

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seval SÜZÜLMÜŞ

77013

VARYANS ANALİZİ (ANOVA) MODELLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 1998

21077

0. 0. 0.

100-443887-1

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VARYANS ANALİZİ (ANOVA) MODELLERİ

SEVAL SÜZÜLMÜŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 17.09.1998 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

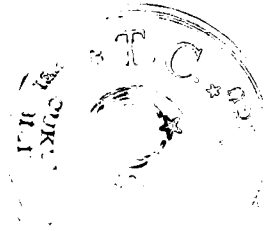
İmza
Yrd.Doç.Dr. Sadullah
SAKALLIOĞLU
DANIŞMAN

İmza
Prof.Dr. Fikri AKDENİZ
ÜYE

İmza
Doç.Dr. Altan ÇABUK
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 1505



Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil, ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VARYANS ANALİZİ (ANOVA) MODELLERİ

SEVAL SÜZÜLMÜŞ

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman: Sadullah SAKALLIOĞLU

Yıl: 1998 , Sayfa: 66

Jüri : Yrd.Doç.Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU

: Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

: Doç.Dr. Altan ÇABUK

Bu çalışmada önce varyans analizi ve regresyon arasındaki ilişki incelenecek, daha sonra tek yönlü varyans analizi incelenip iki veya daha fazla değişken olması durumunda çok yönlü varyans analizi modelleri ele alınacaktır. Bu tipteki modellere ait gözlem değerlerinin X katsayı matrisinin direkt (kronecker) çarpımlarla daha sade bir şekilde yazılabileceği gösterilecektir. Genelleştirilmiş inversler varyans analizi yapılmasında oldukça önemli olduğundan; direkt çarpımlar kullanılarak, genelleştirilmiş inversler hesaplanacak ve parametreler tahmin edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Direkt Çarpım, Genelleştirilmiş İnvers, Hipotez Testi, Regresyon Analizi, Varyans Analizi.

ABSTRACT

Msc THESIS

ANALYSIS OF VARIANCE (ANOVA) MODELS

SEVAL SÜZÜLMÜŞ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Sadullah SAKALLIOĞLU

Year : 1998 , Pages :66

Jury : Yrd.Doç.Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU

: Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

: Doç.Dr. Altan ÇABUK

The purpose of this work is first to investigate the relation between analysis of variance (ANOVA) and regression. Then we investigate single factor, two factor and multi factor analysis of variance. We will show that coefficient matrix X can be put into a simpler form using direct product. Since generalized inverse is important in variance analysis we calculate generalized inverse of matrix X by using direct product then we obtain estimation of parameters.

Key Words: Direct Product, Generalized Inverse, Hypothesis Test, Analysis of Regression, Analysis of Variance.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek, çalışmalarımı yönlendiren sayın hocam Yrd.Doç.Dr.Sadullah Sakallıoğlu'na ve desteklerini hiç eksik etmeyen aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

SAYFA NO:

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
TABLO LİSTESİ.....	VI
GİRİŞ.....	1
1. TEK FAKTÖRLÜ VARYANS ANALİZİ.....	2
1.1. Regresyon Analizi ve Varyans Analizi Arasındaki İlişki.....	2
1.2. Varyans Analizi Kavramı.....	4
1.3. Model I-Sabit Etkiler.....	5
1.4. Parametrelerin Tahmini.....	7
1.5. Kalanlar (Rezidüeller).....	8
1.6. Genel Kareler Toplamının Parçalanması.....	9
2. İKİ FAKTÖRLÜ VARYANS ANALİZİ.....	17
2.1. Etkileşim ve Toplanabilirlik.....	17
2.1.1. Faktör Düzeyi Ortalamaları.....	17
2.1.2. Özel (Spesifik) Etkiler.....	18
2.1.3. Temel Etkiler.....	18
2.1.4. Toplanabilir Faktör Etkileri.....	18
2.1.5. Etkileşim.....	19
2.2. İki Faktörlü Çalışmalarda Sabit Etkiler.....	20
2.3. İki Faktörlü Etkileşimsiz Model.....	21
2.4. İki Faktörlü Etkileşimli Model.....	27
2.5. Latin Kare Düzeni.....	34
2.5.1. Latin Kare Düzeninin Avantajları ve Dezavantajları.....	35
2.5.2. Varyans Analizi ve Testler.....	37
2.5.3. Parametreler ve En Küçük Kareler Tahmin Edicileri.....	37

3. SINIFLANDIRMA MODELLERİNDE DİREKT ÇARPIMIN KULLANIMI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSİN UYGULANMASI.....	45
3.1. Direkt (Kronecker) Çarpım.....	45
3.1.1. Direkt Çarpımın Özellikleri.....	45
3.2. Genelleştirilmiş İnvers Tanımları ve Özellikleri.....	46
3.2.1. M-P İnversinin Özellikleri.....	47
3.3. M-P İnverslerle Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü.....	50
3.4. Tek Yönlü Sınıflandırma.....	52
3.5. Her Gözede n-Gözlem ve Birbirini Etkileme Olmaksızın İki Yönlü Sınıflandırma.....	53
3.6. Her Gözede n-Gözlem ve Birbirini Etkileme Olduğunda İki Yönlü Sınıflandırma.....	54
3.7. Latin Kare Düzeninin Genel Formülle Gösterimi.....	56
SONUÇ.....	63
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	66

TABLO LİSTESİ**SAYFA NO:**

Tablo 1 Tek Faktörlü Varyans Analizi(ANOVA).....	11
Tablo 2 Tek Faktörlü Varyans Analizi Verileri.....	15
Tablo 3 Tek Faktörlü Varyans Analizi Örneği İçin Anova.....	15
Tablo 4 Etkileşimsiz İki Faktörlü Model İçin Varyans Analizi(ANOVA).....	24
Tablo 5 Etkileşimsiz İki Faktörlü Model İçin Varyans Analizi Verileri.....	24
Tablo 6 Etkileşimsiz İki Faktörlü Model Örneği İçin Anova Tablosu.....	26
Tablo 7 Etkileşimli İki Faktörlü Model İçin Varyans Analizi(ANOVA).....	30
Tablo 8 Etkileşimli İki Faktörlü Varyans Analizi Verileri.....	31
Tablo 9 Etkileşimli İki Faktörlü Model Örneği İçin Anova	32
Tablo 10 Latin Kare Modeli İçin Varyans Analizi(ANOVA).....	40
Tablo 11 Latin Kare Modeli Örneği İçin Varyans Analizi Verileri.....	40
Tablo 12 Latin Kare Örneği İçin Anova	41

GİRİŞ

İstatistik, herhangi bir veri grubundaki değişkenlik ile ilgilenir. Bu değişkenliği özetlemenin en iyi yolu varyans analizi tablosu olarak bilinir. Varyans analizi modelleri (ANOVA) bir bağımlı ve bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkinin çalışılması için çok yönlü bir istatistiksel araçtır.

İstatistikçi, deney düzenleme bilgisiyle üreticiye katkıda bulunabilmektedir. Gerek sanayide gerek tarım alanında ve diğer tüm bilim dallarında amaç verimliliği ve etkinliği araştırmak olunca deneysel çalışmanın yapılması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

İstatistikte; $y = X\beta + \varepsilon$ lineer modeli göz önüne alındığında, modeldeki $y = X\beta$ lineer sistemi, her zaman bir çözüme sahip olmayabilir. Eğer çözüm yoksa bir yaklaşık çözüm bulunması istenir. Varyans analizi modellerin tasarım matrisleri özel forma sahip olduklarından, bu tür matrisler direkt (kronecker) çarpımlar yardımıyla daha sade bir şekilde ifade edilebileceğinden, normal eşitliklerin genel çözümü kolaylıkla bulunur. $X'X\beta = X'Y$ normal eşitliklerin en kısa çözümünün (shortest solution) $\hat{\beta} = (X'X)^+ X'Y = X^+ Y$ olduğu (Kim ve Lee (1986)) göz önüne alınırsa, $Y = X\beta + \varepsilon$ modelinin tasarım matrisinin X^+ , Moore-Penrose tersinin kullanılmasıyla varyans analizi modelinin en kısa çözümü bulunabilir. Böylece genelleştirilmiş inversler yardımıyla lineer modellerdeki parametrelerin tahminleri yapılarak, bu tahminlerin varyansları hesaplanabilir. Bu çalışmada;

Bölüm 1’de “Tek Faktörlü Varyans Analizi”; Bölüm 2’de “İki Faktörlü Varyans Analizi” ele alınarak, bu modellerdeki parametrelerin en küçük kareler tahmin edicileri bulunup, söz konusu modeller için varyans analizi (ANOVA) tablosu hazırlandı ve ilgili hipotezler yapıldı. Bölüm 3’de “Sınıflandırma Modellerinde Direkt Çarpımın Kullanımı ve Genelleştirilmiş İnversin Uygulanması” incelenerek, latin kare düzeni göz önüne alınıp bununla ilgili örnekler verildi.

1. TEK FAKTÖRLÜ VARYANS ANALİZİ

1.1 Regresyon Analizi ve Varyans Analizi Arasındaki İlişki

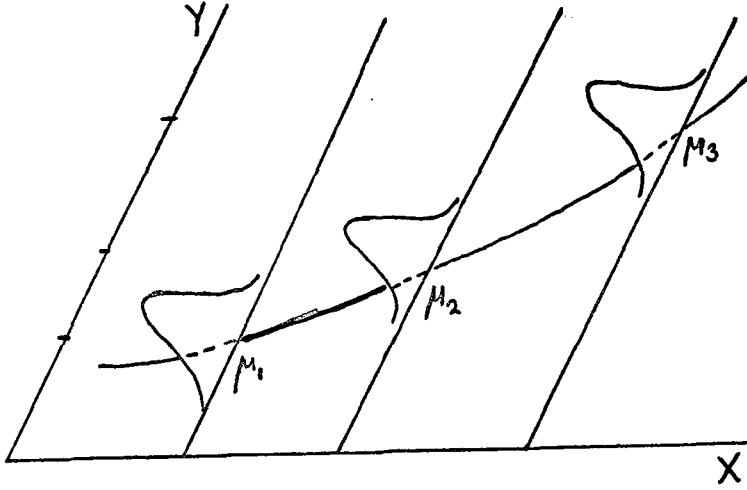
Regresyon analizi bir veya daha fazla bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken arasındaki istatistiksel ilişki ile ilgilidir. Regresyon modellerinde bağımlı ve bağımsız değişkenler nicel değişkenlerdir. Regresyon fonksiyonu bağımsız değişken veya değişkenler ile genel ortalama arasındaki doğal istatistiksel ilişkiyi belirler. Regresyon modellerinde olduğu gibi varyans analizi modellerinde de bağımlı değişken nicel değişkendir. Temelde, regresyon modelleri ile varyans analizi modelleri arasındaki fark iki başlık altında toplanabilir:

- i) Varyans analizi modellerinde bağımsız değişkenler nitel değişkenler olabilirler. (Cinsiyet, coğrafik bölge, ... gibi)
- ii) Bağımsız değişkenler nicel ise bunlar ve bağımlı değişken arasında bir istatistiksel ilişki hakkında varyans analizinde herhangi bir kabul yapılmaz. Böylece; regresyon analizinde karşılaşılan regresyon fonksiyonunun belirlenmesi için duyulan ihtiyaç varyans analizinde karşımıza çıkmaz.

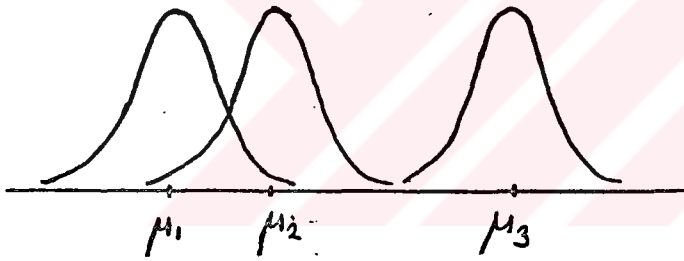
Regresyon analizi ve varyans analizi arasındaki ilişki aşağıdaki örnek ile daha açık bir şekilde görülebilir.

Satış fiyatı ve satış hacmi arasındaki ilişkiyi incelemek için üç farklı satış fiyatında (bağımsız değişken) yapılan satışları (bağımlı değişken) göz önüne alalım. Satış fiyatları 50, 60, 70 birim olsun. Her bir değişken nicel değişkendir. Bağımsız değişkenin her bir düzeyi için satış hacminin bir olasılık dağılımı vardır ve bu olasılık dağılımlarının ortalamaları regresyon eğrisi üzerinde olur ki, bu eğri satış fiyatı ve ortalama satış hacmi arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu durum şekil 1’ de görüldüğü gibidir. Aynı çalışma için varyans analizi modeli şekil 2’ deki gibidir.

Üç fiyat düzeyinin her biri, satış hacmi ile ilgili olasılık fonksiyonuna sahip ayrı kitleler olarak işleminden geçirilir. Üç düzeydeki nicel farklar ve beklenen satış hacmi için onların istatistiksel ilişkisi varyans analizi modelinde göz önüne alınmaz.



Şekil 1 (Regresyon Modeli)



Şekil 2 (Varyans Analizi Modeli)

Bağımsız değişkenler nitel olduğunda, regresyon analizi veya varyans analizi modelleri arasında seçim yapmak için temel bir prensip yoktur. Ancak bağımsız değişkenler nicel oldukları zaman durum farklı olup özel bir istatistiksel yapı içermeyen tek yönlü bir analiz (varyans analizi) yapılır ve diğer taraftan istatistiksel yapı içeren analiz (regresyon analizi) yapılır. İstatistiksel yapı hakkında ciddi tereddütler varsa önce istatistiksel yapı üzerinde kısıtlamalar yapılmaksızın bağımlı değişken üzerinde bağımsız değişkenlerin etkisini görmek için varyans analizi modeli alınır, daha sonra bağımsız değişkenlerin nicel özelliklerinden yararlanmak için regresyon analizi yapılır.

Varyans analizi ve regresyon analizi ile ilgili olarak detaylı bir şekilde araştırmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları;

Searle (1971, 1982, 1987), Kendall ve Stuart (1976), Neter ve ark. (1990)'dır. Searle (1987) de sınıflandırma modellerinde her bir gözede eşit sayıda gözlem olmaması durumuyla ilgili detaylı bir şekilde inceleme yapılmıştır.

1.2 Varyans Analizi Kavramı

Bağımsız bir ya da daha çok değişken ile bağımlı değişken arasındaki ilişkiyi incelemek için, varyans analizi kullanılır. Bu kesimde varyans analizinin tek faktörlü varyans analizi modelleri açıklanacaktır.

Tanım 1.2.1: İncelenecek olan bağımsız değişkene “faktör” denir. Örneğin; penisilinin üretimi sıcaklığın bir fonksiyonudur. Burada sıcaklık bir faktördür.

Tanım 1.2.2: Faktörlerin sayısına bağlı olarak; çalışmalara “tek faktörlü”, “iki faktörlü”, “üç faktörlü” veya “çok faktörlü” çalışma denir.

Örneğin; tek faktör çelik imalathaneleri olabilir. Burada araştırmacının ilgisi, değişik imalathanelerin çeliğin sertliğine etkisi üzerinde yoğunlaşabilir. Bir bilgisayarda ısı ve yüksekliğe bağlı akım artışıyla ilgili çalışma ise iki faktörlüdür.

Tanım 1.2.3: Bir faktörün özel bir durumuna bu faktörün “düzeyi” denir. Örneğin; sıcaklık faktöründe 25 °C, 55 °C ve 60 °C bu faktörün üç düzeyidir.

Tanım 1.2.4: Düzeyleri nitelik olarak birbirinden farklı olan faktörlere nitel faktörler, düzeyleri bir ölçü üzerinde sayısal olarak ifade edilebilen faktörlere nicel faktörler denir. Satış fiyatı bir nicelik belirten faktör olup reklam çeşitleri bir nitelik belirten faktördür.

Tanım 1.2.5: Tek faktörlü çalışmalarda faktörün her bir düzeyine “işlem” denir. Çok faktörlü çalışmalarda ise faktörlerin düzeylerinin bir kombinasyonuna işlem denir.

1.3 Model I – Sabit Etkiler

Faktör düzeylerinin rasgele seçimi söz konusu olmadığı zaman Model I kullanılır. Başka bir ifadeyle; modeldeki etkilerin hepsi sabit ise modele “sabit etkiler modeli” veya “Model I” denir. Örneğin; matematik öğretmek için üç yöntemin kullanılmasıyla ilgili bir çalışmada Model I kullanılır.

Faktör düzeyleri büyük bir kitleden alınan bir örneklem ise Model II kullanılabilir. Burada amaç, aldığımız örneklem değil, büyük kitlenin incelenmesidir. Bu modele “Rasgele Etkili Model” denir. Model I,

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{matrix} \quad (1.3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada:

Y_{ij} : i -inci faktör düzeyinin j-inci deneyde ortaya çıkan tepki (response) değeridir.

μ_i : Parametreler olup i-inci faktör düzeyinin ortalamasıdır.

ϵ_{ij} : $N(0, \sigma^2)$ dağılımlı, bağımsız hata terimleridir. $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, n_i$

Bu modelin önemli özellikleri şunlardır:

1. Y_{ij} gözlem değeri iki bileşenle meydana getirilebilir:

a) μ_i , sabit terim ; b) ϵ_{ij} , rastgele hata terimi.

2. $E(\epsilon_{ij}) = 0$ olduğundan;

$$E(Y_{ij}) = \mu_i$$

3. μ_i sabit olduğundan

$$\sigma^2(Y_{ij}) = \sigma^2(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$$

dır.

4. Her bir ε_{ij} , normal dağılıma sahip olduğundan, Y_{ij} lerin her biri de normal dağılıma sahiptir. Çünkü Y_{ij} , ε_{ij} nin lineer fonksiyonudur.
5. Hata terimleri birbirinden bağımsız varsayılır. ε_{ij} ler bağımsız olduklarından Y_{ij} ler de bağımsızdırlar.
6. Y_{ij} ler $N(\mu_i, \sigma^2)$ dağılımlıdırlar.

Model I ' i

$$Y_{ij} = \mu . + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (1.3.2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_i$$

olarak da yazabiliriz. Burada:

$\mu .$; Tüm gözlemlerin ortak sabit bileşenidir. (genel ortalama)

τ_i ; i-inci faktör etkisidir.

ε_{ij} ; $N(0, \sigma^2)$ dağılımlı bağımsız hata terimidir. (1.3.1) ve (1.3.2) den

$$\mu_i = \mu . + \tau_i$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\tau_i = \mu_i - \mu .$$

bulunur.

$$\mu . = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_i$$

olduğundan;

$$\sum_{i=1}^k \tau_i = 0$$

dır. Y_{ij} , i-inci faktör düzeyi için j -inci birim üzerindeki gözlemi gösterir. i-inci faktör düzeyi için gözlem değerlerinin toplamı;

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} ,$$

i-inci faktör düzeyi için örneklem ortalaması;

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} ,$$

tüm gözlemlerin toplamı;

$$Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij} ,$$

tüm gözlemlerin ortalaması ise;

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j Y_{ij} = \frac{Y_{..}}{N} ,$$

olup burada ;

$$N = \sum_{i=1}^k n_i$$

dir.

1.4 Parametrelerin Tahmini

Varyans analizi modelinin parametreleri bilinmediğinden örneklem verilerinden tahmin etmeliyiz.

(1.3.1)' deki Model İçin : En Küçük Kareler Tahmin Edicileri:

En küçük kareler yöntemine göre; gözlemlerin beklenen değerden sapmalarının karelerinin toplamı, parametrelere göre en küçük yapılmalıdır. Model (1.3.1) de μ_i tüm kitlelerde Y_{ij} lerin ortalaması olarak tanımlandığından

$$E(Y_{ij}) = \mu_i$$

dir. Böylece minimum yapılması gereken kareler toplamı;

$$Q = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu_i)^2$$

şeklindedir. Q toplamının her birinin minimum yapılmasıyla en küçük yapılabilir. Bilindiği

gibi, örneklem ortalaması sapmaların karelerinin toplamını en küçük yapar. Böylece, $\hat{\mu}_i$ ile gösterilen μ_i nin en küçük kareler tahmin edicisi $\bar{Y}_i$ dir. Yani;

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i$$

dır. Model (1.3.2) için;

$$Q = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu - \tau_i)^2$$

olacaktır. Eğer

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_{..}$$

ise; bu durumda;

$$\hat{\tau}_i = \bar{Y}_i - \bar{Y}_{..}$$

dir.

1.5 Kalanlar (Rezidüer)

(1.3.1) deki model için e_{ij} kalanı

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{\mu}_i = Y_{ij} - \bar{Y}_i$$

şeklinde tanımlanır. Böylece kalan; gözlemin saptanan faktör düzeyinin, örneklem ortalamasından sapmasını gösterir. Kalanın bu tanımını (1.3.2) modeline uygularsak;

$$\hat{\mu}_i + \hat{\tau}_i = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..}) = \bar{Y}_i$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i$$

elde edilir. Her bir faktör düzeyi için kalanların toplamı sıfırdır. Yani;

$$\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

dır. Varyans analizi modelinin gücünün kontrolü için kalanlar kullanılır.

1.6 Genel Kareler Toplamının Parçalanması

Y_{ij} lerin toplam değişkenliği, $\bar{Y}_{..}$ genel ortalamadan sapmaları ile ölçülür ve

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$$

şeklindedir. Toplam değişkenliğin bilinen ölçüsü, sapmaların karelerinin toplamı olup şöyle gösterilir:

$$SSTO = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

Faktör düzeyi ortalaması ve genel ortalama arasındaki fark:

$$(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})$$

dır. Her bir gözlem ve onun faktör düzeyi ortalaması arasındaki sapma ise:

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

olsun. Buradan;

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

yazılır. Böylece toplam sapma; faktör düzeyi ortalamasının genel ortalamadan sapması ve Y_{ij} ile onun faktör düzeyi ortalaması arasındaki sapmanın toplamı olarak ifade edilebilir.

Yazdığımız son eşitliğin her iki tarafının karesini alıp, i ve j üzerinden toplama geçerse;

$$\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) = 0$$

olacağından;

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

elde edilir. İşlemlerin kareleri toplamına eşit olan, sağdaki ilk terim SSTR ile, hataların kareleri toplamına eşit olan ikinci terim ise SSE ile gösterilirse, buradan;

$$SSTO = SSTR + SSE$$

yazılır. Görüldüğü gibi SSTO'nun parçalanması toplanabilir. SSE, tahmin edilmiş olan faktör düzeyi ortalamalarının, gözlemlerden farklılığının (değişiminin) bir ölçüsüdür. Her

bir faktör düzeyi için gözlemler arasındaki değişim (varyasyon) ne kadar az ise SSE değeri o kadar küçük olur. $SSE = 0$ ise bir faktör düzeyi için tüm gözlemler aynıdır ve bu tüm faktör düzeyleri için sağlanır. Bir faktör düzeyi için gözlemler kendi aralarında ne kadar farklı olursa SSE o kadar büyük olur.

SSTR ise, tahmin edilmiş olan faktör düzeyi ortalamaları arasındaki farklılığın bir ölçüsüdür. Eğer tahmin edilmiş olan tüm faktör düzeyi ortalamaları $\bar{Y}_i$ lar aynı ise $SSTR = 0$ dir. $\bar{Y}_i$ lar ne kadar çok farklı ise, SSTR değeri o kadar büyük olacaktır.

SSTO, N-1 serbestlik derecesine (s.d)

SSTR, k-1 serbestlik derecesine (s.d)

SSE, N-k serbestlik derecesine (s.d)

sahiptir. Karelerin ortalaması, her bir kareler toplamını kendi serbestlik derecesine bölerek bulunabilir. Böylece, işlemin karelerinin ortalaması;

$$MSTR = \frac{SSTR}{(k-1)}$$

dır. Hata karelerinin ortalaması ise;

$$MSE = \frac{SSE}{(N-k)}$$

şeklinde dir. Faktör düzeyi ortalamalarının eşitliğinin testi için;

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H_a : \text{Tüm } \mu_i \text{ ler eşit değil.}$$

şeklinde bir hipotez kurulabilir. Böyle bir hipotezi test etmek için;

$$F = \frac{MSTR}{MSE}$$

test istatistiği kullanılır. MSTR nin beklenen değeri;

$$E(MSTR) = \sigma^2 + \left[\frac{1}{(k-1)} \right] \sum_i n_i \tau_i^2$$

MSE nin beklenen değeri ise;

$$E(MSE) = \sigma^2$$

şeklinde olup, sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilir. Bu tabloya varyans analizi (ANOVA) tablosu denir.

Tablo 1 Tek Faktörlü Varyans Analizi (ANOVA)

Değişim Kaynağı	s.d.	Kareler Toplamı S.S.	Kareler Ort. Kareler Top./s.d.	F	EMS
Gruplar Arası	k-1	$SSTR = \sum_i n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2$	$SSTR/(k-1)$	$\frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(N-k)}$	$\sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_i n_i (\mu_i - \mu_{..})^2$
Rezidü	N-k	$SSE = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$	$SSE/(N-k)$		σ^2
Toplam	N-1	$SSTO = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$			

Faktör düzeyleri etkilerinin analizi için faktör düzeyleri ortalamasıyla ilgili güven aralıkları oluşturulur. Faktörlerin herhangi iki düzeyinin ortalamaları farkları için de güven aralıkları oluşturularak iki işlemin veya iki faktör düzeyinin karşılaştırılması yapılır. Bu işlemler için izlenen yol aşağıdaki gibidir:

i-inci faktör düzeyi ortalaması μ_i için $1 - \alpha$ düzeyli güven aralığı;

$$\bar{Y}_i \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k) \cdot \frac{s}{\sqrt{n_i}}$$

dır. Burada; $\bar{Y}_i$, μ_i nin yansız tahmin edicisi olup, $E(\bar{Y}_i) = \mu_i$ ve $\bar{Y}_i$ nin varyansı $\frac{\sigma^2}{n_i}$

dir. Güven aralığı bulurken;

$$\frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{\frac{s}{\sqrt{n_i}}}$$

ifadesinin $N-k$ serbeslik dereceli t -dağılımına sahip olduğu göz önüne alınır. σ^2 bilinmediğinden σ^2 yansız tahmin edicisi olan $MSE = s^2$ değeri kullanılır.

i -inci ve i' -inci faktör düzeyleri ($i \neq i'$) farkı için $1 - \alpha$ düzeyli güven aralığı;

$$\hat{D} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k).s_D$$

dır. Burada; $\hat{D} = \bar{Y}_i - \bar{Y}_{i'}$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-k)$ $N-k$ serbeslik dereceli t -dağılımının tablo

değeridir. Tanımlanan $\hat{D}$ tahmin edicisi $D = \mu_i - \mu_{i'}$ ortalamalı, $\sigma_D^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)$

varyanslı olup σ^2 bilinmediğinde yerine yansız tahmini olan MSE değeri kullanılırsa

$\frac{\hat{D} - D}{s_D}$ dağılımı $N-k$ serbestlik dereceli t dağılımına sahiptir. Burada;

$$s_D = \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)}$$

dir. Daha sonraki bölümlerde söz edilecek olan sınıflandırma modellerindeki parametreler için de benzer şekilde güven aralıkları oluşturulabilir.

(1.3.1) deki model matris notasyonu ile

$$Y = X\mu + \epsilon$$

şeklinde ifade edilebilir. En küçük kareler (E.K.K) yöntemi Model I için uygulandığında; E.K.K çözümü

$$X'X\mu = X'Y$$

normal denklemlerin çözümüdür. Modele göre; gözlemlerin vektörü Y , bilinmeyen parametrelerin vektörü μ , katsayılar matrisi X ile $X'X$ ve $X'Y$ matrisleri sırasıyla;

$$Y' = [Y_{11} \ Y_{12} \ \dots \ Y_{1n_1} \ Y_{21} \ Y_{22} \ \dots \ Y_{2n_2} \ \dots \ Y_{k1} \ Y_{k2} \ \dots \ Y_{kn_k}]$$

$$\mu' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]_{k \times 1}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times k}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n_k \end{bmatrix}_{k \times k}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} Y_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n_2} Y_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_k} Y_{kj} \end{bmatrix}$$

olup, μ nün EKK tahmin edicisi;

$$\hat{\mu} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_k \end{bmatrix}$$

dır.

$$(X\hat{\mu})' = [\bar{Y}_1 \bar{Y}_1 \dots \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_2 \dots \bar{Y}_2 \dots \bar{Y}_k \bar{Y}_k \dots \bar{Y}_k]$$

olduğu göz önüne alınırsa uydurulmuş model için; SSTR (Kareler toplamı);

$$SSTR = (X\hat{\mu})'(X\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i^2$$

Rezidü kareler toplamı ise; $Y'Y = (Y - X\hat{\mu})'(Y - X\hat{\mu}) + (X\hat{\mu})'(X\hat{\mu})$ dan

$$SSE = Y'Y - SSTR = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i^2 = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

olarak bulunur. k bileşenli,

$$H_0: \mu = 0$$

$$H_a: \mu \neq 0$$

hipotezini test etmek için

$$F = \{ \hat{\mu}'X'X\hat{\mu} / (k-1) \} / \{ (Y - X\hat{\mu})'(Y - X\hat{\mu}) / (N-k) \}$$

den;

$$F = \left(\frac{N-k}{k-1} \right) \frac{SSTR}{SSE}$$

dağılımını elde ederiz. Bu dağılım $\sum_i n_i \mu_i^2 / \sigma^2$ merkezi olmama parametresi ile F

dağılımıdır. H_0 hipotezi doğru ise bu dağılım merkezi $F(k-1, N-k)$ dağılımı olur. α anlam düzeyinde $F_T(k-1, N-k) > F$ ise H_0 red, aksi halde kabul edilir. Burada; F_T , $k-1$, $N-k$ serbestlik dereceli tablo değeridir. Hesaplamalarda kolaylık sağlaması açısından;

$$SSTR = \sum_{i=1}^k \frac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_i \sum_j Y_{ij} \right)^2}{N}$$

$$SSE = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{\left(\sum_j Y_{ij} \right)^2}{n_i}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 1: Tek Faktörlü Varyans Analizi İçin Anova

Bir tüketici organizasyonu (kuruluşu) kullanılmış araba için nakit teklifinin büyüklüğü üzerinde, otomobil sahiplerinin yaşının etkisi üzerinde çalışmıştır. Bunun için; kullanılmış araba sahiplerinden oluşan ve her grupta 12 kişi olmak üzere üç yaş grubu (genç, orta, yaşlı) oluşturularak deney için, 6 yaşında orta fiyatlı bir araba seçilmiştir. Bölgedeki araçlardan seçilen 36 aracın sahiplere atanmasında rastgelelik kullanılmıştır. Teklifler (10 milyon üzerinden) aşağıdaki gibidir. (Neter ve ark. (1990))

Tablo 2 Tek Faktörlü Varyans Analizi Verileri

i	j											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 Genç	23	25	21	22	21	22	20	23	19	22	19	21
2 Orta	28	27	27	29	26	29	27	30	28	27	26	29
3 Yaşlı	23	20	25	21	22	23	21	20	19	20	22	21

şeklinde dir.

Tablo 3 Tek Faktörlü Varyans Analizi Örneği İçin Anova

		Kareler Toplamı	Serbestlik derecesi	Kareler Ortalaması	F	p
Fiyat	Gruplar arası	316.722	2	158.361	63.601	.000
	Gruplar içi	82.167	33	2.490		
	Toplam	398.889	35			

$\alpha = 0.05$ önem düzeyinde;

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$H_a : \mu_i$ ler eşit değil.

hipotezini test edelim.

$$F_H = 63.601$$

$$F_T = 3.32$$

dır. $F_H > F_T$ olduğundan H_0 reddedilir. Yani; aynı araba için farklı yaş grupları farklı nakit teklifinde bulunmuşlardır. Şimdi faktör düzeyleri ortalamaları için güven aralığı oluşturalım:

$$N = 36, k = 3, \alpha = 0.05 \text{ olmak üzere; } t_{0,975}(33) = 2.042$$

dir. $\bar{Y}_1 = 21.5$, $\bar{Y}_2 = 27.75$, $\bar{Y}_3 = 21.416$ ve $MSE = 2.49$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\mu_1 \text{ için } \bar{Y}_1 \mp t_{0,975}(33) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{12}}, \text{ den güven aralığı } (20.57 ; 22.43)$$

$$\mu_2 \text{ için } \bar{Y}_2 \mp t_{0,975}(33) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{12}}, \text{ den güven aralığı } (26.82 ; 28.68)$$

$$\mu_3 \text{ için } \bar{Y}_3 \mp t_{0,975}(33) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{12}}, \text{ den güven aralığı } (20.49 ; 22.35)$$

bulunur. Böylece; % 95 güvenle genç grubunun tekliflerinin ortalamasının 20.57 birim ile 22.43 birim arasında olduğunu söyleyebiliriz. Diğer yaş grupları için de benzer yorum yapılabilir.

Genç ve orta yaş grubunun ortalamaları farkı için % 95 güven düzeyli güven aralığı;

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \mp t_{0,975}(33) \cdot \sqrt{MSE \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right)}$$

den,

$$-7.57 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -4.93$$

bulunur. Böylece; % 95 güvenle orta yaş grubunun teklifinde genç grup teklifinden 4.93 ile 7.57 birim arasında fazlalık olduğunu söyleyebiliriz.

2. İKİ FAKTÖRLÜ VARYANS ANALİZİ

2.1 Etkileşim ve Toplanabilirlik

Bu bölümde iki faktörlü çalışmalar için varyans analizini ele alacağız.

2.1.1 Faktör Düzeyi Ortalamaları:

Burada satır bir faktöre , sütun ise başka bir faktöre karşılık gelir. Örneğin ; satış miktarı üzerinde reklam ve paket tipinin etkisi incelenmek istenirse satıra paket tiplerini, sütuna ise reklam çeşitlerini yazabiliriz. i ile satır sayılarını, j ile sütun sayılarını gösterelim. $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$ olmak üzere; j -inci sütun için ortalama;

$$\mu_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \mu_{ij} \quad (2.1.1)$$

i -inci sütun için satır ortalaması ;

$$\mu_{i.} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mu_{ij} \quad (2.1.2)$$

dır. Genel ortalama ise;

$$\mu_{..} = \frac{1}{ab} \sum_i \sum_j \mu_{ij} \quad (2.1.3)$$

veya (2.1.1) ve (2.1.2) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\mu_{..} = \frac{1}{a} \sum_i \mu_{i.} = \frac{1}{b} \sum_j \mu_{.j} \quad (2.1.4)$$

şeklinde yazılabilir.

2.1.2 Özel (Spesifik) Etkiler:

A faktörü i-inci düzeyindeyken B nin j düzeyinin özel etkisi;

$$\beta_{j(i)} = \mu_{ij} - \mu_{i.} \quad (2.1.5)$$

ile gösterilir. Aynı şekilde, B-faktörünün j-düzeyi için A-faktörünün i- düzeyinin özel etkisi de;

$$\alpha_{i(j)} = \mu_{ij} - \mu_{.j} \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.3 Temel Etkiler:

B-faktörünün j-düzeyindeki temel etkisi

$$\beta_j = \frac{1}{a} \sum_i \beta_{j(i)} = \mu_{.j} - \mu_{..} \quad (2.1.7)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, A faktörünün i-düzeyinin temel etkisi ise;

$$\alpha_i = \frac{1}{b} \sum_j \alpha_{i(j)} = \mu_{i.} - \mu_{..} \quad (2.1.8)$$

dır. Buradan;

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_j \beta_j = 0$$

olduğunu görürüz. O halde; her faktörün temel etkilerinin toplamı sıfırdır.

2.1.4 Toplanabilir Faktör Etkileri:

Genel olarak toplanabilir faktör etkileri;

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

ya da (2.1.7) ve (2.1.8) eşitliklerini kullanarak;

$$\mu_{ij} = \mu_i + \mu_j - \mu_{..}$$

şeklinde yazılabilir. Bütün işlem ortalamaları yazılan son iki eşitlik gibi parçalandığında; “faktörlerin etkileşmediğini” ya da “faktör etkilerinin toplanabilir olduğunu” söyleriz.

2.1.5 Etkileşim:

A-faktörünün i-inci düzeyinin B-faktörünün j-inci düzeyi ile etkileşimi;

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j) \quad (2.1.9)$$

şeklinde ifade edilir veya α_i ve β_j tanımından

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu_{..} \quad (2.1.10)$$

dır. Eğer iki faktör toplanabilir ise, bütün $(\alpha\beta)_{ij}$ etkileşimleri sıfıra eşittir.

$(\alpha\beta)_{ij}$ etkileşimi; B-faktörü j düzeyinde iken A-faktörünün i-düzeyindeki özel etkisi $\alpha_{i(j)}$ ile A faktörünün i-düzeyindeki (α_i) temel etkisi arasındaki fark olarak da yorumlanabilir. O zaman:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \alpha_{i(j)} - \alpha_i \quad (2.1.11)$$

dır. Benzer şekilde; A-faktörü i-inci düzeyindeyken B-faktörünün j-inci özel etkisi $\beta_{j(i)}$ ile B-faktörünün j-inci düzeyindeki (β_j) ortalama temel etkisi arasındaki fark olarak da yazılabilir. Yani ;

$$(\alpha\beta)_{ij} = \beta_{j(i)} - \beta_j \quad (2.1.12)$$

dır. Sütun veya satırlar üzerinden toplam alındığında etkileşimlerin toplamının sıfır olduğu, yani

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

olduğu görülür. Böylece; tüm etkileşimlerin toplamı da sıfırdır. Yani ;

$$\sum_i \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

dır.

Etkileşimin varlığını, aşağıdaki koşullardan biriyle belirleyebiliriz:

1. Bütün μ_{ij} lerin $\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$ ile ifade edilemeyeceği;
2. B-faktörünün herhangi iki düzeyi için tepki ortalamaları farkının, A-faktörünün bütün düzeyleri için aynı olup olmadığı;
3. A-faktörünün herhangi iki düzeyi için tepki ortalamaları farkının, B-faktörünün bütün düzeyleri için aynı olup olmadığı;
4. Bir grafikteki faktör düzey eğrilerinin paralel olup olmadığını incelemekle belirlenebilir.

2.2 İki Faktörlü Çalışmalarda Sabit Etkiler

Model-I de A faktörünün (a) düzeyi B faktörünün ise (b) düzeyi vardır. Bu iki faktörün (ab) faktör düzey kombinasyonları da incelenir. ab işlemlerinden her biri için gözlem sayısı n dir. Diyelim ki; A'nın i-inci düzeyde B'nin j-inci düzeyde olduğu işlem için k-ıncı gözlem;

$$Y_{ijk} \quad (i = 1, 2, \dots, a ; j = 1, 2, \dots, b ; k = 1, 2, \dots, n)$$

dır. İki faktörlü çalışmalar için sabit etkili varyans analizi modeli;

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\mu_{..}$, β_j , ve $(\alpha\beta)_{ij}$ sabitlerdir ve

$$\sum_i \alpha_i = 0 ; \sum_j \beta_j = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

kısıtlamaları vardır. ε_{ijk} , $N(0, \sigma^2)$ dağılımlı gözlemsel olmayan bağımsız değişkenlerdir. $E(Y_{ijk}) = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$ ve $\sigma^2(Y_{ijk}) = \sigma^2$

dır. Y_{ijk} lar bağımsız normal dağılımlı rastgele değişkenlerdir. Böylece modelimizi genel bir şekilde;

$$Y_{ijk} \sim N(\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2)$$

olarak yazabiliriz. $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ ise modelin etkileşimsiz, $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ ise etkileşimli şekli söz konusudur.

2.3 İki Faktörlü Etkileşimsiz Model

Etkileşimsiz, iki faktörlü, her gözede n tane gözlemi bulunan model için denkleminiz;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad (2.3.1)$$

$i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 1, 2, \dots, n$

şeklinde. Burada α_i , A-faktörünün i -inci düzeyinin temel etkisini; β_j ise, B-faktörünün j -inci düzeyinin temel etkisini göstermektedir. ε_{ijk} ise, hata terimidir.

Bu modelin normal denklemleri;

$$\begin{aligned} Y_{...} &= abn\hat{\mu} + bn \sum \hat{\alpha}_i + na \sum \hat{\beta}_j \\ Y_{i..} &= bn\hat{\mu} + bn\hat{\alpha}_i + n \sum \hat{\beta}_j \\ Y_{.j.} &= an\hat{\mu} + n \sum \hat{\alpha}_i + an\hat{\beta}_j \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

olup, bu $(a+b+1)$ bilinmeyenli, $a+b+1$ tane toplam eşitlikten oluşan bir lineer sistemdir. Burada $a+b-1$ tane lineer bağımsız tahmin edilebilir fonksiyon vardır.

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})$$

eşitliğinin her iki tarafının karesi alınıp i, j, k üzerinden toplama geçilirse çapraz terimlerin çarpımı sıfır olacağından;

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 &= \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \\ &+ \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2\end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 &= bn \sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + an \sum_j (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \\ &+ \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2\end{aligned}$$

olur. Bu denklemi;

$$SSTO = SSA + SSB + SSE$$

olarak da yazabiliriz. Burada;

SSTO ; (abn-1)

SSA ; (a-1)

SSB ; (b-1)

SSE ; (abn-a-b+1)

serbestlik derecesine sahiptir. A faktörünün kareler ortalaması;

$$MSA = \frac{SSA}{a-1}$$

B faktörünün kareler ortalaması;

$$MSB = \frac{SSB}{b-1}$$

dır. Rezidü (hata) kareler ortalaması ise;

$$MSE = \frac{SSE}{abn - a - b + 1}$$

dır. SSA nın beklenen değeri;

$$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1} \sum_{i=1}^a \alpha_i^2$$

SSB nin beklenen değeri;

$$\sigma^2 + \frac{an}{b-1} \sum_{j=1}^b \beta_j^2$$

SSE nin beklenen değeri ise;

$$\sigma^2$$

şeklindedir. Satır etkisini yani;

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad \forall i \text{ için (A faktörünün etkisi yoktur).}$$

$$H_a : \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \text{ için (A faktörünün etkisi vardır).}$$

hipotezini test etmek için,

$$F_{(a-1, abn-a-b+1)} = \frac{MSA}{MSE}$$

test istatistiği kullanılır. Sütun etkisini test etmek için ise;

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \forall j \text{ için (B faktörünün etkisi yoktur).}$$

$$H_a : \beta_j \neq 0 \quad \forall j \text{ için (B faktörünün etkisi vardır).}$$

hipotezi kurulur ve bu test için

$$F_{(b-1, abn-a-b+1)} = \frac{MSB}{MSE}$$

test istatistiği kullanılır.

Bazı durumlarda, α_i veya β_j parametrelerinin lineer kombinasyonlarının tahmin edicileri istenebilir. Bu parametrik fonksiyonların ne zaman tahmin edilebilir olduğu aşağıdaki şekilde belirlenebilir.

$\sum c_i \alpha_i$ ve $\sum d_j \beta_j$ şeklindeki fonksiyonlar ancak ve ancak sırasıyla $\sum c_i = 0$ ve $\sum d_j = 0$ olduğunda tahmin edilebilir. Bunların en iyi yansız tahmin edicileri sırasıyla;

$$\sum c_i \hat{\alpha}_i = \sum c_i \bar{Y}_{i..}$$

$$\sum d_j \hat{\beta}_j = \sum d_j \bar{Y}_{.j.}$$

dır. Buradaki c_i ve d_j lere kontrast (kısıtlama) denir.

Tablo 4 Etkileşimsiz İki Faktörlü Model İçin Varyans Analizi (ANOVA)

Değişim Kaynağı (D.K.)	Kareler Toplamı (S.S.)	Serbestlik Derecesi (s.d.)	Kareler Ortalaması (M.S.)	F	EMS
Faktör A	SSA	(a-1)	MSA	$\frac{MSA}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1} \sum \alpha_i^2$
Faktör B	SSB	(b-1)	MSB	$\frac{MSB}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{an}{b-1} \sum \beta_j^2$
Rezidü	SSE	abn-a-b+1	MSE		σ^2
Toplam	SSTO	abn-1			

Örnek 2: İki Faktörlü Etkileşimsiz Model İçin Varyans Analizi

Cilt temizliği yapmak üzere, üç temizlik maddesi üç farklı kişi üzerinde deneniyor. Bu kişiler her temizlik maddesini sırayla cildine sürüyor. Sürmesinden sonra sekiz saat beklenip, cildin temizlik durumu ölçülüyor. Ölçüm sonuçları şu şekildedir. (Dunn ve Clark (1974))

Tablo 5 Etkileşimsiz İki Faktörlü Model İçin Varyans Analizi Verileri

Temizlik Maddesi	Bireyler			
	1	2	3	
A	1.25	2.30	1.45	$\bar{Y}_{1.} = 1.66$
B	0.87	1.45	0.65	$\bar{Y}_{2.} = 0.99$
C	1.11	1.38	2.99	$\bar{Y}_{3.} = 1.82$
	$\bar{Y}_{.1} = 1.07$	$\bar{Y}_{.2} = 1.71$	$\bar{Y}_{.3} = 1.69$	$\bar{Y}_{..} = 1.49$

a) Uygun Model:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

olup, model matris notasyonu ile;

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde gösterilebilir. Burada;

$$X = (j_3 \otimes j_3, j_3 \otimes I_3, I_3 \otimes j_3)$$

$$Y' = [Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}, Y_{31}, Y_{32}, Y_{33}]$$

$$Y' = (1.25, 2.30, 1.45, 0.87, 1.45, 0.65, 1.11, 1.38, 2.99)$$

$$\hat{\beta}' = [\mu, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3]$$

$$\varepsilon' = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}] \text{ ve } \varepsilon_{ij} \sim \text{IND}(0, \sigma^2)$$

dir. E.K.K. uygulanırsa; işlem etkileri:

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} = 0.17, \quad \hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..} = -0.5, \quad \hat{\alpha}_3 = \bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..} = 0.33$$

dır. Blok etkileri:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}_{.1} - \bar{Y}_{..} = -0.42, \quad \hat{\beta}_2 = \bar{Y}_{.2} - \bar{Y}_{..} = 0.22, \quad \hat{\beta}_3 = \bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{..} = 0.20$$

bulunur. Görüldüğü gibi $\sum_{i=1}^3 \hat{\alpha}_i = 0$, $\sum_{j=1}^3 \hat{\beta}_j = 0$

dır.

b) Varsayımlarımız:

1. i. Temizlik maddesinin j. kişinin cildi üzerinde uygulandıktan sonra elde edilen ölçüm sonuçları (Y_{ij} ler) bir normal dağılımdan gelmektedir. (9 tane dağılım var.)

2. Bu 9 dağılımın ortalamaları sırasıyla;

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 1.49 + 0.17 + (-0.42) = 1.24 \\ \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_2 = 1.49 + 0.17 + (0.22) = 1.88 \\ \hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_3 = 1.49 + 0.17 + (0.20) = 1.86 \\ \vdots \\ \hat{\mu} + \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_3 = 1.49 + 0.33 + (0.20) = 2.02 \end{bmatrix}$$

olup, toplanabilirlik özelliği bulunmaktadır.

3. Farklı temizlik maddesinin farklı kişiler üzerinde uygulanması sonucu elde edilen 9 sonucun hepsinin varyansları birbirine eşittir.

4. Ortalamadan sapmalar (ϵ_{ij} ler) istatistiksel olarak bağımsızdır.

c. Varyans Analizi Tablosu:

Tablo 6 Etkileşimsiz İki Faktörlü Model Örneği İçin Anova Tablosu

Değişim Kaynağı (D.K.)	Kareler Toplamı (S.S.)	Serbestlik Derecesi (s.d.)	Kareler Ortalaması (M.S.)	F	EMS
Satırlara Ait	1.16	2	0.581	1.008	$\sigma^2 + \frac{3}{2} \sum \alpha_i^2$
Sütunlara Ait	0.79	2	0.397	0.668	$\sigma^2 + \frac{3}{2} \sum \beta_j^2$
Rezidüye Ait	2.30	4	0.576		σ^2
Toplam	4.21	8			

d) $\alpha = 0.01$ önem düzeyinde

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$H_a : \alpha_i \neq 0$$

hipotezini test edelim:

$$F_H = 1.008$$

$$F_T = 18.0$$

dır. $F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir. Yani; temizlik maddelerinin cilt temizliği üzerindeki etkileri aynıdır.

e) $\alpha = 0.01$ önem düzeyinde

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$H_a : \beta_j \neq 0$$

hipotezini test edelim:

$$F_H = 0.668$$

$$F_T = 18.0$$

dır. $F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir. Yani; bloklar arasında bir cevap farklılığı yoktur. Diğer bir deyişle; bireylerin cilt temizliği üzerindeki etkileri aynıdır.

2.4 İki Faktörlü Etkileşimli Model

Her gözede n tane gözlem bulunan ve iki faktörü olan, etkileşimli, bir deney için genel model denklemi;

$$Y_{ijk} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \quad (2.4.1)$$

ya da;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, b; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

şeklindedir. Burada α ve β iki faktörü göstermektedir. α_i , $i = 1, 2, \dots, a$ için A faktörünün; β_j , ise $j = 1, 2, \dots, b$ için B faktörünün düzeylerini ve $k = 1, 2, \dots, n$ her gözede gözlemleri göstermektedir. Kitle ortalamaları kullanılarak yazılan model denklemi;

$$Y_{ijk} - \mu_{...} = (\mu_{i..} - \mu_{...}) + (\mu_{.j.} - \mu_{...}) + (\mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...}) + Y_{ijk} - \mu_{ij.} \quad (2.4.2)$$

şeklindedir. Burada $\mu_{ij.}$, (i, j) gözesinin ya da deneme kombinasyonunun gerçek ortalamasını göstermektedir. Modeldeki etkileşim terimi göze etkisinden, A ve B nin ana etkileri çıkarılarak;

$$(\mu_{ij.} - \mu_{...}) - (\mu_{i..} - \mu_{...}) - (\mu_{.j.} - \mu_{...}) = \mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...} \quad (2.4.3)$$

bulunur. (2.4.2) de kitle ortalaması yerine örneklemden elde edilen tahmin edicileri yazılırsa, elde edilen örneklem modeli,

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

olur. Bu ifadenin karesi alınıp, i, j, k üzerinden toplanırsa ikili çapraz terimlerin çarpımı sıfır olacağından;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu yazım; genel kareler toplamının, A faktörü için ortalamalar arası kareler toplamı, B faktörü için ortalamalar arası kareler toplamı ve AB etkileşimi için kareler toplamı ile hata kareler toplamının toplamına eşit olduğunu belirtir. O halde yazdığımız en son denklemi;

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 &= bn \sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + an \sum_j (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \\ &+ n \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2 + \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

$$SSTO = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

şeklinde yazabiliriz. Her kareler toplamı diğerlerinden bağımsızdır. Böylece herhangi bir kareler toplamı ilgili serbestlik derecesine bölünürse, sonuçlar bağımsız ki-kare dağılımına sahip olacak ve F testi yapılabilir.

Serbestlik derecelerinin parçalanması ile;

$$(abn-1) = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1) + ab(n-1)$$

eşitliği bulunur. Burada etkileşim için verilen serbestlik derecesi, gözeler için verilen $(ab-1)$ serbestlik derecesinden ana etkilere ilişkin serbestlik derecesinin çıkarılması ile;

$$(ab-1) - (a-1) - (b-1) = ab-a-b+1 = (a-1)(b-1)$$

olarak bulunur. İşlemin karelerinin ortalaması;

$$MSTR = \frac{SSTR}{(ab-1)}$$

A faktörünün karelerinin ortalaması;

$$MSA = \frac{SSA}{a-1}$$

B faktörünün karelerinin ortalaması;

$$MSB = \frac{SSB}{a - 1}$$

Etkileşimin kareler ortalaması;

$$MSAB = \frac{SSAB}{(a - 1)(b - 1)}$$

Rezidü (kalan) kareler toplamı ise;

$$MSE = \frac{SSE}{ab(n - 1)}$$

olarak bulunur. Buna göre; üç değişik hipotez test edilebilir: Satır etkisini yani;

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad \forall i \text{ için. (A'nın etkisi yoktur).}$$

$$H_a : \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \text{ için. (A'nın etkisi vardır).}$$

hipotezini test etmek için,

$$F_{(a-1, ab(n-1))} = \frac{MSA}{MSE} = F_H$$

test istatistiği kullanılır. α anlam düzeyinde $F_T(a - 1, ab(n - 1)) < F_H$ ise H_0 red, aksi halde kabul edilir. Burada, F_T , $a - 1$, $ab(n - 1)$ serbestlik dereceli tablo değeridir.

Sütun değişkeninin etkisini yani;

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \forall j \text{ için (B'nin etkisi yoktur).}$$

$$H_a : \beta_j \neq 0 \quad \forall j \text{ için (B'nin etkisi vardır).}$$

hipotezini test etmek için;

$$F_{(b-1, ab(n-1))} = \frac{MSB}{MSE}$$

test istatistiği kullanılır. Etkileşim etkisini;

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j \text{ için. (AB etkileşim etkisi yoktur).}$$

$$H_a : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j \text{ için. (AB etkileşim etkisi vardır).}$$

hipotezini test için ise,

$$F_{((a-1)(b-1), ab(n-1))} = \frac{MSAB}{MSE}$$

test istatistiği kullanılır. SSA'nın beklenen değeri;

$$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1} \sum \alpha_i^2$$

dır. SSB'nin beklenen değeri;

$$\sigma^2 + \frac{an}{b-1} \sum \beta_j^2$$

dır. SSAB'nin beklenen değeri;

$$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2$$

dır. SSE'nin beklenen değeri ise;

$$\sigma^2$$

şeklindedir.

Tablo 7 Etkileşimli İki Faktörlü Model İçin Varyans Analizi (ANOVA)

Değişim Kaynağı (D.K.)	Kareler Toplamı (S.S.)	Serbestlik Derecesi (s.d.)	Kareler Ortalaması (K.O.)	F	EMS
Faktör A	SSA	a-1	MSA	$\frac{MSA}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1} \sum \alpha_i^2$
Faktör B	SSB	b-1	MSB	$\frac{MSB}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{an}{b-1} \sum \beta_j^2$
Etkileşim	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	$\frac{MSAB}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)} \sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2$
Rezidü	SSE	ab(n-1)	MSE		σ^2
Genel Toplam	SSTO	abn-1			

Örnek 3: (Örnek 1 ile ilgili)

Her bir yaş grubunda, 6 erkek, 6 kadın gönüllü olarak kullanılmıştır. Gözlemler (10 milyon olarak), araba sahiplerinin yaşına (Faktör A) ve cinsiyetine (Faktör B) göre aşağıdaki gibi sınıflandırılmıştır. (Neter ve ark. (1990))

Tablo 8 Etkileşimli İki Faktörlü Varyans Analizi Verileri

Faktör B (Araba Sahiplerinin Cinsiyeti)		
Faktör A (Yaş)	j = 1 Erkek	j = 2 Kadın
i = 1 Genç	21	21
	23	22
	19	20
	22	21
	22	19
	23	25
	$Y_{11.} = 130$ $\bar{Y}_{11.} = 21.66$	$Y_{12.} = 128$ $\bar{Y}_{12.} = 21.33$
i = 2 Orta	30	26
	29	29
	26	27
	28	28
	27	27
	27	29
	$Y_{21.} = 167$ $\bar{Y}_{21.} = 27.83$	$Y_{22.} = 166$ $\bar{Y}_{22.} = 27.66$
i = 3 Yaşlı	25	23
	22	19
	23	20
	21	21
	22	20
	21	20
	$Y_{31.} = 134, \bar{Y}_{31.} = 22.33$	$Y_{32.} = 123, \bar{Y}_{32.} = 20.5$

Ön hesaplamalar aşağıdaki gibidir:

	1	2	3
$\bar{Y}_{i.}$	21.5	27.75	21.42
$\bar{Y}_{.j}$	23.94	23.16	
$\bar{Y}_{...}$	23.55		

Model;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2 ; k = 1, 2, \dots, 6$$

olup, gözlemler normal dağılıma sahiptir, eşit varyanslıdır ve σ^2 varyanslı olup birbirinden bağımsızdır.

a) Varyans Analiz Tablosu:

Tablo 9 Etkileşimli İki Faktörlü Etkileşimli Model Örneği İçin Anova

Değişim Kaynağı (D.K.)	Kareler Toplamı (S.S.)	Serbestlik Derecesi (s.d.)	Kareler Ortalaması (K.O.)	F	EMS
Faktör A	316.722	2	158.361	66.291	$\sigma^2 + 6 \sum \alpha_i^2$
Faktör B	5.444	1	5.444	2.279	$\sigma^2 + 18 \sum \beta_j^2$
Etkileşim	5.056	2	2.528	1.058	$\sigma^2 + 3 \sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2$
Rezidü	71.667	30	2.389		σ^2
Genel Toplam	398.889	35			

b) $H_0 : \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$

$H_a : \alpha_i \neq 0$

Üç yaş grubu üzerinde, nakit teklifi bakımından bir farklılık olup olmadığını $\alpha = 0.05$ önem düzeyinde test edelim:

$$F_H = 66.291$$

$$F_T = 3.32$$

$F_H > F_T$ olduğundan H_0 rededilir. Yani; farklı yaş grupları farklı nakit teklifinde bulunmuşlardır.

c) $H_0 : \beta_j = 0$

$$H_a : \beta_j \neq 0$$

Cinsiyet bakımından nakit teklifi üzerinde bir farklılık olup olmadığını $\alpha = 0.05$ önem düzeyinde test edelim:

$$F_H = 2.279$$

$$F_T = 4.17$$

dır. $F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir. Yani cinsiyetin nakit teklifi üzerinde etkisi yoktur.

d) $H_0 : (\alpha\beta)_k = 0$ (etkileşim etkisi yoktur).

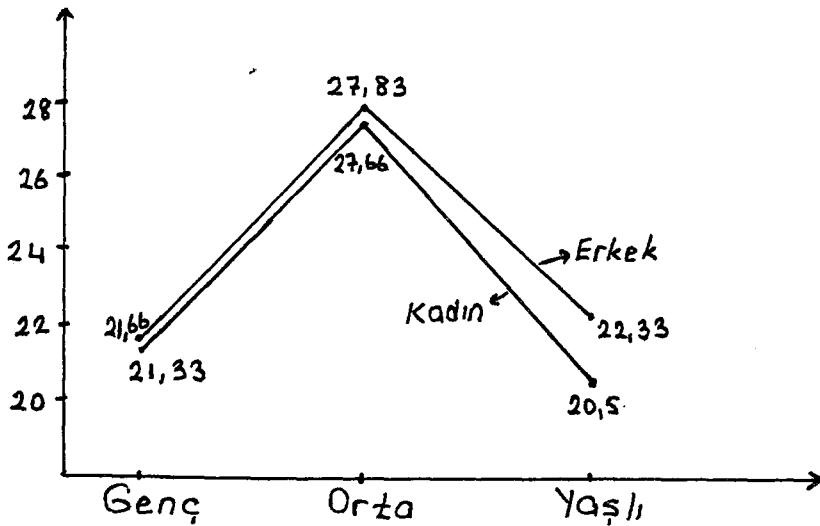
$$H_a : (\alpha\beta)_k \neq 0$$
 (etkileşim etkisi vardır).

Hipotezini test edelim.

$$F_H = 1.058$$

$$F_T = 3.32$$

$F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir. Yani; etkileşim etkisi yoktur.



Şekil 3 (Cinsiyet Eğrisi)

Arabalar için yapılan teklifler her iki cinsiyet grubunda orta yaşlılarda daha fazla olmakla birlikte kadın ve erkeklerin yaptıkları teklifler kabaca paralellik göstermektedir. Buradan görsel olarak etkileşim olmadığını söyleyebiliriz.

2.5 Latin Kare Düzeni

Her denemenin her satır ve sütununda yalnız bir defa denendiği bir düzene latin kare düzeni denir. Tek faktör var ve rastgelelik için iki kısıtlama var. Düzen kare olmalıdır. Verilen bir problem için kullanılabilecek latin kare düzeni mümkün olan değişik latin kareler arasından rastgele olarak seçilebileceğinden bu düzende rastgeleliğin kaybolduğu doğru değildir.

A, B, C ile üç işlemi gösterelim. Latin kare düzeninde işlemler için latin harflerini kullanmak daha uygundur. Haftanın günlerini (Pazartesi, Salı, Çarşamba) ve (1, 2, 3) operatörlerini blok değişkenleri olarak gözönünde bulunduralım. Latin kare düzeni aşağıdaki gibi olabilir.

<u>Gün</u>	<u>Operatör</u>		
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Pazartesi	B	A	C
Salı	A	C	B
Çarşamba	C	B	A

Örneğin; 1-inci operatörün Pazartesi gününde B işlemi, Salı gününde A işlemi, Çarşamba gününde ise C işlemi vardır. Aynı şeyler diğer iki operatör için de geçerlidir.

İşlem sayıları artıkça düzenleme sayısı hızlı olarak artar. $r = 5$ için 161.280 tane farklı düzenleme vardır.

Bir latin kare modelinde α_i ile gösterilen satır etkileri; β_j ile gösterilen sütun etkileri ve $(\alpha\beta)_k$ ile gösterilen işlem etkileri vardır. Bu üç değişken arasında etkileşimin

olmadığı kabul edilir. Böylece model toplanabilir. Sabit işlem ve blok etkileri için model;

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_k + \varepsilon_{(ijk)}$$

$i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, r$; $k = 1, 2, \dots, r$

şeklindedir. Burada; $\mu_{...}$ sabit ve α_i , β_j , $(\alpha\beta)_k$ ise;

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_j = \sum (\alpha\beta)_k = 0$$

kısıtlamaları altında sabitlerdir.

$$\varepsilon_{(ijk)} \sim N(0, \sigma^2)$$

dağılımlı bağımsız değişkenlerdir. Düzende gözelerde tekrar olmadığından $\varepsilon_{(ijk)}$ notasyonu kullanılmıştır. Her blok değişkeni aynı sayıda işlem içerdiğinden gözlemlerin sayısı r^2 dir. Her bir operatör her bir işlemi yapar ve her bir günde tüm işlemler yapılır.

Bir latin kare tasarımında:

1. r tane işlem vardır.
2. Her biri r tane sınıf içeren, iki tane blok değişkeni vardır.
3. Düzendeki her satır ve her sütunda bütün işlemler vardır. Yani ; her bir blok değişkeninin her bir sınıfı sadece bir tekrar içerir.

2.5.1 Latin Kare Düzeninin Avantajları ve Dezavantajları:

Avantajlar:

1. İki blok değişkeninin kullanımı deneysel hataların değişkenliğinde tek blok değişkeninden daha fazla indirgemeye olanak sağlar.
2. İşlem etkileri küçük ölçekli bir deneyden çalışılabilir. Bu özel olarak ön veya pilot çalışmalarda yararlı olur.

Dezavantajlar:

1. Her blok değişkeninin sınıflarının sayısı işlemlerin sayısına eşit olmalı. Az sayıda işlemlerle çalışıldığı zaman deneysel hataların serbestlik dereceleri azalır. Öte yandan, çok sayıda işlemlerle çalışıldığında deneysel hataların serbestlik dereceleri gerekenden daha fazla olabilir.
2. Modelin varsayımları sınırlıdır. Diğer bir deyişle; iki blok değişkeni ve işlemler arasında etkileşim olmadığı gibi iki blok değişkeni arasında da etkileşim yoktur.
3. İki blok değişkeni farklı sayıda sınıflara sahip olamaz.
4. Bazı etkileşimler varsa, model uygun olmaz, rezidünün hata kareler ortalaması, çok büyük olur ve işlem etkileri birbirine karışır.

Verilen sayıda işlemler için birçok latin kare düzeni vardır. Karşılaşılabilecek latin kare düzenlerinden 4 tanesi:

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
A B C	A C B	B A C	C B A
B C A	B A C	C B A	A C B
C A B	C B A	A C B	B A C

$r=3$ için 12 farklı düzenleme olup bu düzenlemeler aşağıda verildiği gibidir.

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
A B C	A C B	B A C	B C A
B C A	B A C	C B A	C A B
C A B	C B A	A C B	A B C
<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
C A B	C B A	A B C	A C B
A B C	A C B	C A B	C B A
B C A	B A C	B C A	B A C

9	10	11	12
B A C	B C A	C A B	C B A
A C B	A B C	B C A	B A C
C B A	C A B	A B C	A C B

2.5.2 Varyans Analizi Ve Testler

Satır , sütun ve işlem için toplamlar ve ortalamalar sırasıyla ;

$$Y_{i..} = \sum_j Y_{ijk} \quad , \quad \bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{r}$$

$$Y_{.j} = \sum_i Y_{ijk} \quad , \quad \bar{Y}_{.j} = \frac{Y_{.j}}{r}$$

$$Y_{..k} = \sum_{i,j} Y_{ijk} \quad , \quad \bar{Y}_{..k} = \frac{Y_{..k}}{r}$$

Genel toplam ve ortalama;

$$Y_{...} = \sum_i \sum_j Y_{ijk} \quad \text{ve} \quad \bar{Y} = \frac{Y_{...}}{r^2}$$

şeklinde gösterilir.

2.5.3 Parametreler ve En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

<u>Parametre</u>	<u>Tahmin Edicisi</u>
$\mu_{...}$	$\hat{\mu}_{...} = \bar{Y}_{...}$
α_i	$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$
β_j	$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...}$
$(\alpha\beta)_k$	$(\alpha\beta)_k = \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}$

O halde modelimiz;

$$\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..k} - 2\bar{Y}_{...}$$

ve rezidü (kalan)

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...}$$

dır.

Burada Kareler Toplamı Su Şekilde Gösterilir:

Satırlara ait kareler toplamı;

$$SSA = r \sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 ,$$

sütunlara ait kareler toplamı;

$$SSB = r \sum_j (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 ,$$

işlemlere ait kareler toplamı;

$$SSTR = r \sum_k (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2 ,$$

rezidüye ait kareler toplamı;

$$SSE = \sum_i \sum_j (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...})^2 ,$$

genel kareler toplamı ise;

$$SSTO = \sum_i \sum_j (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 ,$$

şeklindedir.

r^2 tane gözlem olduğundan SSTO'nun serbestlik derecesi $r^2 - 1$ dir. r tane satır ve sütun değişkeni; aynı zamanda r tane işlem olduğundan bunların kareler toplamı $r - 1$ serbestlik derecesine sahiptir. Hata kareler ortalamasının serbestlik derecesi ise şu şekilde bulunur:

$$(r^2 - 1) - 3(r - 1) = (r - 1)(r - 2)$$

dır. İşlem etkilerini test etmek için; yani

$$H_0 : (\alpha\beta)_k = 0$$

$$H_a : (\alpha\beta)_k \neq 0$$

şeklindeki bir hipotezi test etmek için;

$$F = \frac{MSTR}{MSE}$$

test istatistiği kullanılır. Satır değişkeninin etkisini, yani

$$H_0 : \alpha_i = 0$$

$$H_a : \alpha_i \neq 0$$

hipotezini test etmek için;

$$F = \frac{MSA}{MSE}$$

test istatistiği; sütun değişkeninin etkisini, yani

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_a : \beta_j \neq 0$$

hipotezini test etmek için ise;

$$F = \frac{MSB}{MSE}$$

istatistikleri kullanılır. Eğer;

$$F > F[1 - \alpha; r - 1, (r - 1)(r - 2)] \text{ ise } H_0 \text{ 'nı}$$

red, aksi halde kabul ederiz. SSA'nın beklenen değeri;

$$\sigma^2 + r \frac{\sum \alpha_i^2}{r - 1}$$

dır. SSB'nin beklenen değeri;

$$\sigma^2 + r \frac{\sum \beta_j^2}{r - 1}$$

dır. SSTR'nin beklenen değeri;

$$\sigma^2 + r \frac{\sum (\alpha\beta)_k^2}{r - 1}$$

dır. SSE'nin beklenen değeri;

$$\sigma^2$$

dır.

Tablo 10 Latin Kare Modeli İçin Varyans Analizi (ANOVA)

Değişim Kaynağı (D.K.)	Kareler Toplamı (S.S.)	Serbestlik Derecesi (s.d.)	Kareler Ortalaması (M.S.)	F	EMS
Satırlara Ait	SSA	$r - 1$	$MSA = \frac{SSA}{r - 1}$	$\frac{MSA}{MSE}$	$\sigma^2 + r \frac{\sum \alpha_i^2}{r - 1}$
Sütunlara Ait	SSB	$r - 1$	$MSB = \frac{SSB}{r - 1}$	$\frac{MSB}{MSE}$	$\sigma^2 + r \frac{\sum \beta_j^2}{r - 1}$
İşlemlere Ait	SSTR	$r - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{r - 1}$	$\frac{MSTR}{MSE}$	$\sigma^2 + r \frac{\sum (\alpha\beta)_k^2}{r - 1}$
Rezidüye Ait	SSE	$(r - 1)(r - 2)$	$MSE = \frac{SSE}{(r - 1)(r - 2)}$		σ^2
Toplam	SSTO	$r^2 - 1$			

İncelenen modeller dışında çok faktörlü ANOVA modelleri için de benzer şekilde yaklaşımla incelemeler yapılabilir.

Örnek 4: Latin Kare Modeli İçin Anova:

Buğday mahsulü (A, B, C, D) adı verilen 4 farklı gübrenin etkisi ölçülmek isteniyor. Dört farklı buğday ve dört farklı toprak parçası kullanılıyor. Her bir toprak kendi içinde 4 eşit alt bölgeye ayrılıyor ve bir latin kare tasarımı kullanılıyor. (Dunn ve Clark (1974))

Tablo 11 Latin Kare Örneği İçin Varyans Analizi Verileri

Buğday Tipi	Toprak Parçaları			
1	35.5(A)	24.5(B)	14.7(C)	35.5(D)
2	14.3(B)	6.2(C)	13.7(D)	24.5(A)
3	14.1(C)	16.2(D)	34.3(A)	19.7(B)
4	15.0(D)	64.5(A)	34.6(B)	19.0(C)

Ön hesaplamalar aşağıdaki sonuçları vermektedir:

	1	2	3	4
$\bar{Y}_{i..}$	27.55	14.67	21.07	33.27
$\bar{Y}_{.j}$	19.72	27.85	24.32	24.67
$\bar{Y}_{..k}$	39.7	23.27	13.5	20.10
$\bar{Y}_{...}$	24.14			

a) Varyans Analiz Tablosu Oluşturalım:

Tablo 12 Latin Kare Örneği İçin Anova

Değişim Kaynağı (D.K.)	Kareler Toplamı (S.S.)	Serbestlik Derecesi (s.d)	Kareler Ortalaması (MS)	F	EMS
Satırlara Ait	776.36	3	258.78	2.54	$\sigma^2 + 4 \frac{\sum \alpha_i^2}{3}$
Sütunlara Ait	134.45	3	44.81	0.44	$\sigma^2 + 4 \frac{\sum \beta_j^2}{3}$
İşlemlere Ait	1489.69	3	496.53	4.88	$\sigma^2 + 4 \frac{\sum (\alpha\beta)_k^2}{3}$
Rezidüye Ait	609.69	6	101.61		σ^2
Toplam	3010.21	15			

b) Modelimizin Varsayımları:

1. Tüm gözlemler normal dağılıma sahiptir.
2. Bunlar eşit varyanslıdır.
3. Aralarında etkileşim yoktur. Yani Y_{ij} nin ortalaması $\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_k$ dır. Diğer bir deyişle üç değişken arasında etkileşim olmadığı kabul edilir. Böylece model toplamsaldır.

4. ε_{ijk} ların hepsi birbirinden bağımsızdır.

c) $H_0 : (\alpha\beta)_k = 0$

$H_a : (\alpha\beta)_k \neq 0$

hipotezini yani; gübreye bağlı olarak ürünler arasında bir farklılığın olup olmadığını $\alpha = 0.01$ önem düzeyinde test edelim:

$$F_H = 4.88$$

$$F_T = 99.2$$

olup, $F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir. Yani; gübreye bağlı olarak ürünler arasında bir farklılık yoktur.

d) $H_0 : \alpha_i = 0$

$H_a : \alpha_i \neq 0$

hipotezini yani; buğdayın dört farklı tipi üzerinde verim bakımından bir farklılık olup olmadığını $\alpha = 0.01$ önem düzeyinde test edelim:

$$F_H = 2.54$$

$$F_T = 99.2$$

$F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir.(Buğdayın dört farklı tipi üzerinde verim bakımından bir farklılık yoktur.)

e) $H_0 : \beta_j = 0$

$H_a : \beta_j \neq 0$

hipotezini $\alpha = 0.01$ önem düzeyinde test edelim:

$$F_H = 0.44$$

$$F_T = 99.2$$

$F_H < F_T$ olduğundan H_0 kabul edilir. Yani; toprak parçalarının verim üzerindeki etkisi aynıdır.

f) Buğdayın her birinden elde edilen ürün ortalaması için nokta tahminini bulalım:

$$\bar{Y}_{1..} = \frac{35.5 + 24.5 + 14.7 + 35.5}{4} = 27.55 \text{ (1. Buğday tipinden elde edilen ortalama ürün)}$$

$$\bar{Y}_{2..} = \frac{14.3 + 6.2 + 13.7 + 24.5}{4} = 14.67 \text{ (2. Buğday tipinden elde edilen ortalama ürün)}$$

$$\bar{Y}_{3..} = \frac{14.1 + 16.2 + 34.3 + 19.7}{4} = 21.07 \text{ (3. Buğday tipinden elde edilen ortalama ürün)}$$

$$\bar{Y}_{4..} = \frac{15.0 + 64.5 + 34.6 + 19.0}{4} = 33.27 \text{ (4. Buğday tipinden elde edilen ortalama ürün)}$$

g) Her bir gübreden elde edilen ürün ortalamasını tahmin edelim:

$$\text{A Gübresinden elde edilen ürün ortalaması} = \frac{35.5 + 24.5 + 34.3 + 64.5}{4} = 39.7$$

$$\text{B Gübresinden elde edilen ürün ortalaması} = \frac{24.5 + 14.3 + 19.7 + 34.6}{4} = 23.27$$

$$\text{C Gübresinden elde edilen ürün ortalaması} = \frac{14.7 + 6.2 + 14.1 + 19.0}{4} = 13.49$$

$$\text{D Gübresinden elde edilen ürün ortalaması} = \frac{35.5 + 13.7 + 16.2 + 15.0}{4} = 20.1$$

h) Her bir toprak parçasından elde edilen ürün ortalamasını tahmin edelim:

$$1. \text{ Toprak parçasından elde edilen ürün ort.} = \frac{35.5 + 14.3 + 14.1 + 15.0}{4} = 19.72$$

$$2. \text{ Toprak parçasından elde edilen ürün ort.} = \frac{24.5 + 6.2 + 16.2 + 64.5}{4} = 27.85$$

$$3. \text{ Toprak parçasından elde edilen ürün ort.} = \frac{14.7 + 13.7 + 34.3 + 34.6}{4} = 24.32$$

$$4. \text{Toprak parçasından elde edilen ürün ort.} = \frac{35.5 + 24.5 + 19.7 + 19.0}{4} = 24.67$$

i) Parametrelerin E.K.K tahmin edicileri:

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{...} = 24.14$$

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{Y}_{1..} - \bar{Y}_{...} = 27.55 - 24.14 = 3.41$$

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_{2..} - \bar{Y}_{...} = 14.67 - 24.14 = -9.47$$

$$\hat{\alpha}_4 = \bar{Y}_{4..} - \bar{Y}_{...} = 21.07 - 24.14 = -3.07$$

$$\hat{\alpha}_4 = \bar{Y}_{4..} - \bar{Y}_{...} = 33.27 - 24.14 = 9.13$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}_{.1} - \bar{Y}_{..} = 19.72 - 24.14 = -4.42$$

$$\hat{\beta}_2 = \bar{Y}_{.2} - \bar{Y}_{..} = 27.85 - 24.14 = 3.71$$

$$\hat{\beta}_3 = \bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{..} = 24.32 - 24.14 = 0.18$$

$$\hat{\beta}_4 = \bar{Y}_{.4} - \bar{Y}_{..} = 24.67 - 24.14 = 0.53$$

$$(\hat{\alpha\beta})_1 = \bar{Y}_{..1} - \bar{Y}_{...} = 39.7 - 24.14 = 15.56$$

$$(\hat{\alpha\beta})_2 = \bar{Y}_{..2} - \bar{Y}_{...} = 23.27 - 24.14 = -0.87$$

$$(\hat{\alpha\beta})_3 = \bar{Y}_{..3} - \bar{Y}_{...} = 13.49 - 24.14 = -10.65$$

$$(\hat{\alpha\beta})_4 = \bar{Y}_{..1} - \bar{Y}_{...} = 20.10 - 24.14 = -4.04$$

dır.

3. SINIFLANDIRMA MODELLERİNDE DİREKT ÇARPIMIN KULLANIMI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSİN UYGULANMASI

3.1 Direkt (Kronecker) Çarpım

Bu bölümde; sınıflandırma modellerinde karşımıza çıkan tasarım matrislerini direkt çarpımlarla ifade edip, bu matrislerin M-P inverslerinin hesaplanmasını ele alarak, söz konusu modeller için en küçük kareler (E.K.K.) çözümü bulunacaktır.

Tanım 3.1.1: A: $m_2 \times n_2$ tipinde matris ve B: $m_1 \times n_1$ tipinde başka bir matris olsun. O zaman A ve B'nin direkt çarpımı $m_1 n_1 \times n_1 n_2$ boyutunda olup, $C = A \otimes B$ şeklinde gösterilir. (Graybill (1983))

$$C = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots & Ab_{1n_1} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots & Ab_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{m_1 1} & Ab_{m_1 2} & \dots & Ab_{m_1 n_1} \end{bmatrix}$$

Bu tanım sol direkt çarpımdır. Sağ direkt çarpımı da benzer şekilde tanımlayabiliriz.

C matrisinin $m_1 n_1$ tane $m_2 \times n_2$ boyutunda alt matrisi vardır. j-inci alt matrisi

$$C_{ij} = Ab_{ij}$$

şeklinde gösterilir. Bazen direkt çarpım;

$$C = [C_{ij}] = [Ab_{ij}] \quad i = 1, 2, \dots, m_1; \quad j = 1, 2, \dots, n_1$$

şeklinde yazılır.

3.1.1 Direkt Çarpımın Özellikleri:

1. Her boyutta iki matrisin direkt çarpımı yapılabilir.

2. A ve B herhangi iki matris ise;

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$

$$\text{tr}(A \otimes B) = [\text{tr}(A)] [\text{tr}(B)].$$

3. A ve B herhangi iki matris ve a bir skaler ise;

$$(aA) \otimes B = A \otimes (aB) = a(A \otimes B).$$

4. A, B, C herhangi üç matris ise;

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

5. A : $m_1 \times n_1$; B : $m_2 \times n_2$; F : $n_1 \times k_1$ ve G : $n_2 \times k_2$ ise o zaman ;

$$(A \otimes B)(F \otimes G) = (AF) \otimes (BG).$$

6. A : $m_1 \times m_1$ nonsingüler bir matris ve B : $m_2 \times m_2$ nonsingüler bir matris ise o zaman $A \otimes B$ nonsingüler olup tersi ;

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

şeklindedir. Genel olarak;

$$(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+$$

dır.

7. P ve Q ortogonal matrisler ise ; $P \otimes Q$ da ortogonaldır.

$$8. \quad A \otimes I = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix} = \text{diag}(A)$$

$$9. \quad A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B).$$

10. A ve B: $m \times m$ tipinde iki matris ve C: $n \times n$ tipinde bir matris ise bu durumda;

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C).$$

3.2 Genelleştirilmiş İnvrs Tanımları ve Özellikleri

g-invrs kavramı ilk defa Moore tarafından 1920 yılında ortaya atılmış olup Penrose (1955) de aşağıda verilen tanımı sağlayan g-invrsin tek olduğunu göstermiştir. Tanımlanan g-invrs tek olmasına rağmen Rao (1962), Bjerhammer (1958) Wilkinson (1958), Bose (1959), Milliken (1971) gibi bazı araştırmacılar teklik ihtiyacından vazgeçerek g-invrsin istatistikteki uygulamalarında verilen dört koşuldan bazılarını sağlayan ve sağladıkları koşullara göre adlandırılan invrs

kullanmışlardır. Bu inversler için lineer fonksiyonların tahminleri ve varyansları değişmemektedir. Kennedy ve Gentle (1980), Kempthorne (1980) ve Lowerre (1982) gibi araştırmacılar da özel istatistiksel modeller için g-invers elde edilmesinde katkıda bulunmuşlardır.

Tanım: 3.2.1 $m \times n$ tipindeki bir A matrisi için aşağıdaki koşulları sağlayan A^+ matrisine A matrisinin Genelleştirilmiş İnversi (Moore-Penrose İnversi) denir. (Graybill (1983))

- i) $AA^+A = A$
- ii) $A^+AA^+ = A^+$
- iii) AA^+ simetrik
- iv) A^+A simetrik

Kısaltma olarak; genelleştirilmiş invers ifadesi yerine g-invers veya M-P invers ifadesini kullanacağız. g-invers kavramı bütün matrislere uygulanabilen bir kavram olduğundan matris teorisinde oldukça önemlidir. g-inversler bir matrisin karesel, fakat singüler olduğunda ya da karesel olmadığı durumlarda da bir inverse sahip olabileceğini göstermektedir.

g-invers hesaplanması için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Graybill (1983) de bir çok yöntem ele almıştır. Shinozaki ve ark. (1972a) da g – invers hesaplaması ile ilgili direkt yöntemleri, Shinozaki ve ark. (1972b) de iteratif yöntemleri incelemişlerdir.

3.2.1 M-P İnversinin Özellikleri: (Graybill (1983))

1. Her A matrisi bir tek g-inverse sahiptir.
2. $m \times n$ tipindeki A matrisinin g-inversi $n \times m$ tipindedir.
3. A matrisinin transpozunun (devriğinin) g-inversi, g-inversinin transpozuna eşittir. Yani;

$$(A')^+ = (A^+)'$$

dır.

4. A^+ nın g-inversi A dır. Yani;

$$(A^+)^+ = A$$

şeklindedir.

5. $(A'A)^+ = A^+(A')^+$

dır.

6. $(AA^+)^+ = AA^+$ ve $(A^+A)^+ = A^+A$

7. A matrisi simetrik bir matris ise A^+ matrisi de simetriktir. Yani; $A = A'$ ise

$$A^+ = (A^+)'$$

dır.

8. A matrisi simetrik ise

$$AA^+ = A^+A$$

dır.

9. $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine simetriktir denir. $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin kendisiyle çarpımı yine kendisini veriyorsa A matrisine idempotenttir denir. Yani;

$$A^2 = A$$

ise A matrisi idempotenttir.

A matrisi simetrik ve idempotent ise A matrisinin g-inversi kendisidir. Yani;

$$A = A' = A^2 \text{ ise } A^+ = A$$

dır.

10. AA^+ , A^+A , $I - A^+A$, $I - AA^+$ matrisleri simetrik ve idempotenttir.

Bilindiği gibi singüler olmayan A ve B matrisleri için

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dır.

Bu özellik g-inversler için her zaman geçerli değildir. Ancak bazı özel durumlarda geçerlidir. 5. ve 6. özelliklerde geçerli olduğu gibi aşağıdaki durumlarda da geçerlidir.

11. A ve B matrisleri r ranklı olup sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler ise,

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

dır.

12. P : $m \times m$ tipinde, Q : $n \times n$ tipinde ortogonal matrisler ve A : $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$(PAQ)^+ = Q'A^+P'$$

dür.

13. A matrisi singüler olmayan bir matris ise;

$$A^+ = A^{-1}$$

dir.

14. $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^+)$

dır.

15. A : $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise

$$A^+ = A'(AA')^{-1} \text{ ve } AA^+ = I$$

dır. Tam sütun ranklı ise

$$A^+ = (A'A)^{-1}A' \text{ ve } A^+A = I$$

dır. A nın rankı ne olursa olsun;

$$A^+ = A'(AA')^+ = (A'A)^+A'$$

dır.

16. c bir skaler olmak üzere,

$$(cA)^+ = \frac{1}{c}(A)^+$$

dır.

17. Sıfırdan farklı $n \times 1$ bir a vektörü için;

$$a^+ = (a'a)^{-1}a'$$

dır.

18. Bütün elemanları 1 olan $m \times n$ tipindeki A matrisinin g -inversi;

$$A^+ = \left(\frac{1}{mn}\right)A'$$

dır.

3.3 M-P İnvorslerle Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

$Ax = b$ şeklindeki lineer denklem sisteminin çözümünü g-inversleri göz önüne alarak araştıralım.

Teorem 3.3.1: $Ax = b$ sisteminin tutarlı olabilmesi için (yani çözümünün olması için) gerek ve yeter koşul;

$$AA^+b = b \text{ olmasıdır. (Graybill(1983))}$$

İspat: Kabul edelim ki sistem tutarlı olsun. Yani;

$$Ax_1 = b$$

olacak şekilde bir x_1 çözüm vektörü olsun. $Ax_1 = b$ yi soldan AA^+ ile çarparsak;

$$AA^+Ax_1 = AA^+b$$

$$Ax_1 = AA^+b$$

$$b = AA^+b$$

olduğu görülür.

$AA^+b = b$ olsun. $x = A^+b$ alalım. $Ax = b$ de bunu yerine yazarsak;

$AA^+b = b$ olur ki; bu bize $x = A^+b$ nin bir çözüm olduğunu gösterir. Yani; sistem tutarlıdır.

Teorem 3.3.2: $Ax = b$ sistemi bir çözüme sahip ise $n \times 1$ tipindeki her h vektörü için;

$$x = A^+b + (I - A^+A)h$$

bir çözümdür. (Graybill (1983)).

Tanım 3.3.1: $Ax = b$ tutarlı sistemi verilsin. Bu sistemin bir x çözümü, çözümler arasında en küçük öklid normuna sahip ise bu x çözümüne en kısa çözüm (shortest solution) denir. (Kim ve Lee (1986))

Teorem 3.3.3: $Ax = b$ sistemi tutarlı ise;

$$x = A^+b$$

en kısa çözümdür. (Kim ve Lee (1986))

İspat: $Ax = b$ tutarlı olduğundan, kabul edelim ki; x , $Ax = b$ yi sağlasın. $x = A^+b$ yi göz önüne alalım. $AA^+b = b$ dir. $x = A^+b + (x - A^+b)$ yazalım. $u = A^+b$ ve $v = x - A^+b$ olsun. $x = u + v$ olur. O halde;

$$\begin{aligned} x'x &= (u + v)'(u + v) = u'u + v'v + u'v + v'u \\ &= u'u + 2u'v + v'v \end{aligned}$$

dir.

Fakat,

$$\begin{aligned} u'v &= b'(A^+)'(x - A^+b) \quad , \quad b' = x'A' \text{ olduğundan,} \\ &= x'A'(A^+)'(x - A^+b) \quad , \quad (A^+A)' = A^+A \text{ olduğundan,} \\ &= x'A^+A(x - A^+b) \\ &= x'A^+(Ax - AA^+b) \quad , \quad AA^+b = b \text{ olduğundan,} \\ &= x'A^+(b - b) = 0 \text{ olduğundan, } x'x = u'u + v'v \text{ olup buradan; } u'u \leq x'x \end{aligned}$$

yani; $\|u\| \leq \|x\|$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.4: $X'X\beta = X'Y$ normal denklemlerini göz önüne alalım. $\beta = X^+Y$ en kısa çözümdür. (Kim ve Lee (1986))

İspat: Özellik 3 ten; $(X'X)^+ = X^+(X')^+$ ve özellik 5 ten;

$(X'X)^+ = X^+(X')^+$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.3.3'ten; en kısa çözüm,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^+ X'Y \\ &= X^+(X')^+ X'Y \\ &= X^+(XX^+)'Y \\ &= X^+XX^+Y \\ &= X^+Y \end{aligned}$$

olduğu görülür.

3.4 Tek Yönlü Sınıflandırma

Her gözede eşit sayıda gözlem olmak üzere tek yönlü sınıflandırmada modelimiz;

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, k ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

dır. Burada; μ , genel ortalama; α_i , i-inci faktör etkisi, ε_{ij} , ise hata terimidir.

$$X = \begin{bmatrix} 110\dots 0 \\ 110\dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 110\dots 0 \\ 101\dots 0 \\ 101\dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 101\dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \\ 110\dots 1 \\ 110\dots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 110\dots 1 \end{bmatrix} = (j_n \otimes j_k, j_n \otimes I_k) ; \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} ; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{k1} \\ \varepsilon_{k2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere ; $Y = X\beta + \varepsilon$ yazılabilir. X tasarım matrisi $N \times (k+1)$ boyutunda olup

$$\left(\sum_{i=1}^k n = kn = N \right) \quad k \text{ ranklıdır.}$$

$$\begin{aligned} XX' &= (j_n \otimes j_k, j_n \otimes I_k) \begin{pmatrix} j'_n \otimes j'_k \\ j'_n \otimes I_k \end{pmatrix} \\ &= J_n \otimes J_k + J_n \otimes I_k = J_n \otimes (I_k + J_k) \end{aligned}$$

$$(XX')^+ = (1/n^2) J_n \otimes [I_k - (1/k+1)J_k]$$

$$X^+ = X'(XX')^+ = \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} (1/n)j'_n \otimes j'_k \\ (1/n)j'_n \otimes [(k+1)I_k - J_k] \end{bmatrix}$$

Her gözede eşit sayıda gözlem olmayıp sırasıyla $n_1, n_2, \dots, n_k$ tane gözlem olduğunda; X^+ matrisimizde n' lerin yerine sırasıyla $n_1, n_2, \dots, n_k$ yazılırsa;

$$X^+ = \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} (1/n_1)j'_{n_1} & (1/n_2)j'_{n_2} & (1/n_k)j'_{n_k} \\ (k/n_1)j'_{n_1} & -(1/n_2)j'_{n_2} & -(1/n_k)j'_{n_k} \\ -(1/n_1)j'_{n_1} & (k/n_2)j'_{n_2} & -(1/n_k)j'_{n_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(1/n_1)j'_{n_1} & -(1/n_2)j'_{n_2} & (k/n_k)j'_{n_k} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Tahmin edilen $\hat{\beta}$ vektörü ise;

$$\hat{\beta} = X^+Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i / k+1 \\ \bar{Y}_i - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i / k+1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.5 Her Gözede n-Gözlem ve Birbirini Etkileme Olmaksızın İki Yönlü Sınıflandırma

Modelimiz;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, a ; j = 1, 2, \dots, b ; k = 1, 2, \dots, n$$

şeklindedir. Burada; μ , genel ortalama; α_i , i-inci faktör etkisi; β_j , j-inci faktör etkisi olup, ε_{ijk} ise hata terimidir. X tasarım matrisi $abn \times (a+b+1)$ tipinde, $a+b-1$ ranklı olup;

$$X = (j_n \otimes j_b \otimes j_a, j_n \otimes j_b \otimes I_a, j_n \otimes I_b \otimes j_a)$$

şeklindedir.

$$XX' = J_n \otimes J_b \otimes J_a + J_n \otimes J_b \otimes I_a + J_n \otimes I_b \otimes J_a$$

$$(XX')^+ = J_n / n^2 \otimes J_b / b^2 \otimes I_a + J_n / n^2 \otimes I_b \otimes J_a / a^2 \\ + J_n / n^2 \otimes (1/b) [1/(ab+a+b) - 1/a - 1/b] J_a \otimes J_a / a$$

$$X^+ = X'(XX')^+ = \frac{1}{n(ab+a+b)} \begin{bmatrix} j'_n \otimes j'_b \otimes j'_a \\ j'_n \otimes j'_b \otimes /b[(ab+a+b)I_a - (b+1)J_a] \\ j'_n \otimes [(ab+a+b)I_b - (a+1)J_b] \otimes j'_a /a \end{bmatrix}$$

ve

$$\hat{\beta} = X^+Y = \begin{bmatrix} Y_{...} / n(ab+a+b) \\ Y_{i..} / bn - (b+1)Y_{...} / bn(ab+a+b) \\ Y_{.j.} / an - (a+1)Y_{...} / an(ab+a+b) \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada;

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n Y_{ijk}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n Y_{ijk} \quad i=1,2,\dots,a$$

$$Y_{.j.} = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n Y_{ijk} \quad j=1,2,\dots,b$$

dır.

3.6 Her Gözede n-Gözlem ve Birbirini Etkileme Olduğunda İki Yönlü Sınıflandırma

Modelimiz;

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 1, 2, \dots, n$

şeklindedir. Burada; μ , genel ortalama; α_i , i-inci faktör etkisi; β_j , j-inci faktör etkisi

ve $(\alpha\beta)_{ij}$ etkileşim terimi olup, ε_{ijk} ise hata terimidir.

$$X = (j_n \otimes j_b \otimes j_a, j_n \otimes j_b \otimes I_a, j_n \otimes I_b \otimes j_a, j_n \otimes I_b \otimes I_a)$$

tasarım matrisi $abn \times (ab+a+b+1)$ tipinde olup ab ranklıdır.

$$XX' = j_n \otimes (I_b + J_b) \otimes (I_a + J_a)$$

$$(XX')^+ = \frac{J_n}{n^2} \otimes \left(I_b - \frac{J_b}{b+1} \right) \otimes \left(I_a - \frac{J_a}{a+1} \right)$$

Buradan;

$$X^+ = X'(XX')^+ = \frac{1}{n(a+1)(b+1)} \begin{bmatrix} j'_n \otimes j'_b \otimes j'_a \\ j'_n \otimes j'_b \otimes [(a+1)I_a - J_a] \\ j'_n \otimes [(b+1)I_b - J_b] \otimes j'_a \\ j'_n \otimes [(b+1)I_b - J_b] \otimes [(a+1)I_a - J_a] \end{bmatrix}$$

ve

$$\hat{\beta} = X^+Y = \begin{bmatrix} \frac{Y_{...}}{n(a+1)(b+1)} \\ \frac{Y_{i..}}{n(b+1)} - \frac{Y_{...}}{n(a+1)(b+1)} \\ \frac{Y_{.j}}{n(a+1)} - \frac{Y_{...}}{n(a+1)(b+1)} \\ \frac{Y_{ij}}{n} - \frac{Y_{i..}}{n(b+1)} - \frac{Y_{.j}}{n(a+1)} + \frac{Y_{...}}{n(a+1)(b+1)} \end{bmatrix}$$

bulunur. Görüldüğü gibi g-invers hesaplanırken, g- inversler için 15. özellikteki

$$X^+ = X'(XX')^+$$

eşitliği kullanılmıştır.

Kim ve Sunwoo(1989) bazı özel koşulları sağlayan matrislerin (M-P) inversini hesaplama yöntemlerini ele almışlardır. Sınıflandırma modellerinde karşılaşılan tasarım matrisleri, bu tipte tasarım matrislerdir. Söz konusu çalışma Teorem 3.6.1 de ifade edildiği gibidir. Bu çalışmada X^+ hesaplanırken;

$$X^+ = (X'X)^+ X'$$

eşitliği gözönüne alınmıştır.

Teorem 3.6.1: Eğer, $N \times m_i$ tipindeki $\{X_i \mid i = 0, 1, 2, \dots, k\}$ matrisleri $m_0 = 1$ olmak üzere

$$X_i'X_i = \frac{N}{m_i}I_{m_i}, \quad X_i'j_{m_i} = j_N \quad i = 0, 1, 2, \dots, k \text{ için}$$

$$X_i'X_j = \frac{N}{m_i m_j} J_{m_i \times m_j} \quad ; \quad (J_{m_i \times m_j} = j_{m_i} j_{m_j}') \quad i \neq j \text{ için}$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda;

$$X = [j_N \quad X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_k]$$

parçalanmış matrisinin M-P tersi, X^+ ,

$$X^+ = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+M_0} j_N' \\ m_1 X_1' - \frac{1+M_1}{1+M_0} J_{m_1 \times N} \\ \vdots \\ m_k X_k' - \frac{1+M_k}{1+M_0} J_{m_k \times N} \end{bmatrix}$$

olup, her i için $M_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{m_j}$

dır.

Sınıflandırma modellerindeki tasarım matrislerinin g-inversinin hesaplanması için Teorem 3.6.1 uygulanabilir. Teorem 3.6.1'nin latin kare düzeninde nasıl uygulanacağı ele alınacaktır.

3.7 Latin Kare Düzeninin Genel Formülle Gösterimi

Modelimiz;

$$y = 1\mu + X_1\alpha + X_2\beta + X_3(\alpha\beta) + \varepsilon$$

şeklinde olup;

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \quad , \quad \beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \quad , \quad (\alpha\beta)' = ((\alpha\beta)_1, (\alpha\beta)_2, \dots, (\alpha\beta)_r)$$

dir.

$$X_1 = \begin{bmatrix} j_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j_r \end{bmatrix}_{r^2 \times r} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix}_{r^2 \times r} \quad , \quad X_3 = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{r-1} \end{bmatrix}_{r^2 \times r}$$

$V_0 = I_r$ ve $V_i = \sigma_i(I_r)$ ise I_r 'nin satırlarının devirsel değişimi ile elde edilen

matrislerdir. $M_0 = \frac{3}{r}$ ve $M_i = \frac{2}{r}$ $i=1, 2, 3$ için tasarım matrisinin teoremi

sağladığını görmek kolaydır. Bu durumda;

$$[j \ X_1 \ X_2 \ X_3]$$

matrisinin M-P tersi:

$$X^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{r(r+3)} j'_2 \\ \frac{1}{r} X'_1 - \frac{r+2}{r^2(r+3)} J_{r \times r^2} \\ \frac{1}{r} X'_2 - \frac{r+2}{r^2(r+3)} J_{r \times r^2} \\ \frac{1}{r} X'_3 - \frac{r+2}{r^2(r+3)} J_{r \times r^2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (Kim ve Sunwoo (1989))

Latin kare düzeninde $r = 3$ olarak çözüm vektörü bulalım: Bu durumda;

$$X_1 = (j_3 \otimes I_3) \quad ; \quad X_2 = (I_3 \otimes j_3) \quad ; \quad X_3 = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 001 \\ 100 \\ 010 \\ 010 \\ 001 \\ 100 \end{bmatrix}_{9 \times 3} \text{ olup;}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu + \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 010 \\ 010 \\ 010 \\ 010 \\ 001 \\ 001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \\ 001 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} + \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 001 \\ 100 \\ 010 \\ 010 \\ 001 \\ 010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_1 \\ (\alpha\beta)_2 \\ (\alpha\beta)_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{122} \\ Y_{133} \\ Y_{213} \\ Y_{221} \\ Y_{232} \\ Y_{312} \\ Y_{323} \\ Y_{331} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_1 \\ \mu + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_1 + \beta_3 + (\alpha\beta)_3 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_1 + (\alpha\beta)_3 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_1 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_3 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_1 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_2 + (\alpha\beta)_3 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_3 + (\alpha\beta)_1 \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

şeklindedir.

$$X^+ = W = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \\ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \frac{5}{54} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^+ = W = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} j'_3 \otimes j'_3 \\ \frac{1}{3} j'_3 \otimes I_3 - \frac{5}{54} J_3 \otimes j'_3 \\ \frac{1}{3} I_3 \otimes j'_3 - \frac{5}{54} J_3 \otimes j'_3 \\ \frac{1}{3} X'_3 - \frac{5}{54} J_3 \otimes j'_3 \end{bmatrix} \quad \text{ya da;} \quad X^+ = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [j'_9] \\ 3[X'_1] - \frac{5}{6} [J_{3 \times 9}] \\ 3[X'_2] - \frac{5}{6} [J_{3 \times 9}] \\ 3[X'_3] - \frac{5}{6} [J_{3 \times 9}] \end{bmatrix}$$

$$X^+Y = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[j_9] \\ 3[X'_1] - \frac{5}{6}[J_{3 \times 9}] \\ 3[X'_2] - \frac{5}{6}[J_{3 \times 9}] \\ 3[X'_3] - \frac{5}{6}[J_{3 \times 9}] \end{bmatrix}_{10 \times 9} \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{122} \\ Y_{133} \\ Y_{213} \\ Y_{221} \\ Y_{232} \\ Y_{312} \\ Y_{323} \\ Y_{331} \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

olup, $\hat{\beta}$ çözüm vektörü;

$$\hat{\beta} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Y^* \\ 3(Y_{111} + Y_{122} + Y_{133}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{213} + Y_{221} + Y_{232}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{312} + Y_{323} + Y_{331}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{111} + Y_{213} + Y_{312}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{122} + Y_{221} + Y_{323}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{133} + Y_{232} + Y_{331}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{111} + Y_{221} + Y_{331}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{122} + Y_{232} + Y_{312}) - \frac{5}{6}Y^* \\ 3(Y_{133} + Y_{213} + Y_{323}) - \frac{5}{6}Y^* \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada:

$$Y^* = [Y_{111} + Y_{122} + Y_{133} + Y_{213} + Y_{221} + Y_{232} + Y_{312} + Y_{323} + Y_{331}] = Y_{\dots}$$

dır.

Şimdi; Bölüm 2, Örnek 4' te söz edilen latin kare düzeni için çözüm vektörü bulalım:

Bu durumda;

$$X_1 = (j_4 \otimes I_4) \quad ; \quad X_2 = (I_4 \otimes j_4) \quad ;$$

$$X_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 16}$$

olup;

$$Y = (j_4 \otimes j_4)\mu + (j_4 \otimes I_4)_{16 \times 4} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} + (I_4 \otimes j_4)_{16 \times 4} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} + [X_3]_{16 \times 4} \begin{bmatrix} (\alpha\beta)_1 \\ (\alpha\beta)_2 \\ (\alpha\beta)_3 \\ (\alpha\beta)_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{122} \\ Y_{133} \\ Y_{144} \\ Y_{212} \\ Y_{223} \\ Y_{234} \\ Y_{241} \\ Y_{313} \\ Y_{324} \\ Y_{331} \\ Y_{342} \\ Y_{414} \\ Y_{421} \\ Y_{432} \\ Y_{443} \end{bmatrix}_{16 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_1 \\ \mu + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_1 + \beta_3 + (\alpha\beta)_3 \\ \mu + \alpha_1 + \beta_4 + (\alpha\beta)_4 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_1 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_3 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_3 + (\alpha\beta)_4 \\ \mu + \alpha_2 + \beta_4 + (\alpha\beta)_1 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_1 + (\alpha\beta)_3 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_2 + (\alpha\beta)_4 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_3 + (\alpha\beta)_1 \\ \mu + \alpha_3 + \beta_4 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_4 + \beta_1 + (\alpha\beta)_4 \\ \mu + \alpha_4 + \beta_2 + (\alpha\beta)_1 \\ \mu + \alpha_4 + \beta_3 + (\alpha\beta)_2 \\ \mu + \alpha_4 + \beta_4 + (\alpha\beta)_3 \end{bmatrix}_{16 \times 1}$$

şeklindedir.

$$X^+ = W = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} [1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1] \\ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \frac{3}{56} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^+ = W = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} j'_4 \otimes j'_4 \\ \frac{1}{4} j'_4 \otimes I_4 - \frac{3}{56} J_4 \otimes j'_4 \\ \frac{1}{4} I_4 \otimes j'_4 - \frac{3}{56} J_4 \otimes j'_4 \\ \frac{1}{4} X'_3 - \frac{3}{56} J_4 \otimes j'_4 \end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad X^+ = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{4}{7} [j'_{16}] \\ 4[X'_1] - \frac{6}{7} [J_{4 \times 16}] \\ 4[X'_2] - \frac{6}{7} [J_{4 \times 16}] \\ 4[X'_3] - \frac{6}{7} [J_{4 \times 16}] \end{bmatrix}_{13 \times 16}$$

şeklinde dir.

$$X^+ Y = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{4}{7} [j'_{16}] \\ 4[X'_1] - \frac{6}{7} [J_{4 \times 16}] \\ 4[X'_2] - \frac{6}{7} [J_{4 \times 16}] \\ 4[X'_3] - \frac{6}{7} [J_{4 \times 16}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{111} & Y_{112} & Y_{133} & Y_{144} & Y_{212} & Y_{223} & Y_{234} & Y_{241} & Y_{313} & Y_{324} \\ & Y_{331} & Y_{342} & Y_{414} & Y_{421} & Y_{432} & Y_{443} & & & \end{bmatrix}'$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{4}{7} Y^* \\ 4(Y_{111} + Y_{122} + Y_{133} + Y_{144}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{212} + Y_{223} + Y_{234} + Y_{241}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{313} + Y_{324} + Y_{331} + Y_{342}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{414} + Y_{421} + Y_{432} + Y_{443}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{111} + Y_{212} + Y_{313} + Y_{414}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{122} + Y_{223} + Y_{324} + Y_{421}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{133} + Y_{234} + Y_{331} + Y_{432}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{144} + Y_{241} + Y_{342} + Y_{443}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{111} + Y_{241} + Y_{331} + Y_{421}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{122} + Y_{212} + Y_{342} + Y_{432}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{133} + Y_{223} + Y_{313} + Y_{443}) - \frac{6}{7} Y^* \\ 4(Y_{144} + Y_{234} + Y_{324} + Y_{414}) - \frac{6}{7} Y^* \end{bmatrix}_{13 \times 1}$$

olarak bulunur. Burada:

$$Y^* = \begin{bmatrix} Y_{111} + Y_{122} + Y_{133} + Y_{144} + Y_{212} + Y_{223} + Y_{234} + Y_{241} + Y_{313} + Y_{324} \\ + Y_{331} + Y_{342} + Y_{414} + Y_{421} + Y_{432} + Y_{443} \end{bmatrix}$$

dır. Y_{ijk} ları gözönüne alarak sonucu yazalım:

$$\hat{\beta}' = \begin{bmatrix} 13.796 & 6.855 & -6.019 & 0.380 & 12.580 & -0.969 \\ & 7.155 & 3.630 & 3.980 & 19.005 & 2.580 & -7.195 & -0.595 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

SONUÇ

Bu çalışmada varyans analizi modellerinden tek faktörlü, etkileşim olması ve olmaması durumunda iki faktörlü ve latin kare düzeni olarak bilinen sınıflandırma modelleri ele alındı. Bu modellerdeki parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisi ve direkt çarpımlar kullanılarak, parametrelerin Moore-Penrose İnversi yardımıyla tahminleri elde edildi. Benzer yaklaşımla diğer sınıflandırma modellerindeki parametrelerin de hem en küçük kareler, hem de Moore-Penrose İnvers yardımıyla tahmin edicileri elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- BJERHAMMER, A., 1958. A Generalized Matrix Algebra. Translation Royal Instit. Technology, Stockholm 124, 1-32.
- BOSE, R.C., 1959. Unpublished Lecture Notes on Analysis of Variance. Univ. North Corofina. Chapel Hill.
- DUNN, O.J. and CLARK, V.A., 1974. Applied Statistics: Analsis of Variance and Regression. John Wiley and Sons, Inc., New York, 387s.
- GRAYBILL, F.A., 1983. Matrices With Applications In Statistics. Wadsworth, California, 461s.
- KEMPTHORNE, O., 1980. Lecture Note For Linear Models. Unpublished.
- KENDALL, M.G., and STUART, A., 1976. The Advanced Theory of Statistics. Charles Griffin & Company Limited, London, 3, 557s.
- KENNEDY, W.J., Getle J.E., 1980. Statistical Computing. Marcel Dekker Inc.
- KIM, B.C., and LEE, J.T. , 1986. The Moore-Penrose Inverse For The Classificatory Models. Journal of the Korean Statistical Society, 15: 46-61.
- KIM, B.C., and SUNWOO, H.S., 1989. The Moore-Penrose Inverse Matrix For The Balanced Anova Models. J. Japanese Soc. Comp. Statist., 2:1-7.
- LOWERRE, J.M., 1982. An Introduction To Modern Matrix Methods And Statistics. The American Statistican, 36: 113-115.
- MILLIKEN, G.A., 1971. New Criteria For Estimabilith For Linear Models. Anals. Math.Soc, 5: 1588-1594.
- MILLIKEN, G.A., and GRAYBILL, F.A., 1972. Interaction Models For The Latin Square. The Austr. J. of Statistics, 14(2): 129-138.
- NETER, J., WASSERMAN, W., and KUTNER, M.H., 1990. Applied Linear Statistical Methods., Richard D. Irwin, Inc., 1181s.
- PENROSE, R., 1955. A Generalized Inverse For Matrices. Proc. Cambridge Philos Soc. 51, 406-413.

- RAO, C.R., 1962. A Note on a Generalized Inverse of A Matrix With Application To Problems In Mathematical Statistics., Journal Royal Statistical Society, 24, 152-158.
- SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. John Wiley and Sons, Inc., New York, 532s.
- , 1982. Matrix Algebra Useful For Statistics. John Wiley Inc., New York, 438s.
- , 1987. Linear Models For Unbalanced Data., John Wiley and Sons, Inc., New York, 536s.
- SHINOZAKI, N., SIBUYA, M., and TANABE, K., 1972a. Numerical algorithms for the Moore - Penrose inverse of a matrix: Direct Methods, Ann. Inst. Statist. Math., 24: 193-203.
- , 1972b. Numerical Algorithms For The Moore- Penrose Inverse of A Matrix: Iterative Methods, Ann. Inst. Statist. Math., 24: 621-629.
- WILKINSON, G.N., 1958. Estimation of Missing Values For The Analysis of the Complete Data. Biometrics 14, 257-286.

ÖZGEÇMİŞ

1974 Adana doğumluyum. İlk, orta, lise öğrenimimi Adana’ da tamamladım. 1992 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandım. Hazırlık sınıfından muaf olarak 1996 yılında mezun oldum. Aynı yıl, aynı bölümde yüksek lisans programına başladım. 1998 Şubat ayında da Osmaniye Meslek Yüksek Okulu’ nda Öğretim Görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı görevimi sürdürmekteyim.

