



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

UZAYZAMANDA TRKALYAN ALANLAR

Seçil SEVİNÇ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof.Dr.Kamuran SAYGILI

Ocak, 2021

İSTANBUL

Bu alışma 22.01.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr.Kamuran SAYGILI (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ALIřKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Ender ABADOĞLU
Yeditepe Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşmasında çok büyük katkı sağlayan, değerli bilgi ve deneyimleriyle lisans eğitimimden sonra verdiğim uzun araya rağmen bana sabırla yol gösteren, verdiği destekle beni araştırmaya teşvik eden değerli danışmanım Prof. Dr. Kamuran Saygılı'ya, yüksek lisans eğitimim boyunca anlayışlı davranan ve emek veren akademisyen öğretmenlerime, bana her zaman güvenen, attığım her adımda, verdiğim her kararda yanımda olup beni destekleyen eşim Hamit Gürbüz Sevinç'e içtenlikle teşekkür ederim.

Ocak, 2021

Seçil SEVİNÇ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGE VE KISALTIMA LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	6
3. MALZEME VE YÖNTEM	10
3.1. CHANDRASEKHAR-KENDALL METODU	10
3.1.1. Düz Öklidyen Uzayda Çözüm Örneği	13
3.1.2. Minkowski Uzayzamanında Çözüm Örnekleri	14
3.1.3. Anti-de Sitter Uzayzamanında Çözüm Örnekleri	22
3.1.4. de Sitter Uzayzamanında Çözüm Örnekleri	25
3.2. MİNİ-TWİSTÖR METODU	26
3.2.1. Keyfi İntegrasyon Çarpanı	34
3.2.2. Chandrasekhar-Kendall Metodunda Debye Potansiyeli İçin Mini-Twistör Çözümleri	36
3.3. ULTRAHİPERBOLİK DALGA DENKLEMİ: KLASİK JOHN DÖNÜŞÜMÜNÜN İNDİRGEMESİ VE RADON DÖNÜŞÜMÜ	39
3.3.1. Radon Dönüşümü	43
3.4. ULTRAHİPERBOLİK DALGA DENKLEMİ: TWİSTÖR ÇÖZÜMÜNÜN İNDİRGEMESİ	44
4. BULGULAR	50
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	52
KAYNAKLAR	54
EKLER	59
EK 1. Trkalyan Alanlar	59
EK 2. Chandrasekhar-Kendall Metodu	60

EK 2.1. Konformal Killing Denklemi	62
EK 2.2. Hipergeometrik Denklem Ve Hipergeometrik Fonksiyonlar	66
EK 2.3. Assosye Legendre Fonksiyonları	66
EK 3. Mini-Twistör Metodu.....	67
EK 3.1. Modifiye Bessel Fonksiyonları	68
EK 3.1.1. Modifiye Bessel Fonksiyonlarının Kontur İntegral İfadeleri	68
EK 4. Ultrahiperbolik Dalga Denklemi: Klasik John Dönüşümü Çözümünün İndirgemesi	70
EK 5. Ultrahiperbolik Dalga Denklemi: Twistör Çözümünün İndirgemesi.....	71
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

TS^2	: 2-kürenin teğet demeti
TCP^1	: 1-boyutlu kompleks projektif uzayın holomorfik teğet demeti
TRP^1	: 1-boyutlu reel projektif uzayın teğet demeti
$S(\mathbb{R}^3)$	: Schwartz uzayı
d	: Dış türev (diferansiyel)
δ	: Dış türevin eşleniği (kodiferansiyel)
$\star$	: Hodge yıldız dualite operatörü
F	: Alan 2-formu
$g_{\mu\nu}$	: Manifold üzerinde metrik
X	: Konformal Killing vektörü
$\mathcal{L}_X$	: Lie türevi
λ, ν	: Topolojik kütle
Δ	: Laplace-Beltrami operatörü
ω_r	: r-form
$\square_3^2$	: 2+1 boyutta dalga operatörü
$\square_4^2$	: 3+1 boyutta dalga operatörü
∇^2	: Düz uzayda Laplace operatörü
$\delta(x - x_0)$	: Dirac delta fonksiyoneli
D_p	: Parabolik-silindirik fonksiyon
J_m, Y_m	: m . mertebeden 1. ve 2. tür Bessel fonksiyonları
I_m, K_m	: m . mertebeden 1. ve 2. tür modifiye Bessel fonksiyonları
$U(u), V(v)$	: Modifiye Mathieu ve Mathieu fonksiyonları
j_l, y_l	: l . mertebeden 1. ve 2. tür küresel Bessel fonksiyonları
P_l^m, Q_l^m	: l . mertebeden 1. ve 2. tür assosye Legendre fonksiyonları
$\mathcal{F}(a, b; c; x)$	: Hipergeometrik fonksiyon

Kısaltmalar

Açıklama

AdS	: Anti de Sitter
-------	------------------

dS : de Sitter
Rot : Rotasyonel (curl); $\nabla \times$ operatörü



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ UZAYZAMANDA TRKALYAN ALANLAR

Seçil SEVİNÇ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Kamuran SAYGILI

Bu çalışmada, uzayzamanda tanımlı Trkalyan alanlar için Chandrasekhar-Kendall, mini-twistör ve ultrahiperbolik dalga denkleminin klasik John (X-ışını) dönüşümü çözümü ve ayrıca Radon dönüşümü ile alan denkleminin çözümü, ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün indirgenmesi metodları yazılarak örnek çözümler sunulacaktır. Bunlar Trkalyan alanlar konusunun hem matematiksel hem de fiziksel açıdan anlaşılması yanında söz konusu matematiksel metotlara da katkı sağlamaktadır.

Ocak 2021, 84 sayfa.

Anahtar kelimeler: Trkalyan alanlar, Chandrasekhar-Kendall, mini-twistör, ultrahiperbolik dalga denklemi, John (X-ışını) dönüşümü , Radon dönüşümü, İndirgeme.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

TRKALIAN FIELDS IN SPACETIME

Seçil SEVİNÇ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Mathematic Department of Enstitue

Supervisor: Prof.Dr.Kamuran SAYGILI

In this study, we present solution methods for Trkalian fields defined in spacetime. We discuss Chandrasekhar-Kendall, mini-twistor and reductions of classical John (X-ray) transform and also solution of field equation by Radon transform, reduction of twistorial solution of ultrahyperbolic wave equation. We present sample solutions. These will contribute to the subject of Trkalian field both mathematically and physically as well as aforementioned mathematical methods.

Jaunary 2021, 84 pages.

Keywords: Trkalian fields, Chandrasekhar-Kendall, Mini-twistor, Ultrahyperbolic wave equation, John (X-ray) transform, Radon transform, Reduction.

1. GİRİŞ

Rotasyon (curl) operatörü düz Öklidyen uzay $\mathbb{R}^3$ 'de tanımlanmış olup bu operatörün özvektörleri ile ilgili çalışmalar yıllar öncesine dayanmaktadır. Bilinen ilk çalışmalar Gromeka ve Beltrami tarafından yapılmıştır [1, 2]. Bu nedenle bu özvektörler, özellikle hidrodinamikte Beltrami alanı olarak adlandırılır (Bkz. Ek 1).

Sabit özdeğere sahip Beltrami alanları üzerinde sistematik olarak ilk defa Trkal çalışmıştır [3, 4]. Bu alanlar fizikte ve matematikte akışkanlar dinamiği, plazma fiziği ve manyetohidrodinamik, elektromanyetizma, astrofiziksel manyetik alanlar, alan teorisi, kontakt geometri ve harmonik morfizmalar alanlarında karşımıza çıkmaktadır.

Trkalyan vektörlerin alan teorik örnekleri olarak, kuvvet içermeyen (force-free) alanları [5-13] (Bkz. Ek 1) ve Öklidyen topolojik kütleli Abelyan ayar teorisini verebiliriz [14-16].

Topolojik kütleli teoriler 1981 yılında Schonfeld, 1982 yılında ise Deser, Jackiw ve Templeton tarafından (2+1) boyutlu Minkowski uzayı veya 3 boyutlu Öklidyen uzayda tanımlanmıştır [14-16]. Üç boyutlu teoriler günümüzde fizik ve matematik kavramlarının çalışılması için bir laboratuvar görevi görmektedir. Topolojik kütleli teoriler standart Maxwell, Yang-Mills, Einstein terimlerinin yanında topolojik orjinli Chern-Simons teriminden gelen topolojik kütle terimini içermektedir [17].

Bu çalışmada Rot operatörünün sabit özdeğere sahip özvektörlerini Trkalyan alan olarak isimlendireceğiz.

Sabit veya sabit olmayan özdeğere sahip kuvvet içermeyen alanlar (manyetohidrodinamik ve plazma fiziği) ve Beltrami alanları (akışkanlar dinamiği) doğal olarak zaman boyutu hariç üç boyutlu uzayda tanımlanır. Bundan dolayı Trkalyan alanlarla ilgili Öklid ize sahip, genellikle düz manifoldlar üzerinde çalışılmıştır. Literatürde bu konuyla ilgili çok fazla çalışmada bulunmaktadır. Bu çalışmaların hepsini burada aktarmak mümkün değildir.

Topolojik kütleli Abelyan ayar teorisi aslen üç boyutlu bir teori olduğundan doğal olarak üç boyutlu uzayda veya uzayzamanda tanımlanır [14-16]. Bu alan benzer bir özdeğer eşitliği

sağladığından Lorentziyen ize sahip Trkalyan alana örnek olarak gösterilebilir.

Topolojik kütleli Abelyan ayar teorisi fizikte manyetik monopoller [18-20] ve instantonlar [21-23], anyonlar [24-28] ve vorteksler [29, 33], Hall etkisi [28, 34, 35], süpersimetrik teoriler [36, 37] ve sicim teorisi [37], yüksek sıcaklık süper iletkenliği [38], değişmeli olmayan (noncommutative) geometri [35, 39, 40], holografi [41] ve AdS/CFT karşılıklılığı (correspondence) [42-44] alanlarında karşımıza çıkmaktadır.

Öklid ize sahip düz uzay $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı Trkalyan alanlarla ilgili dikkate değer çözüm metodları bulunmaktadır.

Örneğin, Chandrasekhar-Kendall [9] Trkalyan alanların çözümü için bir metod vermiştir. Chandrasekhar ve Kendall, kuvvet içermeyen manyetik alan problemini, rot operatörünün sabit özdeğere sahip özvektörleri ile ifade ederek çözümü polodial ve torodial vektör alanlarının toplamı olarak ifade etmişlerdir.

Ayrıca, (3+1) boyutlu Lorentziyen uzayzamanda Maxwell denklemlerinin Hertz potansiyeliyle çözümünde, konformal Killing vektörü kullanılarak Chandrasekhar-Kendall çözümü Benn ve Kress tarafından elde edilmiştir [45].

Diğer bir metod, $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı Trkalyan alanlarla ilgili mini-twistör çözümüdür [46] .

Fiziksel ve matematiksel önemine rağmen, Lorentziyen uzayzamanda (ve Öklid ize sahip eğri uzayzamanda) tanımlı Trkalyan alanlarla ilgili sistematik çözüm yöntemleri geliştirilmemiştir.

Biz bu tez çalışmasında, (2+1) boyutlu Lorentziyen ize sahip uzayzamanda tanımlı Trkalyan alanlar üzerinde çalışacağız.

Öncelikle bu alanlar için düz veya eğri uzayzamanda Chandrasekhar-Kendall metodunu geliştireceğiz. İkinci olarak yine bu denklem için $\mathbb{R}^{2+1}$ uzayzamanında geçerli mini-twistör çözümünü sunacağız. Daha sonra ultrahiperbolik dalga denkleminin indirgemeleri üzerinde çalışacağız. $\mathbb{R}^{2+2}$ uzayzamanında tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin John (X-ışını) dönüşümü çözümünü indirgeyerek bir çözüm sunacağız. Ayrıca, Radon dönüşümü yaklaşımında Minkowski uzayzamanının düzlemsel uzaysal kısmının doğrulardan oluştuğunu varsayarak çözüm sunacağız. En son olarak yine $\mathbb{R}^{2+2}$

uzayzamanında tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün indirgemesi metodunu yazacağız.

Bölüm 3.1’de, Chandrasekhar-Kendall metodunda diferansiyel formlardan faydalanacağız. Eğri uzayzamandaki Trkalyan alan, vektör Klein-Gordon denklemini sağlar. Bu alanı, skaler Klein-Gordon tipi bir denklemi sağlayan Debye potansiyeli ile bir konformal Killing 1-formu içeren Hansen 1-formlarını kullanarak ifade edeceğiz [47, 48].

Topolojik kütleli Abelyan ayar teorisinde, tek bir serbestlik derecesine sahip eksitasyonların skaler bir alanla temsil edildiği daha önce tartışılmıştır [15, 44]. Minkowski uzayzamanında tanımlı bu teorelin çözümü serbest, kütleli skaler, sadece Klein-Gordon, alanı cinsinden verilir [15]. Bu durum özel bir Killing 1-formun varlığından kaynaklanmaktadır. Daha sonra göreceğimiz gibi farklı Killing 1-formlar kullanıldığında Klein-Gordon denklemini daha karmaşık hale gelir.

Chandrasekhar-Kendall metodundaki genelleştirmemiz, eğri uzayzaman (veya uzay) üzerinde tanımlı Trkalyan alanları, skaler alan: Debye potansiyeli ve uyumlu bir konformal Killing 1-form cinsinden kurmamızı sağlayacaktır.

Geliştirdiğimiz Chandrasekhar-Kendall metodu için, öncelikle Minkowski uzayzamanında çeşitli koordinatlar kullanarak çözüm örnekleri sunacağız. Bu örneklerde Öklidyen silindirik Chandrasekhar-Kendall çözümüne karşılık gelen Minkowskiyen çözüm sınıfları üzerinde duracağız. Bu sınıfın en alt düzeydeki üyesi, *radyasyon yaymayan nokta yükünden* kaynaklanan, zamandan bağımsız bir alandır. Bu alan monopoller, vorteksler ve anyonlar kapsamında bir çok kez çalışılmıştır [16, 24-27].

Ayrıca, Anti-de Sitter (AdS) uzayının bir Poincaré yaması ve daha sonra de Sitter (dS) uzayzamanında çözüm örnekleri sunacağız. AdS uzayzamanında tanımlı topolojik kütleli elektromanyetik alanlarla ilgili daha önce yapılan çalışmalarda bulunan çözümlerin [43, 44] benzerlerini burada Chandrasekhar-Kendall metoduyla geliştireceğiz.

Bölüm 3.2’de, Minkowski uzayzamanı: $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Trkalyan alan denklemini mini-twistörleri kullanarak çözeceğiz.

Mini-twistör uzayı ilk defa Hitchin tarafından tanımlanmıştır [49], (ayrıca referans [50]’ye bakınız), Minkowski uzayzamanı üzerindeki mini-twistörler Ward’ın makalesinde detaylı

olarak açıklanmıştır [51]. Mini-twistör uzayı $\mathbb{R}^3$ 'de yönlendirilmiş doğruların oluşturduğu uzay $\mathbb{TS}^2$ 'dir. Bunu $\mathbb{TCP}^1$ olarak da yazmak mümkündür [49]. Bu mini-twistör uzayı, (3+1) boyutlu Minkowski uzayzamanının twistör uzayının zaman ötelemesi ile verilen Killing vektörünün etkisine bölümü olarak da bulunabilir.

Çok basit bir ifade ile twistör teorisi, (3+1) boyutlu Minkowski uzayzamanında tanımlı dalga denklemi için holomorfik fonksiyonlar kullanılarak kontur integral çözümünün yazılmasına dayanır [52].

$\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Klein-Gordon denkleminin çözümünü, $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerinde tanımlı hiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün uzaysal harmonik (y koordinatında) indirgemesi şeklinde yazabiliriz. Böyle bir mini-twistör gösterimi yazarak Minkowski uzayzamanı üzerinde tanımlı Trkalyan alan denkleminin mini-twistör çözümünü sunacağız. Bu indirgeme sonucu Trkalyan alanı, bir ışınsal (null) form, keyfi bir fonksiyon ve üstel bir çarpan cinsinden ifade edeceğiz.

Bu ifadede, harmoniklik koşulunda seçilen integrasyon çarpanının uzayzaman kısmı üstel çarpan olarak yer alır. Böylece çözümlerde seçilen integrasyon çarpanının uzayzaman kısmını içeren benzer formlara ulaşılır. Bu tez çalışmasında, Trkalyan alan çözümünü, harmoniklik koşulunun genel çözümünü kullanarak yazacağız.

Ayrıca bu bölümde, Chandrasekhar-Kendall metodunda Debye potansiyeli için mini-twistör çözüm örnekleri vereceğiz.

Daha sonra $\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin çözümlerinin indirgemesini çalışacağız.

Bölüm 3.3'de $\mathbb{R}^{2+2}$ uzayzamanında tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin klasik John (X-ışını) dönüşümü çözümünün indirgemesini sunacağız. Klasik John (X-ışını) dönüşümü twistör teorisinin öncülü olarak görülebilir [53].

$\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin klasik John dönüşümü [54] ile verilen çözümün indirgemesini yaparak, $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Klein-Gordon denkleminin çözümünü sunacağız ve Trkalyan alan çözümünü kuracağız.

Bu indirgeme sonucu bulduğumuz çözüm mini-twistör çözümünün reel bir benzeri olarak

görülebılır. Klasik John dönüşümü ve twistörler arasındaki ilişki üzerine daha önce çeşitli çalışmalar yapılmıştır [55-57]. Bizim bulduğumuz ifade de bu ilişkinin mini-twistörler için bir örneğini oluşturmaktadır.

Radon dönüşümü metodunda ise Minkowski uzayzamanının düzlemsel uzaysal kesitinin noktalar yerine doğrulardan oluştuğunu varsayacağız. Bunun sonucunda Trkalyan alan denklemlerinin daha basit hale geldiğini göreceğiz.

Bölüm 3.4’de ise $\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin twistörel çözümünü [56] indirgeyerek çözüm yazacağız.

Kompaktlaştırılmış, John dönüşümünün twistörel versiyonunu Woodhouse [56], Guillemin ve Sternberg [58] tarafından tartışılmıştır. Woodhouse ultrahiperbolik ize sahip düz uzayzamanda twistör bağlantısının bir analizini sunmuştur. Ultrahiperbolik dalga denkleminin herhangi bir lokal çözümünün, $\mathbb{R}^{2+2}$ ’nin reel twistör uzayına ait bir fonksiyondan üretilebileceğini göstermiştir [53].

Bu yöntemlerin her biri, altında yatan geometrik yapıya bağlı olarak kendine has yapı ve özelliklere sahip olduğu için bunların her birinin detaylı olarak ayrı ayrı çalışılması gerekmektedir. Fakat biz burada öncelikle bu metodları sunacağız. Bunların yapılarının tek tek çalışılması ayrı ve daha detaylı bir yaklaşım gerektirmektedir.

2. GENEL KISIMLAR

Trkalyan alanlar, rot operatörünün sabit v özdeğerine sahip özvektörleridir ve

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) - v\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.1)$$

denklemi ile verilir. Standart koordinatlar kullanarak, baz vektörleri $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ olmak üzere bileşenleri $A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)$ olan vektörü $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (A, B, C)$ şeklinde yazarsak $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\partial C/\partial y - \partial B/\partial z, \partial A/\partial z - \partial C/\partial x, \partial B/\partial x - \partial A/\partial y)$ ile verilir. Denklem (2.1)'den

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} - vA = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} - vB = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} - vC = 0, \quad (2.2)$$

eşitliklerine ulaşırız. Denklem (2.1)'de her iki tarafın diverjansını alırsak $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ olduğundan $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ buluruz.

Yine denklem (2.1)'de her iki tarafın rotasyonelini (curl) aldığımızda $\nabla^2 \mathbf{F} = -k^2 \mathbf{F}$, ($k = v$) olduğunu kolayca görebiliriz, $[(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}]$.

Bu denklemi diferansiyel formları kullanarak yazacağız.

Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ 'de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ metriği ile Hodge-yıldız operatörü $\star(dy \wedge dz) = dx$, $\star(dz \wedge dx) = dy$, $\star(dx \wedge dy) = dz$ ve $\star^2 = 1$ olarak tanımlanır, (ilgili notasyon ve kabuller için Bölüm 3.1'in girişinde verilen referansa bakınız). Alan 2-formu: F 'nin bileşenleri $A(x, y, z), B(x, y, z)$ ve $C(x, y, z)$ olmak üzere $F = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$ ise $\star F = A dx + B dy + C dz$ olarak bulunur. Trkalyan alan denklemi (2.1)'i

$$(\star d - v) \star F = 0, \quad (2.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin her iki tarafına $d\star$ işlemini uygularsak $dF = 0$ buluruz ve yine denklem (2.2) ile aynı sonuçlara ulaşırız.

Bu denklemi düz veya eğri, Öklidyen veya Lorentziyen ize sahip manifoldlar üzerinde çözmeyi amaçlıyoruz.

Minkowski uzayzamanı $\mathbb{R}^{2+1}$ 'de $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dz^2$ metriği ile Hodge-yıldız operatörü $\star(dt \wedge dx) = -dz$, $\star(dx \wedge dz) = dt$, $\star(dz \wedge dt) = -dx$ ve $\star^2 = -1$ olarak tanımlanır, (ilgili notasyon ve kabuller için Bölüm 3.1'in girişinde verilen referansa bakınız). Alan 2-formu: F 'nin bileşenleri $A(t, x, z)$, $B(t, x, z)$ ve $C(t, x, z)$ olmak üzere $F = Adt \wedge dx + Bdx \wedge dz + Cdz \wedge dt$ ise $\star F = -Adz + Bdt - Cdx$ şeklinde bulunur. Dolayısıyla denklem (2.3)'den

$$\frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial x} - \nu B = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} - \nu C = 0, \quad -\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t}\right) - \nu A = 0, \quad (2.4)$$

eşitliklerine ulaşırız.

Giriş kısmında ifade ettiğimiz üzere bu çalışmada Trkalyan alan denklemini çözmek için 4 tane metot kullanacağız.

1. Chandrasekhar-Kendall metodunun Lorentziyen ize (veya Öklidyen ize) sahip 3-boyutlu (düz veya eğri) manifoldlara genelleştirilmesi,
2. Mini-twistör metodu,
3. Ultrahiperbolik dalga denkleminin klasik John dönüşümü (X -ışını) çözümünün indirgenmesi ve Radon dönüşümü,
4. Ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün indirgenmesi.

Bu dört metodu daha detaylı olarak sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

Chandrasekhar-Kendall, $\mathbf{H}$ manyetik alan olmak üzere $\nabla^2 \mathbf{H} + \lambda^2 \mathbf{H} = 0$ vektör-dalga denkleminin çözümünü vermiştir. Bu denklemin bağımsız üç çözümü ψ skaler bir fonksiyon ve $\nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi = 0$ olmak üzere $\mathbf{L} = \nabla \psi$, $\mathbf{T} = \nabla \times (\lambda \psi)$ ve $\mathbf{S} = (1/\lambda) \nabla \times \mathbf{T}$ ile verilir. Manyetik alan $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{S} = (1/\lambda) \nabla^2 \times (\lambda \psi) + \nabla \times (\lambda \psi)$ şeklinde ifade edilir [9]. Bunları bölüm 3.1'de diferansiyel formları kullanarak yazacağız. Böylece Chandrasekhar-Kendall metodunu Öklidyen veya Lorentziyen ize sahip düz ve eğri manifoldlara genelleştireceğiz.

Mini-twistörler ilk defa Hitchin tarafından tanımlanmıştır [49] (ayrıca referans [50]'ye bakınız), Minkowski uzayzamanı üzerindeki mini-twistörler Ward'ın makalesinde detaylı olarak açıklanmıştır [51]. Mini-twistör uzayı $\mathbb{R}^3$ 'de yönlendirilmiş doğruların oluşturduğu uzay $\mathcal{TS}^2$ 'dir. Bunu $\mathcal{TCP}^1$ olarak da düşünebiliriz [49]. Ayrıca $\mathcal{TCP}^1$ mini-twistör uzayı,

C^3 (karmaşıktırılmış Öklid metriğine göre) uzayındaki kompleks ışınsal (null) düzlemleri parametrize eder [49, 51].

En basit ifade ile twistör teorisi, (3+1) boyutlu Minkowski uzayzamanında tanımlı dalga denkleminin çözümünü holomorfik fonksiyonların kontur integralleri ile ifade etmeye dayanır [52].

Reel $\mathbb{R}^{2+1}$ uzayzamanının mini-twistör uzayı TRP^1 , $\mathbb{R}^{2+1}$ 'deki ışınsal (null) düzlemlerin uzayıdır [59]. Bunun bir kompleks genişlemesi (kompleksifikasyonu) TCP^1 ise bir holomorfik teğet demetidir. Biz mini-twistörler için kompleks bir bakış açısı benimseyeceğiz.

Bölüm 3.2'de Minkowski uzayzamanı $\mathbb{R}^{2+1}$ 'deki Klein-Gordon denkleminin çözümünü, $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerinde tanımlı hiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün uzaysal harmonik (y koordinatında) indirgemesi ile yazacağız. Bu çözümü kullanarak $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Trkalyan alan denkleminin çözümünü kuracağız.

$\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı $(-\partial^2/\partial t^2 + \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\psi = 0$: ultrahiperbolik dalga denklemi $\alpha_1 = x + y$, $\alpha_2 = t + z$, $\beta_1 = t - z$, $\beta_2 = x - y$ değişkenleri ile $\partial^2\psi/\partial\alpha_1\partial\beta_2 - \partial^2\psi/\partial\alpha_2\partial\beta_1 = 0$ John denklemi haline gelir.

John denkleminin çözümü John (X-ışını) dönüşümü ile verilir. Schwartz uzayı $S(\mathbb{R}^3)$ 'e ait bir fonksiyonunun John (X-ışını) dönüşümü, bu fonksiyonun $\mathbb{R}^3$ 'deki doğrular üzerinde integrali olarak tanımlanır. Bu nedenle bu dönüşüm özellikle matematiksel tomografide X-ışını olarak da adlandırılır.

Bölüm 3.3'de $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Klein-Gordon denkleminin çözümünü $\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin klasik John (X-ışın) dönüşümü ile verilen çözümünün indirgemesiyle sunacağız ve bunu kullanarak Trkalyan alan çözümünü kuracağız.

Kompaktlaştırılmış bir John dönüşümü, $\mathbb{RP}^3$ ($\mathbb{R}^3$ 'ün bir kompaktlaştırılması) uzayında düzgün bir fonksiyonun, yönlü jeodezikler üzerinde integrali olarak verilmiştir [56]. Ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümü Woodhouse tarafından yapılmıştır [56]. Bu çözüm $\mathbb{R}^4$ 'de bulunan 2-düzlemlerin oluşturduğu Grassmannian uzayı üzerinde tanımlıdır ve John'un ultrahiperbolik dalga denklemini sağlar [53].

Bölüm 3.4’de $\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denklemini 56. referansın notasyonu ile ifade edeceğiz: $(\partial^2/\partial t_1^2 + \partial^2/\partial t_2^2 - \partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2)\psi = 0$. Bu denklemin twistör çözümünün indirgemesini yaparak $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Klein-Gordon denkleminin çözümünü sunacağız. Bu çözümü kullanarak Trkalyan alan çözümünü yazacağız.



3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. CHANDRASEKHAR-KENDALL METODU

Bu bölümde Chandrasekhar-Kendall metodunu diferansiyel formlarla ifade ederek Lorentziyen ize sahip (veya Öklidyen ize sahip düz veya eğri) uzayzamanda tanımlı Trkalyan alan denklemini çözeceğiz.

Trkalyan alan 2-formu F , $(\Delta - cv^2) \star F = 0$ denklemini sağlar. M^n boyutlu manifold üzerinde Laplace-Beltrami operatörü $\Delta = (d + \delta)^2 = \delta d + d\delta$ ve ω_r için dış türevin eşleniği (kodiferansiyel) Öklid ize sahip metrikte $\delta \omega_r = (-1)^{n \cdot (r+1)+1} \star d \star \omega_r$, Lorentziyen ize sahip metrikte $\delta \omega_r = (-1)^{n \cdot (r+1)} \star d \star \omega_r$ olarak tanımlanmıştır [60]. Böylece Öklid ize sahip metrikte $c=1$ $[(\Delta - v^2) \star F = 0, (\text{Helmholtz denklemleri})]$, Lorentziyen ize sahip metrikte ise $c=-1$ $[(\Delta + v^2) \star F = 0, (\text{Klein-Gordon denklemleri})]$ olur, (Bkz. Ek 2).

Laplace-Beltrami operatörü, Öklid ve Lorentziyen izde sırasıyla Laplasyen veya D'alembertiyen (dalga) operatörlerine karşılık gelir. Biz bu bölümde Laplace-Beltrami operatörünü her ikisi yerine de kullanacağız.

Hansen vektörleri [47, 48], $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı vektörel Helmholtz denkleminin çözümü için kullanışlı bir ayrışma sağlar [9]. Bu vektörleri diferansiyel formlarla ifade edeceğiz.

Chandrasekhar-Kendall metodundaki T, S ve L 1-formlarını

$$T = \star d(\psi \omega), \quad S = \frac{1}{v} \star dT = \frac{1}{v} \star d \star d(\psi \omega), \quad L = d\psi, \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradaki Debye potansiyeli ψ skaler bir fonksiyon olmak üzere Helmholtz (Öklid iz) ve Klein-Gordon (Lorentziyen iz) denklemlerini sağlar. Ayrıca ω 'yı aşağıda göreceğimiz üzere belirli bir konformal Killing 1-form olarak alacağız. T, S ve L sırasıyla toroidal, poloidal ve skaloidal 1-formlar olarak isimlendirilir (Ref. 13 ve oradaki referanslara bakınız.)

Bu denklemden görüleceği üzere $\star dT = vS$ eşitliği zaten sağlanmaktadır. Ayrıca

$\star d(T + S) = \nu(T + S)$ olması için $\star dS = \nu T$ eşitliğine ihtiyacımız vardır.

Chandrasekhar-Kendall metodunda, denklem (2.3)'ün çözümü olan $\star F$

$$\star F = T + S = \star d(\psi \omega) + \frac{1}{\nu} \star d \star d(\psi \omega), \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Chandrasekhar-Kendall ayar potansiyeli: $A = \psi \omega + (1/\nu) \star d(\psi \omega)$, $F = dA$ olarak yazılabilir.

T ve S 1-formlarını ω ve $d\omega$ terimlerini sonra kullanmak üzere form olarak koruyarak yazarsak

$$T = \star(d\psi \wedge \omega) + \psi \star d\omega = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \psi \omega_\nu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\gamma + \psi \star d\omega, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\nu} [\star d \star (d\psi \wedge \omega) + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega] \\ &= \frac{1}{\nu} [(-1)^s (\Delta \psi \omega + \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \omega^\mu dx^\nu - \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \omega_\nu dx^\nu + \nabla_\mu \psi \nabla^\nu \omega_\nu dx^\mu) \\ &\quad + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega], \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak buluruz (Bkz. Ek 2).

T ve S 1-formlarını eşitlik (3.2)'de yerine yazarsak

$$\star F = \star(d\psi \wedge \omega) + \psi \star d\omega + \frac{1}{\nu} [\star d \star (d\psi \wedge \omega) + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega], \quad (3.5)$$

bulunur. Böylece Trkalyan alan denklemi (2.3)'ün sol tarafını

$$\begin{aligned} (\star d - \nu) \star F &= \frac{1}{\nu} [\star d \star d \star d(\psi \omega) - \nu^2 \star d(\psi \omega)] \\ &= \frac{1}{\nu} \star d [(-1)^s (\Delta \psi \omega + \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \omega^\mu dx^\nu - \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \omega_\nu dx^\nu + \nabla_\mu \psi \nabla^\nu \omega_\nu dx^\mu) \\ &\quad + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega - \nu^2 (\psi \omega)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade ederiz. Dolayısıyla $(\star d - \nu) \star F = 0$ denklemi ancak ve ancak $\star dS = \nu T$ [eşitlik (3.3), (3.4)](modülo kapalı form) olursa sağlanır.

Eğer ω 'yı bir konformal Killing 1-form olarak alırsak (manifold üzerinde tanımlı konformal

Killing vektör X 'in metrik duali: $\omega_\mu = g_{\mu\nu}X^\nu$; $\mathcal{L}_X g = 2\kappa g$)

$$\nabla_\mu \omega_\nu + \nabla_\nu \omega_\mu = 2\kappa g, \quad (3.7)$$

eşitliği ile denklem (3.6)'nın sağ tarafını daha sade bir şekilde ifade edebiliriz. Ayrıca s metrikteki $(-)$ sayısı olmak üzere $\nabla^\mu \omega_\nu + \nabla_\nu \omega^\mu = 2\kappa \delta_\nu^\mu \Rightarrow \nabla^\nu \omega_\nu = 3\kappa = (-1)^s \star d \star \omega$ eşitliklerine ulaşırız [dolayısıyla bir Killing 1-form ($\kappa = 0$) ko-kapalı (co-closed) $\star d \star \omega = 0$]. Böylece, $\nabla_\mu \nabla_\nu \psi = \nabla_\nu \nabla_\mu \psi$ olduğundan denklem (3.6)'daki üç terimi

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \psi \omega^\mu dx^\nu - \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \omega_\nu dx^\nu + \nabla_\mu \psi \nabla^\nu \omega_\nu dx^\mu = d(\mathcal{L}_X \psi) + \kappa d\psi, \quad (3.8)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliği denklem (3.6)'da kullanarak

$$\begin{aligned} (\star d - \nu) \star F &= \frac{1}{\nu} \star d [(-1)^s \Delta \psi \omega + \frac{1}{3} \star d \star \omega \wedge d\psi + \star(d\psi \wedge \star d\omega) \\ &\quad + \psi \star d \star d\omega - \nu^2 \psi \omega], \end{aligned} \quad (3.9)$$

denklemini elde ederiz ($d^2 \mathcal{L}_X \psi = 0$). Böylece alan denklemi (2.3)'ün sağlanması için

$$(-1)^s \Delta \psi \omega + \frac{1}{3} \star d \star \omega \wedge d\psi + \star(d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega - \nu^2 \psi \omega = 0, \quad (3.10)$$

şartının (modülo kapalı 1-form) sağlanması gerektiğini görürüz. Bu denklemdeki ilk ve son terimler, Bölüm 1.GİRİŞ kısmında bahsedildiği gibi serbest, kütleli skaler, sadece Klein-Gordon, alan denklemi [15] (Lorentziyen iz) oluşturur. Chandrasekhar-Kendall'ın orjinal çözümündeki Helmholtz denklemi (Öklidyen iz) bu terimlerin benzerlerini içerir [9]. Uygun bir ω konformal Killing 1-form seçimiyle arada kalan üç terimi yok etmek mümkün olabilir.

Eğer ω 1-formu kapalı $d\omega = 0$ veya duali kapalı (ko-kapalı: co-closed) $\star d \star \omega = 0$ (hatta $\star d \omega \sim \omega$) ise denklem (3.10) daha basit bir hale gelir. Bunun yanı sıra $\star d \star d\omega$ terimi, $\Delta \omega$ ve manifoldun eğriliği ile ilişkilidir.

Ayrıca, bu formülleri yukarıdaki gibi yerel koordinatlar yerine dual çatıda da ifade edebiliriz.

Böylece ω 'yı konformal Killing 1-form (metriğe bağlı olarak konformal Killing vektörün metrik duali) olarak alırsak ve denklem (3.10)'u çözersek ψ 0-formunu buluruz. Bu ψ ve ω ile (3.2) denkleminde alan 2-formu F 'yi kurarız.

3.1.1. Düz Öklidyen Uzayda Çözüm Örneği

Örnek 3.1.1.1 Öklid uzayında $x^1 = (u^2 - v^2)/2$, $x^2 = uv$, $x^3 = z$ parabolik silindirik koordinatları kullanırsak, bu durumda metrik $ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(1, 1, 1)$ ve dual çatı $\omega^1 = Adu$, $\omega^2 = Adv$, $\omega^3 = dz$, ($A^2 = u^2 + v^2$) olmak üzere

$$ds^2 = A^2 du^2 + A^2 dv^2 + dz^2, \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir. Bu metrik için bir ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formunun (metrik katsayıları z koordinatından bağımsız olduğu için) $\omega = dz$ olduğu görülür.

Böylece $d\omega = 0$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta\psi - \lambda^2\psi = 0$ Helmholtz denklemi haline gelir. Daha açık olarak $\Delta\psi = -1/A^2(\psi_{uu} + \psi_{vv}) - \psi_{zz}$ olmak üzere Helmholtz denklemini $1/A^2(\psi_{uu} + \psi_{vv}) + \psi_{zz} + \lambda^2\psi = 0$ şeklinde yazarız. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$ olarak alırsak $Z'' + \alpha^2 Z = 0$, $U'' - (k^2 u^2 + c)U = 0$ ve $V'' - (k^2 v^2 - c)V = 0$ ($\alpha^2 = k^2 + \lambda^2$, c : ayrılma sabiti) diferansiyel denklemlerine ulaşırız. Buradaki son iki denklem, yeni değişkenleri $\tilde{u} = (2k)^{1/2}u$ ve $\tilde{v} = (2k)^{1/2}v$ alırsak $\ddot{U} + [p + (1/2) - (1/4)\tilde{u}^2]U = 0$ ve $\ddot{V} + [q + (1/2) - (1/4)\tilde{v}^2]V = 0$ parabolik silindir diferansiyel denklemlerine iner. [$\tilde{c} = c/(2k)$, $p = -\tilde{c} - (1/2)$, $q = \tilde{c} - (1/2)$ ve $(\cdot) = d/d(\tilde{u}/\tilde{v})$]. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü D_p parabolik-silindirik fonksiyon ile verilir [75, s.116-s.117]. Böylece çözümü

$$\psi = \left(a_1 e^{-i\alpha z} + a_2 e^{i\alpha z} \right) \left[b_1 D_p(\sqrt{2k}u) + b_2 D_{-p-1}(i\sqrt{2k}u) \right] \left[c_1 D_q(\sqrt{2k}v) + c_2 D_{-q-1}(i\sqrt{2k}v) \right], \quad (3.12)$$

şeklinde buluruz. Eğer $a_2 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 1$ ve $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$ alırsak $\psi = e^{i\alpha z} D_p(\sqrt{2k}u) D_q(\sqrt{2k}v)$ şeklinde ifade edebiliriz. Böylece (3.2) denkleminde $\star F$ 1-formunu

$$\begin{aligned} \star F = \frac{e^{i\alpha z}}{2} & \left\{ \sqrt{2k} \left[-D_p(D_{q+1} - qD_{q-1})du + D_q(D_{p+1} - pD_{p-1})dv \right] \right. \\ & - \frac{1}{\lambda} \left[i\alpha\sqrt{2k} \left[D_q(D_{p+1} - pD_{p-1})du + D_p(D_{q+1} - qD_{q-1})dv \right] \right. \\ & \left. \left. + 2k^2 D_p D_q dz \right] \right\}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

şeklinde buluruz. Bu çözüm alan denklemini sağlar $[(\star d - \lambda) \star F = 0]$.

3.1.2. Minkowski Uzayzamanında Çözüm Örnekleri

$\mathbb{R}^{2+1}$ uzayzamanında t , x ve z koordinatlarını kullanarak örnekler çözeceğiz. Mini-twistörlerde y koordinatında indirgeme yazacağımız için burada y koordinatı yerine z koordinatını kullanacağız.

Örnek 3.1.2.1. Minkowski uzayzamanının $z > 0$, $|t| < z$ çeyrek diliminde tanımlı Rindler dilimi üzerinde $t = r \sinh \varphi$, $x = x$, $z = r \cosh \varphi$: $z^2 - t^2 = r^2$ koordinatlarını kullanabiliriz. Bu durumda metrik $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve dual çatı $\omega^0 = rd\varphi$, $\omega^1 = dx$, $\omega^2 = dr$ şeklinde ifade edilir [Bkz. Ek-2, eşitlik (2.6)]. ($\varphi \rightarrow \tau$: zamansal koordinat, Rindler uzayzamanı $ds^2 = -z^2 dt^2 + dx^2 + dz^2$ metriği ile tanımlanır [61]).

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formlarını bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formunu $\omega = \omega^1$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek 2.1, denklem (2.7)]. Böylece, $d\omega = 0$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta\psi + v^2\psi = 0$ Klein-Gordon denklemi haline gelir. Daha açık olarak, Laplace-Beltrami operatörü $\Delta\psi = (1/r^2)\psi_{\varphi\varphi} - \psi_{rr} - (1/r)\psi_r - \psi_{xx}$ olmak üzere Klein-Gordon denklemini $(1/r^2)\psi_{\varphi\varphi} - \psi_{rr} - (1/r)\psi_r - \psi_{xx} + v^2\psi = 0$ şeklinde yazarız. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(\varphi, x, r) = \Phi(\varphi)X(x)R(r)$ olarak alırsak $X'' + \kappa^2 X = 0$, $\Phi'' - m^2\Phi = 0$ ve $r^2 R'' + rR' - (\lambda^2 r^2 + m^2)R = 0$, ($\lambda^2 = \kappa^2 + v^2$) diferansiyel denklemlerine ulaşırız.

Buradaki son denklem, $u = \lambda r$ kullanarak, modifiye Bessel diferansiyel denklemine iner: $u^2 \ddot{R} + u\dot{R} - (u^2 + m^2)R = 0$ [$(\dot{}) = d/du$]. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modifiye Bessel fonksiyonları: I_m ve K_m cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece Debye potansiyelini

$$\psi(\varphi, x, r) = \left(a_1 e^{-i\kappa x} + a_2 e^{i\kappa x} \right) \left(b_1 e^{-m\varphi} + b_2 e^{m\varphi} \right) \left[c_1 I_m(u) + c_2 K_m(u) \right], \quad (3.14)$$

$u > 0$, olarak buluruz. Eğer $a_1 = 1$, $b_2 = 1$ ve $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$ olarak alırsak, $\psi(\varphi, x, r) = ce^{m\varphi - i\kappa x} K_m(u)$ fonksiyonu ve $\omega = \omega^1$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5)

eşitliğinden F 2-formunu

$$\begin{aligned}
 F = & c\kappa e^{m\varphi - i\kappa x} \\
 & \left\{ \left[\left(\frac{imt}{r^2} - \frac{m\kappa z}{vr^2} \right) K_m(u) + \left(-\frac{i\lambda z}{2r} + \frac{\lambda \kappa t}{2vr} \right) (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right] dz \wedge dx \right. \\
 & + \left[-\left(\frac{im^2}{vr^2} + \frac{i\lambda^2}{2v} \right) K_m(u) + \frac{i\lambda}{2vr} (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{i\lambda^2}{4v} (K_{m-2}(u) + K_{m+2}(u)) \right] dz \wedge dt \right. \\
 & \left. + \left[\left(-\frac{imz}{r^2} + \frac{m\kappa t}{vr^2} \right) K_m(u) + \left(\frac{i\lambda t}{2r} - \frac{\kappa \lambda z}{2vr} \right) (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right] dt \wedge dx \right\}, \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

buluruz. Bu durumda eğer $m = 0$ alırsak $\psi(t, x, z) = ce^{-i\kappa x} K_0(u)$ fonksiyonunu ve aynı Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden F alan 2-formunu

$$\begin{aligned}
 F = & c\kappa \frac{\lambda}{v} e^{-i\kappa x} \left[(iv \sinh \varphi - \kappa \cosh \varphi) K_1(u) dt \wedge dx \right. \\
 & \left. + (iv \cosh \varphi - \kappa \sinh \varphi) K_1(u) dx \wedge dz + i\lambda K_0(u) dt \wedge dz \right], \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

buluruz.

Örnek 3.1.2.2. Minkowski uzayzamanında metrik $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve dual çatı $\omega^0 = dt$, $\omega^1 = dx$, $\omega^2 = dz$ şeklinde ifade edilir [Bkz. Ek-2.1, eşitlik (2.8)].

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formları bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formunu $\omega = xdt - tdx$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek 2.1, denklem (2.9)]. Daha açık olarak, Laplace-Beltrami operatörü $\Delta\psi = \psi_{tt} - \psi_{xx} - \psi_{zz}$ olmak üzere denklem (3.10)'dan $x\Delta\psi - 2\psi_x + v^2x\psi = 0$ ve $t\Delta\psi + 2\psi_t + v^2t\psi = 0$ denklemleri elde edilir. Bu iki denklemden $x\psi_t + t\psi_x = 0$ eşitliğine ulaşırız. Bu denklemleri değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(t, x, z) = \psi(r(t, x), z) = R(r)Z(z)$ olarak alırsak $Z'' + a\kappa^2 Z = 0$ ve $R'' + (3/r)R' - \lambda^2 R = 0$, ($\lambda = \sqrt{a\kappa^2 + v^2}$ ve $r = \sqrt{x^2 - t^2}$, $t = r \sinh \tau$, $x = r \cosh \tau$: τ zamansal koordinat olmak üzere bir önceki örnekte olduğu gibi Rindler metriği, $\sqrt{a} = -i$ veya $\sqrt{a} = 1$: $a = \mp 1$) diferansiyel denklemlerine ulaşırız. Buradaki son denklemde $R(r) = (1/r)H(r)$ dönüşümünü uygularsak $r^2 H'' + rH' - (\lambda^2 r^2 + 1)H = 0$ denkleminde ulaşırız.

Bu denklem, $u = \lambda r$ kullanarak, $a\kappa^2 + v^2 < 0$ için Bessel diferansiyel denkleminde iner: $u^2 \ddot{H} + u\dot{H} + (u^2 - 1)H = 0$, $[\dot{(\cdot)} = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür Bessel fonksiyonları J_1 ve Y_1 cinsinden verilir [75, s.4]. Eğer $a\kappa^2 + v^2 > 0$ ise

bu denklem modifiye Bessel diferansiyel denkleminin: $u^2\ddot{H} + u\dot{H} - (u^2 + 1)H = 0$, $[(\dot{}) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modifiye Bessel fonksiyonları: I_1 ve K_1 cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece çözümü

$$\psi = e^{-i\kappa z} \left[c_1 I_1(\lambda r) + c_2 K_1(\lambda r) \right] / r, \quad (3.17)$$

şeklinde buluruz. Eğer $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ alırsak $\psi = e^{-i\kappa z} K_1(\lambda r) / r$ fonksiyonu ve $\omega = xdt - tdx$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = e^{-i\kappa z} \left[\frac{1}{r} K_1(\lambda r) (vx - i\kappa t) dt - \frac{1}{r} K_1(\lambda r) (vt - i\kappa x) dx - \lambda K_0(\lambda r) dz \right], \quad (3.18)$$

buluruz.

Örnek 3.1.2.3. Minkowski uzayzamanında (uzaysal düzlemde) $t = t$, $x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$: $x^2 + z^2 = r^2$ polar koordinatları kullanarak metrik $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve dual çatı $\omega^0 = dt$, $\omega^1 = dr$, $\omega^2 = r d\varphi$ şeklinde ifade edilir [Bkz. Ek-2.1, eşitlik (2.10)].

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formlarını bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formu $\omega = \omega^0$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek-2.1, denklem (2.11)]. Böylece $d\omega = 0$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta \psi + v^2 \psi = 0$ Klein-Gordon denkleminin ineri. Daha açık olarak, $\Delta \psi = \psi_{tt} - \psi_{rr} - (1/r) \psi_r - (1/r^2) \psi_{\varphi\varphi}$ olmak üzere Klein-Gordon denklemini $\psi_{tt} - \psi_{rr} - (1/r) \psi_r - (1/r^2) \psi_{\varphi\varphi} + v^2 \psi = 0$ şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemin değişkenlerine ayrılabilmesi için $\psi(t, r, \varphi) = T(t)R(r)\Phi(\varphi)$ alırsak $T'' + a\kappa^2 T = 0$, $\Phi'' + m^2 \Phi = 0$ ve $r^2 R'' + rR' - (\lambda^2 r^2 + m^2)R = 0$ ($\lambda^2 = v^2 - a\kappa^2$) diferansiyel denklemlerine ulaşırız.

Buradaki son denklem, $u = \lambda r$ kullanarak modifiye Bessel diferansiyel denkleminin ineri: $u^2 \ddot{R} + u \dot{R} - (u^2 + m^2)R = 0$ $[(\dot{}) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modifiye Bessel fonksiyonları: I_m ve K_m cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece Debye potansiyelini

$$\psi(t, r, \varphi) = \left(a_1 e^{-i\sqrt{a}\kappa t} + a_2 e^{i\sqrt{a}\kappa t} \right) \left(b_1 e^{-im\varphi} + b_2 e^{im\varphi} \right) [c_1 I_m(u) + c_2 K_m(u)], \quad (3.19)$$

$u > 0$, buluruz. Eğer $a_1 = b_1 = 1$ ve $a_2 = b_2 = c_1 = 0$ alırsak $\psi(t, r, \varphi) = c e^{-i(m\varphi + \sqrt{a}\kappa t)} K_m(u)$

fonksiyonunu ve $\omega = \omega^0$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden F alan 2-formunu

$$\begin{aligned}
F = & ce^{-i(m\varphi + \sqrt{a}\kappa t)} \\
& \left\{ \left[\left(\frac{-imz}{r^2} + \frac{m\sqrt{a}\kappa x}{vr^2} \right) K_m(u) + \left(\frac{\lambda x}{2r} - \frac{i\sqrt{a}\kappa \lambda z}{2vr} \right) (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right] dt \wedge dx \right. \\
& + \left[\frac{im\sqrt{a}\kappa}{vr} K_m(u) - \frac{\lambda}{2vr} (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) + \frac{\lambda^2}{4v} (K_{m-2}(u) + 2K_m(u) \right. \\
& \quad \left. \left. + K_{m+2}(u) \right) \right] dx \wedge dz \\
& \left. + \left[\left(\frac{imx}{r^2} + \frac{m\sqrt{a}\kappa z}{vr^2} \right) K_m(u) + \left(\frac{\lambda z}{2r} + \frac{i\sqrt{a}\kappa \lambda x}{2vr} \right) (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right] dt \wedge dz \right\}, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

buluruz. Bu durumda, $m = 0$, $c_1 = 0$ ve $c_2 = -\frac{q}{2\pi}$ alırsak $\psi(t, x, z) = (-q/2\pi)e^{-i\sqrt{a}\kappa t} K_0(u)$ fonksiyonunu ve aynı Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden F alan 2-formunu

$$\begin{aligned}
F = & -\frac{q}{2\pi} \frac{\lambda}{v} e^{-i\kappa\sqrt{a}t} \left[(v \cos \varphi - i\sqrt{a}\kappa \sin \varphi) K_1(u) dt \wedge dx + \lambda K_0(u) dx \wedge dz \right. \\
& \left. + (v \sin \varphi + i\sqrt{a}\kappa \cos \varphi) K_1(u) dt \wedge dz \right], \quad (3.21)
\end{aligned}$$

buluruz.

Kaynak 1-formunu içeren alan denkleminde: $\star d \star F - v \star F = J$, ($J = J_0 dt + J_1 dx + J_2 dz$, $F = F_{01} dt \wedge dx + F_{12} dx \wedge dz + F_{20} dz \wedge dt \Rightarrow \star F = F_{12} dt - F_{20} dx - F_{01} dz$) $(F_{01,1} + F_{02,2}) + v F_{12} = -J_0$, $(F_{01,0} + F_{12,2}) + v F_{02} = -J_1$ ve $(F_{02,0} - F_{12,1}) - v F_{01} = -J_2$ eşitliklerine ulaşırız.

Literatürdeki vektör notasyonu ile tutarlılık amacıyla bu denklemleri vektörler cinsinden ifade edeceğiz [24-27].

Elektrik alan vektörü $\mathbf{E} = E^1 \mathbf{e}_1 + E^2 \mathbf{e}_2$ ($E^1 = E_1$, $E^2 = E_2$) ve manyetik alan B olmak üzere $F = E^1 dt \wedge dx + B dx \wedge dz + E^2 dt \wedge dz$, ($E_1 = F_{01}, B = F_{12}, E_2 = F_{02}$) şeklinde yazabiliriz. Alan denkleminde $(\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2) + vB = -J_0$, $(\partial_0 E^1 + \partial_2 B) + vE^2 = -J_1$ ve $(\partial_0 E^2 - \partial_1 B) - vE^1 = -J_2$ eşitliklerini elde ederiz. Böylece eşitlik (3.21)'den elektrik alanının bileşenlerini $E^1 = -(q/2\pi)(\lambda/v)e^{-i\kappa\sqrt{a}t} (v \cos \varphi - i\sqrt{a}\kappa \sin \varphi) K_1(\lambda r)$ ve $E^2 = -(q/2\pi)(\lambda/v)e^{-i\kappa\sqrt{a}t} (v \sin \varphi + i\sqrt{a}\kappa \cos \varphi) K_1(\lambda r)$, manyetik alanı ise $B = -(q/2\pi)(\lambda^2/v)e^{-i\kappa\sqrt{a}t} K_0(\lambda r)$ buluruz. Bunları polar koordinatlarda

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\frac{q}{2\pi} \frac{\lambda}{v} e^{-i\kappa\sqrt{a}t} (v \mathbf{e}_r(\varphi) + i\sqrt{a}\kappa \mathbf{e}_\varphi) K_1(\lambda r), \\
B &= -\frac{q}{2\pi} \frac{\lambda^2}{v} e^{-i\kappa\sqrt{a}t} K_0(\lambda r), \quad (3.22)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz, $[\mathbf{e}_r(\varphi) = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2]$.

Bu alanın $\mathbf{r} = r^1 \mathbf{e}_1 + r^2 \mathbf{e}_2 = 0$ 'daki davranışını anlayabilmek için, xz -düzleminde, orjin merkezli, r yarıçaplı D diski üzerinde ilk denklemi: $(\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2) + \nu B = -J_0$ (Gauss Yasası) integre ederek

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{E} d^2x + \nu \int_D B d^2x = - \int_D J_0 d^2x, \quad (3.23)$$

buluruz, ($r \rightarrow \infty$ için D tüm düzlemi kaplar). Bu eşitliğin sol tarafındaki birinci integrali, Green teoremini kullanarak hesaplayabiliriz. Böylece

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{E} d^2x = \int_C \mathbf{E} d\ell = -q e^{-i\kappa\sqrt{at}} \lambda r K_1(\lambda r), \quad (3.24)$$

buluruz, $[d\ell = \mathbf{e}_r(\varphi) r d\varphi, \mathbf{e}_r(\varphi) \perp C = \partial D]$. Diskin yarıçapı: $r \rightarrow \infty$ için $K_m(u) \sim \sqrt{\pi/2} e^{-u}/u^{1/2}$ olduğundan ($\lambda > 0$ varsayacağız, $u = \lambda r$) bu integral yok olur.

Aynı eşitliğin sol tarafındaki ikinci integrali ise $[u^m K_m(u)]' = -u K_{m-1}(u)$ kullanarak $m=1$ ve $u \rightarrow 0$ iken $K_1(u) \cong 1/u$ olduğundan, $[u \rightarrow \infty$ iken $u K_1(u) \rightarrow 0]$

$$\phi_B = \int_D B d^2x = -q \frac{1}{\nu} e^{-i\kappa\sqrt{at}} \int_{u=0}^{\infty} K_0(u) u du = -q \frac{1}{\nu} e^{-i\kappa\sqrt{at}}, \quad (3.25)$$

buluruz.

Böylece

$$\int_D J_0 d^2x = -\nu \phi_B = q e^{-i\kappa\sqrt{at}}, \quad (3.26)$$

denklemine ulaşırız. Bu denklemin çözümünü $J_0 = q e^{-i\kappa\sqrt{at}} \delta(r)$ olarak buluruz.

Örnek 3.1.2.4. Minkowski uzayzamanında Ω sabit açısal hız olmak üzere dönen bir çatıda [62] metrik için $t = t, x = r \cos(\varphi + \Omega t), z = r \sin(\varphi + \Omega t): x^2 + z^2 = r^2$ koordinatlarını kullanabiliriz. Bu durumda metrik $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b, \eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve dual çatı $\omega^0 = dt, \omega^1 = dr, \omega^2 = r(d\varphi + \Omega dt)$ şeklinde ifade edilir [Bkz. Ek-2.1, eşitlik (2.12)].

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formları bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formunu $\omega = \omega^0$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek-2.1, denklem (2.13)]. Böylece $d\omega = 0$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta\psi + v^2\psi = 0$ Klein-Gordon denklemine ulaşırız. Daha açık olarak, Laplace-Beltrami operatörü $\Delta\psi = [(\partial_t - \Omega\partial_\phi)^2 - (1/r)\partial_r(r\partial_r) - (1/r^2)\partial_\phi^2]\psi$ olmak üzere Klein-Gordon denklemini $[(\partial_t - \Omega\partial_\phi)^2 - (1/r)\partial_r(r\partial_r) - (1/r^2)\partial_\phi^2]\psi + v^2\psi = 0$ şeklinde ifade edilebiliriz. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(t, r, \phi) = T(t)R(r)\Phi(\phi)$ olarak alırsak $\Phi'' + m^2\Phi = 0$, $T'' + 2i\Omega mT' + (a\kappa^2 - \Omega^2 m^2)T = 0$ ve $r^2 R'' + rR' - (\lambda^2 r^2 + m^2)R = 0$ ($\lambda^2 = v^2 - a\kappa^2$) diferansiyel denklemlerine ulaşırız.

Buradaki son denklem, $u = \lambda r$ kullanarak modifiye Bessel diferansiyel denklemine iner: $u^2 \ddot{R} + u\dot{R} - (u^2 + m^2)R = 0$ [$(\dot{}) = d/du$]. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modifiye Bessel fonksiyonları: I_m ve K_m cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece Debye potansiyelini

$$\begin{aligned} \psi(t, r, \phi) = & (b_1 e^{-i(\Omega m + \sqrt{a}\kappa)t} + b_2 e^{i(\Omega m + \sqrt{a}\kappa)t}) (a_1 e^{-im\phi} + a_2 e^{im\phi}) \\ & [c_1 I_m(u) + c_2 K_m(u)], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$u > 0$, olarak buluruz ($\sqrt{a} = -i$ veya $\sqrt{a} = 1$: $a = \mp 1$). Bu potansiyel $\Omega \rightarrow 0$ için eşitlik (3.19)'a iner. Eğer $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ ve $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_1 = 0$ olarak alırsak $\psi(t, r, \phi) = c e^{-im\phi} e^{-i(\Omega m + \sqrt{a}\kappa)t} K_m(u)$ fonksiyonu ve $\omega = \omega^0$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden F alan 2-formunu

$$\begin{aligned} F = & c e^{-i(m\phi + (\Omega m + \sqrt{a}\kappa)t)} \\ & \left\{ \left[\frac{m^2}{vr} K_m(u) + \frac{\lambda}{2v} (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\lambda^2 r}{4v} (K_{m-2}(u) + 2K_m(u) + K_{m+2}(u)) \right] dr \wedge d\phi \right. \\ & \quad + \left[imK_m(u) + \frac{i\sqrt{a}\kappa\lambda r}{2v} (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right] d\phi \wedge dt \\ & \quad \left. + \left[\left(\frac{m^2\Omega}{vr} + \frac{\sqrt{a}\kappa m}{vr} \right) K_m(u) + \left(\frac{\lambda\Omega}{2v} + \frac{\lambda}{2} \right) (K_{m-1}(u) + K_{m+1}(u)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\lambda^2\Omega r}{4v} (K_{m-2}(u) + 2K_m(u) + K_{m+2}(u)) \right] dr \wedge dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

buluruz. Bu durumda eğer $m = 0$ alırsak $\psi(t, r, \phi) = c e^{-i\sqrt{a}\kappa t} K_0(u)$ fonksiyonu ve aynı

Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden F alan 2-formunu

$$F = c\lambda e^{-i\sqrt{a}\kappa t} \left[\frac{\lambda r}{v} K_0 dr \wedge d\varphi + \left(-K_1 + \frac{\lambda \Omega r}{v} K_0 \right) dr \wedge dt + \frac{i\sqrt{a}\kappa r}{v} K_1 dt \wedge d\varphi \right], \quad (3.29)$$

buluruz.

Örnek 3.1.2.5. Minkowski uzayzamanında $t = t$, $x = c \cosh u \cos v$, $z = c \sinh u \sin v$ eliptik koordinatlarını kullanabiliriz [63]. Bu durumda metrik $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve $h^2 = c^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)$ için dual çatı $\omega^0 = dt$, $\omega^1 = hdu$, $\omega^2 = hdv$ olmak üzere

$$ds^2 = -dt^2 + h^2 du^2 + h^2 dv^2, \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu metrik için bir ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formu (metrik katsayıları t koordinatından bağımsız olduğu için) $\omega = dt$ olarak alınabilir.

Böylece $d\omega = 0$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0$ Klein-Gordon denkleminin bir örneğidir. Daha açık olarak, $\Delta\psi = \psi_{tt} - (1/h^2)(\psi_{uu} + \psi_{vv})$ olmak üzere Klein-Gordon denklemini $\psi_{tt} - (1/h^2)(\psi_{uu} + \psi_{vv}) + \lambda^2\psi = 0$ şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(t, u, v) = T(t)U(u)V(v)$ olarak alırsak $T'' + \omega^2 T = 0$ ve $U'' - (a - 2q \cosh 2u)U = 0$ modifiye Mathieu ve $V'' + (a - 2q \cos 2v)V = 0$ Mathieu diferansiyel denklemlerine ulaşırız [$\omega^2 = p + \lambda^2$, $a = \sigma - \varepsilon/2$, $q = \varepsilon/4$, $\varepsilon = pc^2$, p ve σ ayrılma sabitleridir].

Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri sırasıyla $U(u)$: modifiye Mathieu ve $V(v)$: Mathieu fonksiyonları cinsinden verilir [68, s.952]. Böylece çözümü

$$\psi(t, u, v) = (a_1 e^{-i\omega t} + a_2 e^{i\omega t}) U(u) V(v), \quad (3.31)$$

olarak buluruz. Eğer $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ alırsak $\psi(t, u, v) = e^{-i\omega t} U(u) V(v)$ şeklinde yazabiliriz. Bu örnekte F alan 2-formunu bulmayacağız.

Örnek 3.1.2.6. Minkowski uzayzamanında $u = (t - z)/\sqrt{2}$, $v = (t + z)/\sqrt{2}$, $x = x$ ışınsal (null) koordinatları kullanabiliriz. Bu durumda metrik $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$, η_{ab} 'nin sıfırdan farklı bileşenleri $-\eta_{01} = -\eta_{10} = \eta_{22} = 1$ ve dual çatı $\omega^0 = du$, $\omega^1 = dv$, $\omega^2 = dx$ şeklinde ifade edilebilir [Bkz. Ek-2.1, eşitlik (2.14)].

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formları bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formunu $\omega = \omega^0$, $\omega = \omega^1$ veya $\omega = \omega^2$ 'den herhangi biri olarak alabiliriz [Bkz. Ek-2.1, denklem (2.15)]. Böylece $d\omega = 0$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0$ Klein-Gordon denklemine iner. Daha açık olarak, Laplace-Beltrami operatörü $\Delta\psi = 2\psi_{uv} - \psi_{xx}$ olmak üzere Klein-Gordon denklemini $2\psi_{uv} - \psi_{xx} + \lambda^2\psi = 0$ şeklinde buluruz. Burada

$$\psi(u, v, x) = e^{-ikv}G(u, x), \quad G(u, x) = e^{-i(\lambda^2/2k)u}\phi(u, x) \quad (3.32)$$

alırsak, $\phi(u, x)$ fonksiyonunun $2ik\phi_u + \phi_{xx} = 0$ şeklinde Schrodinger tipi bir denklemi sağladığını görürüz.

Bu denklemin bir çözümü $\phi(u, x) = \exp[i(b^3/2k)u(x - b^3u^2/6k^2)]Ai[b(x - b^3u^2/4k^2)]$, b sabit: $[b] = L^{-1}$ ile verilir [64]. Bu çözümü kullanarak Trkalyan alan 2-formunu kurabiliriz.

Örnek 3.1.2.7. Minkowski uzayzamanında, iki parçalı hiperboloidin üst kısmına karşılık gelecek şekilde $t = r \cosh \theta$, $x = r \sinh \theta \cos \varphi$, $z = r \sinh \theta \sin \varphi$, $r > 0$: $t^2 - (x^2 + z^2) = r^2$ koordinatlarını kullanabiliriz. Bu durumda metrik $ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve dual çatı $\omega^0 = dr$, $\omega^1 = rd\theta$, $\omega^2 = r \sinh \theta d\varphi$, şeklinde ifade ederiz [Bkz. Ek-2.1, eşitlik (2.16)]. ($r \rightarrow \tau$: zamansal koordinat, Milne uzayzamanı $ds^2 = -dt^2 + t^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\theta^2)$ metriği ile tanımlanır [65]).

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 1$ için) konformal Killing 1-formları bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir konformal Killing 1-formu $\omega = -r\omega^0$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek-2.1, denklem (2.17)], [Bir diğer seçenek: $\kappa = 0$ için Killing 1-form $\omega = \cosh \theta \omega_0 + \sinh \theta \omega^1$]. Böylece $d\omega = 0$ ve $\star d \star \omega = -3$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta\psi + v^2\psi = 0$ Klein-Gordon denklemine iner ($d^2\psi = 0$). Daha açık olarak, $\Delta\psi = (1/r^2)[(r^2\psi_r)_r - (1/\sinh \theta)(\sinh \theta \psi_\theta)_\theta - (1/\sinh^2 \theta)\psi_{\varphi\varphi}]$ olmak üzere Klein-Gordon denklemini $(1/r^2)[(r^2\psi_r)_r - (1/\sinh \theta)(\sinh \theta \psi_\theta)_\theta - (1/\sinh^2 \theta)\psi_{\varphi\varphi}] + v^2\psi = 0$ olarak yazabiliriz. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)H(\theta)\Phi(\varphi)$ alırsak $\Phi'' + m^2\Phi = 0$, $r^2R'' + 2rR' + [v^2r^2 - l(l+1)]R = 0$ küresel Bessel diferansiyel denklemi ve $-H'' - (\cosh \theta / \sinh \theta)H' + [l(l+1) + m^2/\sinh^2 \theta]H = 0$ Legendre diferansiyel denklemine ulaşırız.

Küresel Bessel diferansiyel denkleminin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür küresel Bessel

fonksiyonları j_l ve y_l cinsinden verilir [75, s.9]. Legendre diferansiyel denkleminin çözümü sırasıyla Legendre ve assosye Legendre fonksiyonları P_l^m ve Q_l^m cinsinden verilir [68, s.974-975]. Böylece çözümü

$$\psi(r, \theta, \varphi) = (b_1 j_l(vr) + b_2 y_l(vr)) (c_1 e^{-im\varphi} + c_2 e^{im\varphi}) \left[a_1 P_l^m(\cosh \theta) + a_2 Q_l^m(\cosh \theta) \right], \quad (3.33)$$

buluruz. Eğer $a_1 = b_1 = c_2 = 0$, $a_2 = b_2 = c_1 = 1$ ve $l = m = 0$ olarak alırsak $\psi(r, \theta, \varphi) = y_0(vr)Q_0^0(\cosh \theta)$ fonksiyonu ve $\omega = -r\omega^0$ konformal Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = \left(-y_1 + \frac{1}{vr} y_0 \right) \frac{1}{\sinh \theta} \omega_1 + y_0 \frac{1}{\sinh \theta} \omega^2, \quad (3.34)$$

buluruz.

3.1.3. Anti-de Sitter Uzayzamanında Çözüm Örnekleri

Anti-de Sitter (AdS) uzayzamanı, Lorentziyen ize ve negatif sabit skaler eğriliğe sahip bir manifolddur. Bu manifoldun bir Poincaré yamasında [66] metriği $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$, $\eta_{ab} = \text{dia}(-1, 1, 1)$ ve dual çatıyı $\omega^0 = (L/z)dt$, $\omega^1 = (L/z)dx$, $\omega^2 = (L/z)dz$ şeklinde ifade edebiliriz [Bkz. Ek-2.1, eşitlik (2.18)]. Bu durumda Laplace-Beltrami operatörü $\Delta \psi = (1/L^2) \left[z^2 (\psi_{tt} - \psi_{xx}) - z(z\psi_z)_z + 2z\psi_z \right]$ olur.

Örnek 3.1.3.1. Bu metrikte konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formları bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formunu $\omega = (1/L)(1/z)\omega^0$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek 2.1, denklem (2.19)]. Böylece $d\omega = (-2/z^3)dz \wedge dt$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $L^2 \Delta \psi + 2z\psi_z - (4 - \lambda^2 L^2)\psi = 0$, $\psi_t = 0$ şekline iner, ($\lambda = v$). Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(x, z) = X(x)Z(z)$ alırsak $X'' - m^2 X = 0$ ve $z^2 Z'' - 3zZ' + 4Z + (m^2 z^2 - \lambda^2 L^2)Z = 0$ diferansiyel denklemlerine ulaşırız.

Buradaki son denklem $Z(z) = z^2 H(z)$ dönüşümü ile $z^2 H'' + zH' + (m^2 z^2 - \lambda^2 L^2)H = 0$ şeklinde yazılır. Bu denklem, $u = mz$ ve $\mu = \lambda L$ kullanılarak, $m^2 > 0$ için Bessel diferansiyel denkleminin iner: $u^2 \ddot{H} + u\dot{H} + (u^2 - \mu^2)H = 0$, $[(\cdot) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2 tür Bessel fonksiyonları: J_μ ve Y_μ cinsinden verilir [75, s.4]. Eğer $m^2 < 0$ ise bu denklem modifiye Bessel denkleminin iner: $u^2 \ddot{H} + u\dot{H} - (u^2 + \mu^2)H = 0$,

$[(\cdot) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modife Bessel fonksiyonları: I_μ ve K_μ cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece çözümü

$$\psi(x, z) = \left(a_1 e^{-imx} + a_2 e^{imx} \right) z^2 \left[c_1 I_\mu(u) + c_2 K_\mu(u) \right], \quad (3.35)$$

olarak buluruz. Eğer $a_2 = c_2 = 1$ ve $a_1 = c_1 = 0$ alırsak $\psi(x, z) = e^{imx} z^2 K_\mu(mz)$ fonksiyonunu ve $\omega = (1/L)(1/z)\omega^0$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = \frac{1}{L^2} e^{imx} z \left\{ \lambda L K_\mu(mz) \omega^0 - \left[\lambda L K_\mu(mz) - mz K_{\mu+1}(mz) \right] \omega^1 + imz K_\mu(mz) \omega^2 \right\}, \quad (3.36)$$

buluruz. Bu çözüm $(\star d - \lambda) \star F = 0$ alan denklemini sağlar.

Örnek 3.1.3.2. Aynı metrikte bir Killing 1-formunu $\omega = (1/L)(1/z)\omega^1$ olarak da alabiliriz [Bkz. Ek 2.1, eşitlik (2.19)]. Böylece $d\omega = (-2/z^3)dz \wedge dx$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $L^2 \Delta \psi + 2z \psi_z - (4 - \lambda^2 L^2) \psi = 0$, $\psi_x = 0$ şekline iner, $(\lambda = \nu)$. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(t, z) = T(t)Z(z)$ olarak alırsak $T'' - \kappa^2 T = 0$ ve $z^2 Z'' - 3zZ' + 4Z - (\kappa^2 z^2 + \lambda^2 L^2)Z = 0$ diferansiyel denklemlerine ulaşırız.

Buradaki son denklem $Z(z) = z^2 H(z)$ dönüşümü ile $z^2 H'' + zH' - (\kappa^2 z^2 + \lambda^2 L^2)H = 0$ şeklinde yazılır. Bu denklem, $u = \kappa z$ ve $\mu = \lambda L$ kullanılarak, $\kappa^2 < 0$ için Bessel diferansiyel denkleminin iner: $u^2 \ddot{H} + u\dot{H} + (u^2 - \mu^2)H = 0$, $[(\cdot) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2. tür Bessel fonksiyonları: J_μ ve Y_μ cinsinden verilir [75, s.4]. Eğer $\kappa^2 > 0$ ise bu denklem modifiye Bessel denkleminin iner: $u^2 \ddot{H} + u\dot{H} - (u^2 + \mu^2)H = 0$, $[(\cdot) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modife Bessel fonksiyonları: I_μ ve K_μ cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece çözümü

$$\psi(t, z) = \left(a_1 e^{-\kappa t} + a_2 e^{\kappa t} \right) z^2 \left[c_1 I_\mu(u) + c_2 K_\mu(u) \right], \quad (3.37)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $a_2 = c_2 = 1$ ve $a_1 = c_1 = 0$ alırsak $\psi(t, z) = e^{\kappa t} z^2 K_\mu(\kappa z)$ fonksiyonu ve (3.5) denkleminden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = \frac{1}{L^2} e^{\kappa t} z \left\{ - \left[\lambda L K_\mu(\kappa z) - \kappa z K_{\mu+1}(\kappa z) \right] \omega^0 + \lambda L K_\mu(\kappa z) \omega^1 - \kappa z K_\mu(\kappa z) \omega^2 \right\}, \quad (3.38)$$

olarak buluruz. Bu çözüm $(\star d - \lambda) \star F = 0$ alan denklemini sağlar.

Örnek 3.1.3.3. Aynı metrikte bir Killing 1-formunu $\omega = (1/L)(1/z)(\omega^0 \mp \omega^1)$ olarak da alabiliriz [Bkz. Ek 2.1, eşitlik (2.19)]. Böylece $d\omega = -2/z^3(dz \wedge dt \mp dz \wedge dx)$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $L^2 \Delta \psi + 2z\psi_z - (4 - \lambda^2 L^2)\psi = 0$ ve $\psi_t \pm \psi_x = 0$ şekline iner, $(\lambda = \nu)$. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(t, x, z) = T(t)X(x)Z(z)$ alırsak $T'' - a^2 T = 0$, $X'' - a^2 X = 0$ ve $z^2 Z'' - 3zZ' + (4 - \lambda^2 L^2)Z = 0$ diferansiyel denklemlerine ulaşırız. Buradan $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere çözümü

$$\psi(t, x, z) = e^{at} e^{\mp ax} [c_1 z^{2-\lambda L} + c_2 z^{2+\lambda L}], \quad (3.39)$$

buluruz. Böylece $\psi(t, x, z) = e^{at} e^{\mp ax} z^{2 \pm \lambda L}$ fonksiyonu ve $\omega = (1/L)(1/z)(\omega^0 \mp \omega^1)$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = 2 \frac{\lambda}{L} e^{at} e^{\mp ax} z^{1 \pm \lambda L} (\omega^0 \mp \omega^1), \quad (3.40)$$

olarak buluruz. Bu çözüm $(\star d - \lambda) \star F = 0$ alan denklemini sağlar.

Yukarıdaki örneklere benzer çözümler daha önce Ref. 43'de (AdS/CFT karşılıklılığında ayar alan dalgalanmaları ile bağlantılı olarak, ışınsal koordinatlarda bir Fourier açılımı kullanarak) ve Ref 44'de (topolojik kütleli alanı skaler alanların kombinasyonu biçiminde yeniden tanımlayarak, belli modları skaler alan olarak alarak) tartışılmıştır. Ref. 44'de, yazarlar belirli fiziksel nedenlerden dolayı Bessel fonksiyonlarını kullanmıştır. Yukarıdaki çözüm örneklerini Bessel fonksiyonları kullanarak da kurmak mümkündür. Bu çözümlerin fiziksel özelliklerine değinmeyeceğiz.

Örnek 3.1.3.4. Aynı metrikte kompozit bir çözüm için $\psi \omega = (1/L)(1/z)(\psi_0 \omega^0 \mp \psi_1 \omega^1)$ olarak alabiliriz. Böylece (3.9) denkleminde $L^2 \Delta \psi_0 + 2z\psi_{0z} - (4 - \lambda^2 L^2)\psi_0 = 0$, $L^2 \Delta \psi_1 + 2z\psi_{1z} - (4 - \lambda^2 L^2)\psi_1 = 0$ ve $\psi_{0t} \pm \psi_{1x} = 0$ (Örnek 3.1.3.1 ve Örnek 3.1.3.2'ye bakınız) denklemlerine ulaşırız, $(\lambda = \nu)$. Bu denklemleri değişkenlerine ayırabilmek için $\psi_0(t, x, z) = T(t)X(x)Z(z)$ olarak alırsak $T'' - \kappa^2 T = 0$, $X'' + \kappa^2 X = 0$ ve $z^2 Z'' - 3zZ' + 4Z - (2\kappa^2 z^2 + \lambda^2 L^2)Z = 0$ diferansiyel denklemlerine ulaşırız. Buradaki son denklemde $Z(z) = z^2 H(z)$ dönüşümünü uygularsak $z^2 H'' + zH' - (2\kappa^2 z^2 + \lambda^2 L^2)H = 0$ denklemini buluruz.

Bu denklem $\mu = \lambda L$, $u = \nu z$, $(\nu = \sqrt{2\kappa^2})$ kullanılarak, $\nu^2 < 0$ için Bessel diferansiyel denkleminin ineri: $u^2 \ddot{H} + u\dot{H} + (u^2 - \mu^2)H = 0$, $[(\cdot) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin

çözümü sırasıyla 1.tür ve 2 tür Bessel fonksiyonları: J_μ ve Y_μ cinsinden verilir [75, s.4]. Eğer $v^2 > 0$ ise bu denklem modifiye Bessel denklemine iner: $u^2 \ddot{H} + u \dot{H} - (u^2 + \mu^2)H = 0$, $[(\cdot) = d/du]$. Bu diferansiyel denklemin çözümü sırasıyla 1.tür ve 2.tür modife Bessel fonksiyonları: I_μ ve K_μ cinsinden verilir [75, s.5]. Böylece çözümü

$$\psi_0 = e^{\kappa t} e^{\pm i \kappa x} z^2 \left[c_1 I_\mu(vz) + c_2 K_\mu(vz) \right], \quad (3.41)$$

$\psi_1 = i\psi_0$ şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $c_2 = 1$ ve $c_1 = 0$ alırsak $\psi_0 = e^{\kappa t} e^{\pm i \kappa x} z^2 K_\mu(vz)$ fonksiyonunu ve $\omega = (1/L)(1/z)(\omega^0 \mp \omega^1)$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) eşitliğinden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = \frac{1}{L^2} e^{\kappa t} e^{\pm i \kappa x} z \left\{ \pm i v z \dot{K}_\mu(vz) (\omega^0 \mp i \omega^1) + \lambda L K_\mu(vz) (\omega^0 \mp i \omega^1) \pm 2 i \kappa z K_\mu(vz) \omega^2 \right\}, \quad (3.42)$$

olarak buluruz ($\xi \dot{K}_\mu = \mu K_\mu - \xi K_{\mu+1}$, $\xi = vz$). Bu çözüm $(\star d - \lambda) \star F = 0$ alan denklemini sağlar.

3.1.4. de Sitter Uzayzamanında Çözüm Örnekleri

de Sitter (dS) uzayzaman, Lorentziyen ize ve pozitif sabit skaler eğriliğe sahip bir manifolddur.

Örnek 3.1.4.1. de Sitter (dS) [67] uzayzamanında metriği $ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b$ ve dual çatıyı $\omega^0 = A dt$, $\omega^1 = (1/A) dr$, $\omega^2 = r d\theta$ [$A^2(r) = 1 - \Lambda r^2$] şeklinde ifade edebiliriz [Bkz. Ek 2.1, eşitlik (2.20)].

Konformal Killing denklemi (3.7)'yi çözerek ($\kappa = 0$ için) Killing 1-formları bulabiliriz. Bu denklemleri sağlayan bir Killing 1-formu $\omega = A \omega^0$ olarak alabiliriz [Bkz. Ek 2.1, denklem (2.21)]. Böylece $d\omega = (-2\Lambda r) dr \wedge dt$ ve $d \star \omega = 0$ olduğundan (3.10) denklemi $\Delta \psi + 2\Lambda r \psi_r + (4\Lambda + \lambda^2) \psi = 0$ ve $\psi_t = 0$ haline gelir, ($\lambda = v$). Laplace Beltrami operatörü $\Delta \psi = (1/A^2) \psi_{tt} - (A^2 \psi_{rr} + \psi_r/r - 3\Lambda r \psi_r) - \psi_{\theta\theta}/r^2$ olmak üzere bu denklemi $A^2 \psi_{rr} + (1 - 5\Lambda r^2) \psi_r/r - \psi_{\theta\theta}/r^2 - (4\Lambda + \lambda^2) \psi = 0$ şeklinde yazabiliriz. Bu denklemi değişkenlerine ayırabilmek için $\psi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ alırsak $r^2(1 - \Lambda r^2) R'' + r(1 - 5\Lambda r^2) R' - [(4\Lambda + \lambda^2)r^2 + m^2] R = 0$ ve $\Theta'' + m^2 \Theta = 0$ ve

diferansiyel denklemlerini elde ederiz.

Bu denklemi $\sigma^2 = \Lambda$, $\sigma^2 r_0^2 = 1$ (r_0 : ufuk), $f^2 = \lambda^2/\sigma^2$, $g^2 = m^2/\sigma^2 r_0^2$ ve $x = r/r_0$ olmak üzere radyal denklem: $x^2(1-x^2)R'' + x(1-5x^2)R' - [(4+f^2)x^2 + g^2]R = 0$ olarak da ifade edebiliriz ($R(x)$ boyutsuz değişkenler kullanır).

Eğer $\zeta = 1 - x^2$ olmak üzere $R(x) = (1 - \zeta)^{\pm g/2} S(\zeta)$ olarak alırsak, $a = 1 + (\pm g \pm if)/2$, $b = 1 + (\pm g \mp if)/2$ ve $c = 2$ için $\zeta(1 - \zeta)\ddot{S} + [c - (a + b + 1)\zeta]\dot{S} - abS = 0$: hipergeometrik denklemine [68] iner, $[\dot{}] = d/d\xi$.

Böylece ufkun içinde çözüm: $\psi(r, \theta) = e^{\mp im\theta} (r/r_0)^{\pm g} \mathcal{F}(a, b, c; 1 - (r/r_0)^2)$ ve $R(x) = x^{\pm g} \mathcal{F}(a, b, c; 1 - x^2)$ ile verilir. Burada $\mathcal{F}(a, b, c; 1 - x^2)$ hipergeometrik fonksiyondur. Eğer $m = 0 \Rightarrow g = 0$ alırsak $R = S = \mathcal{F}$ ve $\psi = \mathcal{F}(a, b, c; \zeta)$ fonksiyonunu ve $\omega = \zeta dt$ Killing 1-formunu kullanarak (3.5) denklemden $\star F$ 1-formunu

$$\star F = -\lambda \zeta \mathcal{F} dt - 2(1 - \zeta)(\zeta \dot{\mathcal{F}}) d\theta, \quad (3.43)$$

olarak buluruz ($a = 1 \pm if/2$, $b = 1 \mp if/2$ ve $c = 2$). Bu çözüm $(\star d - \lambda) \star F = 0$ alan denklemini sağlar.

3.2. MİNİ-TWİSTÖR METODU

Bu bölümde Minkowski uzayzamanı: $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Trkalyan alan denklemini mini-twistör metodunu kullanarak çözeceğiz. Bu çözümü, (3+1) boyuttaki dalga denkleminin twistör çözümünü indirgeyerek kuracağız.

Mini-twistörler ilk defa Hitchin tarafından tanımlanmıştır [49] (ayrıca referans [50] ye bakınız), Minkowski uzayzamanı üzerindeki mini-twistörler Ward'ın makalesinde detaylı olarak açıklanmıştır [51]. Mini-twistör uzayı $\mathbb{R}^3$ 'de yönlendirilmiş doğruların oluşturduğu uzay $\mathbb{TS}^2$ 'dir. Bunu $\mathbb{TCP}^1$ olarak da düşünebiliriz [49]. Ayrıca $\mathbb{TCP}^1$ mini-twistör uzayı, C^3 (karmaşılaştırılmış Öklid metriğine göre) uzayındaki kompleks ışınsal (null) düzlemleri parametrize eder [49, 51].

En basit ifade ile twistör teorisi, (3+1) boyutlu Minkowski uzayzamanında tanımlı dalga denkleminin çözümünü, holomorfik fonksiyonların kontur integralleri ile ifade etmeye

dayanır [52].

Reel $\mathbb{R}^{2+1}$ uzayzamanının mini-twistör uzayı TRP^1 [59], $\mathbb{R}^{2+1}$ 'deki ışınsal (null) düzlemlerin oluşturduğu manifold $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ 'dir [51]. Bunun bir kompleks genişlemesi (kompleksifikasyonu) TCP^1 ise bir holomorfik teğet demetidir. Biz mini-twistörler için kompleks bir bakış açısı benimseyeceğiz.

Karmaşılaştırılmış (kompleks) Minkowski uzayzamanının mini-twistör uzayı TCP^1 'in bir yamasına ait (η, ω) koordinatlarını kullanacağız. Burada $\eta \in \mathbb{C}$, TCP^1 demetinin lifi üzerindeki koordinat, $\omega \in \mathbb{CP}^1$ ise demetin bazı $\mathbb{CP}^1$ 'deki koordinat olmak üzere $\eta = t - z + 2x\omega + (t + z)\omega^2$, [çakışım: (incidence) bağıntısı] olarak tanımlanır [51].

Reel (gerçel) $\mathbb{R}^{2+1}$, özellikle analitik olmayan çözümler açısından dikkatli çalışılması gereken bir durumdur.

Mini-twistör uzayını kompaktifiye etmek mümkündür. Bu durumda $\mathbb{C}$ 'nin kopyası olan lifler $\mathbb{CP}^1$ haline gelir. Bu yolla yapılarımızı daha da genelleştirebiliriz.

$\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Klein-Gordon denkleminin çözümünü, $\mathbb{R}^{3+1}$ üzerinde tanımlı hiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün uzaysal harmonik (y koordinatında) indirgemesi olarak yazabiliriz. Bu çözümü kullanarak Trkalyan alan çözümünü kurabiliriz.

Trkalyan alan $F = A dt \wedge dx + B dx \wedge dz + C dz \wedge dt$ Minkowski uzayzamanında vektör Klein-Gordon denklemini

$$\square_3^2 A = -k^2 A, \quad \square_3^2 B = -k^2 B, \quad \square_3^2 C = -k^2 C, \quad v = k \quad (3.44)$$

sağlar (Bkz. Ek 3). Burada $\square_3^2 = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial z^2$ [(2+1) boyutta dalga operatörü] ile verilir.

Dalga denklemi $\square_4^2 \psi = 0$ 'ın çözümü [(3+1) boyutta dalga operatörü: $\square_4^2 = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$]

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, t) &= \int_C g[\omega(t+z) + (x+iy), \omega(x-iy) + (t-z), \omega] d\omega \\ &= \int_C g(p, q, \omega) d\omega, \end{aligned} \quad (3.45)$$

şeklinde verilir [69]. Burada $g: p = x + iy + \omega(t + z)$, $q = t - z + \omega(x - iy)$ ve ω 'nın holomorfik bir fonksiyonudur.

Bu ve daha sonraki bölümlerde, literatürde olduğu gibi türev operatörünün integral operatörü ile yer değiştirebildiğini kabul edeceğiz.

Yeni değişkenlerimizi $p = \xi + \omega v$, $q = \omega \bar{\xi} + u$, $u = t - z$, $v = t + z$, $\xi = x + iy$, $\bar{\xi} = x - iy$ şeklinde tanımlarsak $\psi(u, v, \xi, \bar{\xi}) = \int_C g(\xi + \omega v, \omega \bar{\xi} + u, \omega) d\omega$ olur. Bu değişkenlerle dalga denklemini: $\partial^2 \psi / \partial u \partial v - \partial^2 \psi / \partial \xi \partial \bar{\xi} = 0$ şeklinde ifade ederiz.

Klein-Gordon denkleminin: $\square_3^2 \phi = -v^2 \phi$ çözümü için, (3+1) boyuttaki dalga denkleminin çözümünün uzaysal harmonik (y koordinatında) indirgemesini yazacağız. Bu indirgemeyi

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -ik\psi, \quad (3.46)$$

eşitliğini kullanarak yazacağız. Eşitlik (3.45)'de verilen g fonksiyonunun değişkenleri $p = x + iy + \omega(t + z)$, $q = t - z + \omega(x - iy)$ ve ω olduğundan $\partial/\partial t = \omega \partial/\partial p + \partial/\partial q$, $\partial/\partial x = \partial/\partial p + \omega \partial/\partial q$, $\partial/\partial y = i(\partial/\partial p - \omega \partial/\partial q)$, $\partial/\partial z = \omega \partial/\partial p - \partial/\partial q$ buluruz. Böylece (3.46) ve (3.45) eşitliklerinden

$$i\left(\frac{\partial \psi}{\partial p} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = -ik\psi \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial p} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial q} = -k\psi, \quad (3.47)$$

ulaşırız. Bu türevleri integralin içinde yazarak

$$\int_C \left(\frac{\partial}{\partial p} - \omega \frac{\partial}{\partial q}\right) g(p, q, \omega) d\omega = \int_C -kg d\omega \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial p} - \omega \frac{\partial}{\partial q}\right) g(p, q, \omega) = -kg, \quad (3.48)$$

denkleminde ulaşırız. Bu denklemi çözmenin metotlarından biri integrasyon çarpanı kullanmaktır.

İntegrasyon çarpanını $g(p, q, \omega) = e^{-kp} h(p, q, \omega)$ olarak alırsak, değişkenlerin türevleri $\partial g/\partial p = e^{-kp}(-kh + \partial h/\partial p)$ ve $\partial g/\partial q = e^{-kp} \partial h/\partial q$ olduğundan

$$\frac{\partial h}{\partial p} - \omega \frac{\partial h}{\partial q} = 0, \quad (3.49)$$

bulunur. Bu denklemin çözümü $h(p, q, \omega) = H(\eta_x(\omega), \omega)$ ile verilir. Burada H , $\eta_x(\omega) = \omega p + q = t - z + 2\omega x + (t + z)\omega^2$ ve ω 'nın holomorfik bir fonksiyonudur. Böylece

$g(p, q, \omega) = e^{-kp} H(\eta_x(\omega), \omega)$ olur.

Eşitlik (3.45)'den

$$\psi = e^{-iky} \phi(t, x, z), \quad (3.50)$$

elde ederiz. Buradaki ϕ fonksiyonu

$$\phi(t, x, z) = \int_C e^{-k[x+\omega(t+z)]} H(\eta_x(\omega), \omega) d\omega, \quad (3.51)$$

(2+1) boyutta Klein-Gordon denklemini: $\square_3^2 \phi = -k^2 \phi$ sağlar. Bu çözüm $k = 0$ için dalga denkleminin çözümüne iner: $\square_3^2 \phi = 0$.

Bir diğer integral çarpanını $g(p, q, \omega) = e^{-(k/2)(p-q/\omega)} H(\omega p + q, \omega)$ olarak alabiliriz. Böylece (3.45) eşitliğinden $\psi = e^{-iky} \phi(t, x, z)$ buluruz ve buradaki ϕ fonksiyonu

$$\phi(t, x, z) = \int_C e^{-\frac{k}{2}[\omega(t+z)-(t-z)/\omega]} H(\omega p + q, \omega) d\omega, \quad (3.52)$$

2+1 boyutta Klein-Gordon denklemini: $\square_3^2 \phi = -k^2 \phi$ sağlar. Ayrıca bu çözüm $k = 0$ için dalga denkleminin çözümüne dönüşür: $\square_3^2 \phi = 0$.

Denklem (3.48)'in herhangi bir çözümünü bu formda yazabiliriz. Yeni değişkenleri: $\alpha = \omega p + q$, $\beta = \omega p - q$, ω şeklinde tanımlarsak $\partial/\partial p = \omega(\partial/\partial \alpha + \partial/\partial \beta)$, $\partial/\partial q = \partial/\partial \alpha - \partial/\partial \beta$ buluruz. Böylece denklem (3.48)

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = -\frac{k}{2} \frac{1}{\omega} g, \quad (3.53)$$

şekline iner. Bu denklemin genel çözümü

$$g(\alpha, \beta, \omega) = e^{-(k/2)(1/\omega)\beta} h(\alpha, \omega), \quad \alpha = \eta(\omega) \quad (3.54)$$

olarak bulunur. Bu çözümü

$$g(p, q, \omega) = e^{-\frac{k}{2}(p-q/\omega)} H(\omega p + q, \omega), \quad (3.55)$$

olarak da ifade edebiliriz. Buradan da Klein-Gordon denklemini sağlayan ve (3.52) eşitliği ile verilen ϕ fonksiyonunu

$$\phi(t, x, z) = \int_C e^{-\frac{k}{2}[(t+z)\omega - (t-z)/\omega]} H(\eta_x(\omega), \omega) d\omega, \quad \eta_x(\omega) = \omega p + q. \quad (3.56)$$

buluruz.

Trkalyan alanın her bir bileşeni, denklem (3.44)'de yazıldığı üzere Klein-Gordon denklemini sağladığı için Trkalyan alanı

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_C [L, M, N] e^{-kf} d\omega, \quad (3.57)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $L(\eta_x, \omega)$, $M(\eta_x, \omega)$ ve $N(\eta_x, \omega)$: $\eta_x = t - z + 2x\omega + (t + z)\omega^2$ ve ω 'nın keyfi birer holomorfik fonksiyonudur. Burada f için uzaysal-harmoniklik şartının genel çözümünde çıkan [Bkz. eşitlik (3.56)] $f = (1/2)[(t + z)\omega - (t - z)/\omega]$ fonksiyonunu kullanacağız. Trkalyan alan F 'nin bileşenlerini

$$\begin{aligned} A &= \int_C e^{-\frac{k}{2}[(\omega-1/\omega)t + (\omega+1/\omega)z]} L(\eta_x, \omega) d\omega, \\ B &= \int_C e^{-\frac{k}{2}[(\omega-1/\omega)t + (\omega+1/\omega)z]} M(\eta_x, \omega) d\omega, \\ C &= \int_C e^{-\frac{k}{2}[(\omega-1/\omega)t + (\omega+1/\omega)z]} N(\eta_x, \omega) d\omega, \end{aligned} \quad (3.58)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (2.4)'den

$$-2\omega L_\eta - (1 - \omega^2)N_\eta = k[M + \frac{(1 + \omega^2)}{2\omega}N], \quad (3.59)$$

$$2\omega M_\eta + (1 + \omega^2)N_\eta = k[-L - \frac{(1 - \omega^2)}{2\omega}N], \quad (3.60)$$

$$(1 + \omega^2)L_\eta - (1 - \omega^2)M_\eta = k[-\frac{(1 - \omega^2)}{2\omega}L + \frac{(1 + \omega^2)}{2\omega}M + N], \quad (3.61)$$

denklemlerine ulaşırız (Bkz. Ek 3).

Burada integrallerin içine keyfi holomorfik fonksiyonlar eklemek veya C konturunu değiştirmek gibi kohomoloji (sheaf cohomology) argümanlarından kaçınacağız.

Denklem (3.59) ve (3.60)'dan

$$-2\omega[(1+\omega^2)L_\eta - (1-\omega^2)M_\eta] = k[-(1-\omega^2)L + (1+\omega^2)M + 2\omega N], \quad (3.62)$$

buluruz. Denklem (3.61) ve (3.62)'den

$$(1-\omega^2)L - (1+\omega^2)M - 2\omega N = 0, \quad (3.63)$$

denklemini buluruz. Denklem (3.63)'den $N_\eta = \frac{(1-\omega^2)}{2\omega}L_\eta - \frac{(1+\omega^2)}{2\omega}M_\eta$ eşitliği bulunur. N_η 'yı sırayla denklem (3.59), (3.60) ve (3.61)'de yerine yazarsak

$$-\frac{(1+\omega^2)}{2\omega}[(1+\omega^2)L_\eta - (1-\omega^2)M_\eta] = k\frac{(1-\omega^2)}{4\omega^2}[(1+\omega^2)L - (1-\omega^2)M], \quad (3.64)$$

$$\frac{(1-\omega^2)}{2\omega}[(1+\omega^2)L_\eta - (1-\omega^2)M_\eta] = -k\frac{(1+\omega^2)}{4\omega^2}[(1+\omega^2)L - (1-\omega^2)M], \quad (3.65)$$

$$(1+\omega^2)L_\eta - (1-\omega^2)M_\eta = 0, \quad (3.66)$$

denklemlerini buluruz. Buradan

$$(1+\omega^2)L - (1-\omega^2)M = 0, \quad (3.67)$$

denklemine ulaşırız. Böylece $u(\eta, \omega)$: η ve ω 'nın keyfi bir holomorfik fonksiyonu olmak üzere $L(\eta, \omega) = (1-\omega^2)u(\eta, \omega)$, $M(\eta, \omega) = (1+\omega^2)u(\eta, \omega)$ ve $N(\eta, \omega) = -2\omega u(\eta, \omega)$ çözümüne ulaşırız.

Böylece $f = 1/2[(t+z)\omega - (t-z)/\omega]$ olmak üzere Trkalyan alanı

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_C [(1-\omega^2), (1+\omega^2), -2\omega] e^{-kf} u(\eta, \omega) d\omega, \quad (3.68)$$

şeklinde ifade ederiz. Burada $[(1-\omega^2), (1+\omega^2), -2\omega]$, $\mathbb{C}^{2+1}$ 'de ışımsaldır.

Örnek 3.2.1. Öklid uzayı üzerindeki Lundquist çözümüne benzer [46] bir çözüm için $u(\eta, \omega) = 1/\omega^2$ seçelim ve $\omega = e^{i\theta}$, $t = r \sinh \varphi$, $z = r \cosh \varphi$ parametrizasyonunu kullanalım. Eşitlik (3.68)'den $f = (1/2)[(t+z)\omega - (t-z)/\omega] = z \cos \theta + it \sin \theta$ ve $k = v$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 \int_C \sin \theta e^{-v(z \cos \theta + it \sin \theta)} d\theta, \\ B(x) &= 2i \int_C \cos \theta e^{-v(z \cos \theta + it \sin \theta)} d\theta, \\ C(x) &= -2i \int_C e^{-v(z \cos \theta + it \sin \theta)} d\theta, \end{aligned} \quad (3.69)$$

denklemlerine ulaşırız. Ek 3.1.1'deki (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitliklerinde $a = 0$, $b = 0$, $p = -vz$, $q = -ivt$ alırsak $(b-p)^2 + (a+q)^2 = v^2 r^2$, $A \pm iB = v^2 r^2 (\cosh \varphi \mp \sinh \varphi)^2$ ve $C \mp iD = v^2 r^2$ buluruz. Ayrıca (3.6) ve (3.7) eşitliklerinde $m = 1$, (3.8) eşitliğinde $m = 0$ alırsak F 2-formunu

$$F = -4\pi i [\sinh \varphi I_1(vr) dt \wedge dx + \cosh \varphi I_1(vr) dx \wedge dz + I_0(vr) dz \wedge dt], \quad (3.70)$$

buluruz. Bu alan, Örnek 3.1.2.1'deki (3.14) eşitliği ile verilen potansiyelden meydana gelen en alt düzeydeki çözüme karşılık gelir ($r = 0$ 'da singüler olmayan kısım, $m = 0$, $\kappa = 0$, $c_2 = 0$).

Zamandan bağımsız bir alan için $u(\eta, \omega) = e^{-(k/2\omega)[(1-\omega^2)/(1+\omega^2)]} \eta v(\omega)$ olarak seçelim [Bkz. Örnek 3.2.2.2]. Eşitlik (3.68)'den

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_C [(1-\omega^2), (1+\omega^2), -2\omega] e^{-k(\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}x + \frac{2\omega}{1+\omega^2}z)} v(\omega) d\omega, \quad (3.71)$$

buluruz. Kompleks düzlemde yeniden parametrize etmek için $\omega = -i(\omega' + 1)/(\omega' - 1)$ kesirli lineer dönüşümünü uygularsak Trkalyan alan

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = 2 \int_C [(1+\omega'^2), -2\omega', -i(1-\omega'^2)] e^{k(\frac{\omega'+1/\omega'}{2}x + \frac{\omega'-1/\omega'}{2i}z)} a(\omega') d\omega', \quad (3.72)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 3.2.2. Eşitlik (3.72)'de $\omega' = e^{i\theta}$ ve $a(\omega') = 1/\omega'^2$ olarak seçelim. $x = r \cos \varphi$ ve

$z = r \sin \varphi$ olmak üzere eşitlik (3.68)'den

$$\begin{aligned} A(x) &= 4i \int_C e^{(kx \cos \theta + kz \sin \theta)} \cos \theta d\theta, \\ B(x) &= -4i \int_C e^{(kx \cos \theta + kz \sin \theta)} d\theta, \\ C(x) &= -4i \int_C e^{(kx \cos \theta + kz \sin \theta)} \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (3.73)$$

buluruz. Ek 3.1.1'deki (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitliklerinde $a = b = 0$, $p = kx$, $q = -kz$ alırsak $(b - p)^2 + (a + q)^2 = k^2 r^2$, $C \mp iD = k^2 r^2$ ve $A \pm iB = k^2 r^2 (\cos \varphi \mp i \sin \varphi)^2$ buluruz. Ayrıca (3.6) ve (3.7) eşitliklerinde $m = 1$, (3.8) eşitliğinde $m = 0$ alırsak Trkalyan alanı

$$F = 8\pi i [\cos \varphi I_1(kr) dt \wedge dx - I_0(kr) dx \wedge dz - \sin \varphi I_1(kr) dz \wedge dt], \quad (3.74)$$

buluruz. Bu alan, Örnek 3.1.2.3'deki (3.19) eşitliği ile verilen potansiyelden meydana gelen (sabit bir çarpana kadar, $k = v$) en alt düzeydeki çözüme karşılık gelir (singüler olmayan kısım: $c_2 = 0$, $m = 0$, $\kappa = 0$).

Eşitlik (3.72)'de $\xi = k(\omega' - 1/\omega')/2$ [$\Rightarrow k(\omega' + 1/\omega')/2 = -\sqrt{\xi^2 + k^2}$] dönüşümünü uygularsak Trkalyan alan

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = -4 \frac{1}{k} \int_C \left[\sqrt{\xi^2 + k^2}, k, -i\xi \right] e^{(-x\sqrt{\xi^2 + k^2} - iz\xi)} b(\xi) d\xi, \quad (3.75)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 3.2.3. Eşitlik (3.75)'de $k > 0$, $x > 0$ ve $z > 0$ olmak üzere $b(\xi) = 1/\sqrt{\xi^2 + k^2}$ olarak seçerek reel eksen $[\xi = s, s \in \mathbb{R}]$ Bkz. Örnek 3.2.2.4] üzerinde integre edersek

$$\begin{aligned} A(x) &= -4 \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\sqrt{\xi^2 + k^2}} [\cos(z\xi) - i \sin(z\xi)] d\xi, \\ B(x) &= -4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\sqrt{\xi^2 + k^2}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + k^2}} [\cos(z\xi) - i \sin(z\xi)] d\xi, \\ C(x) &= 4 \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\sqrt{\xi^2 + k^2}} \frac{s}{\sqrt{\xi^2 + k^2}} [i \cos(z\xi) + \sin(z\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (3.76)$$

eşitliklerini elde ederiz. Ek 3.1.1'deki (3.11), (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden F 2-formunu

$$F = 8[\cos \phi K_1(kr)dt \wedge dx + K_0(kr)dx \wedge dz + \sin \phi K_1(kr)dt \wedge dz], \quad (3.77)$$

şeklinde buluruz. Bu alan, Örnek 3.1.2.3'deki (3.19) eşitliği ile verilen potansiyelden meydana gelen en alt düzeydeki çözüme karşılık gelir (singüler kısım: $c_1 = 0$, $\lambda = \nu = k$, $m = 0$, $\kappa = 0$).

3.2.1. Keyfi İntegrasyon Çarpanı

Denklem (3.48)'i çözebilmek için farklı bir integrasyon çarpanı da seçebiliriz. İntegrasyon çarpanını

$$g(p, q, \omega) = e^{-k\tilde{f}} h(p, q, \omega) = e^{-k\tilde{f}} H(\eta_x(\omega), \omega), \quad (3.78)$$

olarak seçelim. Eşitlik (3.48)'den

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} - \omega \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} = 1, \quad (3.79)$$

yani $\partial \tilde{f} / \partial y = i$ eşitliğine ulaşırız.

Denklem (3.44)'den

$$\begin{aligned} 2\omega M_\eta + (1 + \omega^2)N_\eta &= -kL + k(M + \omega N)\tilde{f}_p + k(\omega M + N)\tilde{f}_q, \\ -2\omega L_\eta - (1 - \omega^2)N_\eta &= kM - k(L - \omega N)\tilde{f}_p - k(\omega L + N)\tilde{f}_q, \\ (1 + \omega^2)L_\eta - (1 - \omega^2)M_\eta &= kN + k\omega(L + M)\tilde{f}_p + k(L - M)\tilde{f}_q. \end{aligned} \quad (3.80)$$

eşitliklerine ulaşırız. Burada örneğin, yukarıda yaptığımız gibi $\tilde{f} = (1/2)(p - q/\omega)$ olarak seçersek bu eşitlikler (3.59), (3.60) ve (3.61) denklemlerine iner.

Denklem (3.80)'den yukarıdakine benzer bir yol ile (3.63) ve (3.67) denklemlerini elde ederiz. Bunlar yine benzer şekilde (3.68) çözümünü verir ($f \rightarrow \tilde{f}$, (3.79) koşulunu sağlayacak şekilde).

Böylece çözüm, seçilen integrasyon çarpanının uzayzaman kısmını içeren benzer formdadır. Bundan dolayı farklı bir integrasyon çarpanı için de benzer sonuca ulaşabiliriz.

Denklem (3.48) ile verilen harmoniklik koşulunun herhangi bir çözümü, $\tilde{f} = (1/2)(p - q/\omega)$ kullanılarak yazılabilir [Bkz. eşitlik (3.53) ve (3.55)]. Böylece, (y'ye bağlı kısım hariç) $f = (1/2)[\omega(t + z) - (t - z)/\omega]$ ile bulduğumuz (3.68) eşitliğine benzer bir çözüme ulaşırız.

Denklem (3.48)'in harmoniklik koşulu için, yukarıda kullandığımız integrasyon çarpanının: $g(p, q, \omega) = e^{-kp}h(p, q, \omega)$ ilgili uzayzaman kısmı olarak seçilirse $f = x + \omega(t + z)$ olur. [Bkz. eşitlik (3.51)]. Benzer bir mantıkla, bu $f = x + \omega(t + z)$ ile (3.68) eşitliğinden yine benzer bir çözüme ulaşırız.

Örnek 3.2.1.1. $f = x + \omega(t + z)$, $g(\eta_x(\omega)) = \eta_x^n(\omega)$ ve $h(\omega) = (\omega - \omega_0)^m$ olmak üzere $u(\eta, \omega) = g(\eta_x(\omega))/h(\omega)$ seçelim. $m = 1$, $\omega_0 = 0$ ve $k = v$ için $u(\eta, \omega) = \eta_x^n(\omega)/\omega$ fonksiyonu ve eşitlik (3.68)'den

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_C (1 - \omega^2) e^{-v[x + \omega(t+z)]} \eta_x^n(\omega) / \omega d\omega, \\ B(x) &= \int_C (1 + \omega^2) e^{-v[x + \omega(t+z)]} \eta_x^n(\omega) / \omega d\omega, \\ C(x) &= \int_C (-2\omega) e^{-v[x + \omega(t+z)]} \eta_x^n(\omega) / \omega d\omega, \end{aligned} \quad (3.81)$$

buluruz. Cauchy integral formülünden Trkalyan alanı

$$F = 2\pi i e^{-vx} (t - z)^n [dt \wedge dx + dx \wedge dz], \quad (3.82)$$

şeklinde buluruz.

Eğer $\omega_0 \neq 0$, $u(\eta, \omega) = \eta_x^n(\omega)/(\omega - \omega_0)$ alırsak eşitlik (3.68)'den

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_C (1 - \omega^2) e^{-v[x + \omega(t+z)]} \eta_x^n(\omega) / (\omega - \omega_0) d\omega, \\ B(x) &= \int_C (1 + \omega^2) e^{-v[x + \omega(t+z)]} \eta_x^n(\omega) / (\omega - \omega_0) d\omega, \\ C(x) &= \int_C (-2\omega) e^{-v[x + \omega(t+z)]} \eta_x^n(\omega) / (\omega - \omega_0) d\omega, \end{aligned} \quad (3.83)$$

elde ederiz. Cauchy integral formülünden Trkalyan alanı

$$F = 2\pi i e^{-v[x + \omega_0(t+z)]} \eta_x^n(\omega_0) [(1 - \omega_0^2) dt \wedge dx + (1 + \omega_0^2) dx \wedge dz - 2\omega_0 dz \wedge dt], \quad (3.84)$$

şeklinde buluruz.

Daha genel bir çözüm için $g(\eta_x(\omega)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_x^n(\omega)$ holomorfik fonksiyonunu ve $\omega_0 = 0$ alırsak $u(\eta, \omega) = g(\eta_x(\omega))/\omega$ fonksiyonu ve eşitlik (3.68)'den

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_C (1 - \omega^2) e^{-v[x + \omega(t+z)]} g(\eta_x(\omega)) / \omega d\omega, \\ B(x) &= \int_C (1 + \omega^2) e^{-v[x + \omega(t+z)]} g(\eta_x(\omega)) / \omega d\omega, \\ C(x) &= \int_C (-2\omega) e^{-v[x + \omega(t+z)]} g(\eta_x(\omega)) / \omega d\omega, \end{aligned} \quad (3.85)$$

elde ederiz. Böylece Trkalyan alanı

$$F = 2\pi i e^{-vx} g(t-z) [dt \wedge dx + dx \wedge dz], \quad (3.86)$$

şeklinde buluruz.

3.2.2. Chandrasekhar-Kendall Metodunda Debye Potansiyeli İçin Mini-Twistör Çözümleri

Skaler Klein-Gordon denkleminin: $\square_3^2 \phi = -k^2 \phi$, ($k = \sigma$) çözümünü,

$$\phi(t, x, z) = \int_C e^{-\sigma f} H(\eta_x(\omega), \omega) d\omega, \quad f = \frac{1}{2} [\omega(t+z) - \frac{1}{\omega}(t-z)], \quad (3.87)$$

şeklinde yazabiliriz. Chandrasekhar-Kendall metodunda (3.2) denklemi ile verilen Trkalyan alandaki Debye potansiyelini: $\psi = \phi$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.2.2.1. Eşitlik (3.14) ile verilen potansiyel, (1+1) boyutta geçerli (x koordinatı dışında) Klein-Gordon denklemini sağlayan bir çözümdür [(1+1) boyutta Klein-Gordon denklemi: $\square_2^2 \phi + v^2 \phi = 0$, $\square_2^2 = \partial_t^2 - \partial_z^2$]. Bu potansiyelin tekil olmayan (nonsingular) kısmını ($c_2 = 0$) $r = 0$ 'da, eşitlik (3.87)'de $H = \omega^{-m-1}$, $\omega = e^{i\theta}$ seçersek, C: merkezi orjin

olan birim çember ($t = r \sinh \varphi$ ve $z = r \cosh \varphi$) olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi &= e^{-ikx} \int_C e^{-vf} H(\eta_x(\omega), \omega) d\omega, \\ &= ie^{-ikx} \int_C e^{(-ivt \sin \theta - vz \cos \theta)} e^{-im\theta} d\theta, \\ &= 2\pi i (-1)^m I_m(vr) e^{m\varphi - ikx}, \quad \lambda^2 = v^2 - \kappa^2\end{aligned}\tag{3.88}$$

şeklinde ifade edebiliriz. [$k = \kappa$, Bkz. Ek 3.1.1'deki (3.9) eşitliğinde $a = b = 0$, $p = -vz$, $q = -ivt$ alırsak $(b - p)^2 + (a + q)^2 = v^2 r^2$, $A - iB = v^2 r^2 (\cosh \varphi + i \sinh \varphi)^2$ ve $C + iD = v^2 r^2$ buluruz, $I_n(-\xi) = (-1)^n I_n(\xi)$].

Örnek 3.2.2.2. Eşitlik (3.88)'de $m = 0$ ve $k = 0$ için $\lambda = \sigma = v$ ve $H = \omega^{-1}$ seçersek

$$\phi = \int_C e^{-vf} H(\eta_x(\omega), \omega) d\omega = 2\pi i I_0(vr),\tag{3.89}$$

çözümüne ulaşırız.

Eğer alan $\partial_t \phi = \alpha \phi$ şartını sağlıyorsa; $\phi(t + \gamma, x, z) = e^{\alpha \gamma} \phi(t, x, z)$, eşitlik (3.87)'den $(1 + \omega^2) H_\eta = [\alpha - \sigma(1 - \omega^2)/(2\omega)] H$ denklemini buluruz. Zamandan bağımsız ($\alpha = 0$) bir alan için $v(\omega)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\phi = \int_C e^{-\sigma(\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}x + \frac{2\omega}{1+\omega^2}z)} v(\omega) d\omega.\tag{3.90}$$

şeklinde yazabiliriz. Kompleks düzlemde yeniden parametrize edebilmek için $\omega = -i(\omega' + 1)/(\omega' - 1)$ [$\omega' = (\omega - i)/(\omega + i)$] kesirli lineer dönüşümünü uygularsak $d\omega = 2id\omega'/(\omega' - 1)^2$ ve $a(\omega') = -(1/2)(1 + \omega^2)v(\omega)(i/\omega')$ olmak üzere

$$\phi = \int_C e^{\sigma(\frac{\omega'+1/\omega'}{2}x + \frac{\omega'-1/\omega'}{2i}z)} a(\omega') d\omega',\tag{3.91}$$

buluruz. Bu fonksiyon, 2 boyutta $\nabla_2^2 \phi - \sigma^2 \phi = 0$, ($\nabla_2^2 = \partial_x^2 + \partial_z^2$) (Helmholtz) denklemini sağlar, .

Örnek 3.2.2.3. Eşitlik (3.91)'de $\omega' = e^{i\theta}$, $x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ ve $a(\omega') = -i/\omega'$,

$[v(\omega) = 2/(1 + \omega^2)]$ seçersek Ek 3.1.1'deki (3.5) eşitliğinden $n = 0$ için

$$\phi = \int_0^{2\pi} e^{\sigma r \cos(\theta - \varphi)} d\theta = 2\pi I_0(\sigma r), \quad (3.92)$$

çözümüne ulaşırız.

Eşitlik (3.91)'de $\xi = \sigma(\omega' - 1/\omega')/2$ dönüşümünü uygularsak

$$\phi = \int_C e^{-x\sqrt{\xi^2 + \sigma^2} - iz\xi} b(\xi) d\xi, \quad (3.93)$$

elde ederiz.

Örnek 3.2.2.4. Eşitlik (3.93)'de $\sigma > 0$, $x > 0$, $z > 0$ için $b(\xi) = 1/\sqrt{\xi^2 + \sigma^2}$ seçersek Ek 3.1.1'deki eşitlik (3.11)'den

$$\phi = \int_{s=-\infty}^{\infty} e^{-x\sqrt{s^2 + \sigma^2} - izs} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}} ds = 2K_0(\sigma r), \quad (3.94)$$

çözümüne ulaşırız. Burada $\xi = s$, $s \in \mathbb{R}$: Riemann küresinde kapalı bir kontur olarak düşünülebilir.

Örnek 3.2.2.5. Eşitlik (3.93)'de $\sigma > 0$, $x > 0$, $z > 0$ için $b(\xi) = \xi$ seçersek Ek 3.1.1'deki eşitlik (3.14)'den

$$\phi = \int_{s=-\infty}^{\infty} e^{-x\sqrt{s^2 + \sigma^2} - izs} s ds = -i\sigma^2 \sin 2\varphi K_2(\sigma r), \quad (3.95)$$

çözümüne ulaşırız.

Bunların yanında

$$\phi(t, x, z) = \int_C e^{-\sigma f} \left[\frac{\eta_x(\omega)}{\omega} \right]^n \frac{1}{\omega} d\omega, \quad (3.96)$$

formundaki alanları kısaca inceleyeceğiz (Ref.46'da Öklid izde tartışılmıştır). İntegrali parametrize edebilmek için $\omega = -ie^{iu}$ alırsak $\eta/\omega = 2(x + t \sin u - iz \cos u)$ ve $f = -it \cos u + z \sin u$ olur.

Örnek 3.2.2.6. Eşitlik (3.96)'da $n = 1$ alırsak

$$\phi = 2i \int_{u=0}^{2\pi} e^{-\sigma f} (x + t \sin u - iz \cos u) du, \quad (3.97)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada $t = R \sinh \theta \sinh \varphi$, $x = R \cosh \theta$ ve $z = R \sinh \theta \cosh \varphi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi &= 2iR \int_{u=0}^{2\pi} e^{-\sigma R \sinh \theta \sin(u-i\varphi)} [\cosh \theta - i \sinh \theta \cos(u-i\varphi)] du, \\ &= 2iR \int_{u=0}^{2\pi} e^{-\sigma R \sinh \theta \sin u} [\cosh \theta - i \sinh \theta \cos u] du, \end{aligned} \quad (3.98)$$

elde ederiz. İntegraldeki birinci terimin çözümünü Ek 3.1.1'deki eşitlik (3.8)'de $a = b = 0$, $p = m = 0$, $q = -\sigma r$ ve $C = \sigma r$ olmak üzere

$$\phi = 4\pi i x I_0(\sigma r), \quad r = R \sinh \theta \quad (3.99)$$

buluruz (İntegraldeki ikinci terim sıfırdır.)

3.3. ULTRAHİPERBOLİK DALGA DENKLEMİ: KLASİK JOHN DÖNÜŞÜMÜNÜN İNDİRGEMESİ VE RADON DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde ultrahiperbolik dalga denkleminin çözümünü veren klasik John (X-ışını) dönüşümünün ışınal olmayan (non-null) indirgemesini kullanarak Trkalyan alanı kuracağız.

$\mathbb{R}^{2+2}$ uzayında tanımlı ultrahiperbolik dalga denklemi

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad (3.100)$$

ile verilir. Bu denklem $\alpha_1 = x + y$, $\alpha_2 = t + z$, $\beta_1 = t - z$, $\beta_2 = x - y$ koordinatları ile

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1} = 0, \quad (3.101)$$

haline (John denklemi) gelir.

Schwartz uzayı $S(\mathbb{R}^3)$ 'e $(\mathbb{R}^3$ 'de hızla azalan fonksiyonların uzayı, Bkz. Ek 4) ait bir $g(\mathbf{x})$

fonksiyonunun John (X-ışını) dönüşümü, β noktasından α vektörü yönünde geçen doğru üzerinde bu fonksiyonun integrali

$$X[g](\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha s + \beta) ds, \quad (3.102)$$

olarak tanımlanır [70]. Burada $s \in \mathbb{R}$ bir parametre olmak üzere $\mathbf{x} = \alpha s + \beta$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ noktasından $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vektörü yönünde geçen doğruyu göstermektedir.

Eğer $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 1)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, 0)$ parametrizasyonunu kullanırsak [55, 70], $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 s + \beta_1, \alpha_2 s + \beta_2, s)$ (Bu parametrizasyon x_3 =sabit düzlemine paralel olan yatay doğruları temsil etmez) olmak üzere John (X-ışını) dönüşümünü

$$X[g](\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha_1 s + \beta_1, \alpha_2 s + \beta_2, s) ds, \quad (3.103)$$

şeklinde yazarız.

John dönüşümü (3.103) denklem (3.101)'i sağlar: $X[g] = \psi$. Aynı zamanda denklem (3.101)'in çözümü de eşitlik (3.103) şeklinde yazılır. Dolayısıyla bu John dönüşümü, (3.101) denkleminin bütün çözümlerini verir ve bütün çözümler (3.103) eşitliği şeklinde yazılır [53]. Böylece John denkleminin çözümü (3.103) eşitliği ile verilir: $\psi = X[g]$, $g(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonu Schwartz uzayı $S(\mathbb{R}^3)$ 'e ($\mathbb{R}^3$ 'de hızla azalan fonksiyonların uzayı) ait olmak üzere

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha_1 s + \beta_1, \alpha_2 s + \beta_2, s) ds, \quad (3.104)$$

şeklinde yazabiliriz.

Ultrahiperbolik dalga denkleminin indirgemesi için

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = k\psi, \quad (3.105)$$

eşitliğini kullanacağız. Bu eşitlik, (3.104) eşitliğini kullanarak $(\partial/\partial \alpha_1 - \partial/\partial \beta_2)g = kg$,

$(\partial/\partial y = \partial/\partial \alpha_1 - \partial/\partial \beta_2)$ haline iner. Böylece

$$\left(s \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)g = kg, \quad (3.106)$$

elde ederiz. Eğer $p = x_1 + sx_2$, $q = x_1 - sx_2$, s olacak biçimde yeni değişkenler tanımlarsak $\partial/\partial x_1 = \partial/\partial p + \partial/\partial q$ ve $\partial/\partial x_2 = s(\partial/\partial p - \partial/\partial q)$ olduğundan bu eşitlikten

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{k}{2} \frac{1}{s} g, \quad (3.107)$$

denkleminde ulaşırız. Bu denklemin genel çözümü

$$g(x_1, x_2, x_3) = e^{(k/2)(1/s)q} h(p, s), \quad (3.108)$$

$p = x_1 + sx_2 = \eta(s) = t - z + 2xs + (t + z)s^2$, $h(p, s) = H(\eta, s)$, şeklindedir. Daha değişik integrasyon çarpanları ile de bu denklemi çözmek denenebilir. Fakat biz eşitlik (3.108) ile verilen genel çözümü kullanacağız. Böylece eşitlik (3.104)'den

$$\psi = X[g] = e^{ky} \phi(t, x, z), \quad (3.109)$$

elde ederiz. Bu eşitlikteki ϕ fonksiyonunu

$$\phi(t, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}[(t+z)s - (t-z)/s]} H(\eta, s) ds, \quad (3.110)$$

$\eta = p = x_1 + sx_2 = \beta_1 + (\alpha_1 + \beta_2)s + \alpha_2 s^2 = t - z + 2xs + (t + z)s^2$, Klein-Gordon denklemini sağlar: $\square_3^2 \phi + k^2 \phi = 0$. Bu çözüm $k = 0$ için dalga denkleminin çözümüne iner: $\square_3^2 \phi = 0$.

Bu integral, mini-twistör metodunda (3.57) eşitliği ile verilen Trkalyan alanı kurabilmek için kullandığımız (3.56) eşitliğinin bir benzeri olarak görülebilir, $(\omega = s, \text{Im}[\omega] = 0)$.

Örnek 3.3.1. Eşitlik (3.110)'da $H(\eta, s) = \delta(s - c)$ ve $c = e^a$ seçersek $\phi = e^{-k(t \sinh a + z \cosh a)}$ buluruz.

Trkalyan alan F 'nin bileşenleri Klein-Gordon denklemi (3.44)'ü sağladığından

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} [L, M, N] ds, \quad (3.111)$$

yazabiliriz. Denklem (2.4)'den

$$-2sL_{\eta} - (1 - s^2)N_{\eta} = k \left[M + \frac{(1 + s^2)}{2s}N \right], \quad (3.112)$$

$$2sM_{\eta} + (1 + s^2)N_{\eta} = k \left[-L + \frac{(-1 + s^2)}{2s}N \right], \quad (3.113)$$

$$(1 + s^2)L_{\eta} - (1 - s^2)M_{\eta} = k \left[\frac{(-1 + s^2)}{2s}L + \frac{(1 + s^2)}{2s}M + N \right], \quad (3.114)$$

eşitliklerine ulaşırız (Bkz. Ek 4). Denklem (3.112) ve (3.113)'den

$$-2s[(1 + s^2)L_{\eta} - (1 - s^2)M_{\eta}] = k[-(1 - s^2)L + (1 + s^2)M + 2sN], \quad (3.115)$$

bulunur. Eşitlik (3.114) ve (3.115)'den

$$(1 - s^2)L - (1 + s^2)M - 2sN = 0, \quad (3.116)$$

denkleme ulaşırız. Bu denklemden $N_{\eta} = [(1 - s^2)/(2s)]L_{\eta} - [(1 + s^2)/(2s)]M_{\eta}$ buluruz.

Bu eşitliği (3.112), (3.113) ve (3.114) denklemlerinde yerine yazarsak

$$-\frac{(1 + s^2)}{2s}[(1 + s^2)L_{\eta} - (1 - s^2)M_{\eta}] = k\frac{(1 - s^2)}{4s^2}[(1 + s^2)L - (1 - s^2)M], \quad (3.117)$$

$$\frac{1 - s^2}{2s}[(1 + s^2)L_{\eta} - (1 - s^2)M_{\eta}] = -k\frac{(1 + s^2)}{4s^2}[(1 + s^2)L - (1 - s^2)M], \quad (3.118)$$

$$(1 + s^2)L_{\eta} - (1 - s^2)M_{\eta} = 0, \quad (3.119)$$

elde ederiz. Bu eşitliklerden

$$(1 + s^2)L - (1 - s^2)M = 0, \quad (3.120)$$

denklemini bulunur. Buradan $u(\eta, s)$; η ve s nin keyfi bir fonsiyonu olmak üzere $L(\eta, s) = (1 - s^2)u(\eta, s)$, $M(\eta, s) = (1 + s^2)u(\eta, s)$ ve $N(\eta, s) = -2su(\eta, s)$ çözümlerine ulaşırız.

Böylece $f = (1/2)[(t + z)s - (t - z)/s]$ ve $\eta(s) = t - z + 2xs + (t + z)s^2$ olmak üzere Trkalyan

alanı

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [(1-s^2), (1+s^2), -2s] e^{-kf} u(\eta, s) ds, \quad (3.121)$$

şeklinde ifade ederiz.

Bu ifade mini-twistör metoduyla bulduğumuz (3.68) eşitliğinin reel bir hali olarak da düşünülebilir ($\omega = s$, $s \in \mathbb{R}$).

3.3.1. Radon Dönüşümü

Alan denklemi (2.3), (2.4) ve Klein-Gordon denklemi ($\square_3^2 \phi + \lambda^2 \phi = 0$) çözümünde farklı bir yaklaşım için, Minkowski uzayzamanı: $\mathbb{R}^{2+1}$, uzay: $\mathbb{R}^2$ ve zaman: $\mathbb{R}$ olarak ayrıştırabiliriz. Burada düz uzaysal kesitin: $\mathbb{R}^2$ noktalar yerine doğrulardan oluştuğunu varsayacağız. Bu uzaysal kesit $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde, Radon dönüşümünü kullanarak çalışacağız. Bu düzlemdeki doğruların oluşturduğu $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ uzayında alan denklemlerinin basitleştiğini göreceğiz.

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki doğrular, $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ uzayındaki noktalarla parametrize [κ birim normal ve (ortogonal) p orjine olan uzaklık] edilebilir. Bu nedenle sistemimizi $\mathbb{R}^2$ uzayındaki doğrular yerine $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ uzayındaki noktalar üzerinde tanımlı, zamana bağlı bir alan olarak düşünebiliriz. Bu iki resim Radon dönüşümü ile birbirine bağlanır.

Schwartz uzayına ($\mathbb{R}^3$ 'de hızla azalan fonksiyonların uzayı) ait $\phi(t, x)$ fonksiyonunun Radon dönüşümü [71], bu fonksiyonun, birim normal vektörü $\boldsymbol{\kappa} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ve $\mathbf{x} = (x, z)$ olmak üzere orijinden $p = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}$ kadar uzaklıkta bulunan doğru üzerinde integralidir ve

$$\hat{\phi}(t, p, \boldsymbol{\kappa}) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t, x) \delta(p - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}) d^2 x, \quad (3.122)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu Radon dönüşümü uzaysal türevleri eşleştirir: $\partial/\partial x \rightarrow \kappa_1 \partial/\partial p$, $\partial/\partial z \rightarrow \kappa_2 \partial/\partial p$, [71].

Böylece (2.4) denklemi

$$\hat{C}_t + \kappa_1 \hat{B}_p = -\lambda \hat{A}, \quad \kappa_2 \hat{C}_p - \kappa_1 \hat{A}_p = \lambda \hat{B}, \quad \kappa_2 \hat{B}_p + \hat{A}_t = \lambda \hat{C}, \quad (3.123)$$

şekline iner ($\lambda = v$) ve $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ uzayında, (2+1) boyuttaki Klein Gordon denklemini $\hat{\phi}_{tt} - \hat{\phi}_{pp} + \lambda^2 \hat{\phi} = 0$ olarak ifade ederiz. Ayrıca $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ bileşenleri de (1+1) boyuttaki bu Klein-Gordon denklemini sağlar.

Bu Klein-Gordon denklemini değişkenlerine ayırabilmek için $\hat{\phi} = \hat{T}(t)\hat{P}(p)$ alırsak, $a = \mp 1$ olmak üzere $\hat{T}'' + a\kappa^2\hat{T} = 0$ ve $\hat{P}'' - (\lambda^2 - a\kappa^2)\hat{P} = 0$ diferansiyel denklemlerine ulaşırız. Bu denklemlerden $\lambda^2 - a\kappa^2 = -v^2 < 0$, ($a = 1 \Rightarrow \lambda, \kappa, v \in \mathbb{R}$) olmak üzere çözümü $\hat{\phi}(t, p, \mathbf{\kappa}) = e^{-i\sqrt{a}\kappa t} e^{ivp}$ şeklinde buluruz. Ters Radon dönüşümü ise

$$\phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}_p}{p - \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{x}} dp, \quad (3.124)$$

şeklinde verilir. Böylece $\mathbf{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $v > 0$ ve $\zeta = vr$ olmak üzere Ek 4'deki (4.1) eşitliğinden çözüm $\phi(t, \mathbf{x}) = (v/2)e^{-i\sqrt{a}\kappa t} J_0(vr)$ şeklinde bulunur.

(Reel) $\mathbb{R}^{2+1}$ 'in mini-twistör uzayının, ışınsal (null) düzlemlerin oluşturduğu $\mathcal{N} = \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ uzayı olduğunu hatırlatırız [51, 72, 73]. Whittaker çözümünün Lorentziyen versiyonu dalga denkleminin çözümlerini sağlar [51]. Bu $\mathcal{N}$ üzerindeki fonksiyonlarla, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki fonksiyonlar arasındaki Radon dönüşümü ile ilgilidir.

3.4. ULTRAHİPERBOLİK DALGA DENKLEMİ: TWİSTÖR ÇÖZÜMÜNÜN İNDİRGEMESİ

Bu bölümde ultrahiperbolik dalga (John) denkleminin twistör çözümünün ışınsal olmayan (non-null) indirgemesini kullanarak Trkalyan alanı kuracağız.

Klasik John dönüşümünün kompaktlaştırılmış bir hali, $\mathbb{RP}^3$ ($\mathbb{R}^3$ 'ün bir kompaktlaştırılması) uzayında düzgün bir fonksiyonun yönlü jeodezikler üzerinde integralini almaya dayanır. Bu $\mathbb{R}^4$ 'de bulunan 2-düzlemlerin oluşturduğu Grassmannian uzayı üzerinde tanımlıdır ve ultrahiperbolik dalga denklemini sağlar [53]. Bu yakın ilişki, twistör metodlarını kullanarak Guillemin ve Sternberg [58], Woodhouse [56] tarafından tartışılmıştır.

Woodhouse, ultrahiperbolik ize sahip düz uzayzamanda twistör yapısının bir analizini sunmuştur [56]. Ultrahiperbolik dalga (John) denkleminin herhangi bir lokal çözümünün $\mathbb{R}^{2+2}$ uzayının reel twistör uzayında bir fonksiyondan üretilebileceğini göstermiştir [53].

Ultrahiperbolik dalga denklemini, Ref. 56'nın notasyonu ve gösterimi ile

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \psi = 0, \quad (3.125)$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer yeni değişkenler: $u_1 = (t_1 - x_1)/2$, $u_2 = (t_2 - x_2)/2$, $v_1 = (t_1 + x_1)/2$, $v_2 = (t_2 + x_2)/2$ tanımlarsak bu denklem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial v_1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2 \partial v_2} = 0, \quad (3.126)$$

denklemine iner.

Yeni değişkenleri: $\xi = x_1 + ix_2$, $\tau = t_1 + it_2$, $\omega = \xi + \bar{z}\tau$, $\bar{\omega} = \bar{\xi} + z\bar{\tau}$ olarak alırsak bu denklemin çözümü

$$\psi(\xi, \tau, \bar{\xi}, \bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C:|z|=1} f(\omega, \bar{\omega}, z) \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C:|z|=1} f(\xi + \bar{z}\tau, \bar{\xi} + z\bar{\tau}, z) \frac{1}{z} dz, \quad (3.127)$$

kontur integrali şeklinde verilir [56].

Bu çözümün indirgemesi için

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1} = k\psi, \quad (3.128)$$

eşitliğini kullanacağız. Bu eşitlik (3.127) eşitliğini kullanarak $(\bar{z}\partial/\partial\omega + z\partial/\partial\bar{\omega})f = kf$, $(\partial/\partial t_1 = \bar{z}\partial/\partial\omega + z\partial/\partial\bar{\omega})$ şekline iner. Böylece

$$\left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial \omega} + z \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \right) f = kf, \quad (3.129)$$

denklemine ulaşırız.

Bu denklemi $\alpha = z\omega - \bar{z}\bar{\omega}$, $\beta = z\omega + \bar{z}\bar{\omega}$ değişkenlerini kullanarak

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = k \frac{1}{2} \frac{1}{z\bar{z}} f, \quad (3.130)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, z) &= e^{(k/2)(1/z\bar{z})\beta} H(\alpha, z) \\ &= e^{(k/2)(1/z\bar{z})\beta} H(\eta, z), \quad \alpha = \eta(z), \end{aligned} \quad (3.131)$$

şeklinde bulunur. Burada $\alpha = \eta(z) = z\omega - \bar{z}\bar{\omega} = (z - \bar{z})x_1 + i(z + \bar{z})x_2 + 2iz\bar{z}t_2$ ve $\beta = z\omega + \bar{z}\bar{\omega} = (z + \bar{z})x_1 + i(z - \bar{z})x_2 + 2z\bar{z}t_1$ eşitlikleri ile verilir. Böylece eşitlik (3.127)'den

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} e^{kt_1} \phi(t, x_1, x_2), \quad (3.132)$$

elde ederiz. Buradaki $\phi(t, x_1, x_2)$ fonksiyonu

$$\phi(t, x_1, x_2) = \oint_{C: |z|=1} e^{\frac{k}{2}[(z+\bar{z})x_1 + i(z-\bar{z})x_2]} H(\eta, z) \frac{1}{z} dz, \quad (3.133)$$

$\eta = (z - \bar{z})x_1 + i(z + \bar{z})x_2 + 2it_2$ ve $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ olmak üzere $(\square_3^2 + k^2)\phi = 0$ (Klein-Gordon) denklemini sağlar. Bu çözüm $k = 0$ için dalga denkleminin çözümüne iner: $\square_3^2 = 0$.

Örnek 3.4.1. Eşitlik (3.133)'de $H(\eta, z) = e^{(n/2)\eta}$ ve $z = e^{i\theta}$ seçersek

$$\phi = ie^{int} \oint_{\theta=0}^{2\pi} e^{k(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)} e^{in(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)} d\theta, \quad (3.134)$$

buluruz, $\eta = 2i(t + x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$. Ek 3.1.1'deki (3.8) eşitliğinde $m = 0$, $p = kx_1$, $q = -kx_2$, $a = nx_2$ ve $b = nx_1$ alırsak $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ olmak üzere $C = (k^2 - n^2)r^2$ ve $D = 0$ buluruz. Böylece $k^2 - n^2 = v^2 > 0$ olmak üzere çözümü

$$\phi = 2\pi i e^{int} I_0(vr), \quad (3.135)$$

şeklinde yazarız.

Örnek 3.4.2. Eşitlik (3.133)'de $H(\eta, z) = \eta$ ve $z = e^{i\theta}$ seçersek $\eta = 2i(t + x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$

ve

$$\begin{aligned}\phi &= -2 \oint_{\theta=0}^{2\pi} e^{(kx_1 \cos \theta - kx_2 \sin \theta)} (t + x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) d\theta, \\ &= -2t \oint_{\theta=0}^{2\pi} e^{(kx_1 \cos \theta - kx_2 \sin \theta)} d\theta - 2 \oint_{\theta=0}^{2\pi} e^{(kx_1 \cos \theta - kx_2 \sin \theta)} (x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) d\theta,\end{aligned}\quad (3.136)$$

buluruz. Bu integralin ikinci kısmı sıfırdır. Böylece integralin birinci kısmından çözümü

$$\phi = -4\pi t I_0(kr), \quad (3.137)$$

$k > 0$, şeklinde yazarız [Ek 3.1.1'deki (3.8) eşitliğinde, $m = a = b = 0$, $p = kx_1$ ve $q = -kx_2$ alırsak $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ olmak üzere $C = k^2 r^2$ ve $D = 0$ buluruz].

Trkalyan alanı [bileşenleri Klein-Gordon denklemi (3.44)'ü sağladığından]

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \oint_{C:|z|=1} e^{kg(L, M, N)} \frac{1}{z} dz, \quad (3.138)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $g = (1/2)[(z + \bar{z})x_1 + i(z - \bar{z})x_2]$ ve $L(\eta, \omega)$, $M(\eta, \omega)$, $N(\eta, \omega)$ ise $\eta = (z - \bar{z})x_1 + i(z + \bar{z})x_2 + 2it_2$ ve z 'nin keyfi birer fonksiyonudur. Böylece denklem (2.4)'den

$$-(z - \bar{z})L_\eta + i(z + \bar{z})N_\eta = k\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})L + M - \frac{1}{2}i(z - \bar{z})N\right], \quad (3.139)$$

$$2iL_\eta + i(z + \bar{z})M_\eta = k\left[-\frac{i}{2}(z - \bar{z})M + N\right], \quad (3.140)$$

$$(z - \bar{z})M_\eta + 2iN_\eta = -k\left[L + \frac{(z + \bar{z})}{2}M\right], \quad (3.141)$$

eşitliklerine ulaşırız (Bkz. Ek 5). Eşitlik (3.139) ve (3.140)'dan

$$i(z + \bar{z})[(z - \bar{z})M_\eta + 2iN_\eta] = ik(z + \bar{z})L - i\frac{k}{2}[(z - \bar{z})^2 - 4]M + 2k(z - \bar{z})N, \quad (3.142)$$

buluruz. Eşitlik (3.141) ve (3.142)'den

$$i(z + \bar{z})L + i(z\bar{z} + 1)M + (z - \bar{z})N = 0, \quad (3.143)$$

denkleminde ulaşırız. Buradan $N_\eta = -i[(z + \bar{z})/(z - \bar{z})]L_\eta - i[(z\bar{z} + 1)/(z - \bar{z})]M_\eta$ olarak bulunur. Bunu (3.139), (3.140) ve (3.141) eşitliklerinde yazarsak

$$\frac{2}{z - \bar{z}}[2L_\eta + (z + \bar{z})M_\eta] = 0 \quad (3.144)$$

$$\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}[2L_\eta + (z + \bar{z})M_\eta] = -\frac{k}{2}[2L + (z + \bar{z})M], \quad (3.145)$$

$$2L_\eta + (z + \bar{z})M_\eta = -k\frac{(z + \bar{z})^2}{2(z - \bar{z})}[2L + (z + \bar{z})M], \quad (3.146)$$

buluruz, ($z\bar{z} = |z|^2 = 1$). Bu denklemlerden

$$2L + (z + \bar{z})M = 0, \quad (3.147)$$

elde ederiz. Böylece $u(\eta, z)$: η ve z 'nin keyfi bir fonksiyonu olmak üzere $L(\eta, z) = -(z + \bar{z})u(\eta, z)$, $M(\eta, z) = 2u(\eta, z)$ ve $N = i(z - \bar{z})u(\eta, z)$ çözümlerine ulaşırız.

Böylece $g = (1/2)[(z + \bar{z})x_1 + i(z - \bar{z})x_2]$ olmak üzere Trkalyan alan çözümünü

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \oint_{C:|z|=1} [-(z + \bar{z}), 2, i(z - \bar{z})] e^{kg} u(\eta, z) \frac{1}{z} dz, \quad (3.148)$$

buluruz.

Bu dönüşümün geometrik bir açıklaması [51], Nakata'nın $\mathbb{R}^{2+2}$ uzayında belirsiz self-dual bir metrik için twistör karşılıklılığı kapsamında tartışmasından çıkar [72, 73]. Nakata, $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ ışınal düzlemlerin kümesiyle özdeşleştirilen $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ silindiri üzerinde bir dönüşüm kullanarak dalga denkleminin çözümünü vermiştir. Bu dönüşümün tersi, (ters) Radon dönüşümü ($t = 0$ düzlemi, ışınal düzlemlerle ara kesiti düz doğrular olan başlangıç düzlemi [51] olarak düşünerek) kullanarak elde edilir.

Ultrahiperbolik dalga denkleminin twistörel çözümünün indirgemesi:(3.134) Klein-Gordon denklemini için, bu dönüşümün bir genellemesini vermektedir. Bu genelleme indirgemenen gelen bir üstel çarpan ile mümkün olmaktadır. Bu dönüşüm üstel Radon tipi bir dönüşüm formundadır [74].

Eğer $k = 0$ alırsak (3.133) ile verilen integral dönüşümü, Nakata tarafından tartışılan dönüşüme iner ($\eta' = \eta/2i = t + x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta = t + x_1 \sin \theta' + x_2 \cos \theta'$,

$\omega = e^{i\theta} = e^{i(\pi/2-\theta')}$, ışınal düzlem denklemleri), (diğer bir deyişle Whittaker çözümünün Lorentziyen versiyonu [51]) .

Böylece, eşitlik (3.148) ile (reel) Minkowski uzayında tanımlı Trkalyan alanlar için bu uzaydaki ışınal düzlemlerin oluşturduğu $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ silindiri üzerinde başka bir mini-twistörel ifadesi sunulmuştur.

Ayrıca $\mathbb{TCP}^1$ mini-twistör uzayı ile bağlatılı olarak, $-i\eta$ sınır $|\lambda| = 1$ üzerindeki γ ile çakışır: $-i\eta = \gamma$, $z = \lambda^{-1}$, $\bar{z} = \lambda$. Sınır $|\lambda| = 1$, belirtilen koordinat dönüşümü altındaki $z \in \mathbb{R}$ doğrusuna karşılık gelir.



4. BULGULAR

Bu tez çalışmasında, uzayzamanda tanımlı Trkalyan alan denkleminin çözümü için Chandrasekhar-Kendall, mini-twistör, klasik John (X-ışını) ve Radon dönüşümü yöntemlerini sunduk. Topolojik kütleli Abelyan ayar teorisi, uzayzamanda tanımlı Trkalyan alanlar için bir örnektir. Bu teori çeşitli fiziksel konularda ve matematiksel yapılarda ortaya çıkmaktadır.

Biz bu tez çalışmasında (2+1) boyutta Lorentziyen ize sahip manifoldlar üzerinde çalıştık.

Birinci olarak Chandrasekhar-Kendall metodu ile çözüm sunduk. Chandrasekhar-Kendall yöntemi ile hem eğri hem de düz manifoldlar üzerinde çalışılabilir. Bu çözümde Hansen 1-formları, skaler bir fonksiyon (Debye potansiyeli) ve konformal Killing 1-form kullanılmıştır. Debye potansiyeli, skaler Klein-Gordon ve Helmholtz denklemlerinin bir çözümüdür.

Chandrasekhar-Kendall metoduyla (bölüm 3.1) $(\star d - \nu) \star F = 0$ denkleminin çözümü için $\mathfrak{L}_X g = 2\kappa g$ ile verilen (3.7) denklemini sağlayan ω konformal Killing 1-form ve $(-1)^s \Delta \psi \omega + (1/3) \star d \star \omega \wedge d\psi + \star(d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega - \nu^2 \psi \omega = 0$ ile verilen denklem (3.10)'u sağlayan ψ olmak üzere T ve S 1-formları

$$\begin{aligned} \star F &= T + S \\ T &= \star(d\psi \wedge \omega) + \psi \star d\omega = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \psi \omega_\nu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\gamma + \psi \star d\omega, \\ S &= \frac{1}{\nu} [(-1)^s (\Delta \psi \omega - \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \omega^\mu dx^\nu - \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \omega_\nu dx^\nu + \nabla_\mu \psi \nabla^\nu \omega_\nu dx^\mu) \\ &\quad + \star(d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega], \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde verilir. Daha sonra $\star F$ bulunabilir. Farklı ω ve ψ için farklı çözümler üretebiliriz.

İkinci yöntemimizde, $\mathbb{R}^{2+1}$ Minkowski uzayzamanında tanımlı Trkalyan alanlar için twistör teorisi ile çözüm sunduk. Daha sonra bu denklemi, düz uzayzamanda, twistör teori ve integral geometri tekniklerini kullanarak çözdük.

Mini-twistör metoduyla $f = (1/2)[(t+z)\omega - (t-z)/\omega]$ olmak üzere çözüm

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_C [(1-\omega^2), (1+\omega^2), -2\omega] e^{-kf} u(\eta, \omega) d\omega, \quad (4.2)$$

şeklinde bulunmuştur. Ayrıca $\partial \tilde{f} / \partial y = i$ koşulunu sağlayan farklı f fonksiyonları için çözüm aynı formda çıkar. Fakat en genel çözüm $f = (1/2)[(t+z)\omega - (t-z)/\omega]$ ile verilir.

Üçüncü yöntemimiz, $\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin klasik John (X-ışını) dönüşümü çözümünün indirgemesidir. Klasik John (X-ışını) dönüşümü çözümünün indirgemesi metoduyla, $f = (1/2)[(t+z)s - (t-z)/s]$ olmak üzere

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [(1-s^2), (1+s^2), -2s] e^{-kf} u(\eta, s) ds, \quad (4.3)$$

şeklinde bulunmuştur. Bu çözüm mini-twistör metoduyla bulduğumuz çözüm ile benzerlik göstermektedir. Bu ifade $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega = s$ için (4.2) denkleminin reel hali olarak görülebilir.

Radon dönüşümü, $\mathbb{R}^{2+1}$ Minkowski uzayzamanının uzay ve zaman: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ olarak ayrışmasına dayanmaktadır ve düzlemsel uzaysal kısım olan $\mathbb{R}^2$ doğrulardan oluşur. Doğruların oluşturduğu $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ uzayında daha basit denklemlerle çalışmak mümkündür.

Dördüncü yöntemimiz ise $\mathbb{R}^{2+2}$ üzerinde tanımlı ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün indirgemesidir. Bu bölümde Trkalyan alanları başka bir twistörel gösterimle ifade ettik; $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerindeki ışınsal (null) düzlemlerin uzayında üstel dönüşüm kullandık. Ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünü indirgeme metoduyla Trkalyan alan

$$F(x) = [A(x), B(x), C(x)] = \oint_{C: |z|=1} [-(z+\bar{z}), 2, i(z-\bar{z})] e^{kg} u(\eta, z) \frac{1}{z} dz, \quad (4.4)$$

şeklinde bulunmuştur, $(g = 1/2[(z+\bar{z})x_1 + i(z-\bar{z})x_2])$. Bu da Trkalyan alan denkleminin bir başka mini-twistörel çözümünü oluşturur.

Bu yöntemlerin her birinin altında yatan geometrik yapıya bağlı olarak kendine özgü çözüm tipleri vardır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Trkalyan alan denkleminin çözümü için kullandığımız dört metottan ilki olan Chandrasekhar-Kendall metoduyla, Öklidyen veya Lorentziyen ize sahip eğri veya düz manifoldlarda çalışmak mümkündür. Biz, diferansiyel formları kullanarak, bu yöntemin Lorentziyen ize (veya Öklidyen ize) sahip 3-boyutlu (düz veya eğri) manifoldlara genelleştirilmesini sunduk. Burada kullandığımız $\star d$ operatörü hem Öklidyen hem de Lorentziyen manifoldlarda çok temel bir operatördür.

Bu yöntem kullanılarak Lorentziyen veya Öklidyen ize sahip çeşitli manifoldlar üzerinde çözümler üretilebilir. Chandrasekhar-Kendall metodunun genelleştirilmesi, girişte bahsettiğimiz matematik ve fiziğin çeşitli alanlarında, yeni çözümler bulmak için kullanılabilir. Örneğin, güneş patlamalarında meydana çıkan manyetik bulutlar için daha gerçekçi modellemeler oluşturulabilir.

Daha sonra Minkowski uzayzamanı: $\mathbb{R}^{2+1}$ üzerinde tanımlı Trkalyan alanları kurabilmek için twistör teori ve integral geometri metodlarını kullandık.

Diğer üç yöntem; mini-twistör, ultrahiperbolik dalga denkleminin John (X -ışını) dönüşümü ile verilen çözümün indirgemesi ve ultrahiperbolik dalga denkleminin twistör çözümünün indirgemesi ile düz manifoldlarda çalışmak mümkündür.

Biz, bu yöntemlerle, Trkalyan alan denkleminin yeni bir çözümünü sunduk.

Bu yöntemlerin çeşitli şekil veya yönde geliştirilmesi denenebilir. Örneğin sabit eğrilikli uzayzamanda bu metodları kullanmak akla ilk gelen yollardan birisidir.

İntegral geometri, günümüzde bir çok alanda kullanılmaktadır. Bu çalışmalar integral geometrinin kendisine de matematiksel katkı sağlamaktadır. Bu alanlardan ilk akla gelen örnek tomografidir.

Daha önce AdS/CFT karşılıklılığı çerçevesinde Trkalyan: Maxwell-Chern-Simons alanlarının çalışıldığını ifade etmiştik. Günümüzde bunlar yeni integral geometri metodları, örneğin horosiklik (horocycles) dönüşüm, Gel'fand Graev Radon dönüşümü

kullanılarak bazı alanlar için çalışılmıştır [79-81]. Bu integral geometri metodları ile Maxwell-Chern-Simons için çalışmak da denenebilecek ilgi çekici yollardan birisidir.

Ayrıca kullandığımız yöntemler ve altında yatan geometrik yapılar daha derinlemesine incelenebilir.

Sonuç olarak, bu yöntemler uzayzaman üzerindeki Trkalyan alanları daha iyi kavramamızı sağlayabilir. Örneğin topolojik kütleli ayar teorisi ile bağlantılı matematiksel yapılar ve çeşitli fiziksel kavramları daha iyi anlamamıza yardımcı olabilir.



KAYNAKLAR

- [1]. Gromeka, I., 1881, Scientific Notes of the Kazan University; Gromeka, I., 1952, Collected Works, AN USSR, Moscow, p.76-p.148.
- [2]. Beltrami, E., 1889, Considerazioni idrodinamiche, Rendiconti -Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere, 22, 122 [İngilizce çeviri: Filipponi, G., 1985, Considerations on hydrodynamics, *Int. J. Fusion Energy* 3, 53].
- [3]. Trkal, V., 1919, Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin, *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 48, 302 [İngilizce çeviri: Gregora, I., 1994, A note on the hydrodynamics of viscous fluids, *Czechoslovak Jour. Phys.*, 44(2), 97].
- [4]. Lakhtakia, A., 1994, Victor Trkal, Beltrami Fields and Trkalian Flows, *Czechoslovak Jour. Phys.*, 44(2), 89.
- [5]. Lundquist, S., 1950, Magneto-hydrostatic fields, *Arkiv för Fysik*, 2, 361.
- [6]. Bjørgum, O., 1951, Universitetet i Bergen Årbok, On Beltrami vector fields and flows, Part I, *Naturvitenskapelig Rekke*, 1, 1.
- [7]. Bjørgum, O. and Godal, T., 1952, On Beltrami vector fields and flows, Part II, *Universitetet i Bergen Årbok, Naturvitenskapelig Rekke*, 13, 1.
- [8]. Chandrasekhar, S., 1956, On Force-Free Magnetic Fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 42, 1.
- [9]. Chandrasekhar, S. and Kendall, P. C., 1957, On Force-Free Magnetic Fields, *Astrophys. J.*, 126, 457.
- [10]. Chandrasekhar, S. and Woltjer, L., 1958, On Force-Free Magnetic Fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 44, 285.
- [11]. Woltjer, L., 1958, A Theorem On Force-Free Magnetic Fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 44, 489.
- [12]. Marsh, G. E., 1996, *Force-Free Magnetic Fields Solutions, Topology and Applications*, World Scientific, USA, ISBN : 981-02-2497-4.
- [13]. McDonald, K. T., *Force-Free Magnetic Fields aka Eigenfunctions of the Curl Operator*, <http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/forcefree.pdf>, [07.23.2016].
- [14]. Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S., 1982, Three-Dimensional Massive Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.*, 48, 975.
- [15]. Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S., 1982, Topologically Massive Gauge Theories, *Ann. Phys.*, 140, 372.

- [16]. Schonfeld, J.F., 1981, A Mass Term For Three-Dimensional Gauge Fields, *Nuc. Phys. B*, 85, 157.
- [17]. Chern, S. S., Simons, J., 1974, Characteristic forms and geometric invariants, *Annals of Mathematics*, 99(1), 48-69.
- [18]. Aliev, A., Nutku, Y., Saygılı, K., 2000, Topologically massive magnetic monopoles, *Class.Quantum Grav.*, 17, 4111-4123.
- [19]. Saygılı, K., 2008, Topologically Massive Gauge Theory: Wu-Yang Type Solutions, e-print arXiv: hep-th/0610307.
- [20]. Saygılı, K., 2007, Topologically Massive Gauge Theory: A Lorentzian Solution, *Int. J. Mod. Phys. A*, 22, 2961.
- [21]. Henneaux, M. and Teitelboim, C., 1986, Quantization of Topological Mass in the Presence of a Magnetic Pole, *Phys. Rev. Lett.*, 56(7), 689.
- [22]. Pisarski, R. D., 1986, Monopoles in topologically massive gauge theories, *Phys. Rev.D*, 34(12), 3851.
- [23]. Abreu, E. M. C., Hott, M., Helayël-Neto, J. A., Moura-Melo, W. A., 2002, Dirac-like Monopoles in Three Dimensions and Their Possible Influences on the Dynamics of Particles, *Phys. Rev.D*, 65, 085024.
- [24]. Shizuya, K., Tamura, H., 1990, Anyon statistics and its variation with wavelength in Maxwell-Chern-Simons gauge theories, *Phys. Lett B*, 252, 412.
- [25]. Løvvik, O. M., 1992, *On Maxwell-Chern-Simons Theory*, Candidatus Scientiarum thesis, University of Oslo.
- [26]. Moura-Melo, W. A. and Helayël-Neto, J. A., 2001, Remarks on Dirac-like monopoles, Maxwell and Maxwell-Chern-Simons electrodynamics in D=2+1 dimensions, *Phys. Rev. D*, 63, 065013.
- [27]. Colatto, L. P., Helayël-Neto, J. A., Hott, M., Moura-Melo, W. A., 2003, Remarks on charged vortices in the Maxwell–Chern–Simons model, *Pys. Lett. A*, 314, 184.
- [28]. Wilczek, F., 1990, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity, *World Scientific*.
- [29]. Enger, H., 1998, *Vortices in Chern-Simons-Ginzburg-Landau Theory and the Fractional Quantum Hall Effect*, Candidatus Scientiarum thesis, University of Oslo.
- [30]. Chandelier, F., Georgelin, Y., Lassaut, M., Masson, T., Wallet, J.C., 2004, Vortex in Maxwell-Chern-Simons models coupled to external backgrounds, *Phys. Rev. D*, 70, 065016.
- [31]. Ricciardi, T., Tarantello, G., 2000, Vortices in the Maxwell-Chern-Simons Theory, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 53(7), 811-851.
- [32]. Kim, B. S., Lee, H., Yee, J. H., 1999, Vortex solutions of nonrelativistic Fermion and scalar field theories coupled to Maxwell-Chern-Simons gauge fields, *Phys. Rev. D*, 61, 025010.

- [33]. Dunne, G. V., Trugenberger, C. A., 1991, Self-duality and nonrelativistic Maxwell-Chern-Simons solitons, *Phys. Rev. D*, 43, 1323.
- [34]. Zhang, S. C., Hansson, T. H., Kivelson, S., 1989, Effective-Field-Theory Model for the Fractional Quantum Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.*, 62, 82.
- [35]. Alexanian, G., Paranjape, M. B. and Prémont-Schwarz, 2006, Solitons in finite droplets of noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory, *J. High Ener. Phys.*, 01, 020.
- [36]. Gomes, M., Nascimento, J. R., Petrov, A. Yu., da Silva, A. J., Silva, E. O., 2008, On duality of the noncommutative supersymmetric Maxwell–Chern–Simons theory, *Phys. Lett. B*, 666, 91-94.
- [37]. Lee, B. H., Lee, H., Ohta, N., Yang, H. S., 1999, Maxwell Chern-Simons solitons from type IIB string theory, *Pyhs. Rev. D*, 60 , 106003.
- [38]. Balachandra, A. P., Chandar, L., Ercolessi, E., Govindarajan, T. R., Shankar, R., 1994, Maxwell-Chern-Simons Electrodynamics On A Disk, *Int. J. Mod. Phys. A*, 09, 3417-3441.
- [39]. Alexanian, G., Paranjape, M. B., Arnaudon, D., 2003, On plane wave and vortex-like solutions of noncommutative Maxwell-Chern-Simons theory, *J. High Ener. Phys.*, 11, 011.
- [40]. Harikumar, E., Rivelles, V. O., 2005, A Review of Noncommutative Field Theories, *Phys. Lett. B*, 625, 156.
- [41]. Tallarita, G., Thomas, S., 2010, Maxwell-Chern-Simons vortices and holographic superconductors, *J. High Ener. Phys.*, 12, 090.
- [42]. Minces, P., Rivelles, V. O., 1999, Chern-Simons theories in the AdS/CFT correspondence, *Phys. Lett. B*, 455, 147.
- [43]. Andrade, T., Jottar, J. I., Leigh, R. G., 2012, Boundary Conditions and Unitarity: the Maxwell-Chern-Simons System in AdS_3/CFT_2 , *J. High Ener. Phys.*, 05, 071.
- [44]. Carlip, S., Deser, S., Waldron, A., Wise, D. K., 2009, Cosmological Topologically Massive Gravitons and Photons, *Class. Quant. Grav.*, 26, 075008
- [45]. Benn, I. M., Kress, J., 1996, Force-free fields from Hertz potentials, *J.Phys. A: Math. Gen*, 29, 6295.
- [46]. Saygılı, K., 2013, Trkalian fields: ray transforms and mini-twistors, *J. Math. Phys.*, 54, 103512.
- [47]. Hansen, W. W., 1935, A New Type of Expansion in Radiation Problems, *Phys. Rev. D*, 47, 139.
- [48]. Hansen, W. W., 1937, Transformations Useful in Certain Antenna Calculations, *Jour. Appl. Phys.*, 8, 282.
- [49]. Hitchin, N. J., 1982, Monopoles and Geodesies, *Commun. Math. Phys.*, 83, 579-602.

- [50]. Ward, R. S., 1981, A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2, *Commun. Math. Phys.*, 79, 317-325.
- [51]. Ward, R. S., 1989, Twistors in 2+1 dimensions, *Jour. Math. Phys.*, 30, 2246.
- [52]. Penrose, R. and Rindler, W., 1993, *Spinors and Space-Time*, Volumes 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN :0 521 24527 3 -0 521 25267 9 .
- [53]. Dunajski, M. and West, S., 2006, *Anti-self-dual conformal structures in neutral signature*, <https://arxiv.org/pdf/math/0610280v5.pdf>, [27.08.2019].
- [54]. John, F., 1938, The Ultrahyperbolic Differential Equation With Four Independent Variables, *Duke Math. Jour.*, 4, 300.
- [55]. Dunajski, M., 2009, Twistor theory and differential equations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42, 404004.
- [56]. Woodhouse, N. M. J., 1992, Contour Integrals for the Ultrahyperbolic Wave Equation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 438, 197-206.
- [57]. Mason, L. J., 2006, Global anti-self-dual Yang-Mills fields in split signature and their scattering, *J. reine angew. Math.*, 597, 197.
- [58]. Guillemin, V. and Stenberg, S., 1986, An Ultra-Hyperbolic Analogue of the Robinson-Kerr Theorem, *Lett. Math. Phys.*, 12, 1.
- [59]. Chiou, D., Gannor, J., Hong, Y. P., Kim, B. S., Mitra, I., 2005, Massless and massive three-dimensional super Yang-Mills theory and mini-twistor string theory, *Phys. Rev. D*, 71, 125016.
- [60]. Nakahara, M., 1990, *Topology and Physics*, IOP, Bristol, ISBN : 0 7503 0606 8.
- [61]. Rindler, W., 1966, Kruskal Space and the Uniformly Accelerated Frame, *Am. J. Phys.*, 34(12), 1174-1178.
- [62]. Rizzi G., Ruggiero M. I., 2004, *Relativity in Rotating Frames*, Springer, USA, ISBN : 978-90-481-6514-8.
- [63]. Arfken, G. B., Weber H. J., 2005, *Mathematical Methods For Physicist*, Elsevier Academic Press, USA, ISBN : 0-12-059876-0.
- [64]. Berry, M. and Balazs, N. L., 1979, Nonspreading wave packets, *Am. J. Phys.*, 47(3), 264.
- [65]. Milne, E. A., 1951, *Kinematic Relativity*, University Press, OXFORD.
- [66]. Bayona, C. A. B. and Braga, N. R. F., 2007, Anti-de Sitter boundary in Poincaré coordinates, *Gen Relativ Gravit*, 39, 1397-1379.
- [67]. Deser, S. and Jackiw, R., 1984, Three-Dimensional Cosmological Gravity: Dynamics of Constant Curvature, *Ann. Phys.*, 153, 405.

- [68]. Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. ,2007, *Table of Integrals, Series, and Products*, Elsevier Academic Press, USA,ISBN-13 : 978-0-12-373637-6, ISBN-10: 0-12-373637-4.
- [69]. Shaw, W. T., 2006, *Complex Analysis with Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [70]. Gelfand, I. M., Gindikin, S. G., Graev, M. I., 2003, *Selected Topics in Integral Geometry*, AMS, USA.
- [71]. Deans, S. R., 1983, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, A Wiley-Interscience Publication, Michigan, ISBN : 9780471898047.
- [72]. Nakata, F., 2012, Wave Equations, Integral Transforms, And Twistor Theory On Indefinite Geometry, *Dif. Geo. and its App.*, 30, 428.
- [73]. Nakata, F., 2014, Wave Equations, Integral Transforms, and Twistor Theory on Indefinite Geometry, *Proceedings of the 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields*, 3-7 September 2012 Veliko Tarnovo, Singapore, World Scientific.
- [74]. Natterer, F., 2001, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, Philadelphia.
- [75]. Erdélyi, A., 1953, *Higher Transcendental Functions, Volume 2*, McGraw-Hill, New York.
- [76]. Lebedev, N. N., 1965, *Special Functions and Their Applications*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [77]. Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York.
- [78]. Erdélyi, A., 1954, *Tables of Integral Transforms, Volume 1*, McGraw-Hill, New York.
- [79]. Bhowmick, S., Ray, K., Sen, S., 2019, Holography in de Sitter and anti-de Sitter spaces and Gel'fand Graev Radon transform, *Phys. Lett. B*, 798, 134977.
- [80]. Bhowmick, S., Ray, K., Sen, S., 2017, Bulk reconstruction in AdS and Gel'fand-Graev-Radon transform, *JHEP*, 10, 082.
- [81]. Lévy, P., 2019, Berry curvature, horocycles, and scattering states in $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$, *Phys. Rev. D*, 100, 126022.

EKLER

EK 1. Trkalyan Alanlar

$\mathbf{E}$ elektrik alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alan ve $\mathbf{v}$ akış hızı olmak üzere elektrik yüklü bir plazma üzerinde manyetik alanın yarattığı Lorentz kuvveti $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ile verilir.

Manyetik Lorentz kuvvetinin sıfır olması (force-free) için akımın manyetik alana paralel olması gereklidir.

Geometrik birimlerdeki Maxwell denklemleri $\mathbf{j}$ akım olmak üzere

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

şeklindedir.

Elektrik alanının sıfır olduğu durumda Lorentz kuvvetini $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ olmak üzere $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ile ifade edebiliriz. Kuvvet içermeyen (force-free) durumda $\mathbf{F} = 0$ olacağından $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ olur. Bu eşitlik $\mathbf{j} // \mathbf{B}$ olduğu durumda gerçekleştiğinden $\mathbf{v}$ sabit veya koordinatlara bağlı bir fonksiyon olmak üzere $\mathbf{j} = \mathbf{v} \mathbf{B}$ diyebiliriz. Maxwell denklemlerinden üçüncüsü yani (1.3)'den $\mathbf{E} = 0$ olduğu için $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$ eşitliği elde edilir. Yani $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \mathbf{B}$ olur. Lorentz kuvveti formülü $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ dan $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0$ eşitliğine ulaşırız. Buradan da $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \mathbf{B}$ yazabiliriz.

Ayrıca aynı denklemi şu şekilde de elde etmek mümkündür. Riemann-Silberstein vektörü

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}, \quad (1.5)$$

şeklinde verilir. Denklem (1.1) ve (1.3)'den

$$\nabla \times \mathbf{G} = i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + i \mathbf{j}, \quad (1.6)$$

eşitliğine ulaşırız. Denklem (1.2) ve (1.4)'den

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \rho, \quad (1.7)$$

buluruz.

Denklem (1.5) ve (1.6)'da $\mathbf{G} = e^{-i\omega t} \mathbf{F}(\mathbf{x})$, akım: $\mathbf{j} = 0$ ve yük: $\rho = 0$ olarak alırsak Maxwell denklemlerinin Riemann-Silberstein vektörü cinsinden ifadesini

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \omega \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

şeklinde buluruz.

Beltrami alanı, akışkanlar dinamiğinde durağan (stationary) Euler denkleminin bir çözümüdür. Burada $\mathbf{u}$ akış hızı vektörü, p basınç olmak üzere $\mathbb{R}^3$ üzerinde durağan Euler denklemleri

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

şeklinde yazılır. Vektörel özdeşlikten ilk denklemi $\nabla(\mathbf{u}^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla p$ şeklinde yazabiliriz. Buradan basınç: $p=0$ için $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ eşitliğini buluruz. Bu eşitlik $\mathbf{u}/(\nabla \times \mathbf{u})$ olduğunda gerçekleştiğinden λ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $\nabla \times \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ yazabiliriz.

EK 2. Chandrasekhar-Kendall Metodu

Trkalyan alan denklemi $(\star d - v) \star F = 0$ olmak üzere $(\Delta - cv^2) \star F = 0$ eşitliği sağlanır. Burada Öklidyen ize sahip metrikte $c=1$, Lorentziyen ize sahip metrikte $c=-1$ olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\Delta \star F - cv^2 \star F = 0, \Delta \star F = (\delta d + d\delta) \star F, \text{ Öklid ize sahip metrikte } \delta d \star F = \star d \star d \star F,$$

$d\delta \star F = 0$ olduğundan $\Delta \star F = \star d \star d \star F = v^2 \star F$ olarak yazabiliriz, ($\star\star = 1$, $dF = 0$, $\delta\omega_r = (-1)^{n(r+1)+1} \star d \star \omega_r$). Böylece $\Delta \star F = cv^2 \star F$ eşitliğinden $v^2 \star F = cv^2 \star F \Rightarrow c = 1$ bulunur. Lorentziyen ize sahip metrikte ise $\delta d \star F = -\star d \star d \star F$, $d\delta \star F = 0$ olduğundan $\Delta \star F = -(\star d \star d \star F) = -v^2 \star F$ olarak yazabiliriz, ($\delta\omega_r = (-1)^{n(r+1)} \star d \star \omega_r$, $\star\star = -1$, $dF = 0$). Böylece $\Delta \star F = cv^2 \star F$ denkleminde $-v^2 \star F = cv^2 \star F \Rightarrow c = -1$ bulunur.

Chandrasekhar-Kendall metodunu diferansiyel formlarla ifade edebilmek için T ve S 1-formlarını aşağıdaki gibi buluruz.

n uzay boyutunu göstermek üzere Hodge $\star$ işleminin tanımı

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \sqrt{|g|} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \nu_{p+1} \dots \nu_{n-p}} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}}, \quad (2.1)$$

ile verilir.

Metrik izindeki $(-)$ sayısı s ve manifold üzerindeki metrik tensör g olmak üzere $\varepsilon^{\mu\alpha\beta} = (-1)^s |g| g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\delta} \varepsilon_{\rho\sigma\delta}$ ile verilir. Ayrıca ψ 0-form olmak üzere $\Delta\psi = -\nabla_\alpha \nabla^\alpha \psi$ ile verilir.

Chandrasekhar-Kendall metodundaki T 1-formu

$$\begin{aligned} T &= \star d(\psi\omega) = \star(d\psi \wedge \omega) + \psi \star d\omega \\ &= \sqrt{|g|} \nabla_\mu \psi \omega_\nu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\gamma + \psi \star d\omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde bulunur.

Chandrasekhar-Kendall metodundaki S 1-formu

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{v} \star dT = \frac{1}{v} \star d \star d(\psi\omega) = \frac{1}{v} [\star d \star (d\psi \wedge \omega) + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega] \\ &= \frac{1}{v} [\star d(\sqrt{|g|} \nabla_\mu \psi \omega_\nu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\gamma) + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega], \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\nabla_\sigma(\sqrt{|g|}) = 0$, $\nabla_\sigma(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}) = 0$, $\nabla_\sigma(g^{\mu\alpha}) = 0$, $\nabla_\sigma(g^{\nu\beta}) = 0$, şeklinde bulunur.

Ayrıca $\Delta\psi = -\nabla_\mu \nabla^\mu \psi$ olmak üzere

$$\star d(\sqrt{|g|} \nabla_\mu \psi \omega_\nu g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\gamma) = (-1)^s [\Delta\psi \omega + \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \omega^\mu dx^\nu - \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \omega_\nu dx^\nu + \nabla_\mu \psi \nabla^\nu \omega_\nu dx^\mu]$$

eşitliğini buluruz. Böylece S 1-formunu

$$S = \frac{1}{v} [(-1)^s (\Delta \psi \omega + \nabla_\mu \nabla_\nu \psi \omega^\mu dx^\nu - \nabla_\mu \psi \nabla^\mu \omega_\nu dx^\nu + \nabla_\mu \psi \nabla^\nu \omega_\nu dx^\mu) + \star (d\psi \wedge \star d\omega) + \psi \star d \star d\omega], \quad (2.4)$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

EK 2.1. Konformal Killing Denklemi

Konformal Killing denklemi $\mathcal{L}_X g = 2\kappa g$ ile verilir (κ koordinatların fonksiyonu ve g metrik). Ayrıca X konformal Killing vektör olmak üzere $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu$ şeklindedir. Buradan ω konformal Killing vektörü X 'in metrik duali olmak üzere bu denklemi

$$\nabla_\mu \omega_\nu + \nabla_\nu \omega_\mu = 2\kappa g_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = (1/2)g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$ ve $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ olmak üzere $\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \omega_\alpha$ ile verilir. Konformal Killing denklemi $\kappa = 0$ için çözülürse Killing 1-form, $\kappa = 1$ için çözülürse konformal Killing 1-form vektörü elde edilir. Ayrıca $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ dır. Örnekler için bu denklemler ve çözümleri aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.2.1: Metrik

$$ds^2 = -r^2 d\varphi^2 + dx^2 + dr^2, \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_0 \omega_0 - (1/r) \omega_0 &= -\kappa r^2, \\ \partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 &= 0, \\ \partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 &= 0, \\ \partial_1 \omega_1 &= 2\kappa, \\ \partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 &= 0, \\ \partial_2 \omega_2 &= 2\kappa, \end{aligned} \quad (2.7)$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ iken $\omega = (0, 1, 0)$ vektörü bu denklemleri sağladığı için bir Killing vektördür, böylece $\omega = \omega^1$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.2.2: Metrik

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dz^2, \quad (2.8)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_0 \omega_0 &= -\kappa, \\ \partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 &= 0, \\ \partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 &= 0, \\ \partial_1 \omega_1 &= \kappa, \\ \partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 &= 0, \\ \partial_2 \omega_2 &= \kappa, \end{aligned} \quad (2.9)$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ iken $\omega = (x, -t, 0)$ vektörü bu denklemleri sağladığı için bir Killing vektördür, böylece $\omega = x\omega^0 - t\omega^1$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.2.3: Metrik

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (2.10)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_0 \omega_0 &= -\kappa, \\ \partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 &= 0, \\ \partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 &= 0, \\ \partial_1 \omega_1 &= \kappa, \\ \partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 - (2/r)\omega_2 &= 0, \\ \partial_2 \omega_2 + r\omega_1 &= \kappa r^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ iken $\omega = (1, 0, 0)$ vektörü denklemleri sağladığı için bir Killing vektördür, böylece $\omega = \omega^0$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.2.4: Metrik

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\varphi + \Omega dt)^2, \quad (2.12)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\partial_0 \omega_0 &= \kappa(-1 + \Omega^2 r^2), \\
\partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 - 2\Omega^2 r \omega_1 + (2\Omega/r) \omega_2 &= 0, \\
\partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 - 2\Omega r \omega_1 &= 2\kappa \Omega r^2, \\
\partial_1 \omega_1 &= \kappa, \\
\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 - 4\Omega r \omega_1 + (2/r) \omega_2 &= 0, \\
\partial_2 \omega_2 + r \omega_1 &= \kappa r^2,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ iken $\omega = (1, 0, 0)$ vektörü denklemleri sağladığı için bir Killing vektördür, böylece $\omega = \omega^0$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.2.6: Metrik

$$ds^2 = -dudv - dvdu + dx^2, \tag{2.14}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\partial_0 \omega_0 &= 0, \\
\partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 &= -2\kappa, \\
\partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 &= 0, \\
\partial_1 \omega_1 &= 0, \\
\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 &= 0, \\
\partial_2 \omega_2 &= \kappa,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ iken $\omega = (1, 0, 0)$, $\omega = (0, 1, 0)$ ve $\omega = (0, 0, 1)$ vektörleri denklemleri sağladığı için birer Killing vektördür, böylece $\omega = \omega^0$, $\omega = \omega^1$ veya $\omega = \omega^2$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.2.7: Metrik

$$ds^2 = -dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sinh^2 \theta d\varphi^2, \tag{2.16}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\partial_0 \omega_0 &= -\kappa, \\
\partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 - (2/r) \omega_1 &= 0, \\
\partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 - (2/r) \omega_2 &= 0, \\
\partial_1 \omega_1 - r \omega_0 &= \kappa r^2, \\
\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 - 2(\cosh \theta / \sinh \theta) \omega_2 &= 0, \\
\partial_2 \omega_2 - r \sinh^2 \theta \omega_0 + \sinh \theta \cosh \theta \omega_1 &= \kappa r^2 \sinh^2 \theta,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 1$ iken $\omega = (-r, 0, 0)$ vektörü denklemleri sağladığı için bir konformal Killing vektördür, böylece $\omega = -r\omega^0$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.3.1, 3.1.3.2, 3.1.3.3: Metrik

$$ds^2 = (L/z)(-dt^2 + dx^2 + dz^2), \tag{2.18}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\partial_0 \omega_0 + (1/2z) \omega_2 &= -\kappa(L/z), \\
\partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 &= 0, \\
\partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 + (1/z) \omega_0 + (1/z) \omega_2 &= 0, \\
\partial_1 \omega_1 - (1/2z) \omega_2 &= \kappa(L/z), \\
\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 + (1/z) \omega_1 &= 0, \\
\partial_2 \omega_2 + (1/2z) \omega_2 &= \kappa(L/z),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ için $\omega = (\frac{1}{Lz}, 0, 0)$, $\omega = (0, \frac{1}{Lz}, 0)$ ve $\omega = (\frac{1}{Lz}, \mp \frac{1}{Lz}, 0)$ vektörleri denklemleri sağladığı için birer Killing vektördür, böylece $\omega = (1/L)(1/z)\omega^0$, $\omega = (1/L)(1/z)\omega^1$ veya $\omega = (1/L)(1/z)(\omega^0 \mp \omega_1)$ olarak alabiliriz.

Örnek 3.1.4.1: Metrik

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + (1/A^2(r))dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{2.20}$$

olmak üzere $(A^2(r) = 1 - \Lambda r^2)$

$$\begin{aligned}
\partial_0 \omega_0 - \Lambda r(1 - \Lambda r^2) \omega_1 &= \kappa(-1 + \Lambda r^2), \\
\partial_0 \omega_1 + \partial_1 \omega_0 + (2\Lambda r)/(1 - \Lambda r^2) \omega_0 &= 0, \\
\partial_0 \omega_2 + \partial_2 \omega_0 &= 0, \\
\partial_1 \omega_1 - (\Lambda/r)/(1 - \Lambda r^2) \omega_1 &= \kappa(1/1 - \Lambda r^2), \\
\partial_1 \omega_2 + \partial_2 \omega_1 - (2/r) \omega_1 &= 0, \\
\partial_2 \omega_2 + r(1 - \Lambda r^2) \omega_1 &= \kappa r^2,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

konformal Killing denklemlerine ulaşırız. Buradan $\kappa = 0$ için $\omega = (A^2, 0, 0)$ vektörü denklemleri sağladığı için bir Killing vektördür, böylece $\omega = A\omega^0$ olarak alabiliriz.

Ayrıca ω^a temel 1-form, ω_{ab} bağlantı 1 formu, R_b^a eğrilik 2-formu ve R_{bcd}^a Riemann eğriliği olmak üzere $R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_c^b = (1/2)R_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d$ ile verilir. Burada $R_{ba} = -R_{ab}$, $R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}$ ve $R_{abcd} = R_{cdab}$ eşitlikleri sağlanır. $R_{cd} = R_{cad}^a$: Ricci tensör olmak üzere $R_{ab} = R_{ba}$ dır. R_a^a ise skaler eğriliktir.

EK 2.2. Hipergeometrik Denklem Ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

Hipergeometrik denklem a, b ve c sabit sayılar olmak üzere

$$x(1-x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{d\varphi(x)}{dx} - ab\varphi(x) = 0, \tag{2.22}$$

şeklinde verilir. Bu denklemin $x = 0$, $x = 1$ ve $x = \infty$ olmak üzere 3 tane singüler noktası bulunmaktadır. $|x| < 1$ bölgesinde bir çözümü $\mathcal{F}(a, b; c; x)$ hipergeometrik fonksiyon olmak üzere $\varphi_1 = \mathcal{F}(a, b, c; x)$ ile ifade edilir. Hipergeometrik fonksiyon hipergeometrik serilerle ifade edilir.

EK 2.3. Assosye Legendre Fonksiyonları

Assosye Legendre diferansiyel denkleminin: $(1-x^2)y'' - 2xy' \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$ çözümü $P_l^m(x)$ 1. tür assosye Legendre fonksiyonu ve $Q_l^m(x)$ 2. tür assosye Legendre fonksiyonudur. $m = 0$ için bu fonksiyonlar Legendre fonksiyonlarına iner, 2. tür $Q_l(x)$ fonksiyonunun

yineleme bağıntıları

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)Q'_l(x) &= (l+1)[Q_{l+1}(x) - xQ_l(x)], \\ Q'_{l+1}(x) - xQ'_l(x) &= (l+1)Q_l(x),\end{aligned}\tag{2.23}$$

ile verilir [75, s.161], [76, s.184]

EK 3. Mini-Twistör Metodu

Trkalyan alan F 2-formunun bileşenleri (2+1) boyuttaki Klein-Gordon denklemini sağlar. Daha açık olarak, bileşenler $A(t, x, z)$, $B(t, x, z)$ ve $C(t, x, z)$ olmak üzere (2.4) denkleminde

$$\begin{aligned}\square_3^2 A &= v \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial^2 C}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} \\ &= v \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) = v(-vA) = -v^2 A = -k^2 A, \quad v = k\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\square_3^2 B &= -\frac{\partial^2 A}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial x} - v \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial z} \\ &= -v \left(\frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial x} \right) = -v^2 B = -k^2 B, \quad v = k\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\square_3^2 C &= -v \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} - v \frac{\partial B}{\partial z} - A_{xz} \\ &= -v \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial z} \right) = -v^2 C = -k^2 C, \quad v = k\end{aligned}\tag{3.3}$$

(3.44) denklemine ulaşırız.

Denklem (3.59), (3.60) ve (3.61)'i elde edebilmek için, eşitlik (3.58) ile verilen F 'nin bileşenlerinin türevlerini

$$A_t = \int_C e^{-kf} [(-k/2)(\omega - 1/\omega)L + (1 + \omega^2)L_\eta] d\omega,$$

$$A_x = 2 \int_C e^{-kf} \omega L_\eta d\omega,$$

$$B_x = 2 \int_C e^{-kf} \omega M_\eta d\omega,$$

$$B_z = \int_C e^{-kf} [(-k/2)(\omega + 1/\omega)M + (-1 + \omega^2)M_\eta] d\omega,$$

$$C_t = \int_C e^{-kf} [(\omega - 1/\omega)N d\omega + (1 + \omega^2)N_\eta] d\omega,$$

$$C_z = \int_C e^{-kf} [(-k/2)(\omega + 1/\omega)N + (-1 + \omega^2)N_\eta] d\omega ,$$

şeklinde buluruz, $\left(f = (1/2)[(t+z)\omega - (t-z)/\omega]\right)$ ve $\eta_x(\omega) = t - z + 2x\omega + (t+z)\omega^2$). Böylece (2.4) denkleminin $v = k$ olmak üzere (3.59), (3.60) ve (3.61) denklemlerine ulaşırız.

EK 3.1. Modifiye Bessel Fonksiyonları

Modifiye Bessel diferansiyel denkleminin: $x^2 y'' + xy' - (x^2 + v^2)y = 0$ çözümü sırasıyla 1.tür modifiye Bessel fonksiyonu $I_v(x)$ (non-singüler) ve 2.tür modifiye Bessel fonksiyonu $K_v(x)$ (singüler) ile verilir.

2.tür Bessel fonksiyonunun yineleme bağıntıları

$$\begin{aligned} zK_{v-1}(z) - zK_{v+1}(z) &= -2vK_v(z) \\ K_{v-1}(z) + K_{v+1}(z) &= -2\frac{d}{dz}K_v(z) \\ K_{-v}(z) &= K_v(z) \\ \frac{d}{dz}K_0(z) &= -K_1(z) \\ z\frac{d}{dz}K_v(z) + vK_v(z) &= -zK_{v-1}(z) \\ z\frac{d}{dz}K_v(z) - vK_v(z) &= -zK_{v+1}(z) \end{aligned} \tag{3.4}$$

ile verilir [68, s.929].

EK 3.1.1. Modifiye Bessel Fonksiyonlarının Kontur İntegral İfadeleri

1.tür modifiye Bessel fonksiyonunun integral ifadesi

$$I_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{\xi \cos \theta} \cos n\theta d\theta, \tag{3.5}$$

ile verilir [77, s.376]. Buradan $I_n(-\xi) = (-1)^n I_n(\xi)$ eşitliğini yazabiliriz. Eşitlik (3.5)'i kullanarak gerekli formülleri üretebiliriz.

$$A = p^2 - q^2 + a^2 - b^2, B = 2(pq + ab), C = p^2 + q^2 - a^2 - b^2, D = 2(ap + bq), m = 0, 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{p \cos \theta + q \sin \theta} \sin(a \cos \theta + b \sin \theta - m\theta) d\theta =$$

$$i\pi[(b-p)^2 + (a+q)^2]^{-m/2}[(A+iB)^{m/2}I_m(\sqrt{C-iD}) - (A-iB)^{m/2}I_m(\sqrt{C+iD})], \quad (3.6)$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{p \cos \theta + q \sin \theta} \cos(a \cos \theta + b \sin \theta - m\theta) d\theta =$$

$$\pi[(b-p)^2 + (a+q)^2]^{-m/2}[(A+iB)^{m/2}I_m(\sqrt{C-iD}) + (A-iB)^{m/2}I_m(\sqrt{C+iD})], \quad (3.7)$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{p \cos \theta + q \sin \theta} e^{i(a \cos \theta + b \sin \theta - m\theta)} d\theta = 2\pi[(b-p)^2 + (a+q)^2]^{-m/2}(A-iB)^{m/2}I_m(\sqrt{C+iD}), \quad (3.8)$$

ile verilir [68, s.496].

Burada $a = b = 0$, $p = -\xi$, $q = 0$ seçersek ve $I_m(-\xi) = (-1)^m I_m(\xi)$, $(\sqrt{C} = p = -\xi)$ eşitliğini kullanarak

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\xi \cos \theta} e^{-im\theta} d\theta = 2\pi(-1)^m I_m(\xi), \quad (3.9)$$

buluruz. Ayrıca (3.5) eşitliğinden

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\xi \cos \theta} \cos m\theta d\theta = 2\pi(-1)^m I_m(\xi), \quad \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\xi \sin \theta} \cos m\theta d\theta = 0, \quad (3.10)$$

yazabiliriz.

2.tür modifiye Bessel fonksiyonları için aşağıdaki integral ifadeleri

$$\int_{s=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{s^2+\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{s^2+\sigma^2}} \cos(zs) ds = K_0(\sigma\sqrt{x^2+z^2}), \quad (3.11)$$

[78, s.17] ve

$$\int_{s=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{s^2+\sigma^2}} \cos(zs) ds = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} K_1(\sigma\sqrt{x^2+z^2}), \quad (3.12)$$

[78, s.16] ve

$$\int_{s=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{s^2+\sigma^2}} \frac{s}{\sqrt{s^2+\sigma^2}} \sin(zs) ds = \sigma \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} K_1(\sigma\sqrt{x^2+z^2}), \quad (3.13)$$

[78, s.75] ve

$$\int_{s=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{s^2+\sigma^2}} \sin(zs) s ds = \sigma^2 \frac{xz}{x^2+z^2} K_2(\sigma\sqrt{x^2+z^2}), \quad (3.14)$$

[78, s.75], $Re[\sigma] > 0$, $Re[x] > 0$ ve $z > 0$ kullanacağız.

EK 4. Ultrahiperbolik Dalga Denklemi: Klasik John Dönüşümü Çözümünün İndirgemesi

Schwartz uzayı: $S(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ olmak üzere $|x| \rightarrow \infty$ için $x^\alpha \partial^\beta f(x) \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarının topolojik vektör uzayıdır. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ve $f \in S(\mathbb{R}^n)$ için $\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f|$ eşitliği yazılabilir.

Denklem (3.112), (3.113) ve (3.114)'ü elde edebilmek için, eşitlik (3.111) ile verilen F 'nin bileşenlerinin türevlerini

$$A_x = 2 \oint_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} L_\eta s ds,$$

$$A_t = \oint_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} \left[-\frac{k(-1+s^2)}{2s} L + (1+s^2) L_\eta \right] ds,$$

$$B_x = 2 \oint_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} M_\eta s ds,$$

$$B_z = \oint_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} \left[-\frac{k(1+s^2)}{2s} M + (-1+s^2) M_\eta \right] ds,$$

$$C_t = \oint_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} \left[-\frac{k(-1+s^2)}{2s} N + (1+s^2) N_{\eta} \right] ds ,$$

$$C_z = \oint_{-\infty}^{\infty} e^{-kf} \left[-\frac{k(1+s^2)}{2s} N + (-1+s^2) N_{\eta} \right] ds ,$$

buluruz, $\left(f = (1/2)[(t+z)s - (t-z)/s] \right.$ ve $\eta = t - z + 2xs + (t+z)s^2$). Böylece (2.4) denkleminde $v = k$ olmak üzere (3.112), (3.113) ve (3.114) denklemlerine ulaşırız.

Ayrıca Ek 3.1.1'deki (3.6) eşitliğinde (analitik süreklilikten) $n = 0$ için $\xi \rightarrow i\xi \Rightarrow I_0(\xi) \rightarrow J_0(\xi)$ olmak üzere

$$J_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{i\xi \cos \theta} d\theta, \quad (4.1)$$

olarak ifade edilir [77, s.360].

EK 5. Ultrahiperbolik Dalga Denklemi: Twistör Çözümünün İndirgemesi

Denklem (3.139), (3.140) ve (3.141)'i elde edebilmek için, eşitlik (3.138)'de verilen F 'nin bileşenlerinin türevlerini

$$A_t = 2i \oint_{C:|z|=1} e^{kg} L_{\eta} \frac{1}{z} dz ,$$

$$A_{x_1} = \oint_{C:|z|=1} e^{kg} \left[k \frac{(z+\bar{z})}{2} L + (z-\bar{z}) L_{\eta} \right] \frac{1}{z} dz ,$$

$$B_{x_1} = \oint_{C:|z|=1} e^{kg} \left[k \frac{(z+\bar{z})}{2} M + (z-\bar{z}) M_{\eta} \right] \frac{1}{z} dz ,$$

$$B_{x_2} = i \oint_{C:|z|=1} e^{kg} \left[k \frac{(z-\bar{z})}{2} M + (z+\bar{z}) M_{\eta} \right] \frac{1}{z} dz ,$$

$$C_t = 2i \oint_{C:|z|=1} e^{kg} N_{\eta} \frac{1}{z} dz ,$$

$$C_{x_2} = i \oint_{C:|z|=1} e^{kg} \left[k \frac{(z-\bar{z})}{2} N + (z+\bar{z}) N_{\eta} \right] \frac{1}{z} dz ,$$

buluruz, $\left(g = (1/2)[(z + \bar{z})x_1 + i(z - \bar{z})x_2]\right.$ ve $\left.\eta = (z - \bar{z})x_1 + i(z + \bar{z})x_2 + 2it_2\right)$. Böylece (2.4) denkleminde $v = k$ olmak üzere (3.139), (3.140) ve (3.141) denklemlerine ulaşırız.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Seçil SEVİNÇ
Doğum Yeri	Zonguldak
Doğum Tarihi	09.03.1973
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	0537 842 08 65
E-Posta Adresi	seckartal@gmail.com
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	1996

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2021

