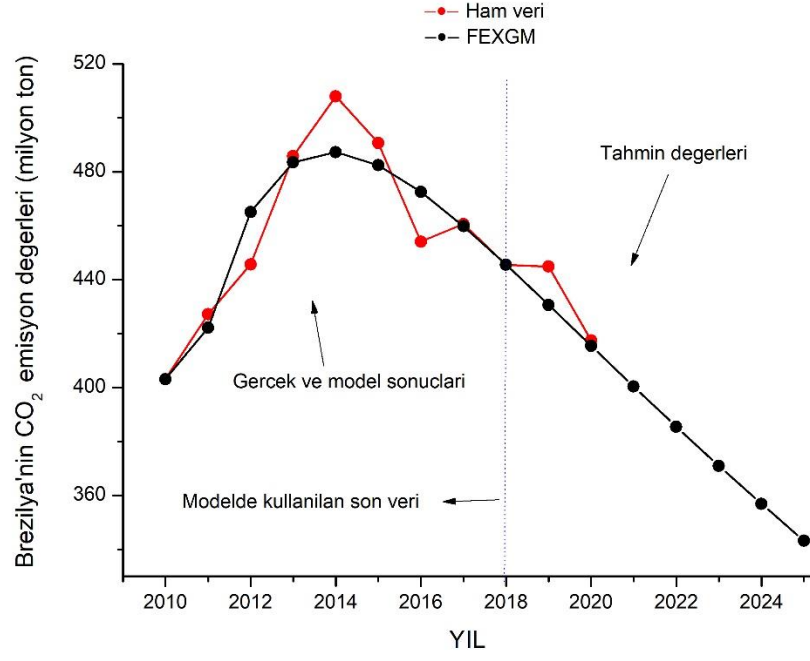
**Çizelge 4.7.** Brezilya'nın  $CO_2$  emisyonlarının tahmin edilmesi.

| Yıllar | Tahmin Değerleri |
|--------|------------------|
| 2019   | 430.6204         |
| 2020   | 415.4530         |
| 2021   | 400.3544         |
| 2022   | 385.4974         |
| 2023   | 370.9834         |
| 2024   | 356.8700         |
| 2025   | 343.1881         |

- ❖ Brezilya'nın karbondioksit emisyonlarının altı model ile elde edilen değerleri Şekil 4.11 de gösterildi. Ayrıca, ham veri dizisi ile FEXGM(1, 1) modeli ile elde edilen tahmin değerlerinin grafiksel olarak karşılaştırılması Şekil 4.12 de verildi.



**Şekil 4.11.** Brezilya'nın  $CO_2$  emisyonları için altı gri model ile gerçek değerlerin simülasyonu.



Şekil 4.12. Brezilya'nın  $CO_2$  emisyonlarının gerçek değerleri ve tahmin değerleri.

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, zaman serileri ve dinamik modeller için parametre tahminleri yapmayı amaçlayan ve uygulamalı matematiğin son yıllardaki popüler çalışma alanlarından biri olan gri modelleme konusu ele alındı. Gri sistem teorisinin önemli bir alt dalı olan gri modellemenin temel yapısı, literatür özeti ile bazı önemli tanım ve teoremler tezin ilk bölümünde verildi.

Matematiksel modellemede son dönemlerde tercih edilen önemli bir kavram ise kesir mertebeden türev ve integral tanımlarıdır. Bunun iki temel nedeni olup bunlardan ilki doğadaki problemlerin her zaman tamsayı basamaktan modellerle tam olarak temsil edilememesidir. Yani matematiksel modeldeki türev ya da integral aynı kategorideki bütün olayları tam olarak modelleyemeyebilir. Örneğin bir artma-azalma problemindeki türev değişimi ifade eder ancak bu değişimin şekli tüm artma-azalma olaylarında aynı şartlarda veya ölçüde olmayabilir. Bir popülasyonun nüfusundaki artma ile ekonomik anlamda bir artma olayları tamamen farklı dinamiklere sahiptir. Bu durumda her bir olay için farklı basamaktan türevlere sahip modeller şüphesiz daha doğru sonuçlar verecektir. Bu basamak da her zaman tamsayı olmak zorunda değildir. Kesir mertebeden türev ve integral operatörlerinin matematiksel modellemede tercih edilmesinin ikinci önemli nedeni ise tam sayı mertebeden türevin aksine kesir mertebeden türev ve integralin hafıza özelliğine sahip olmalarıdır. Bu ise özellikle zaman serilerinin tahminlerinin yapılması için önemlidir. Hafıza özelliği, mevcut zamandan bir adım önceki zamanda gerçekleşen bilgileri tutar ve ileriki zaman dilimlerine aktarır. Örneğin, bir  $[0, t]$  aralığında türevlenebilen bir  $f(t)$  fonksiyonunu göz önüne alalım.  $t_1$  ve  $t_2$  ise bu aralıkta herhangi iki anlık zamanı temsil etsinler, yani  $0 < t_1 < t_2 < t$  olsun. Riemann-Liouville kesir mertebeden integral hesabına göre,

$$\begin{aligned} F &= I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_2} (t_2 - \varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon - \int_0^{t_1} (t_1 - \varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - \varepsilon)^{\alpha-1} - (t_1 - \varepsilon)^{\alpha-1}] f(\varepsilon) d\varepsilon - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \right| \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer  $\alpha = 1$  alınırsa yukarıdaki integral,

$$F = I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\varepsilon) d\varepsilon$$

olur. Son eşitlikten açıkça görülür ki klasik integralde sonuç  $[t_1, t_2]$  aralığına bağlı iken kesir basamaktan integralde sonuç hem  $[t_1, t_2]$  aralığına hem de  $t_1$  den önceki zamana bağlıdır. Bu ise hafıza özelliğinin basit bir göstergesidir.

Yukarıda bahsedilen önemli iki gerekçeden dolayı bu tez çalışmasında oluşturulan orijinal modeller kesir mertebeden olarak tasarlandı. Son yılların en sık kullanılan kesir mertebeden türev tanımlarından biri olan uyumlu türev ve özellikleri kullanıldı. Uyumlu türev tanımının tercih edilmesindeki en önemli neden, tanım ve teoremlerin diğerlerine göre daha pratik ve kolay olmasıdır.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde sürekli ve uyumlu kesir mertebeden yeni bir gri model oluşturuldu ve modele kısaca OCCFGM(1, 1) adı verildi. Bu model literatürdeki CCFGM(1, 1) modelinin optimize edilmesiyle oluşturuldu. Hem türevin hem de birikimli toplamlar dizisinin mertebesi ayrı ayrı kesirli olarak tasarlanan modelde, verilen ham veri seti için en ideal mertebe değerleri Kaba Kuvvet algoritması ile elde edildi. Modelin parametrelerini belirlemek için ise en küçük kareler yaklaşımı kullanıldı. Oluşturulan kesir mertebeden OCCFGM(1, 1) modeli ile ilerleyen yıllar için Çin'in yerli enerji tüketimi, Rusya'nın karbondioksit emisyon verileri ve Türkiye'nin içme suyu ihtiyacı ayrı ayrı tahmin edildi. Elde edilen sonuçlar EXGM, GM, ARIMA, ONGM, TDPGM, CFGM, NGMO, FAGM, FANGM, CFNGM, ANN, SVR ve CCFGM gibi farklı model ve paketlerle karşılaştırılarak oluşturulan OCCFGM(1, 1) modelinin diğerlerinden daha iyi sonuçlar verdiği gösterildi. Elde edilen sayısal sonuçlar ve karşılaştırmalar çizelgeler ve grafiklerle sunuldu.

Bu tez çalışmasında bir başka yeni gri model olarak, kesir mertebeden üstel gri model yani ECFGM(1, 1) modeli üçüncü bölümde tanıtıldı. Alınan resmi verilere dayanarak, Çin'in önümüzdeki yıllar için rüzgar enerjisi tüketimi ECFGM(1, 1) modeli ile tahmin edildi. Sonuçlar GM(1, 1), EXGM(1, 1), FAGM(1, 1), FAGMO(1, 1,  $k$ ), PFAGM(1, 1) ve CFGM(1, 1) modelleri ile karşılaştırıldı ve ECFGM(1, 1) modelinin diğerlerinden daha iyi sonuçlar verdiği görüldü. Elde edilen sayısal sonuçlar ve karşılaştırmalar çizelgeler ve grafiklerle gösterildi.

Tezin dördüncü bölümünde ise orijinal bir başka gri model ortaya kondu ve FEXGM(1, 1) olarak adlandırıldı. Bu kısımdaki modellemede farklı bir fikir olarak, kesir basamak olan  $\alpha$  nın sadece bir basamak olarak değil, aynı zamanda modelin bir parametresi de olarak problem üzerinde baskın bir rol oynaması sağlandı. Oluşturulan modelle Brezilya ve Çin gibi ekonomik ve nüfus açısından farklı iki ülkedeki karbondioksit gazı emisyon değerlerinin tahminleri oluşturuldu. Böylece,  $\alpha$  değerinin hem mertebe hem de bir etki parametresi olarak düşünülerek oluşturulan modelin çok iyi bir performans gösterdiği gösterildi.

Tez çalışmasında gerek modeller için açıklayıcı ve öğretici örneklerde, gerekse reel veri setleri üzerinde yapılan tahminlemelerde bütün modeller için optimal mertebenin belirlenmesi için Kaba Kuvvet algoritması kullanıldı. Bu algoritmanın basit olmasına rağmen; tek değişkenli problemler için risksiz ve etkili olduğu vurgulandı. Her ne kadar daha zeki optimizasyon yöntemleri son zamanlarda daha popüler olarak kullanılıyor olsa dahi, iyi bir kodlama algoritması ile Kaba Kuvvet algoritmasından da iyi sonuçlar elde edileceği gösterildi.

Tez çalışmasının amacı gri modelleme mekanizmasının anlaşılması, yeni modellerin geliştirilmesi ve orijinal problemler üzerinde uygulamalarının yapılmasıydı. Çalışmaların sonunda kesir mertebeden üç yeni gri model olan OCCFGM(1, 1), ECFGM(1, 1) ve FEXGM(1, 1) modelleri oluşturuldu ve reel problemler üzerinde uygulandı. Çok sayıda model ile yapılan karşılaştırmalarda, kurulan bu modellerin tahmin güçlerinin oldukça iyi olduğu gösterildi. Bu çalışmada oluşturulan yeni ve kesir basamaktan gri modeller, sadece verilen uygulamalar için oluşturulmayıp bütün veri tipleri ve farklı uygulamalar için kullanılabilir.

Bu çalışmada ele alınan reel problemler sadece modellerin performanslarını ölçmek için ele alınmadı. Aynı zamanda elde edilen sonuçlar, ilgili kurum ya da kuruluşlara birer gösterge olması için literatüre sunuldu.

Belirtmekte fayda vardır ki; bir gri modelin diğer modellerin hepsinden daha üstün olması beklenemez ve teorik olarak da anlamlı değildir. Yani herhangi bir gri model, verilen bir veri seti için başka modellere nazaran daha iyi performans gösterebilir ancak bir başka veri seti için bu kez en iyi performansı gösteremeyebilir. Burada esas olan, modelin pratik ve farklı tipteki veri setleri için düşük hata oranı ile tahmin sonuçlarını üretebilmesidir.

İleriki çalışmalar olarak, bu tezde verilen modelleme fikirlerinden esinlenerek yeni gri modellerin geliştirilmesi önerilir. Ayrıca bu tezde oluşturulan kesirli basamaktan gri modeller kullanılarak zaman serilerinin tahminleri oluşturularak sonuçlar değerlendirilebilir. Son olarak, farklı özellikteki reel veri setleri için OCCFGM(1, 1), ECFGM(1, 1) ve FEXGM(1, 1) modelleri çalıştırılarak, elde edilen hata oranlarına göre bir karşılaştırma yapılabilir.

## KAYNAKLAR

1. Deng, J. L., 1982. Control problems of grey systems, *Systems & Control Letters*, 1, 5, 288–294.
2. Altan, A., Karasu, S. ve Zio, E., 2021. A new hybrid model for wind speed forecasting combining long short-term memory neural network, decomposition methods and grey wolf optimizer, *Applied Soft Computing*, 100, 4, 1–20.
3. Ping, X., Yang, F., Zhang, H., Zhang, J., Zhang, W. ve Song, G., 2021. Introducing machine learning and hybrid algorithm for prediction and optimization of multistage centrifugal pump in an orc system, *Energy*, 222, 1–13.
4. Wu, L., Liu, S., Yao, L. ve Yan, S., 2013. The effect of sample size on the grey system model, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 6577–6583.
5. Wu, L., Liu, S. F., Chen, D., Yao, L. ve Cui, W., 2014. Using gray model with fractional order accumulation to predict gas emission, *Natural Hazards*, 71, 2231–2236.
6. Zhang, Y., Xu, Y. ve Wang, Z., 2009. GM(1,1) grey prediction of lorenz chaotic system, *Chaos Solitons Fractals*, 42, 1003–1009.
7. Zhou, W. ve He, J. M., 2013. Generalized GM(1,1) model and its application in forecasting of fuel production, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 6234–6243.
8. Javed, S. A. ve Liu, S., 2018. Predicting the research output/growth of selected countries: application of even GM(1,1) and ndgm models, *Scientometrics*, 115, 395–413.
9. Bilgil, H., 2021. New grey forecasting model with its application and computer code, *AIMS Mathematics*, 6, 1497–1514.
10. Zeng, B., Tan, Y., Xu, H., Quan, J., Wang, L. ve Zhou, X., 2018. Forecasting the electricity consumption of commercial sector in hong kong using a novel grey dynamic prediction model, *Journal of Grey System*, 30, 157–172.
11. Ene, S. ve Öztürk, N., 2018. Grey modelling based forecasting system for return flow of end-of-life vehicles, *Technological Forecasting and Social Change*, 117, 155–166.
12. Şahin, U. ve Şahin, T., 2020. Forecasting the cumulative number of confirmed cases of covid-19 in Italy, UK and USA using fractional nonlinear grey bernoulli model, *Chaos Solitons Fractals*, 138, 109948.
13. Ma, X. ve Liu, Z., 2017. Application of a novel time-delayed polynomial grey model to predict the natural gas consumption in China, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 324, 17–24.

14. Wei, B., Xie, N. ve Hu, A., 2018. Optimal solution for novel grey polynomial prediction model, *Applied Mathematical Modelling*, 62, 717–727.
15. Cui, J., Liu, S., Zeng, B. ve Xie, N., 2013. A novel grey forecasting model and its optimization, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4399–4406.
16. Ma, X., Liu, Z. ve Wang, Y., 2019. Application of a novel nonlinear multivariate grey bernoulli model to predict the tourist income of China, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 347, 84–94.
17. Wang, Z. X., Li, Q. ve Pei, L. L., 2018. A seasonal GM(1, 1) model for forecasting the electricity consumption of the primary economic sectors, *Energy*, 154, 522–534.
18. Wu, L. Z., Li, S. H., Huang, R. Q. ve Xu, Q., 2020. A new grey prediction model and its application to predicting landslide displacement, *Applied Soft Computing*, 95, 106543.
19. Liu, L. ve Wu, L., 2021. Forecasting the renewable energy consumption of the European countries by an adjacent non-homogeneous grey model, *Applied Mathematical Modelling*, 89, 1932–1948.
20. Ma, X., 2016. Research on a novel kernel based grey prediction model and its applications, *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 3, 1–9.
21. Li, S., Ma, X. ve Yang, C., 2018. A novel structure-adaptive intelligent grey forecasting model with full-order time power terms and its application, *Computers & Industrial Engineering*, 120, 53–67.
22. Wu, W., Ma, X., Wang, Y., Cai, W. ve Zeng, B., 2020. Predicting China's energy consumption using a novel grey riccati model, *Applied Soft Computing*, 95, 106555.
23. Liu, L., Chen, Y. ve Wu, L., 2021. The damping accumulated grey model and its application, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 95, 105665.
24. Jiang, J., Feng, T. ve Liu, C., 2021. An improved nonlinear grey bernoulli model based on the whale optimization algorithm and its application, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 6691724.
25. Yuxiao, K., Shuhua, M., Yonghong, Z. ve Huimin, Z., 2020. Fractional derivative multivariable grey model for nonstationary sequence and its application, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 31, 1009–1018.
26. Wu, L., Liu, S., Yao, L., Yan, S. ve Liu, D., 2013. Grey system model with the fractional order accumulation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18, 1775–1785.

27. Wu, W., Ma, X., Zeng, B., Wang, Y. ve Cai, W., 2018. Application of the novel fractional grey model FAGMO(1,1,k) to predict china's nuclear energy consumption, *Energy*, 165, 223–234.
28. Mao, S., Gao, M., Xiao, X. ve Zhu, M., 2016. A novel fractional grey system model and its application, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 5063–5076.
29. Zhang, P., Ma, X. ve She, K., 2019. A novel power-driven fractional accumulated grey model and its application in forecasting wind energy consumption of china, *Plos One*, 14, 12, e0225362.
30. Xie, W., Wu, W. Z., Liu, C. ve Zhao, J., 2020. Forecasting annual electricity consumption in china by employing a conformable fractional grey model in opposite direction, *Energy*, 202, 117682.
31. Yang, Y. ve Xue, D., 2016. Continuous fractional-order grey model and electricity prediction research based on the observation error feedback, *Energy*, 115, 722–733.
32. Meng, W., Li, Q. ve Zeng, B., 2016. Study on fractional order grey reducing generation operator, *Grey Systems: Theory and Application*, 6, 80–95.
33. Wu, L., Liu, S., Yang, Y., Ma, L. ve Liu, H., 2016. Multivariable weakening buffer operator and its application, *Information Sciences*, 339, 98–107.
34. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.
35. Ma, X., Wu, W., Zeng, B., Wang, Y. ve Wu, X., 2020. The conformable fractional grey system model, *ISA Transactions*, 96, 255–271.
36. Xie, W., Liu, C., Wu, W., Li, W. ve Liu, C., 2020. Continuous grey model with conformable fractional derivative, *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 1–9, 110285.
37. Teodoro, G.S., Machado, J. A. T. ve de-Oliveira, E. C., 2019. A review of definitions of fractional derivatives and other operators, *Journal of Computational Physics*, 388, 195–208.
38. Wu, W., Ma, X., Zhang, Y., Li, W. ve Wang, Y., 2020. A novel conformable fractional non-homogeneous grey model for forecasting carbon dioxide emissions of BRICS countries, *Science of The Total Environment*, 707, 1–24, 135447.
39. Meng, X. ve Wu, L., 2021. Prediction of per capita water consumption for 31 regions in China, *Environmental Science and Pollution Research*, 28, 29253–29264.
40. Cao, J., Liu, L., Yang, L. ve Xie, S., 2020. Application of a novel fractional order grey support vector regression model to forecast wind energy consumption in

China, Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 35, 2, 58–69.

41. Zhang, P., Ma, X. ve She, K., 2019. A novel power-driven fractional accumulated grey model and its application in forecasting wind energy consumption of china, Plos One, 14, 12, e0225362.

URL-1 <<https://chinaenergyportal.org/2020-electricity-other-energy-statistics-preliminary/>>, Eriřim tarihi: 22.01.2021.

URL-2 <<https://www.bp.com/content/dam/bp/business-sites/en/global/corporate/pdfs/energy-economics/statistical-review/bp-stats-review-2021-full-report.pdf>>, Eriřim tarihi: 2021.



## ÖZGEÇMİŞ

**Adı ve Soyadı** : Ümmügülsüm ERDİNÇ

### EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014-2019

Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü, 2017-2021

**Yüksek Lisans** : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2020

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Öğretmen, Millî Eğitim Bakanlığı, 01.10.2020-01.12.2020
2. Araştırma Görevlisi, Aksaray Üniversitesi, 2020-devam ediyor.

### TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Öztürk, Z., Bilgil, H. ve Erdinç, Ü., 2022. An optimized continuous fractional grey model for forecasting of the time dependent real world cases, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 51, 1, 308-326.
2. Erdinç, Ü., Bilgil, H. ve Öztürk, Z., 2022. A novel fractional forecasting model for time dependent real world cases, REVSTAT-Statistical Journal, <https://revstat.ine.pt/index.php/REVSTAT/article/view/468>.