

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

UZAY KİNEMATİĞİNDE

JACOBI TEOREMLERİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi'nce
"Fen Doktoru"
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdır

Ziya YAPAR

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 19.2.1979
Sözlü Sınavın Tarihi : 29.6.1979

Doktorayı Yöneten Öğretim Üyesi : Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Doktora Komisyonu Üyesi : Prof.Dr. Asım ÖZKAN
Doktora Komisyonu Üyesi : Doç.Dr. Asuman ILGAZ

Trabzon- 1979

Bu çalışmayı bana öneren ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Cebir-Geometri Kürsüsü Başkanı Sayın Hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOğLU'na şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II
GİRİŞ.....	III
NOTAŞYONLAR.....	IV

BÖLÜM.I

DUAL SAYILAR VE DUAL SAYILAR HALKASI

I.1. DUAL SAYILAR.....	1
I.2. DUAL SAYILARLA İLGİLİ TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	7
I.3. BİR TEK DUAL DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR.....	7
I.4. DUAL FONKSİYONLARIN KUVVET SERİLERİNE AÇILIMI.....	8

BÖLÜM.II

DUAL VEKTÖR UZAYI

II.1. ID-MODÜL.....	10
II.2. DUAL VEKTÖRLER.....	13
II.3. ID-MODÜL ÜZERİNDE İÇ ÇARPIM.....	14
II.4. DUAL VEKTÖRLERİN NORMLANMASI.....	15
II.5. E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ.....	16
II.6. DUAL AÇI.....	17
II.7. DUAL STEINER VEKTÖRÜ VE STEINER DOĞRUSU.....	21
II.8. ÇİZGİLER UZAYINDA KAPALI BİR REGLE YÜZEYİN AÇILIM UZUNLUĞU.....	22
II.9. ÇİZGİLER UZAYINDA KAPALI BİR REGLE YÜZEYİN AÇILIM AÇISI.....	24
II.10. KAPALI UZAY EĞRİLERİ VE KAPALI KÜRESEL EĞRİLER İÇİN JACOBI TEOREMLERİ.....	24

BÖLÜM.III

KAPALI KÜRESEL EĞRİLER İÇİN BİLİNER JACOBI TEOREMLERİNİN ÇİZGİLER UZAYINA GENELLEŞTİRİLMESİ

III.1. TEĞETLER GÖSTERGESİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIĞI.....	33
III.2. ASAL NORMALLER GÖSTERGESİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIĞI.....	37
III.3. BİNORMALER GÖSTERGESİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIĞI.....	38

II

III.4. OSKÜLATÖR DÜZLEMDEKİ BİRİM VEKTÖRLERİN GÖSTERGELERİNİNİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIKLARI..	40
III.5. ORTAK ÖZELİKLER.....	43
SONUÇ.....	44
BİBLİYOGRAFYA.....	45
ÖZ GEÇMİŞİM.....	47

Ö Z E T

Çalışmamız üç bölüm halinde düzenlenmiştir. İlk iki bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. Burada E. Study Dönüşümüne esas olmak üzere dual sayıların halkası ve $\mathbb{D}$ -Modül üzerinde gerekli temel kavramlar ve temel bilgiler sıralanmıştır. Hareket geometrisinde yer alan diferansiyel değişmezlerin de sıralandığı bu iki bölümde geçen teoremlerin ispatlarına kısmen yer verilmiş, kısmen de yer verilmeden kaynaklar işaret edilerek yetinilmiştir.

Çalışmanın orjinal kısmı üçüncü bölümdedir. Jacobinin kapalı küresel eğrilere dair verdiği iki teorem ile bu teoremlerden çıkarılan sonuçların Çizgiler Uzayındaki karşılıkları çalışmanın konusudur. Bu bölümde bu teoremlerle sonuçlarının E.Study dönüşümünden yararlanarak 3-boyutlu Çizgiler Uzayındaki karşılıkları elde edilmiştir.

Aranan regle yüzeylerin hepsinin de birer koni yüzeyi oldukları gösterilmiş ve böylece Jacobi Teoremleri Çizgiler uzayında ifade ve ispat edilmişlerdir.

S U M M A R Y

This dissertation consist of three chapters. The first two chapters deal with basic concepts. Here, ring of dual numbers, necessary basic concepts over ID-Module and basic knowledge based on Study-Mapping have been arranged. In these two chapters where differential invariants, which take place in the motion geometry, have been arranged, some theorems have been proven and in some places only the sources have been given.

The original part of my study is in the third chapter. The two theorems which Jacobi has given about the closed spherical curves and the correspondence of the results derived from these theorems in the 3-dimensional line -space constitute my subject. In this chapter, the consequences of these theorems and their results in the line -space by means of E. Study-mapping have been obtained.

It has been pointed out that all of the investigated ruled surfaces are cone surfaces and so Jacobi Theorems have been expressed and proved in the 3-line-space.

I. G İ R İ Ő

Hareket geometrisi özellikle 1-parametrelili hareket grupları altında değişmezlerin teorisidir. Son yıllarda diferansiyel geometri ile kinematiğin ortak alanında E.Study dđnüşümlerinden yararlanarak düzlemde ya da 3-boyutlu uzayda tanımlanan geometrik değişmezlerin 3-boyutlu çizgiler uzayındaki karşılıkları çalışmalarına konu olmaktadır. Holditch ve Steiner teoremlerinin 3-boyutlu çizgiler uzayındaki karşılıkları birer örnek olarak gösterilebilir.

Jacobi teoremlerinin karşılıklarını da bunlara eklemek için önce bu teoremleri küre geometrisi yönünden ele almak gerekmektedir. Jacobi Teoremlerini çizgiler uzayına genelleştirebilmek için bu çalışmayı ele alırken kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları ile açılım açılarıni dual küresel hareketlerde görmekle cesaret kazandık [7] , [11] .

Bu iki değişmezi 3-boyutlu çizgiler uzayının 1-parametrelili kapalı hareketlerinde esas aldık. Yüzeyler teorisi yönünden Jacobi teoremleri koni yüzeyleriyle ilgili görülmüştür. Elde edilen yeni sonuçlar Jacobi Teoremlerinin çizgiler uzayındaki karşılıkları olarak teoremler halinde ifade ve ispat edilmişlerdir.

NOTASYONLAR

$\mathbb{R}$ Reel sayılar.

$\mathbb{R}^3$ Üç boyutlu reel vektör uzayı.

$\mathbb{D}$ Dual sayılar.

$\oplus$ Toplama işlemi.

$\otimes$ Çarpma işlemi.

$\in$ Elemanıdır.

$\mathbb{D}$ -Modül Dual sayılar halkası üzerindeki modül.

$\varepsilon = (0,1)$ $\mathbb{D}$ -Modülde dual birim.

$A = a + \varepsilon \tilde{a}$ Bir dual sayının gösterilişi, $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$ dir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \tilde{\vec{a}}$ $\mathbb{D}$ -Modülde bir dual vektörün gösterilişi, $\vec{a}, \tilde{\vec{a}} \in \mathbb{R}^3$ dir.

$\langle, \rangle$ İç çarpım.

$\wedge$ Dış çarpım.

$| |$ Mutlak değer.

$\| \|$ Norm.

K Birim dual küre.

$\emptyset = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ Dual açı, $\varphi, \varphi^* \in \mathbb{R}$

$A = [A_{ij}]$, $A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a^*_{ij}$ Dual matris.

$d_f \vec{X}, \vec{X}$ vektörünün diferensiyel hızı.

$\vec{\Psi} = \vec{f} + \varepsilon \vec{f}^*$ Bir hareketin ani dual pfaff vektörü.

L Bir regle yüzeyin açılım uzunluğu.

λ Bir regle yüzeyin açılım açısı.

$\oint$ Kapalı bir eğri boyunca integral.

$\int$ Bir eğrinin jeodezik eğriliği.

$(\cdot)' = \frac{d}{ds}$ Yay uzunluğuna göre türev.

κ Bir eğrinin eğriliği.

τ Bir eğrinin burulması.

BÖLÜM.I

DUAL SAYILAR VE DUAL SAYILAR HALKASI

I.1. DUAL SAYILAR

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi toplama (+) ve çarpma (.) işlemlerine göre bir cisimdir. Bu cisme Reel Sayılar cismi denir ve kısaca $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

TANIM I.1.1.

$a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = (a, a^*)$ ikilisine sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin. Böylece,

$$\mathbb{D} = \{ (a, a^*) ; a, a^* \in \mathbb{R} \}$$

dir. $\mathbb{D}$ üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır :

TANIM I.1.2. (Toplama)

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

işlemi

$$A = (a, a^*) \text{ ve } B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$$

olmak üzere,

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a+b, a^*+b^*)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki toplama olarak adlandırılır.

TANIM I.1.3. (Çarpma)

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A = (a, a^*) \text{ ve } B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$$

olmak üzere,

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^*+a^*b)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki çarpma olarak adlandırılır.

TANIM I.1.4. (Eşitlik)

$$A=(a,a^*) \text{ ve } B=(b,b^*) \in \mathbb{D}$$

için

$$a=b, \quad a^*=b^*$$

ise A ile B eşittir denir ve $A=B$ şeklinde gösterilir.

TANIM I.1.5.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere,

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall (a,a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir.

TEOREM I.1.1.

$(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır [1].

İSPAT : Bunu iki adımda yapabiliriz.

(i) $(\mathbb{D}, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur.

$$H_1 : \oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde tanımlandığından, $\mathbb{D}$ cümlesi $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.

$H_2 : \oplus$ işleminin birleşme özeliği vardır. Gerçekten $\forall A, B, C \in \mathbb{D}$ için,

Tanım I.1.2.den;

$$(A \oplus B) \oplus C = [(a, a^*) \oplus (b, b^*)] \oplus (c, c^*) = (a+b+c, a^*+b^*+c^*),$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (a, a^*) \oplus [(b, b^*) \oplus (c, c^*)] = (a+b+c, a^*+b^*+c^*)$$

olduklarından Tanım I.1.4 gereğince,

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

dir.

$H_3 : \oplus$ işlemine göre $\mathbb{D}$ de bir 0 (sıfır) etkisiz elemanı vardır.

Gerçekten $\forall A \in \mathbb{D}$ için,

$$A \oplus 0 = 0 \oplus A$$

olacak şekilde bir "0" etkisiz elemanına,

$$0 = (x, x^*)$$

denirse,

$$0 \oplus A = A \oplus 0$$

için Tanım I.1.2 ve Tanım I.1.4 den yararlanarak bir tek ,
 $x=0, x^*=0$; $0=(0,0) \in D$
 etkisiz elemanı elde edilir.

$$H_4 : \text{Toplama } \oplus \text{ işlemine göre } \forall A \in D \text{ için,}$$

$$A \oplus X = X \oplus A = 0$$

olacak şekilde bir tek $X=(x, x^*) \in D$ ters elemanı vardır.
 Gerçekten Tanım I.1.2 ve Tanım I.1.4'ün birleştirilmesi ile
 $A=(a, a^*) \in D$ için $X=(-a, -a^*) \in D$
 olduğu görülür.

O halde $(D, \oplus)$ ikilisi bir gruptur.

$$H_5 : \forall A, B \in D \text{ için Tanım I.1.2 ve Tanım I.1.4}$$

$$\text{kullanılarak,}$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

olduğu kolayca görülür. Böylece $(D, \oplus)$ ikilisi aynı zamanda
 bir abel grubudur.

$$(II) : \oplus : D \times D \longrightarrow D \text{ iç işlemi'nin özellikleri:}$$

$$H_6 : \oplus : D \times D \longrightarrow D$$

işlemi Tanım I.1.3 de bir iç işlem olarak tanımlandığından ;
 $\oplus$ işlemine göre D cümlesi kapalıdır.

$$H_7 : (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

olduğu Tanım I.1.3 ve Tanım I.1.4 den görülebilir.

$$H_8 : (A \oplus B) \oplus C = A \oplus C \oplus B \oplus C$$

ve

$$H_9 : C \oplus (A \oplus B) = C \oplus A \oplus C \oplus B$$

ifadeleri Tanım I.1.2, Tanım I.1.3 ve Tanım I.1.4 den ispat-
 lanabilir.

O halde $(D, \oplus, \oplus)$ üçlüsü bir halkadır.

$$H_{10} : \forall A, B \in D \text{ için Tanım I.1.3 ve Tanım I.1.4}$$

$$\text{gereğince,}$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

olduğundan $(D, \oplus, \oplus)$ halkası bir değişimli halkadır.

$$H_{11} : \text{İkinci işlem } \odot \text{ için } (1,0) \text{ etkisiz eleman-}$$

$$\text{dır. Gerçekten Tanım I.1.3 den } \forall A \in D \text{ için}$$

$$(1,0) \odot A = A \odot (1,0) = A$$

olur. O halde $(D, \oplus, \odot)$ halkası bir birimli halkadır.

TEOREM I.1.2.

$(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir [1].

İSPAT : $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$ denirse, $(\mathbb{D}^*, \odot)$ ikilisi grup aksiyomlarını sağlamadığı için $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir. Bunu şöyle gösterebiliriz.

$\forall A \in \mathbb{D}$ için,

$$A \odot X = X \odot A = (1, 0)$$

olacak şekilde bir tek $X = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ ters elemanı yoktur. Çünkü bu eleman için Tanım I.1.3 ve Tanım I.1.4 gereğince,

$$A \odot X = (a, a^*) \odot (x, x^*) = (ax, ax^* + a^*x) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow ax = 1, ax^* + a^*x = 0$$

olur. Son denklemlerden x ve x^* çözülürse,

$$x = \left(\frac{1}{a}, \frac{-a^*}{a^2} \right)$$

bulunur.

$$X \odot A = (1, 0)$$

dan da yine,

$$x = \left(\frac{1}{a}, \frac{-a^*}{a^2} \right)$$

elde edilir. Şu halde $X = (x, x^*)$ elemanı A nın ters elemanı olması için $a \neq 0$ olmalıdır. Bu demektir ki, $(0, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanının tersi olan bir eleman yoktur.

O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

TANIM I.1.6. (Sıfır elemanı)

$$A \odot X = A$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya $\mathbb{D}$ nin toplama işlemine göre sıfır denir ve $0 = (0, 0)$ ile gösterilir.

TEOREM I.1.3.

$\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar [1].

İSPAT :

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu,

$$f : (a, 0) \longrightarrow a$$

olarak tanımlayalım. f bir izomorfizmdir.

f : Lineerdir: $A=(a,0)$ ve $B=(b,0) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(A \oplus B) &= f(a+b, 0) = a+b = f(a, 0) + f(b, 0) \\ &= f(A) + f(B) \end{aligned}$$

ve ayrıca,

$$\begin{aligned} f(A \odot B) &= f(a.b, 0) = a.b = f(a, 0) . f(b, 0) \\ &= f(A) . f(B) \end{aligned}$$

dir.

f : Birebirdir : $A=(a,0) \neq B=(b,0)$ ise $f(A) \neq f(B)$ dir.

Gerçekten Tanım I.1.4 gereğince $A \neq B$ demek $a \neq b$ demektir. Bu da $f(A) \neq f(B)$ olduğunu ifade eder.

f : Örtendir : $\forall X \in \mathbb{R}$ reel sayısı bir tek $(X, 0) \in \mathbb{D}$ dual sayısının $f(X, 0)$ resmidir.

TANIM I.1.7.

Teorem I.1.3'ün sonucu olarak $(a, 0)$ dual sayısı, izomorfism olduğu " a " reel sayısı ile gösterilecektir. Yani $(a, 0) = a$ alınacaktır.

TANIM I.1.8.

Bir $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında " a " reel sayısına A nın reel kısmı, " a^* " dual sayısına da A nın dual kısmı denir.

ve

$$\text{Re}(A) = a, \quad \text{Du}(A) = a^*$$

şeklinde yazılır.

TANIM I.1.9.

$(1, 0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir ve,

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

izomorfizminde karşılık geldiği " 1 " reel sayısı ile gösterilir.

TANIM I.1.10.

$(0,1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilecek, yani $(0,1)=\varepsilon$ olarak alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır.

Tanım I.1.3 gereğince de,

$$\varepsilon \otimes \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0)$$

olduğu görülür.

TANIM I.1.11.

$(0,0) \in \mathbb{D}$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin $\otimes$ işlemine göre birim elemanı denir ve,

$$f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

izomorfizminde karşılık geldiği "0" reel sayısı ile gösterilir.

TEOREM I.1.4.

$A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir. Yani $(a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ dır.

İSPAT :

Tanım I.1.2 gereğince $A = (a, a^*)$ için,

$$A = (a, 0) \otimes (0, a^*)$$

yazılabilir. Tanım I.1.3 den de,

$$A = (a, 0) \otimes (0, 1) \otimes (a^*, 0)$$

olur. Tanım I.1.7. ve Tanım I.1.10. gereğince de,

$$A = a + \varepsilon a^*$$

dır. Bundan sonra $\otimes, \otimes$ sembolleri yerine sırasıyla $(+), (\cdot)$ işlemlerini kullanacağız.

TEOREM I.1.5.

$A = (a, a^*)$ bir dual sayı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile A nın çarpımı $\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$ dır.

İSPAT : $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğundan, Teorem I.1.3 gereğince λ reel sayısı $(\lambda, 0)$ dual sayısına izomorftur. Tanım I.1.3 den,

$$\lambda A = (\lambda, 0) \otimes (a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$$

olur.

I.2. DUAL SAYILARLA İLGİLİ TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

$x, x^* \in \mathbb{R}$ reel değişkenler olmak üzere $Z = (x, x^*) = x + \varepsilon x^*$ dual sayısına iki değişkenin bir lineer terkibi olarak bakılabilir.

TANIM I.2.1.

$Z = (x, x^*)$ dual sayılarının bütününe dual düzlem denir ve $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Herbir (x, x^*) ikilisine de dual düzlemin bir dual noktası denir.

TANIM I.2.2.

$Z = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının mutlak değeri diye $|x|$ reel sayısına denir.

$\varepsilon^2 = 0$ olduğundan, $|Z| = |x + \varepsilon x^*| = |x|$ dir.

Bu tanım $\mathbb{D}$ de bir metrik vermez ve $|x + \varepsilon x^*| = 0 \iff x = 0$ dir.

TANIM I.2.3.

$\eta \in \mathbb{R}$ ve $\eta > 0$ olmak üzere bir $(x_0, x_0^*) \in \mathbb{D}$ noktasının η -komşuluğu diye $(x_0 - \eta, x_0 + \eta), (x_0^* - \eta, x_0^* + \eta)$ açık aralıklarının belirttiği kareye denir.

I.3. BİR TEK DUAL DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM I.3.1.

M ve N iki dual nokta cümlesi olsun. $Z = x + \varepsilon x^*$ elamanı bir keyfi dual değişken olmak üzere $\forall Z \in M$ noktasına bir f kuralı ile birtek $W \in N$ dual sayısı karşılık tutulabiliyorsa, bu halde f ye M den N ye bir dual fonksiyon denir ve,

$$f : M \longrightarrow N \text{ veya } Z \longmapsto W = f(Z)$$

şeklinde gösterilir. M ye f nin tanım bölgesi ve N ye de M üzerinde tanımlı olan f nin değer bölgesi denir.

Eğer $W = f(Z)$ ifadesinde $Z = x + \varepsilon x^*$ konumu yapılırsa, ve

$\text{Re}(W) = U(x, x^*), \text{Du}(W) = U^*(x, x^*)$ denirse,

$$f(Z) = U(x, x^*) + \varepsilon U^*(x, x^*)$$

elde edilir. O halde,

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve } U^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

reel iki değişkenli fonksiyonlar olmak üzere,

$$f = U + \varepsilon U^*$$

şeklindedir.

TANIM I.3.2.

f dual fonksiyonu bir G bölgesinde tanımlanmış olsun. Eğer $\forall \eta > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabilir ise, öyle ki, bütün $0 < |h| < \delta$ için,

$$\left| \frac{f(Z_0+h) - f(Z_0)}{h} - f'(Z_0) \right| < \eta$$

olacak şekilde bir $f'(Z_0)$ mevcut ise, bu halde $f, Z_0 \in G$ noktasında diferensiyellenebilirdir denir. $f'(Z_0)$ 'a f nin Z_0 daki türevi denir ve,

$$f'(Z_0) = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{f(Z_0 + \Delta Z) - f(Z_0)}{\Delta Z}$$

şeklinde tanımlanır.

TANIM I.3.3.

Eğer f dual fonksiyonu bir G bölgesinin her noktasında her mertebeden diferensiyellenebilir ise f, G de her mertebeden diferensiyellenebilirdir denir.

I.4. DİFERENSİYELLENEBİLİR DUAL FONKSİYONLARIN KUVVET SERİLERİNE AÇILIMI

TANIM I.4.1.

f nin sıfırıncı mertebeden türevi $f^{(0)}$ ile gösterilir ise,

$$f^{(0)}(Z_0) = f(Z_0), \quad Z_0 \in D$$

dir.

TANIM I.4.2.

$$f(Z) = f(Z_0) + \frac{(Z-Z_0)}{1!} f'(Z_0) + \frac{(Z-Z_0)^2}{2!} f''(Z_0) + \dots +$$

$$\frac{(Z-Z_0)^n}{n!} f^{(n)}(Z_0) + \dots$$

serisine f dual değişkenli fonksiyonunun $Z, \in G$ noktasındaki TAYLOR AÇILIMI denir.

Tanım I.4.3. gereğince f dual değişkenli fonksiyonunun $Z_0 = 0$ noktasındaki Taylor Açılımı kolayca şu şekilde bulunabilir.

$$f(Z) = f(0) + \frac{Z}{1!} f'(0) + \frac{Z^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{Z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

veya

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon x^*) &= f(0) + \frac{x + \varepsilon x^*}{1!} f'(0) + \frac{x^2 + 2\varepsilon x x^*}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n + n\varepsilon x^{n-1} x^*}{n!} f^{(n)}(0) \\ &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \\ &\quad + \varepsilon x^* \left[f'(0) + \frac{x}{1!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n+1)}(0) + \dots \right] \end{aligned}$$

$f'(Z) = F(Z)$ denirse, $f^{(p)} = F^{(p-1)}$ olacağından,

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon x^*) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \\ &\quad + \varepsilon x^* \left[F(0) + \frac{x}{1!} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(0) + \dots \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada birinci kısım $f(x)$ in $x = 0$ daki Taylor Açılımı olarak ve ikinci kısım da $f'(x)$ in $x = 0$ daki Taylor açılımı olarak düşünülebilir. Buna göre son ifade,

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x) \quad (I.4.1)$$

şeklini alır.

Gerçekten $f(x + \varepsilon x^*) = \cos(x + \varepsilon x^*)$, $\sin(x + \varepsilon x^*)$, $\text{tg}(x + \varepsilon x^*)$ dual değişkenli fonksiyonları alınırsa, bu fonksiyonların $0 = (0, 0)$ dual noktasındaki Taylor Açılımlarından:

$$\sin(x + \varepsilon x^*) = \sin x + \varepsilon x^* \cos x \quad (I.4.2)$$

$$\cos(x + \varepsilon x^*) = \cos x - \varepsilon x^* \sin x \quad (I.4.3)$$

$$\text{tg}(x + \varepsilon x^*) = \text{tg} x + \varepsilon x^* (1 + \text{tg}^2 x) \quad (I.4.4)$$

olarak elde edilirler.

BÖLÜM.II

DUAL VEKTÖR UZAYI

II.1. $\mathbb{D}$ -MODÜL

TANIM II.1.1.

Birimi 1 olan değişimli bir halka H olsun. H üzerinde bir modül diye bir $(\mathcal{G}, +)$ abel grubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan bir,

$$\begin{aligned} \odot : H \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (b, \alpha) &\longrightarrow b\alpha \end{aligned}$$

dış işlemiyle oluşan $(\mathcal{G}, +, \odot)$ yapısına denir[1].

$b, c \in H$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ olmak üzere,

$$M_1 : b(\alpha + \beta) = b\alpha + b\beta$$

$$M_2 : (b+c)\alpha = b\alpha + c\alpha$$

$$M_3 : (bc)\alpha = b(c\alpha)$$

$$M_4 : 1\alpha = \alpha.$$

$\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3$ bir modüldür. $\mathbb{D}$ nin birimi $(1,0)=1$ olan değişimli bir halka olduğu Teorem I.1.1. de gösterilmişti. $\mathbb{D}^3$ ün $\mathbb{D}$ üzerinde bir modül olduğunu göstermek için önce $(\mathbb{D}^3, +)$ nin bir abel grubu olduğu sonra da $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$ dış işleminin M_1, M_2, M_3 ve M_4 aksiyomlarını sağladığı gösterilmelidir.

$$\mathbb{D}^3 = \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}\}$$

cümlesinin herbir elemanı bir büyük harf ile gösterilirse, $A \in \mathbb{D}^3$,

$$A = (A_1, A_2, A_3) \text{ veya } A = (A_i), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

notasyonlarından biri ile gösterilebilir.

TANIM II.1.2.

$A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ için $A = B \Leftrightarrow A_i = B_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$

TANIM II.1.3.

$A = (A_i)$, $B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ için, $1 \leq i \leq 3$,

$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

iç işlemi A ile B ye,

$$A+B = (A_i+B_i)$$

üçlüsünü karşılık tutsun. $A+B$ ye $\mathbb{D}^3$ de A ile B nin toplamı denir.

TANIM II.1.4.

$\lambda \in \mathbb{D}$ ve $A \in \mathbb{D}^3$ için, $1 \leq i \leq 3$

$$\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

dış işlemi A ya,

$$\lambda A = (\lambda A_i)$$

üçlüsünü karşılık tutsun. λA ya A nın λ skaları ile çarpımı denir.

TEOREM II.1.1.

$(\mathbb{D}^3, +)$ bir abel grubudur [1] .

İSPAT :

$G_1 : A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.3. den $A+B \in \mathbb{D}^3$ dür.

$G_2 : A, B, C \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.3 ve (H_2) den,

$$A+(B+C) = (A+B)+C$$

dir.

$G_3 : 0 = (0,0,0) \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.3 ve (H_3) den,

$$A+0 = 0+A$$

dir.

$0 = (0,0,0)$ elemanı $(+)$ işlemine göre $\mathbb{D}^3$ deki birim elemandır.

$G_4 : \forall A \in \mathbb{D}^3$ için,

$$A+X = X+A = 0$$

olacak şekilde birtek,

$$X = -A = (-A_i) \in \mathbb{D}^3 , \quad 1 \leq i \leq 3$$

elemanı vardır. $-A$, $(+)$ işlemine göre A nın tersidir.

$G_5 : \forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.3 gereğince,

$$A+B = B+A$$

dır. Şu halde $(\mathbb{D}^3, +)$ bir abel grubudur.

TEOREM II.1.2.

$(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ sistemi $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür [1] .

İSPAT :

$(\mathbb{D}^3, +)$ nın bir abel grubu olduğu Teorem II.1.1 den ve $\mathbb{D}$ nin birimi 1 olan değişimli bir halka olduğu da Teorem I.1.1. den bilinmektedir.

Şimdi Tanım II.1.4 de verilen skalar ile çarpım dış işleminin Tanım II.1.1. de adı geçen M_1, M_2, M_3 ve M_4 aksiyomlarını sağladığı gösterilecek:

$M_1 : \forall \alpha \in \mathbb{D}$ ve $\forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.4 den ,

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

dir.

$M_2 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}$ ve $\forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.4 den,

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

dir.

$M_3 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}$ ve $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için Tanım II.1.4 den,

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

dir.

$M_4 : (1, 0) \in \mathbb{D}$ elemanının $\mathbb{R}$ deki izomorfı 1 olmak üzere Tanım II.1.4. ve (H_6) dan $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için,

$$1 A = A$$

dir.

Bundan sonra $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modül " $\mathbb{D}$ -Modül" olarak adlandırılacaktır.

II.2. DUAL VEKTÖRLER

TANIM II.2.1.

$\mathbb{D}$ -Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir.

TEOREM II.2.1.

$\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ (üç boyutlu reel vektör uzayı) olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modülde her bir $\vec{A}$ dual vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \quad \varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazılabilir.

İSPAT :

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) , \quad A_i = a_i + \varepsilon a_i^* , \quad 1 \leq i \leq 3$$

olduğundan,

$$\vec{A} = (a_1 + \varepsilon a_1^* , a_2 + \varepsilon a_2^* , a_3 + \varepsilon a_3^*)$$

veya Tanım II.1.3 ve Tanım II.1.4 den,

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*)$$

şeklinde yazılabilir. $a_i, \vec{a}_i^* \in \mathbb{R}$, olduğundan,

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{a}^* = (\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{a}_3^*)$$

alınabilir ve dolayısıyla,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

olur.

TEOREM II.2.2.

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayı $\mathbb{D}$ -Modülün, elemanları $(\vec{a}, \vec{0})$ şeklinde olan, bir alt cümlesine izomorftur [1] .

İSPAT :

Bir $f : \mathbb{D}\text{-Modül} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

fonsiyonu,

$$f(\vec{a}, \vec{0}) = \vec{a}$$

olarak tanımlansın. f nin bir lineer izomorfizm olduğu gösterilecektir.

$f : \text{Lineerdir}$: $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0})$, $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{0})$ $\mathbb{D}$ -Modül olmak üzere,

$$f(\vec{A} + \vec{B}) = f(\vec{a} + \vec{b}, \vec{0}) = \vec{a} + \vec{b}$$

$$= f(\vec{a}, \vec{0}) + f(\vec{b}, \vec{0})$$

$$f(\vec{A} + \vec{B}) = f(\vec{A}) + f(\vec{B})$$

dir. $\lambda \in \mathbb{D}$ ve $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0}) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için,

$$f(\lambda \vec{A}) = f(\lambda \vec{a}, \vec{0}) = \lambda \vec{a}$$

$$f(\lambda \vec{A}) = \lambda f(\vec{A})$$

dır.

f : Birebirdir : $\vec{A} = (\vec{a}, \vec{0}) \neq \vec{B} = (\vec{b}, \vec{0})$ ise, $\vec{a} \neq \vec{b}$ dir. Bu da,

$$f(\vec{a}, \vec{0}) \neq f(\vec{b}, \vec{0})$$

veya

$$f(\vec{A}) \neq f(\vec{B})$$

demektir.

f : Örtendir : $\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^3$ reel vektörü, birtek $\vec{X} = (\vec{X}, \vec{0}) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ dual vektörünün $f(\vec{X}, \vec{0})$ resmidir.

Bunun bir sonucu olarak diyebiliriz ki $\mathbb{D}\text{-Modül}$ $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayından daha genişdir.

TANIM II.2.2.

$(\vec{0}, \vec{0}) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$, dual vektörüne sıfır dual vektörü denir ve Teorem II.2.2 de verilen f izomorfizminde karşılık geldiği $\vec{0}$ reel vektörü ile gösterilir.

II.3. $\mathbb{D}\text{-MODÜL}$ ÜZERİNDE İÇ ÇARPIM

TANIM II.3.1.

$\vec{A} = (\vec{a} + \epsilon \vec{a}^*)$, $\vec{B} = (\vec{b} + \epsilon \vec{b}^*) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ dual vektörlerinin iç çarpımı,

$$f: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir 2-líneer dönüşümdür ve,

$$f(\vec{A}, \vec{B}) = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$$

olarak gösterilir.

Tıpkı bir vektör uzayı üzerinde olduğu gibi iç çarpım aksiyomlarını $\mathbb{D}\text{-Modül}$ üzerinde de kabul edebiliriz. Bu aksiyomlar şunlardır :

$$I_1 : \forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}\text{-Modül için},$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle \quad (\text{Değişme özeliği})$$

- $I_2 : \forall \vec{A}, \vec{B} \in D\text{-Modül ve } \alpha \in D \text{ için,}$
 $\langle \alpha \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \alpha \vec{B} \rangle = \alpha \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ (Skaler ile çarpımın bileşme özeliği)
- $I_3 : \forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in D\text{-Modül için,}$
 $\left. \begin{aligned} \langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle &= \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \\ \langle \vec{A}, \vec{B} + \vec{C} \rangle &= \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \end{aligned} \right\}$ (Dağılma özeliği)
- $I_4 : \forall \vec{A} \in D\text{-Modül için,}$
 $\vec{A} = \vec{0}$ ise $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \vec{0}$ dır.

Buradan,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \epsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \epsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$$

olduğu gösterilebilir.

II.4. DUAL VEKTÖRLERİN NÖRMLANMASI

TANIM II.4.1.

Bir $\vec{A} = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu diye,

$$\|\vec{A}\| = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle^{1/2} = \left(\|\vec{a}\|, \epsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq \vec{0},$$

dual sayısına denir.

Bundan sonra bu dual sayı,

$$a = \|\vec{a}\| \text{ ve } a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere,

$$\|\vec{A}\| = a + \epsilon a^*$$

olarak yazılacak.

TANIM II.4.2.

Normu reel birime karşılık gelen ve $(1,0)$ dual sayısı olan dual vektöre birim dual vektör denir.

TEOREM II.4.1.

$\vec{A} = \vec{a} + \epsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör ise,

$$\|\vec{a}\| = 1, \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır.

İSPAT :

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

$$a + \epsilon a^* = (1,0)$$

$$a = 1, a^* = 0$$

$$\|\vec{a}\| = 1, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} = 0 \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0.$$

II.5. E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ

TANIM II.5.1.

$K = \{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* : \|\vec{X}\| = (1,0) ; \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \}$ cümlesine $\mathbb{D}$ -Modülde birim dual küre denir.

Birim dual küre için:

1. Yarıçapı 1 dir,
2. Alanı $4\pi \cdot 1^2 = 4\pi \approx 4\pi + \varepsilon 0$,
3. Üzerindeki yayların uzunlukları dual sayılardır,
4. Üzerindeki kapalı eğrilerin sınırladığı alanlar, yüz ölçümleri dual sayılardır,

dir.

TEOREM II.5.1. (E.Study)

$\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere, $\mathbb{D}$ -Modülde denklemi,
 $\|\vec{A}\| = (1,0)$

olan birim dual kürenin dual noktaları, 3-boyutlu öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [2].

Teorem II.5.1. den bilindiğine göre $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörü $\mathbb{R}^3$ de birtek yönlü doğru belirtmektedir. $\vec{a}$ reel birim vektörü bu doğrunun yönünü, $\vec{a}^*$ ise 0 başlangıç noktasına göre $\vec{a}$ birim vektörünün vektörel momentini ifade etmektedir.

TANIM II.5.2.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}$ -Modülde has dual vektörler ise,

$$\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in \mathbb{D} \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

olmak üzere,

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0}$$

eşitliği ancak $\forall \lambda_i = 0$ için sağlanıyorsa, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ has dual vektörleri lineer bağımsızdır denir.

TANIM II.5.3.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}$ -Modül ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in \mathbb{D}$, $c_i^* \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$ için,

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0}$$

eşitliği enaz bir $\lambda_i \neq 0$ için sağlanıyorsa, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ dual vektörleri lineer bağımlıdır denir.

II.6. DUAL AÇI

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki birim dual vektör olsunlar. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin Tanım II.3.1. ile verilen,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \epsilon \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$$

iç çarpımını inceleyelim. Teorem II.5.1. gereğince $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü doğru belirtirler. Bu doğrular, sırası ile, d_1 ve d_2 olsun. d_1 in yönü $\vec{a}$, yeri $\vec{a}^*$ ve d_2 nin yönü $\vec{b}$, yeri de $\vec{b}^*$ ile belli olduklarından $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı φ ise,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \epsilon \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$$

iç çarpımının reel kısmı,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, \varphi \in \mathbb{R})$$

dır.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörler olduklarından,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi, \quad \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle = -\varphi^* \sin \varphi,$$

şeklinde de gösterilebilir. Burada φ ve φ^* $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları arasındaki açı ve en kısa uzaklığı gösterir [3]. Bunları gözönünde bulundurarak şu teoremi verebiliriz:

TEOREM II.6.1.

$\vec{A}$ ile $\vec{B}$ doğruları arasındaki açı ve en kısa uzaklık sırası ile, φ ve φ^* ise,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \vartheta$$

dir, burada $\vartheta = \varphi + \epsilon \varphi^*$ iki dual vektör arasındaki dual açıyı göstermektedir [4].

İç çarpımın aşağıdaki özel durumları önemlidir :

1. Eğer $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0$ ise, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$.

Bunun anlamı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları dik açı altında kesişirler,

2. Eğer $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{hep dual}$ ise ; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* \neq 0$. Bu halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdırlar,

3. Eğer $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{hep reel}$ ise ; $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, $\varphi^* = 0$ ve iki doğru kesişir. Kesişme şartı da $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b}^* \rangle = 0$ dır,

4. $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = +1$ ise ; $\varphi = 0$; yani yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdürler.

Eğer, aynı zamanda $\varphi^* = 0$ ise, iki doğru çakışiktır. Görüldüğü gibi $\emptyset$ dual açısı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ deki temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki φ açısı ile bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık olan φ^* dan oluşmaktadır.

$\vec{OA} = \vec{A}$ ve $\vec{OB} = \vec{B}$ birim dual vektörlerinin uçları D-Mo-dülde O merkezli birim dual kürenin A ve B noktalarını belirteceğinden, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki $\emptyset = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual açısı, A ve B dual noktalarından geçen dual büyük dairenin $\widehat{AB}$ dual yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

TANIM II.6.1.

$\emptyset = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir.

TANIM II.6.2.

Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine dual matris denir ve,

$$A = [A_{ij}] ; A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^* ,$$

şeklinde gösterilir.

Reel matrisler için geçerli olan bütün işlemler regüler dual matrisler için de geçerlidir.

$\mathbb{D}^3$ deki birim dual kürenin dual noktaları $\mathbb{R}^3$ deki yönlendirilmiş doğrulara birebir karşılık gelirler. Öyleki, dual küre üzerindeki herhangi bir dual nokta,

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) , X_i = x_i + x_i^* , 1 \leq i \leq 3 ,$$

olup, $\mathbb{R}^3$ de bir doğruya karşılık gelir. Birim dual küre üzerinde farklı iki dual nokta $\mathbb{R}^3$ de farklı iki doğru belirtir [5] .

K birim dual küresi üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri (reel t parametresinin fonksiyonu olarak) $\vec{X}$ birim dual vektörü ile gösterilirse,

$$\vec{X} = \vec{X}(t) , \quad \|\vec{X}\| = 1$$

dir. Bu da $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey belirtir.

TANIM II.6.3.

E. Study dönüşümüne uyan ve reel bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki $\vec{X}$ doğrularının cümlesine regle yüzey denir [2] .

Bir regle yüzey, bir parametreye bağlı $\vec{X} = \vec{X}(t)$ bir birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere,

$$\vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$$

şeklinde yazılabilir.

$\vec{X} : t \rightarrow \vec{X}(t)$ fonksiyonunun t ye göre istenildiği kadar türetilmediği kabul ediliyor.

$$\vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$$

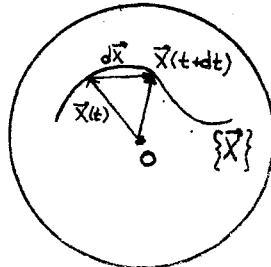
birim dual vektörüne,

$$\|\vec{X}\| = \|\vec{OX}\| = 1$$

birim dual küresi üzerinde bir dual X noktası karşılık gelir. Biliniyor ki, bu noktaya da $\mathbb{R}^3$ de bir $\vec{X}$ yönlü doğrusu/ karşılık gelir. t parametresi değiştikçe,

$$\vec{OX}(t) = \vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$$

birim dual vektörü, birim dual küre üzerinde bir $\{\vec{X}\}$ dual eğrisi çizer, Şekil II.6.1.



Şekil II.6.1.

Bu eğriye ise, $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir.

$\{\vec{X}\}$ dual eğrisine regle yüzeyin dual küresel resmi denir.

Dayanak eğrisi $\vec{m} : t \longrightarrow \vec{m}(t)$ denklemi ile belli olan (C) eğrisi ve ana doğruları $\vec{X}(t)$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi, dual vektörel notasyon ile,

$$\vec{y}(t, v) = \vec{m}(t) + v \cdot \vec{X}(t)$$

dir. Burada,

$$\vec{x}^* = \vec{m} \wedge \vec{x} \quad , \quad \vec{x} \wedge \vec{x}^* = \vec{m} - \langle \vec{m}, \vec{x} \rangle \vec{x}$$

olduklarından, regle yüzeyin denklemi,

$$u = v + \langle \vec{m}, \vec{x} \rangle$$

olmak üzere,

$$\vec{y}(t, u) = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + u \vec{x}(t)$$

şeklinde de yazılabilir.

TEOREM II.6.2.

$\|\vec{OA}\| = 1$ birim dual küresinin dual dönmelerine çizgiler uzayında öklidiyen hareketler karşılık gelir. Bu - nun tersi de caridir [6] .

Çünkü uzayın öklidiyen hareketleri öyle sürekli transformasyonlar grubu ile karakterize edilebilirler ki, bu transformasyonlar altında iki doğrunun dual açısı, yani en kısa uzaklık ve adi açı sabit kalır.

Dual küresel harekette bir dual noktanın çizdiği kapalı dual eğriye karşılık gelen regle yüzey bir kapalı regle yüzeydir [7] .

TEOREM II.6.3.

$\mathbb{R}^3$ reel öklid uzayındaki bir hareket $\mathbb{D}^3$ dual uzayındaki dual ortogonal 3×3 tipindeki bir $[A] = A_{ij}$ matrisiyle ifade edilir, burada $AA^T = A^T A = I$, A_{ij} dual sayılar ve I da 3×3 tipinde birim matristir.

Tersine, küre üzerindeki dual dönmeye karşılık gelen 3×3 tipindeki $A(t)$ dual matrisleri $\mathbb{R}^3$ çizgiler uzayındaki hareketlere tekabül ederler.

3x3 tipindeki pozitif dual ortogonal A matrislerinin genel lineer grubunun $L(O_{D3})$ Lie cebiri ; 3x3 tipindeki antisimetrik,

$$\Omega = dAA^T = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II.6.1})$$

dual matrislerin cebiridir [3 , pp.106-108] .

Burada dA reel t parametresine göre A nin diferensiye-
lidir.

Birim dual küre üzerindeki hareketli bir X noktasının dual diferensiyel hız vektörü, reel küreseldekine benzer ola-
rak,

$d_f \vec{X} = \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$ dir [8] ; burada $\vec{\Psi} = \vec{\psi} + \varepsilon \vec{\psi}^*$ dual birim küre üzerindeki hareketin ani dual pfaff vektörüdür. Bu dual pfaff vektörü ise,

$$\vec{\Psi} = \gamma_1 \vec{E}_1 + \gamma_2 \vec{E}_2 + \gamma_3 \vec{E}_3 \quad (\text{II.6.2})$$

şeklinde yazılabilir [9] . $([\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3])$ ortonormal bir baz sistemidir).

II.7. DUAL STEINER VEKTÖRÜ VE STEINER DOĞRUSU

TANIM II.7.1.

Dual birim küre üzerindeki bir yörünge $\{X\}$ olsun,

$$\vec{V} = \vec{v} + \varepsilon \vec{v}^* = \phi \psi \vec{P}, \psi = \|\vec{\Psi}\|, \quad (\text{II.7.1})$$

vektörüne, dual küre üzerindeki $\{X\}$ yörüngesinin ani dual küresel dönme merkezindeki dual steiner vektörü denir [7] :

Farzedelim ki, dual kürenin dual ortonormal bazı, $[\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3]$ olsun. Bu takdirde (II.7.1) şu şekle indirgenir;

$$\vec{V} = \phi \sum_{i=1}^3 \psi_{P_i} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^3 (\phi \psi_{P_i}) \vec{E}_i .$$

$\vec{V}$ nin elemanları ise,

$$V_i = v_i + \varepsilon v_i^* = \phi \psi_{P_i} = \phi \psi_i = \phi \gamma_i + \varepsilon \phi \gamma_i^*, \quad 1 \leq i \leq 3 ,$$

dir.

$\vec{V}$ nin reel ve dual kısımları,

$$\vec{v} = \oint \vec{\psi}, \quad \vec{v}^* = \oint \vec{\psi}^* \quad (\text{II.7.2})$$

dır.

Böylece $\vec{v}$ Steiner vektörü şu şekilde de yazılabilir;

$$\vec{v} = \oint \gamma_1 \vec{E}_1 + \oint \gamma_2 \vec{E}_2 + \oint \gamma_3 \vec{E}_3. \quad (\text{II.7.3})$$

Buradaki kapalı integral $\oint$, kapalı eğri $\{X\}$ boyunca -
dır.

TANIM II.7.2.

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \epsilon \vec{v}_0^* = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \epsilon \frac{\vec{v}^* - \lambda \vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \quad \lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}^* \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$$

birim dual vektörüne tekabül eden doğruya hareketli
uzayın Steiner doğrusu denir.

$\vec{v}$ dual Steiner vektörü kullanılarak şu teorem verilir

[7].

TEOREM II.7.1.

Birim dual küre üzerindeki bir $\{X\}$ kapalı dual yörünge-
sinin F_X küresel alanı ;

$$F_X = 2\pi(1-n) - \langle \vec{v}, \vec{X} \rangle$$

dir. Buradaki n reel sayısı X noktasında P merkezinin
dönme sayısıdır.

II.8. ÇİZGİLER UZAYINDA KAPALI BİR REGLE YÜZEYİN AÇILIM UZUNLUĞU (Öffnungsstrecke)

Çizgiler uzayında bir parametrelili kapalı bir hareket es-
nasında tespit edilen bir doğru kapalı bir regle yüzey çizer
[8]. Ana doğruları $\vec{X}$ doğruları olan bir regle yüzey (X)
şeklinde gösterilsin. Bu ana doğrulardan biri bir G noktası ve
yönlendirilmiş bir $\vec{X}$ birim vektörüyle belirtilebilir. $\vec{X}$ ana
doğrusu üzerinde G den farklı bir Y noktası tesbit edilirse $\vec{OY}$
vektörü,

$$\vec{OY} = \vec{Y} = \vec{g} + \mu \vec{X} \quad (\text{II.8.1})$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{Y}, Y$ noktasının, $\vec{g}$ de G noktasının
yer vektörleridir.

Y noktasını hareketli uzayda öyle seçelim ki, Y noktası-

nin uzay hareketinde çizdiği yörünge(X) regle yüzeyinin $\vec{X}$ ana doğrularının herbirine dik olsun. O zaman,

$$\langle \vec{x}, d_f \vec{y} \rangle = 0 \quad (\text{II.8.2})$$

olur, burada $d_f \vec{y}, \vec{y}$ nin diferensiyel hız vektörüdür. (II.8.1) den dolayı,

$$d_f \vec{y} = d_f \vec{g} + d\mu \vec{x} + \mu d_f \vec{x}$$

dır. Böylece (II.8.2) yi şu şekilde yazabiliriz ;

$$\langle \vec{x}, d_f \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, d_f \vec{g} \rangle + d\mu = 0 \quad (\text{II.8.3})$$

Buradan çizgiler uzayındaki (X) kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu,

$$L_x = \oint \langle \vec{x}, d_f \vec{g} \rangle \quad (\text{II.8.4})$$

dır [10] .

$\vec{g}$ nin diferensiyel hız vektörü olan $d_f \vec{g}$ şöyle de yazılabilir [7] ;

$$d_f \vec{g} = \vec{\psi}^* + \vec{\psi} \wedge \vec{g} \quad ; \quad (\text{II.8.5})$$

burada $\wedge$ işlemi vektörel çarpma işlemini göstermektedir.

$\vec{\psi} = \vec{\psi} + \epsilon \vec{\psi}^*$ vektörü dual küre üzerindeki hareketin ani dual pfaff vektörüdür.

(II.8.5), (II.8.4) de yerine konursa,

$$L_x = \oint \langle \vec{x}, \vec{\psi}^* \rangle + \oint \langle \vec{x}, (\vec{\psi} \wedge \vec{g}) \rangle \quad (\text{II.8.6})$$

olur.

Orijine göre $\vec{x}$ in moment vektörü $\vec{x}^*$ ile gösterildiğine göre,

$$\vec{x}^* = \vec{g} \wedge \vec{x}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman (II.8.6) ifadesi şöyle olur ;

$$L_x = \oint \langle \vec{x}, \vec{\psi}^* \rangle + \oint \langle \vec{\psi}, \vec{x}^* \rangle \quad (\text{II.8.7})$$

$\vec{x}$ in koordinatları uzaydaki hareketten bağımsız olduklarından (II.8.7) den,

$$L_x = \langle \vec{x}, \oint \vec{\psi}^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \oint \vec{\psi} \rangle \quad (\text{II.8.8})$$

elde edilir.

(II.7.2), (II.8.8) de yerine konursa;

$$L_x = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{v} \rangle \quad (\text{II.8.9})$$

bulunur.

II.9. ÇİZGİLER UZAYINDA KAPALI BİR REGLE YÜZEYİN AÇILIM AÇISI (Öffnungswinkel)

Ana doğruları $\vec{X}$ doğruları olan bir kapalı regle yüzeyin açılım açısını Hoschek şöyle tanımlamıştır [11] .

Yönü $\vec{X}$ birim vektörüyle belli olan $\vec{X}$ ana doğrusunun çizmiş olduğu kapalı regle yüzeyin açılım açısı,

$$\lambda_x = -\langle \vec{X}, \vec{V} \rangle$$

dır; burada $\vec{V}, \vec{V} = \oint \gamma_1 \vec{E}_1 + \oint \gamma_2 \vec{E}_2 + \oint \gamma_3 \vec{E}_3$ şeklindeki hareketin Steiner vektörüdür.

II.10. KAPALI UZAY EĞRİLERİ VE KAPALI KÜRESEL EĞRİLER İÇİN JACOBI TEOREMLERİ

Kapalı uzay eğrilerinin Frenet ayaklarının küresel göstergelerinin geometrisi çok eski zamanlara kadar uzanan bir meraka konu olmuşlardır. Bunlardan küresel kapalı eğrilerin teğetler göstergesiyle ilgili olan Jacobi Teoremi ilk teoremlerden biridir.

TEOREM II.10.1.

Her kapalı reel küresel eğrinin teğetler göstergesi birim küre yüzeyini iki eşit parçaya ayırır [12] .

İSPAT :

(C) kapalı küresel eğrisini çizen noktanın yer vektörü $\vec{k}$, ait olduğu kürenin yarıçapı R, kürenin dışına yönelmiş birim normal vektörü $\vec{e}_1$ ve başlangıç noktası da kürenin merkezi olduğunu farzedelim. Bu takdirde,

$$\vec{k} = R\vec{e}_1$$

dir ve (C) eğrisinin teğet birim vektörünü $\vec{e}_2$ ile göstermek üzere, s bu eğrinin yay uzunluğu olmak şartıyla,

$$\frac{d\vec{k}}{ds} = R \frac{d\vec{e}_1}{ds} = R\vec{e}_2 \quad (\text{II.10.1})$$

dir.

$$ds_1 = \frac{ds}{R}$$

şeklinde tanımlanan küresel yay uzunluğu göz önünde bulundurularak, (II.10.1) şöyle yazılabilir ;

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds_1} = \vec{e}_2$$

$\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörlerini pozitif olarak yönlendirilmiş bir dik üçyüzlüye tamamlayan,

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

birim vektörü göz önüne alınırsa,

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds_1} = -\vec{e}_1 + \sigma \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_3}{ds_1} = -\sigma \vec{e}_2$$

elde edilir. Bu formülde gözüken σ küresel eğriliği (C) eğrisinin jeodezik eğriliğine,

$$\mathcal{G}_g = \left[\frac{d\vec{k}}{ds}, \frac{d^2\vec{k}}{ds^2}, \vec{e}_1 \right] = \frac{\sigma}{R}$$

bağıntısı ile bağlıdır.

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_1^{(1)}$$

farzedilirse, G_1 teğetler göstergesi $\vec{e}_1^{(1)}$ tarafından çizilmiş olur. Bu eğri de küresel olduğundan,

$$\frac{d\vec{e}_1^{(1)}}{ds_1^{(1)}} = \vec{e}_2^{(u)}$$

$$\frac{d\vec{e}_2^{(1)}}{ds_1^{(1)}} = -\vec{e}_1^{(1)} + \sigma^{(1)} \vec{e}_3^{(1)}$$

$$\frac{d\vec{e}_3^{(1)}}{ds_1^{(1)}} = -\sigma^{(1)} \vec{e}_2^{(1)}$$

bulunur ve burada,

$$ds_1^{(1)} = (1 + \sigma^2)^{1/2} ds_1, \quad \sigma^{(1)} = (1 + \sigma^2)^{-3/2} \frac{d\sigma}{ds_1}$$

dır. G_1 eğrisini taşıyan küre birim küre olduğundan, G_1 in jeodezik eğriliği $\mathcal{G}_g^{(1)} = \sigma^{(1)}$ ve yay uzunluğu elemanı $ds_1^{(1)} = ds^{(1)}$ dir.

Birim kürenin her noktasında Gauss eğriliğinin 1 e eşit olduğu göz önünde bulundurularak, Gauss-Bonnet formülü;

$$\iint_{\Omega} da + \oint_{\partial\Omega \in G_1} g^{(1)} ds^{(1)} = 2\pi$$

nü tatbik edecek olursak,

$$\iint_{\Omega} da = 2\pi - \oint_{(G_1)} \sigma^{(1)} ds_1^{(1)}$$

bulunur. Halbuki,

$$\oint_{(G_1)} \sigma^{(1)} ds_1^{(1)} = \oint_{(C)} \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} = [\arctg \sigma]_{(C)}$$

dır ve küre üzerine çizilen bir kapalı eğri için ancak,

$$[\arctg \sigma]_{(C)} = n\pi$$

bulunabilir.

Süreklilikle ilgili nedenlerden dolayı n tam sayısının ancak sifıra eşit olabileceği ve,

$$\iint da = 2\pi$$

olacağı neticesine varılır.

Jacobi'nin diğer bir teoremi şudur :

TEOREM II.10.2.

Kapalı bir eğrinin asal normallerinin küresel göstergesi birim küre yüzeyini iki eşit parçaya ayırır [6,s.61.

Jacobi Teoremlerinin bir sonucunu Fenchel [13] ve Avakumovic [14] vermiştir:

TEOREM II.10.3.

Bir kapalı küresel eğrinin diğer bir uzay eğrisinin asal normaller göstergesi olabilmesi için gerek ve yeter şart, küresel eğrinin küre yüzeyini iki eşit parçaya ayırmasıdır.

Kapalı uzay eğrilerine ait olan Teorem II.10.2 kapalı küresel eğriler için de geçerli olacağından, aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

TEOREM II.10.4.

Bir kapalı küresel eğrinin asal normaller göstergesi birim küre yüzeyini iki eşit parçaya ayırır.

Kapalı küresel eğrilere ait aynı özelliğe sahip olan başka göstergeler de var mıdır sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremle verilebilir:

TEOREM II.10.5.

Bir kapalı reel küresel eğrinin oskulator düzleminde yata ve eğriye sıkı sıkıya bağlı olan her vektörün küresel göstergesi birim küre yüzeyini iki eşit parçaya ayırır.

İspat için Dr. Atıf İPEKÇİOĞLU'nun bir seminerinde kullandığı yolu izleyelim:

İSPAT :

Birim küre üzerine çizilmiş bir (C) kapalı eğrisinin sınırladığı alan f_C ile gösterilirse, Gauss-Bonnet Teoremine göre,

$$f_C = 2\pi - \oint_{(C)} \varphi_C ds$$

dir [15] . Burada φ_C ile (C) eğrisinin jeodezik eğriliği ve s ile de (C) nin yay-parametresi gösterilmektedir. Diğer taraftan (C) nin bir noktasının yer vektörü $\vec{y}$ olduğuna göre,

$$\varphi_C = (\vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'') , \quad \vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{ds} ,$$

olarak yazılabilir [15 , pp.128] .

Buna göre,

$$f_C = 2\pi - \oint_{(C)} (\vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'') ds$$

olur.

(C), bir kapalı küresel eğri olarak $K(s)$, $\tau(s)$ invariantları ile verilmiş olsun. Bu eğrinin Frenet vektörleri $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ise ; bu eğriye sıkı sıkıya bağlı bir $\vec{Z}$ birim vektörünün küresel göstergesi α, β, γ skalerleri, bu eğrinin yay parametresi olan s nin fonksiyonları olmak ve,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

şartını sağlamak üzere,

$$\vec{Z} = \vec{Z}(s_1) = \alpha \vec{T} + \beta \vec{N} + \gamma \vec{B} \quad (\text{II.10.1})$$

ile verilsin. Yapacağımız iş, birim küre üzerinde $\vec{Z}$ tarafından çizilen ve yay parametresi s_1 olan (C_1) eğrisinin hangi şartlarda, birim küre yüzeyini iki eşit parçaya ayıracağını belirtmekten ibarettir.

Bunun için (C_1) eğrisinin Jeodezik eğriliğinin hangi α, β, γ takımları için sıfır edeceğini araştırmamız gerekir. (II.10.1) den,

$$p = \dot{\alpha} - \beta K; \quad q = \dot{\beta} + \alpha K - \gamma \tau \quad r = \dot{\gamma} + \beta \tau \quad (\text{II.10.2})$$

olmak üzere,

$$p^2 + q^2 + r^2 = \Delta^2$$

ile gösterildiğinde,

$$ds_1 = \Delta ds \quad (\text{II.10.3})$$

olacak ve

$$\vec{Z} = \alpha \vec{T} + \beta \vec{N} + \gamma \vec{B} \quad (\text{II.10.4})$$

$$\vec{Z}' = p \vec{T} + q \vec{N} + r \vec{B}$$

$$\vec{Z}'' = (\dot{p} - qK) \vec{T} + (\dot{q} + pK - r\tau) \vec{N} + (\dot{r} + q\tau) \vec{B}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $(\dot{}) = \frac{d}{ds}$.

$\vec{Z}, \vec{Z}'$ iç çarpımı hesaplanırsa,

$$\langle \vec{Z}, \vec{Z}' \rangle = \alpha p + \beta q + \gamma r = 0 \quad (\text{II.10.5})$$

olarak bulunur. (II.10.3) gözönüne alınarak,

$$\vec{Z}' = \frac{d\vec{Z}}{ds} = \frac{d\vec{Z}}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds}$$

$$\vec{Z}' = \vec{Z}_{s_1} \Delta; \quad \vec{Z}'' = \vec{Z}_{s_1 s_1} \Delta^2 + \vec{Z}_{s_1} \dot{\Delta} \quad (\text{II.10.6})$$

olacağından, (C_1) eğrisinin jeodezik eğriliği,

$$(\vec{Z}, \vec{Z}', \vec{Z}'') = (\vec{Z}, \vec{Z}_{s_1}, \vec{Z}_{s_1 s_1}) \Delta^3 = \oint_{C_1} \Delta^3$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} \Delta^3 = \frac{1}{\Delta^3} (\vec{Z}, \vec{Z}', \vec{Z}'') \quad (\text{II.10.7})$$

olarak hesaplanabilir. O halde (II.10.3) ve (II.10.7) den,

$$\oint_{(C_1)} \oint_{C_1} ds_1 = \oint_{(C)} \frac{1}{\Delta^2} (\vec{Z}, \vec{Z}', \vec{Z}'') ds \quad (\text{II.10.8})$$

olacaktır. (II.10.4) göz önüne alınıp,

$$(\vec{z}, \vec{z}', \vec{z}'') = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p-q\kappa & q+p\kappa-r\tau & r+q\tau \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplanırsa ;

$$\begin{aligned} (\vec{z}, \vec{z}', \vec{z}'') &= \alpha q r' + \alpha q^2 \tau - \alpha r q' - \alpha r p \kappa + \alpha r^2 \tau - \beta p r' \\ &\quad - \beta p q \tau + \beta r p' - \beta r q \kappa + \gamma p q' + \gamma p^2 \kappa - \gamma p r \tau \\ &\quad - \gamma p q' + \gamma q^2 \kappa . \end{aligned}$$

Buna $\gamma r^2 \kappa$ ve $\alpha p^2 \tau$ yı ekleyip çıkarır ve düzenlersek ,

$$\begin{aligned} (\vec{z}, \vec{z}', \vec{z}'') &= p^2 (\gamma \kappa + \alpha \tau) + q^2 (\gamma \kappa + \alpha \tau) + r^2 (\gamma \kappa + \alpha \tau) \\ &\quad - \alpha p (r \kappa + p \tau) - \beta q (r \kappa + p \tau) - \gamma r (r \kappa + p \tau) \\ &\quad + \alpha (q r' - q' r) - \beta (p r' - p' r) + \gamma (p q' - p' q) \\ &= (\gamma \kappa + \alpha \tau) \underbrace{(p^2 + q^2 + r^2)}_{\Delta^2} - \underbrace{(r \kappa + p \tau)(\alpha p + \beta q + \gamma r)}_0 \\ &\quad + \alpha (q r' - q' r) - \beta (p r' - p' r) + \gamma (p q' - p' q) \end{aligned}$$

$$(\vec{z}, \vec{z}', \vec{z}'') = (\gamma \kappa + \alpha \tau) \Delta^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Buradan bir $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sabit ortonormal bazına geçile-
rek,

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3 \\ \vec{D} &= p \vec{e}_1 + q \vec{e}_2 + r \vec{e}_3 \\ \vec{D}' &= p' \vec{e}_1 + q' \vec{e}_2 + r' \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{II.10.9})$$

vektörlerinin kullanılması ile,

$$(\vec{z}, \vec{z}', \vec{z}'') = (\gamma \kappa + \alpha \tau) \Delta^2 + (\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}')$$

bulunur. Bu değer (II.10.8) de yerine konursa,

$$0 \stackrel{?}{=} \oint_{(C_1)} \oint_{C_1} ds_1 = \oint_{(C)} \gamma \kappa ds + \oint_{(C)} \alpha \tau ds + \oint_{(C)} \frac{(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}')}{\Delta^2} ds,$$

$$0 \stackrel{?}{=} \oint_{(C)} \gamma \kappa \, ds + \oint_{(C)} \alpha \tau \, ds + \oint_{(C)} \frac{(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}')}{\|\vec{D}\|^2} \, ds \quad (\text{II.10.10})$$

şeklinde olacaktır.

α, β, γ sabit iseler, yani göz önüne alınan doğru, kapalı eğriye sıkı bir şekilde bağlı ise ;

$$(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}') = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\beta \kappa & \alpha \kappa - \gamma \tau & \beta \tau \\ -\beta \kappa' & \alpha \kappa' - \gamma \tau' & \beta \tau' \end{vmatrix}$$

ve bu determinant açılıp düzenlenirse,

$$(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}') = \beta (\kappa \tau' - \kappa' \tau)$$

olarak bulunur. (II.10.10) daki,

$$\oint_{(C)} \frac{(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}')}{\|\vec{D}\|^2} \, ds$$

değerini hesaplayalım :

$$\oint_{(C)} \frac{\beta (\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{p^2 + q^2 + r^2} \, ds = \oint_{(C)} \frac{\beta (\kappa \tau' - \kappa' \tau) \, ds}{\beta^2 \kappa^2 + \alpha^2 \kappa^2 + \gamma^2 \tau^2 - 2\alpha\gamma\kappa\tau + \beta^2 \tau^2}$$

$$H = \frac{\tau}{\kappa} \text{ denirse, } dH = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa^2} \, ds$$

$$\oint_{(C)} \frac{\beta (\kappa \tau' - \kappa' \tau) \, ds}{p^2 + q^2 + r^2} = \oint_{(C)} \frac{\beta \, dH}{(\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 H^2 - 2\alpha\gamma H + \beta^2 H^2)}$$

$$\oint_{(C)} \frac{(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D}')}{\|\vec{D}\|^2} \, ds = \oint_{(C)} \frac{\beta \, dH}{H^2 (\beta^2 + \gamma^2) - 2\alpha\gamma H + \beta^2 + \alpha^2}$$

$$= \oint_{(C)} \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \cdot \frac{dH}{\left[H^2 - \frac{2\alpha\gamma H}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2 + \gamma^2} \right]}$$

burada,

$$H^2 - \frac{2\alpha\gamma H}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$

değeri,

$$\left(H - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2)^2}$$

şeklinde de yazılabilir. O halde buna göre,

$$\begin{aligned} \oint_{(C)} \frac{(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D})}{\|\vec{D}\|^2} ds &= \oint_{(C)} \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \cdot \frac{dH}{\left[\left(H - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2)^2}\right]} \\ &= \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \cdot \oint_{(C)} \frac{dH}{\left[\left(H - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2)^2}\right]} \end{aligned}$$

burada $H - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} = h$ denirse,

$dH = dh$ olur.

$$\begin{aligned} \oint_{(C)} \frac{(\vec{U}, \vec{D}, \vec{D})}{\|\vec{D}\|^2} ds &= \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \oint_{(C)} \frac{dh}{h^2 + \left(\frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2}\right)^2} \\ &= \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \operatorname{Arctg} \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \right) \cdot h \\ &= \operatorname{Arctg} \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \right) \left(H - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \right) + C_1. \end{aligned}$$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ olduğu da hatırlanarak,

$$f(H) = \begin{cases} \operatorname{Arctg} \left[\left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta} \right) \left(H - \frac{\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \right) \right] + C_1 & ; \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0 \\ \operatorname{Arctg} \left(\frac{H}{\beta} \right) + C_2 & \alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0 \\ \pi/2 + C_3 & \alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma \neq 0 \\ \operatorname{Arctg} (\beta H) + C_4 & \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0 \\ \pi/2 + C_5 & \alpha = \beta = 0, \gamma = 1 \\ \operatorname{Arctg} H + C_6 & \alpha = \gamma = 0, \beta = 1 \\ C_6 & \alpha = 1, \beta = \gamma = 0 \end{cases}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bunun(C) kapalı eğrisi boyunca integrali sıfır olacaktır. O halde (II.10.10) ifadesi,

$$0 \stackrel{?}{=} \oint_{(C_1)} \rho_{C_1} ds_1 = \oint_{(C)} \gamma K ds + \oint_{(C)} \alpha \tau ds \quad (II.10.11)$$

şeklinde yazılabilir. Fenchel'in bir teoremi gereğince,

$$\oint_{(C)} K ds \geq 2\pi \text{ dir } [16] .$$

Buna göre (II.10.11) deki sağ tarafın birinci integralindeki γ katsayısının sıfır etmesi gerekeceği ortaya çıkar. Bu takdirde kapalı bir küresel eğriye ait olup bu eğriye sıkı surette bağlı ve göstergeleri birim küre yüzeyini eşit alanlı iki parçaya ayıran doğrultuların bu eğrinin oskülâtör düzleminde bulunacağı sonucuna varılır. Eğrimiz küresel bir kapalı eğri olduğundan,

$$\rho = \frac{1}{K} , \quad \sigma = \frac{1}{\tau}$$

eğrilik ve burulma yarıçapları ile eğrimizin üzerine çizildiği kürenin $R=1$ yarıçapı arasında,

$$\rho^2 + (\rho' \sigma)^2 = 1$$

bağıntısı vardır; buna göre,

$$\oint_{(C)} \tau ds = 0$$

elde edilir. O halde (II.10.11) deki α değeri keyfi kalır. Böylece $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gereğince β da keyfi olur ve teorem istaplanmış olur.

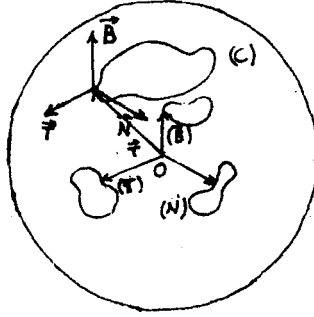
BÖLÜM.III

KAPALI KÜRESEL EĞRİLER İÇİN BİLİNER JACOBI TEOREMLERİNİN ÇİZGİLER UZAYINA GENELLEŞTİRİLMESİ

III.1. TEĞETLER GÖSTERGESİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIĞI

C^2 -sınıfından bir kapalı dual küresel (C) eğrisini gözönüne alalım. (C) yi yay parametresi cinsinden alabiliriz [17, pp.58] .

(C) kapalı dual küresel eğrisi $\vec{r}$ yer vektörü tarafından çizilirken dual eğri üzerindeki ($\vec{T}$) teğet, ($\vec{N}$) normal ve ($\vec{B}$) binormal birim dual vektörlerinin küresel göstergeleri de birer kapalı küresel dual eğri çizerler. Bu vektörleri birim dual kürenin merkezine taşıyalım, Şekil III.1.1.



Şekil III.1.1.

Dual küresel eğri üzerindeki hareketli çatıyı $[\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}]$ ile gösterelim. Bu çatının türevleri ile kendileri arasındaki bağıntı reel haldekine benzer olarak,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{K} & 0 \\ -\mathcal{K} & 0 & \mathcal{G} \\ 0 & -\mathcal{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

dır [17] . Buradaki,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{K} & 0 \\ -\mathcal{K} & 0 & \mathcal{C} \\ 0 & -\mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}$$

dual matrisi (II.6.1) daki matrisin rolünü oynamaktadır.

Dual küresel eğri üzerindeki bu hareketli çatının Steiner vektörü (II.7.3)'e göre,

$$\vec{V} = \vec{T} \oint_{(C)} \mathcal{C} ds + \vec{N} \oint_{(C)} 0 ds + \vec{B} \oint_{(C)} \mathcal{K} ds \quad (\text{III.1.1})$$

dir. Burada,

$$\vec{V} = \vec{V} + \varepsilon \vec{V}^*, \mathcal{C} = \mathcal{C} + \varepsilon \mathcal{C}^*, \mathcal{K} = \mathcal{K} + \varepsilon \mathcal{K}^*$$

$$\vec{T} = \vec{T} + \varepsilon \vec{T}^*, \vec{N} = \vec{N} + \varepsilon \vec{N}^*, \vec{B} = \vec{B} + \varepsilon \vec{B}^*$$

dir.

Yukarıdaki $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{C}$ değerleri göz önüne alınarak (III.1.1) deki Steiner vektörünü şu şekilde de yazabiliriz :

$$\vec{V} = \vec{V} + \varepsilon \vec{V}^* = \oint_{(C)} (\mathcal{C} + \varepsilon \mathcal{C}^*) (\vec{T} + \varepsilon \vec{T}^*) ds + \oint_{(C)} (\mathcal{K} + \varepsilon \mathcal{K}^*) (\vec{B} + \varepsilon \vec{B}^*) ds$$

$$\vec{V} = \oint_{(C)} (\mathcal{C} \vec{T} + \mathcal{K} \vec{B}) ds + \varepsilon \oint_{(C)} (\mathcal{C} \vec{T}^* + \mathcal{C}^* \vec{T} + \mathcal{K} \vec{B}^* + \mathcal{K}^* \vec{B}) ds \quad (\text{III.1.2})$$

burada,

$$\oint_{(C)} (\mathcal{C} \vec{T} + \mathcal{K} \vec{B}) ds \text{ ve } \oint_{(C)} (\mathcal{C} \vec{T}^* + \mathcal{C}^* \vec{T} + \mathcal{K} \vec{B}^* + \mathcal{K}^* \vec{B}) ds$$

sırası ile, $\vec{V}$ ve $\vec{V}^*$ a karşılık gelmektedir.

Birim dual küre üzerindeki kapalı bir dual eğrinin herhangi bir noktasındaki birim dual teğet vektörünün dual küresel göstergesine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğunu L_T ile gösterelim.

Hareketin (III.1.2) deki Steiner vektörü göz önüne alınarak (II.8.9)'a göre L_T açılım uzunluğu şu şekilde ifade edilebilir :

$$L_T = \langle \vec{T}, \vec{V}^* \rangle + \langle \vec{T}^*, \vec{V} \rangle \quad (\text{III.1.3})$$

(III.1.3) den ;

$$\begin{aligned} L_T &= \oint_{(C)} \langle \vec{T}, \mathcal{C} \vec{T}^* + \mathcal{C}^* \vec{T} + \mathcal{K} \vec{B}^* + \mathcal{K}^* \vec{B} \rangle ds + \oint_{(C)} \langle \vec{T}^*, \mathcal{C} \vec{T} + \mathcal{K} \vec{B} \rangle ds, \\ &= \oint_{(C)} \mathcal{C} \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \mathcal{C}^* \langle \vec{T}^*, \vec{T} \rangle ds + \oint_{(C)} \mathcal{K} \langle \vec{T}, \vec{B}^* \rangle ds \end{aligned}$$

$$+ \oint_{(C)} k^* \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{t}^*, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} k \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle ds,$$

$$L_T = 2 \oint_{(C)} \tau \langle \vec{t}, \vec{t}^* \rangle ds + \oint_{(C)} k \langle \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle \rangle ds$$

$$+ \oint_{(C)} \tau^* \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} k^* \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle ds,$$

$$L_T = \oint_{(C)} \tau^* ds. \quad (\text{III.1.4})$$

Bunu bir teoremle şu şekilde ifade edebiliriz :

TEOREM III.1.1.

Birim dual küre üzerine çizilmiş herhangi bir kapalı dual küresel eğrinin küresel teğetler göstergesine çizgiler uzayında karşılık gelen regle yüzeyin açılım uzunluğu $L_T = \oint_{(C)} \tau^* ds$ dir.

Bu teorem kinematikte Blaschke [2 , pp.275] nin açılım uzunluğu için verdiği ifadeye karşılık gelmektedir.

Teorem II.7.1'e göre herhangi bir X noktasının bir kapalı küresel hareket esnasında çizmiş olduğu kapalı eğrinin sınırladığı küresel alan,

$$F_X = 2\pi(1-n) - \langle \vec{V}, \vec{X} \rangle$$

idi. Buna göre birim teğet $\vec{T}$ vektörünün birim dual küresel göstergesinin sınırladığı bölgenin alanı F_T ile gösterilirse,

$$F_T = 2\pi(1-n) - \langle \vec{T}, \vec{V} \rangle$$

veya

$$F_T = 2\pi(1-n) - \langle (\vec{t} + \varepsilon \vec{t}^*), \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + k \vec{b}) ds + \varepsilon \oint_{(C)} (\tau \vec{t}^* + \tau^* \vec{t} + k \vec{b}^* + k^* \vec{b}) ds \rangle,$$

$$F_T = 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle ds - \oint_{(C)} k \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle ds - \varepsilon \oint_{(C)} \tau \langle \vec{t}, \vec{t}^* \rangle ds$$

$$- \varepsilon \oint_{(C)} \tau^* \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle ds - \varepsilon \oint_{(C)} k \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle ds - \varepsilon \oint_{(C)} k^* \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle ds$$

$$- \varepsilon \oint_{(C)} \tau \langle \vec{t}^*, \vec{t} \rangle ds - \varepsilon \oint_{(C)} k \langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle ds,$$

$$F_T = 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau ds - \varepsilon \oint_{(C)} \tau^* ds - \varepsilon \oint_{(C)} k \langle \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle \rangle ds$$

$$F_T = \left[2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau ds \right] - \varepsilon \oint_{(C)} \tau^* ds \quad (\text{III.1.5})$$

Teorem II.10.1'e göre bu alanın 2π olması gerektiğinden, (III.1.5) den,

$$2\pi = 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau ds - \varepsilon \oint_{(C)} \tau^* ds,$$

veya

$$2\pi n + \oint_{(C)} \tau ds + \varepsilon \oint_{(C)} \tau^* ds = 0 \quad (\text{III.1.6})$$

(III.1.4) den $L_T = \oint_{(C)} \tau^* ds$ değeri (III.1.6) da yerine konursa,

$$2n\pi + \oint_{(C)} \tau ds + \varepsilon L_T = 0$$

olur; buradaki "0" sıfır dual sayısıdır.

0 halde iki dual sayının eşitliği tanımına göre (III.1.6) dan,

$$\begin{cases} L_T = 0 \\ \lambda_T = - \oint_{(C)} \tau ds = 2n\pi = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1.7})$$

elde edilir. Buradaki (-) işareti integralin yönü ile ilgili olduğundan kaldırılabilir.

(III.1.7) deki λ_T değeri; Hoschek'in [11] kapalı regle yüzeyler için tanımladığı açılım açısına göre, küresel teğetler göstergesine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin reel açılım açısıdır.

(III.1.7) sonucunu bir teoremle şu şekilde ifade edebiliriz :

TEOREM III.1.2.

Birim dual küre üzerine çizilmiş kapalı bir eğrinin küresel teğetler göstergesine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu ve açılım açısı, sırası ile, $L_T = \oint_{(C)} \tau^* ds = 0$, $\lambda_T = \oint_{(C)} \tau ds = 2n\pi = 0$ dir.

Ayrıca E.Study dönüşümüne göre şu teoremi de ifade edebiliriz :

TEOREM III.1.3.

Birim dual küre yüzeyi üzerine çizilmiş bir kapalı eğrinin teğetler göstergesinin çizgiler uzayındaki görün-

tüsü ; açılım açısı $\lambda_T = \oint_{(C)} \tau ds = 2\pi n = 0$ olan bir konidir.

III.2. ASAL NORMALER GÖSTERGESİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIĞI

Küresel kapalı bir dual eğrinin herhangi bir noktasındaki birim dual asal normal göstergesi bir kapalı eğridir. Bu dual eğriyi (N) ile göstere-
lim. (N) eğrisine karşılık gelen çizgiler uzayındaki regle yüzeyin açılım
uzunluğu da L_N ile gösterilsin. (II.8.9) dan,

$$L_N = \langle \vec{n}, \vec{v}^* \rangle + \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle \quad (\text{III.2.1})$$

veya (III.2.1) den,

$$\begin{aligned} L_N &= \langle \vec{n}, \oint_{(C)} (\tau \vec{t}^* + \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}^* + \kappa \vec{b}) ds \rangle + \langle \vec{n}, \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) ds \rangle \\ &= \oint_{(C)} \tau \langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle ds \\ &\quad + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle ds, \\ L_N &= \oint_{(C)} \tau \left(\underbrace{\langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle + \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle}_0 ds + \oint_{(C)} \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle}_0 ds \right) ds \\ L_N &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Teorem II.7.1' e göre, birim dual küre üzerindeki herhangi bir dual ka-
palı eğrinin asal normaller göstergesinin sınırladığı bölgenin alanı :

$$F_N = 2\pi(1-n) - \langle \vec{N}, \vec{v} \rangle$$

olacağından,

$$F_N = 2\pi(1-n) - \langle \vec{n} + \epsilon \vec{n}^*, \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) ds + \epsilon \oint_{(C)} (\tau \vec{t}^* + \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}^* + \kappa \vec{b}) ds \rangle$$

$$\begin{aligned}
F_N &= 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle ds - \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle ds \\
&\quad - \varepsilon \left[\oint_{(C)} \tau^* \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa^* \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle ds \right. \\
&\quad \left. + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{n}^*, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{n}^*, \vec{b} \rangle ds \right], \\
F_N &= 2\pi(1-n) - \varepsilon \oint_{(C)} \tau (\underbrace{\langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle + \langle \vec{n}^*, \vec{t} \rangle}_0) ds - \varepsilon \oint_{(C)} \kappa (\underbrace{\langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{n}^*, \vec{b} \rangle}_0) ds \\
F_N &= 2\pi(1-n) \quad (III.2.2)
\end{aligned}$$

Teorem II.9.2 ye göre bu alanın 2π olması gerektiğinden,

$$2\pi = 2\pi - 2n\pi \Rightarrow 2n\pi = 0 \Rightarrow n = 0$$

elde edilir.

Buradan şu teoremleri verebiliriz:

TEOREM III.2.1.

Birim dual küre üzerine çizilmiş her kapalı dual eğrinin asal normaller göstergesine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu ve açılım açısı sırası ile $L_N = 0$, $\lambda_N = 0$ dır.

Ayrıca E.Study dönüşümüne göre şu teoremi de ifade edebiliriz :

TEOREM III.2.2.

Birim dual küre yüzeyi üzerine çizilmiş kapalı bir (C) dual eğrisinin asal normaller göstergesine çizgiler uzayında açılım açısı $\lambda_N=0$ olan bir koni yüzeyi karşılık gelir. Koni yüzeyinin çizilmesine karşılık gelen n sayısı (C) eğrisinin seçilişinden bağımsız olarak $n=0$ dır.

III.3. BİNORMALER GÖSTERGESİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIĞI

Teorem II.7.1'e göre binormaller göstergesi için,

$$F_B = 2\pi(1-n) - \langle \vec{B}, \vec{V} \rangle \quad (III.3.1)$$

yazılabilir. Buradaki $\langle \vec{B}, \vec{V} \rangle$ yi hesaplayalım :

$$\begin{aligned}
\langle \vec{B}, \vec{V} \rangle &= \langle \vec{b} + \epsilon \vec{b}^*, \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) ds + \epsilon \oint_{(C)} (\tau \vec{t}^* + \tau \vec{t} + \kappa \vec{b} + \kappa \vec{b}^*) ds \rangle \\
&= \oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle ds + \epsilon \left[\oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}, \vec{t}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}, \vec{t} \rangle ds \right. \\
&\quad \left. + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{b}, \vec{b}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}^*, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{b}^*, \vec{b} \rangle ds \right] \\
&= \oint_{(C)} \kappa ds + \epsilon \oint_{(C)} \kappa^* ds + \oint_{(C)} \tau (\underbrace{\langle \vec{b}, \vec{t}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{t} \rangle}_0) ds \\
\langle \vec{B}, \vec{V} \rangle &= \oint_{(C)} \kappa ds + \epsilon \oint_{(C)} \kappa^* ds
\end{aligned}$$

dir.

Bu değeri (III.3.1) de yerine yazarsak binormaller göstergesinin sınırladığı bölgenin alanı için,

$$F_B = 2\pi (1-n) - \oint_{(C)} \kappa ds - \epsilon \oint_{(C)} \kappa^* ds \quad (\text{III.3.2})$$

değerini elde ederiz.

(II.8.9)'a göre L_B açılım uzunluğu için,

$$\begin{aligned}
L_B &= \langle \vec{b}, \vec{v}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{v} \rangle \\
L_B &= \langle \vec{b}, \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \tau \vec{t}^* + \kappa \vec{b} + \kappa \vec{b}^*) ds \rangle + \langle \vec{b}^*, \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) ds \rangle \\
L_B &= \oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}, \vec{t}^* \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{b}, \vec{b}^* \rangle ds \\
&\quad + \oint_{(C)} \kappa^* \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle ds + \oint_{(C)} \tau \langle \vec{b}^*, \vec{t} \rangle ds + \oint_{(C)} \kappa \langle \vec{b}^*, \vec{b} \rangle ds \\
L_B &= \oint_{(C)} \tau (\underbrace{\langle \vec{b}, \vec{t}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{t} \rangle}_0) ds + \oint_{(C)} \kappa^* ds \\
L_B &= \oint_{(C)} \kappa^* ds
\end{aligned}$$

dir.

Şu halde genel olarak herhangi bir (C) kapalı dual eğrisinin binormaller göstergesine karşılık gelen regle yüzey koni değildir. Bunu bir teoremle ifade edebiliriz :

TEOREM III.3.1.

Birim dual küre yüzeyi üzerine çizilmiş herhangi bir (C) dual kapalı küresel eğrisinin binormaller göstergesine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu ele alınan (C) eğrisinden bağımsız değildir ve $L_B = \oint_{(C)} \kappa^* ds$ ile bellidir.

III.4. OSKÜLATÖR DÜZLEMDEKİ BİRİM VEKTÖRLERİN GÖSTERGELERİNİN ÇİZGİLER UZAYINDAKİ KARŞILIKLARI

Eğrimizin oskülatör düzleminde bulunan ve eğriye sıkı şekilde bağlı olan bütün birim dual vektörleri göz önüne alalım. Bunlardan birisi $\vec{M}$ olsun.

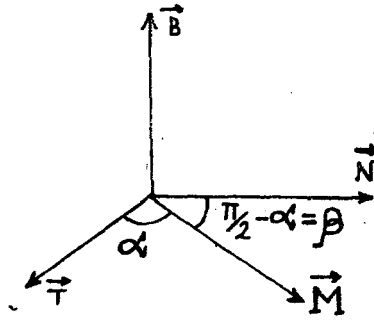
$\alpha = \alpha + \epsilon \alpha^*$ ve $\beta = \beta + \epsilon \beta^*$ olmak üzere,

$$\vec{M} = \vec{T} \cos \alpha + \vec{N} \sin \beta \quad \text{Şekil III.4.1.}$$

$$\vec{M} = \vec{T} \cos \alpha + \vec{N} \sin \alpha \quad (\text{III.4.1})$$

dır.

$\vec{M}$ birim dual vektörü $\vec{M} = \vec{m} + \epsilon \vec{m}^*$ biçimindedir.



Şekil III.4.1.

Bunu (III.4.1) daki formda ele alır (I.4.2) ve (I.4.3) formüllerine göre düzenlersek;

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{m} + \epsilon \vec{m}^* = (\vec{t} + \epsilon \vec{t}^*) (\cos \alpha - \epsilon \alpha^* \sin \alpha) + (\vec{n} + \epsilon \vec{n}^*) (\sin \alpha + \epsilon \alpha^* \cos \alpha) \\ &= \vec{t} \cos \alpha - \epsilon \vec{t} \alpha^* \sin \alpha + \epsilon \vec{t}^* \cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha + \epsilon \vec{n} \alpha^* \cos \alpha \\ &\quad + \epsilon \vec{n}^* \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\vec{M} = \vec{t} \cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha + \epsilon (-\vec{t} \alpha^* \sin \alpha + \vec{t}^* \cos \alpha + \vec{n} \alpha^* \cos \alpha + \vec{n}^* \sin \alpha)$$

burada,

$$\vec{m} = \vec{t} \cos \alpha + \vec{n} \sin \alpha, \quad \vec{m}^* = -\vec{t} \alpha^* \sin \alpha + \vec{t}^* \cos \alpha + \vec{n} \alpha^* \cos \alpha + \vec{n}^* \sin \alpha$$

dir.

Eğrimizin oskülatör düzleminde bulunan ve eğriye sıkı şekilde bağlı olan $\vec{M}$ birim dual vektörlerinin birim dual küresel göstergelerine çizgiler uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin açılım uzunluklarını L_M ile gösterelim.

$$L_M = \langle \vec{m}, \vec{v}^* \rangle + \langle \vec{m}^*, \vec{v} \rangle$$

veya

$$\begin{aligned}
L_M &= \langle \vec{t} \cos\alpha + \vec{n} \sin\alpha, \oint_{(C)} (\tau \vec{t}^* + \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}^* + \kappa^* \vec{t}) ds \rangle \\
&+ \langle -\vec{t}^* \sin\alpha + \vec{t}^* \cos\alpha + \vec{n}^* \cos\alpha + \vec{n}^* \sin\alpha, \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) ds \rangle, \\
L_M &= \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t}^* \rangle \tau \cos\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle \tau \cos\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle \kappa \cos\alpha ds \\
&+ \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle \kappa^* \cos\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle \tau \sin\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle \tau^* \sin\alpha ds \\
&+ \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle \kappa \sin\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \kappa^* \sin\alpha ds \\
&- \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle \tau \alpha^* \sin\alpha ds - \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle \kappa \alpha^* \sin\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{t}^*, \vec{t} \rangle \tau \cos\alpha ds \\
&+ \oint_{(C)} \langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle \kappa \cos\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle \tau \alpha \cos\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \kappa \alpha \cos\alpha ds \\
&+ \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle \tau \sin\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \kappa \sin\alpha ds, \\
L_M &= \oint_{(C)} \tau^* \cos\alpha ds - \oint_{(C)} \tau \alpha^* \sin\alpha ds \\
&+ \oint_{(C)} \kappa \cos\alpha (\langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle) ds + \oint_{(C)} \tau \sin\alpha (\langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle + \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle) ds \\
&+ \oint_{(C)} \kappa \sin\alpha (\langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle) ds \\
L_M &= \oint_{(C)} \tau^* \cos\alpha ds - \oint_{(C)} \tau \alpha^* \sin\alpha ds \quad (\text{III.4.2})
\end{aligned}$$

dir.

$\vec{M}$ dual birim vektörünün dual küresel göstergesinin sınırladığı küresel alan Teorem II.7.1'e göre :

$$F_M = 2\pi (1-n) - \langle \vec{M}, \vec{V} \rangle$$

olacağından,

$$\begin{aligned}
F_M &= 2\pi (1-n) - \left[\langle \vec{t} \cos\alpha + \vec{n} \sin\alpha + \varepsilon (-\vec{t} \alpha^* \sin\alpha + \vec{t}^* \cos\alpha + \vec{n} \alpha \cos\alpha + \vec{n}^* \sin\alpha), \right. \\
&\quad \left. \oint_{(C)} (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) ds + \varepsilon \oint_{(C)} (\tau \vec{t}^* + \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}^* + \kappa^* \vec{b}) ds \rangle \right] \\
F_M &= 2\pi (1-n) - \left\{ \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle \tau \cos\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle \kappa \cos\alpha ds \right. \\
&+ \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle \tau \sin\alpha ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \kappa \sin\alpha ds + \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t}^* \rangle \tau \cos\alpha ds \\
&+ \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle \tau^* \cos\alpha ds + \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle \kappa \cos\alpha ds + \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle \kappa^* \cos\alpha ds \\
&+ \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle \tau \sin\alpha ds + \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle \tau^* \sin\alpha ds + \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle \kappa \sin\alpha ds \\
&+ \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \kappa^* \sin\alpha ds - \varepsilon \oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle \tau \alpha^* \sin\alpha ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\oint_{(C)} \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle \kappa^* \sin \alpha \, ds + \oint_{(C)} \langle \vec{t}^*, \vec{t} \rangle \tau \cos \alpha \, ds \\
& + \oint_{(C)} \langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle \kappa \cos \alpha \, ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle \tau \alpha^* \cos \alpha \, ds \\
& + \oint_{(C)} \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \kappa^* \cos \alpha \, ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}^*, \vec{t} \rangle \tau \sin \alpha \, ds + \oint_{(C)} \langle \vec{n}^*, \vec{b} \rangle \kappa \sin \alpha \, ds \} \\
F_M = 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds - \oint_{(C)} \tau^* \cos \alpha \, ds + \oint_{(C)} \tau \alpha^* \sin \alpha \, ds \\
& + \oint_{(C)} \kappa \cos \alpha (\underbrace{\langle \vec{t}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{t}^*, \vec{b} \rangle}_0) \, ds + \oint_{(C)} \tau \sin \alpha (\underbrace{\langle \vec{n}, \vec{t}^* \rangle + \langle \vec{n}^*, \vec{t} \rangle}_0) \, ds \\
& + \oint_{(C)} \kappa \sin \alpha (\underbrace{\langle \vec{n}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{n}^*, \vec{b} \rangle}_0) \, ds, \\
F_M = 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds - \oint_{(C)} \tau^* \cos \alpha \, ds - \oint_{(C)} \tau \alpha^* \sin \alpha \, ds
\end{aligned}$$

dir. Bu değeri, (III.4.2) ye göre,

$$F_M = 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds - \varepsilon L_M$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem II.10.5'e göre biz bu alanın 2π olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\begin{aligned}
2\pi &= 2\pi(1-n) - \oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds - \varepsilon L_M, \\
\Rightarrow 2n\pi + \oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds + \varepsilon L_M &= 0 = 0 + 0
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{cases} L_M = 0 \\ \lambda_M = -\oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds = 2n\pi = 0 \end{cases}$$

bulunur. Buradan şu teoremleri verebiliriz :

TEOREM III.4.1.

Birim dual küre üzerine çizilmiş her kapalı dual eğri-
nin oskülatör düzleminde bulunan ve eğriye sıkı şekil-
de bağlı olan bir birim dual vektörün küresel göster-
gesine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle
yüzeyin açılım uzunluğu $L_M = \oint_{(C)} (\tau^* \cos \alpha - \tau \alpha^* \sin \alpha) \, ds = 0$
ve açılım açısı $\lambda_M = -\oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds = 2n\pi = 0$ dir.

TEOREM III.4.2.

Birim dual küre yüzeyi üzerine çizilmiş bir (C) kapalı eğrisinin oskülatör düzleminde yatan herhangi bir M birim vektörünün küresel göstergesinin çizgiler uzayındaki E.Study resmi, açılım açısı

$$\lambda_M = \oint_{(C)} \tau \cos \alpha \, ds = \cos \alpha \oint_{(C)} \tau \, ds = 2\pi\tau = 0$$

olan bir konidir.

Burada $\alpha = 0$ alınırsa Teorem III.1.2. deki L_T ve λ_T değerleri elde edilir. Bu ise $\vec{M} = \vec{T}$ olması demektir.

III.5. ORTAK ÖZELİKLER

Her üç cins gösterge için ortak olan özellikleri aşağıdaki şekilde sıralıyabiliriz:

TEOREM III.5.1.

Birim dual küre yüzeyi üzerine çizilmiş her kapalı dual eğrinin küresel kapalı Teğetler, Normaller ve Binormaller göstergelerine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları ve açılım açıları bu göstergelere bağlı olmayıp, verilen küresel kapalı eğriye bağlıdır.

TEOREM III.5.2.

Birim dual küre yüzeyini iki eşit parçaya bölen kapalı eğrilerin çizgiler uzayındaki E. Study resimleri birer konidir.

Jacobi Teoremlerinin çizgiler uzayındaki karşılıkları için ters teoremlerin ifade ve ispatları mümkün görülmemektedir.

S O N U Ç

Jacobi Teoremleri D -Modülde birim dual küre üzerinde ele alındı. E. Study Dönüşümünden yararlanarak bu teoremlerin 3- boyutlu Çizgiler Uzayındaki karşılıkları araştırıldı.

Bu genelleştirme yapılırken kapalı regle yüzeylerin Açılım Uzunlukları ile Açılım Açılarının dual küresel hareketlerde görülmeleri bize cesaret kazandırdı.

Jacobi Teoremlerinin 3- boyutlu Çizgiler Uzayındaki yüzeyler teorisi yönünden koni yüzeyleriyle ilgili oldukları görüldü. Böylece Jacobi Teoremlerinin çizgiler Uzayındaki karşılıklarının birer Koni Yüzeyi oldukları gösterildi.

Varılan yeni sonuçlar, Jacobi Teoremlerinin Çizgiler Uzayındaki karşılıkları olarak, teoremler halinde ifade ve ispat edildi.

B İ B L İ Y O G R A F Y A

- [1] KÖSE, Ö.
Çizgiler uzayında yörünge yüzeyleri, Doktora Tezi,
Atatürk Üniversitesi, ERZURUM 1975.
- [2] MÜLLER, H.R.
Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakül-
tesi yayınları 1963, s.241-263, 275.
- [3] GUGENHEIMER, H.
Differential Geometry, Mc-Graw Hill Book Company,
London, Lib. Cong.Cat. Num. 65-28732, 1966 pp.106-
108, 162-166.
- [4] HACISALİHOĞLU, H.H., KAYA, R.
Bresse and inflection Congruences, Comm, Fac. Sci.
Univ. Ankara Ser. A, Tome 22, 1973, pp.91-92.
- [5] HACISALİHOĞLU, H.H.
Existence and uniqueness of a General Dual Motion
for a Given pfaffian Dual Vector. Hacettepe Bullec-
tion of Natural Sciencess and engineering 1972,
vol. 1, Numb. 1, pp. 108.
- [6] ERİM, KERİM, (Tercüme).
Diferensiyel Geometri Dersleri, Istanbul Universi-
tesi yayınları 1949 s.324-333. 61.
- [7] HACISALİHOĞLU, H.H.
On dhe pitch of a Closed ruled Surface, Mechanism
and Machine Theory, 1972, vol. 7. Pergamon Press.
- [8] MÜLLER, H.R.
Spharische Kinematik, Veb Deutscher Verlag der
Wissenschaften Berlin 1962. pp.6-61.
- [9] HACISALİHOĞLU, H.H.
On the Darboux Tensör, Journal of the fac.Sc. of
the K.T.Ü. Vol 1, Fasc. 6 pp.59.
- [10] SABAN, G.
A Characteristic Property of a developable Surface,
Comum de la Faculte des Sciences de I'université
d'Ankara 16 A, 93-96 1967.
- [11] HOSCHEK, J.
Eine Verallgemeinerung des Satzes von Holditch
Monatshefte Für Math. 80, 93-99.1975.

- [12] JACOBI, J.
über einige merkwürdige curventheoreme,
Schumacher Astr. Nch. 20, 1842, pp. 115-120.
- [13] FENCHEL, W.
Über einem Jacobischen Satz der kurven theorie,
Tohoku Mathematical Journal, 39, 1934, pp. 95-97.
- [14] AVAKUMOVIC, V.G.
Über Geschlossene kurven auf der kugel, Sbornik
Radova, Sirpska Akademia Nauka. 7, 1951, pp. 101-108.
- [15] STRUIK, D.S.
Classical Differential Geometry, Add. Wesley, pub.
Comp. 1961. pp. 155.
- [16] FENCHEL, W.
Über Krümmung und Windung Geschlossener Raumkurven,
Math. Ann. 101, 1929, pp. 238-252.
- [17] O'NEILL, B.
Elementary Differential Geometry, Academic Press,
1966, pp. 58, 86-87.

Ö Z G E Ç M İ Ş İ M

1.3.1949 yılında Ordu'nun Korgan İlçesinin Çamlı Köyünde doğdum. 1958-63 de aynı köyde İlk Okulu bitirdim. 1963 yılında 6 yıllık Samsun-Lâdik Akpınar İlk Öğretmen Okuluna yatılı öğrenci olarak girdim. 1968 de okulun öğretmenler kurulu tarafından M.E. Bakanlığına bağlı yatılı Ankara Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık Lisesi Fen Koluna seçildim.

Bir yıl bu okulda okuduktan sonra 1969 da Hazırlık Lisesini bitirdim. Aynı yıl Üniversite giriş sınavına girdim . 1969 da Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik - Fizik Lisansı Bölümüne kayıt oldum. 1973 Haziran döneminde Matematik-Fizik Lisansını ve ayrıca Ankara Yüksek Öğretmen Okulunu bitirdikten sonra çektiğim kura sonucu M.E. Bakanlığınca Sakarya-Arifiye İlk Öğretmen Okulu Matematik-Fizik Öğretmenliğine atandım. 8 ay aynı yerde görev yaptıktan sonra 1974 de Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik asistanlığına atandım.

1975 de, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Öğretim Üyelerinden sayın hocam Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU ile Diferansiyel Geometri alanında doktora çalışmalarına başladım. Evliyim, 1 çocuğum var.

Halen KTÜ Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapmaktayım.