

VARYASYONEL METOD

Gülriz EFEKAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2007
ANKARA**

Gülriz EFEKAN tarafından hazırlanan VARYASYONEL METOT adlı bu tezin
Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. İ. Baki YAŞAR
Tez Yöneticisi

Bu alışma, jürimiz tarafından oy çokluğu ile MATEMATİK Anabilim Dalında
Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İ. Ethem ANAR

ye : Prof. Dr. İ. Baki YAŞAR

ye : Prof. Dr. Necmettin TANRIÖVER

ye : Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

ye : Yrd. Doç. Dr. Ülkü ATEŞ

Tarih : 06 / 06 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına
uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülriz EFEKAN

VARYASYONEL METOD**(Yüksek Lisans Tezi)****Gülriz EFEKAN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Haziran 2007****ÖZET**

Bu çalışmada, mühendislikteki uygulamalarda kullanılan varyasyonel hesap ve varyasyonel analizin belli bazı metodları ele alınmıştır. Bunlar, Euler Metodu, Ritz Metodu, Kantrowich ve Galerkin metodlarıdır. Ayrıca bu denklemlerin sınır şartları, destekleyici şartlar ve süreklilik şartları ile çözümleri incelenmiştir. Her biri için varyasyonel yaklaşımlar kullanılarak , problemlerin çözümünde hangi yöntemin daha kullanışlı olacağı belirlenmiş ve bu sonuçlar son bölümde anlatılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Varyasyonel metod, Euler Metod, Rits Metod, Kantrowich Metod, Galerkin Metod
Sayfa Adedi : 37
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

VARIATIONAL METHOD**(M. Sc. Thesis)****Gülriz EFEKAN****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2007****ABSTRACT**

In this paper, some specific methods and principles of Variational Calculus and Analysis, which have been practiced in Mechanical Engineering, have been studied. These are Euler Method, Ritz method, Kantrowich and Galerkin methods. Moreover, boundary, subsidiary and continuity conditions of these equations have been investigated along with their solutions. Adopting variational approaches for each method, the best one has been determined in solving the problems of practicing Mechanical Engineering and the results have been explained at the last chapter.

Science Code	: 204.1.138
Key Words	: Variational Method, Euler Method, Rits Method, Kantrowich Method, Galerkin Method
Sayfa Adedi	: 37
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR'a , maddi ve manevi destekleriyle benim bu günlere gelmemde her türlü fedakarlığı esirgemeyen sevgili annem ve babama, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim Hakan EFEKAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER**Sayfa**

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. DİREKT METODLAR.....	2
3. EULER DENKLEMİ	4
4. RİTZ METOD.....	10
5. KANTOROVICH METODU.....	22
6. GALERKİN METODU.....	29
7. SONUÇLAR	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
δ	Birinci varyasyon işlemi
δ^2	İkinci varyasyon işlemi
$I[y(x)]$	y değişkeninin bir fonksiyoneli

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. $y = y(x)$ fonksiyonu ve $y = y(x) + \alpha\eta(x)$ karşılaştırma.....	4
Şekil 3.2. Brachistochrone eğrisi.....	9
Şekil 4.1. (x_0, x_1) aralığında yakınsaklık.....	15
Şekil 5.1. D tanım kümesi.....	24
Şekil 5.2. İkizkenar üçgen.....	27

1. GİRİŞ

Mekanikte ve mühendislikteki problemlerde kullanılan varyasyonel metotlar, ekstremum prensibini kapsayan metotlar olup bunlar gerçeğe en yakın sonuçları bulmamızı sağlayan metotlardır. Bu çalışmada, Prof. Dr. Toshio MURO'nun Northwestern Üniversitesinde anlattığı ders notlarından, Tatsuhito KOYA'nın kitabındaki uygulamalardan, Prof. Dr. John Willes'in kitabındaki ve çeşitli kitaplardaki problemlerden yararlanılarak bu metotlar birbirleri ile karşılaştırılmıştır.

2. DİREKT METODLAR [3]

Sadece istisnai durumlarda kapalı formdaki varyasyonel problemlerin diferansiyel denklemlerinin integrali alınır. Bu, diğer çözüm metotlarını aramada doğal olarak kullanılır. Direkt metot olarak adlandırılan metodun temel fikrinde, varyasyonel problem, sonlu sayıdaki değişkenlerin fonksiyonlarına ait mutlak ekstremum problemlerinin limit durumu olarak kabul edilir. Bu sonlu sayıdaki değişkenlerin fonksiyonunun ekstremum problemi, düzenli metotlarla çözülür, daha sonra limite geçildiğinde, uygun varyasyonel problemin çözümünü sağlar.

$I[y(x)]$ fonksiyoneline, değişkenlerin sonsuz bir grubunun fonksiyonu olarak bakılabilir. Eğer kabul edilebilir fonksiyonların kuvvet serilerine açılabilmesini kabul edecek olursak, yani,

$y(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$, ya da Fourier Serilerinde,

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (2.1)$$

ya da $\varphi_n(x)$ fonksiyonu verildiğinde,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (2.2)$$

formundaki diğer seri çeşitlerinde bu iddia kesinlik kazanır. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$

seri formunda verilen $y(x)$ fonksiyonunu tanımlamak için bütün a_n katsayılarının değerlerinin verilmesi gerekir ve bu yüzden $I[y(x)]$ fonksiyonelinin değeri bu durumda, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, sayılarının sonsuz bir

düzeninde tayin edilerek verilecektir. Örneğin, $I[y(x)]$ fonksiyoneli değişkenlerin sonsuz bir grubunun fonksiyonudur. Yani,

$$I[y(x)] = \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \quad (2.3)$$

olur. Genellikle, sonlu sayı ya da değişkenlerin fonksiyonlarının varyasyonel problemleri ve ekstremum problemleri arasındaki fark, varyasyonel durumlarda, bir ekstremum için sonsuz sayıdaki değişkenlerin fonksiyonlarının araştırılmasıdır. Böylelikle, direkt metotların temel düşüncesinin yukarıda da bahsedildiği gibi, sonlu sayıdaki değişkenlerin fonksiyonlarının ekstremum problemleri için varyasyonel problemlerin limit durumu olarak kabul edilmesi gayet doğaldır.

Değişkenlerin hesaplanması alanındaki araştırmaların ilk periyodu boyunca, Euler, şu anda sonlu - farkların direkt metodu olarak adlandırılan bir metoda başvurmuştur. Çok uzun bir süre bu metot kullanılmıştır.

Diğer direkt metot olan Ritz Metodu, çeşitli varyasyonel problemlerin çözümünde büyük ölçüde katkıda bulunmuştur.

Üçüncü direkt metot, L. Kantorovich tarafından hazırlanmış olup, birkaç bağımsız değişkenin fonksiyonlarına bağlı olan fonksiyonelerde uygulanabilir ve Ritz metodunun uygulandığı alanlarda sınır bulmak için kullanılır.

Dördüncü direkt metot ise sınır-değer problemleri için kullanılan Galerkin Metodudur.

3. EULER DENKLEMİ

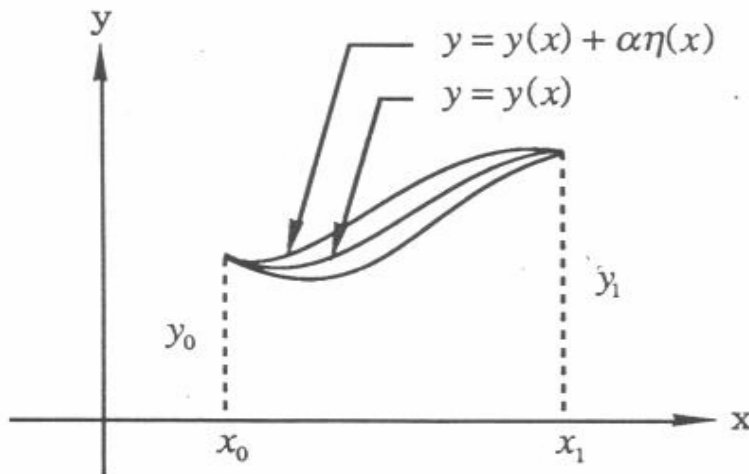
Aşağıdaki fonksiyoneli minimum yapan $y(x)$ fonksiyonunu arıyoruz.

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y] dx \quad (3.1)$$

problemin sınır şartları $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ olsun [1]. p , q ve f fonksiyonları $x_0 \leq x \leq x_1$ aralığında sürekli ve $p > 0$, $q > 0$ dır. $p > 0$ ve $q > 0$ şartlarına, $I(y)$ 'nin minimumu bulmak için, daha sonra ihtiyaç duyacağız. Eş. 3.1' deki integralin değeri $y(x)$ fonksiyonuna bağlıdır. Problemin çözümünü $y = y(x)$ ile gösterelim ve karşılaştırma fonksiyonu,

$$y = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (3.2)$$

α bir parametre ve η keyfi sürekli bir fonksiyon olmak üzere sınırları, $\eta(x_0) = 0$, $\eta(x_1) = 0$ olsun. $\alpha = 0$ olduğunda, $y = y(x) + \alpha \eta(x)$ karşılaştırma fonksiyonu çözüm fonksiyonu olur. Sınır şartları, karşılaştırma fonksiyonu için çözüme özdeş olmalıdır ve sınır şartları için $y(x)$ sağlanmalıdır.



Şekil 3.1. $y = y(x)$ fonksiyonu ve $y = y(x) + \alpha \eta(x)$ karşılaştırma

$$\begin{aligned}
I[y(x) + \alpha\eta(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ p(x)[y'(x) + \alpha\eta'(x)]^2 + q(x)[y(x) + \alpha\eta(x)]^2 \right. \\
&\quad \left. + 2f(x)[y(x) + \alpha\eta(x)] \right\} dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ p(x)(y'(x))^2 + q(x)y^2(x) + 2f(x)y(x) \right\} dx \\
&\quad + 2\alpha \int_{x_0}^{x_1} \{ p(x)y'(x)\eta'(x) + q(x)y(x)\eta(x) + f(x)\eta(x) \} dx \\
&\quad + \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} \{ p(x)[\eta'(x)]^2 + q(x)\eta^2(x) \} dx
\end{aligned} \tag{3.3}$$

veya,

$$I[y(x) + \alpha\eta(x)] - I[y(x)] = \delta I + \delta^2 I \tag{3.4}$$

$$\delta I = 2\alpha \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y'(x)\eta'(x) + q(x)y(x)\eta(x) + f(x)\eta(x)] dx \tag{3.5}$$

$$\delta^2 I = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} \{ p(x)[\eta'(x)]^2 + q(x)\eta^2(x) \} dx \tag{3.6}$$

Burada δI birinci varyasyon, $\delta^2(I)$ ikinci varyasyon işlemini gösterir. α keyfi, $I[y(x)]$ 'in minimum olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır,

$$\delta I = 0 \tag{3.7}$$

Birinci terimin integrali, Eş. 3.7' deki kısmi integralidir.

$$\int_{x_0}^{x_1} py' \eta' dx = [py' \eta]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (py')' \eta dx = - \int_{x_0}^{x_1} (py')' \eta dx \tag{3.8}$$

Eş. 3.10' nun sınır değerleri Eş. 3.4' deki şartlardır. Bunu Eş. 3.9' da yazarsak,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ -[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) + f(x) \right\} \eta(x) dx = 0 \quad (3.9)$$

Her $\eta(x)$ için $\eta(x)$ in katsayısı,

$$-[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) + f(x) = 0 \quad (3.10)$$

Problemin çözümü, Eş. 3.10' daki diferansiyel denklemin çözümünün sınır şartları ile $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ şartlarının birlikte çözümüdür. Bu denkleme *Euler-Lagrange* denklemi denir. Eş. 3.10' daki şart, $I(y)$ 'nin maximum veya minimum olma şartının sağlanmasıdır. [1]

İkinci varyasyon $\delta^2 I$ için $p > 0$ ve $q > 0$ şeklinde seçmek, problemin minimum problemi olmasını garanti eder. Bu, $f(x)$ fonksiyonunun minimum değer alması için $f''(x) > 0$ şartını sağlaması ile aynı anlamdadır.

3.1. Örnek [1]

$$I(y) = \int_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 + 2xy] dx$$

fonksiyonunu minimize eden $y(x)$ fonksiyonunu arıyoruz. Şartlarımız, $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$ olsun. Eş. 3.1' deki fonksiyonelimiz de $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $f(x) = x$ olduğu için Eş. 3.10' daki Euler denkleminden $y'' - y - x = 0$ olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü,

$y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x - x$ şeklindedir. Bu denklemde sınır şartlarımız yerine koyulursa,

$$C_1 = 1, C_2 = \frac{\pi - \cosh \pi}{\sinh \pi} \text{ olur. Genel çözüm, } y = \cosh x + \frac{\pi - \cosh \pi}{\sinh \pi} \cdot \sinh x - x$$

biçimindedir. Varyasyon hesabının temel lemması Eş. 3.9' dan Eş. 3.10' nun türemesiyle olmuştur.

3.2. Örnek [3]

Apsis ekseninin etrafında döndürüldüğünde bir minimum alan yüzeyi oluşturan belirlenmiş sınır noktası ile bir eğri bulalım.

Bildiğimiz gibi bir dönmenin yüzeyinin alanı, $S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx$

biçimindedir. İntegral sadece y ve y' fonksiyonlarına bağımlı ve $F - y' F_{y'} = c_1$ ya da verilen durumda,

$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{y \sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

biçiminde olacaktır. Sadeleştirmeden sonra $\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$ elde ederiz. Bu

denklemin integralini almanın en basit yolu $y' = \sinh t$ yerine koyması ile olur.

Sonra, $y = c_1 \cosh t$ ve $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \sinh t dt}{\sinh t} = c_1 dt$ elde edilir. Buradan

$x = c_1 t + c_2$ olur. Böylece parametrik denklemi, $x = c_1 t + c_2$, $y = c_1 \cosh t$ olan istenilen yüzey, bir doğrunun dönüştürülmesi ile oluşturulur. t parametresini yok ederek, dönüşümü zincir yüzeyi olarak adlandırılan yüzeyler oluşturan

bir zincirler ailesi olan $y = c_1 \cos \frac{x - c_2}{c_1}$ elde ederiz. c_1 ve c_2 sabitleri ile verilen sınır noktaları boyunca istenilen doğrunun geçişinin koşulunda bulunur.

3.3. Örnek (Brachistochrone Problemi) [2]

A dan B'ye en kısa zamanda kayan bir parça tarafından üzerinden geçilen, A ve B noktalarını bağlayan eğrinin denklemini bulalım. (Sürtünme ve ortamın direnci göz ardı edilmiştir).

Koordinat merkezini A'ya koyup, x eksenini yatay ve y eksenini dikey yapalım. Parçacığın hızı $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ dir. Bundan dolayı A(0,0) dan $B(x_1, y_1)$ noktasına hareket ederken geçen zamanı,

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dy \text{ buluruz. Sınır koşullarımız } y(0) = 0, y(x_1) = y_1 \text{ olur.}$$

Euler denklemini uygularsak yani $F - y'F_{y'} = c$ de yerine koyarsak,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c \text{ ve sadeleştirmeden sonra, } \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c \text{ veya}$$

$(1+y'^2) = c_1$ elde ederiz. y' için $\cot t$ kullanarak,

$$y = \frac{c_1}{1+\cot^2 t} = c_1 \sin^2 t = \frac{c_1}{2} (1 - \cos 2t),$$

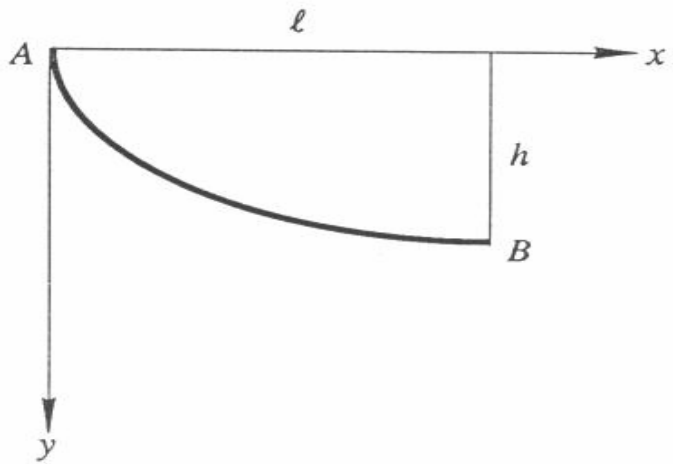
$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1 \sin t \cot t dt}{\cot t} = 2c_1 \sin^2 t dt = c_1 (1 - \cos 2t) dt,$$

$$x = c_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + c_2 = \frac{c_1}{2} (2t - \sin 2t) + c_2.$$

buluruz. $2t$ yerine t koyarak parametre dönüştürülürse ve eğer $c_2 = 0$ olduğunu hesaba katarsak $y = 0$ için $x = 0$ dır. Buradan denklemi aşağıda verilen bir sikloid ailesi denklemi elde ederiz,

$$x = \frac{c_1}{2}(t_1 - \sin t_1), \quad y = \frac{c_1}{2}(t_1 - \cos t_1)$$

$B(x_1, y_1)$ noktasından geçen sikloidin geçiş koşulundan dolayı $\frac{c_1}{2}$ dönen dairenin yarıçapıdır. Bu yüzden Brachistochrone bir sikloiddir.



Şekil 3.2. Brachistochrone eğrisi

4. RİTZ METOD [1,4]

Ritz Metodunun önemli fikri, $I[y(x)]$ fonksiyonelinin değerleri, varyasyonel problemin keyfi kabul edilebilir eğrileri üzerinde düşünülmez, fakat $w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x), \dots$ fonksiyon dizilerinin ilk n fonksiyonun sabit katsayılarıyla oluşturulmuş muhtemel her $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$ lineer kombinasyonları üzerinde düşünülebilir.

$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$ fonksiyonları, eldeki problem dahilinde kabul edilebilir olmalıdır. Bu, $w_i(x)$ fonksiyon dizilerinin seçiminde kesin şartları etkiler. Böyle lineer kombinasyonlarda, $I[y(x)]$ fonksiyoneli, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ katsayılarının bir $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ fonksiyonuna dönüşür. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ fonksiyonunun ekstremize olması için bu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ katsayıları seçilir. Bu yüzden $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ katsayıları $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$, ($i=1, 2, \dots, n$) denklem sisteminden belirlenmelidir.

$n \rightarrow \infty$ için limite geçişte ,eğer limit varsa elimizdeki varyasyonel problemin kesin çözümü olan $I[y(x)]$ fonksiyoneli ve $w_1(x), w_2(x), w_3(x), \dots, w_n(x), \dots$ dizilerini düzenleyen kesin şartlar için,

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \quad (4.1)$$

fonksiyonunu elde ederiz. Eğer limite geçmez ve kendimizi sadece

$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$ fonksiyonunun ilk n terimi ile sınırlı kılırsak varyasyonel problemin yaklaşık çözümünü elde etmiş oluruz. Eğer bu metod, fonksiyonelin mutlak minimumunun araştırılmasında kullanılırsa,

fonksiyonelin mutlak minimum değeri yüksek elde edilir. Çünkü, her kabul edilebilir eğri üzerindeki fonksiyonelin minimumu, $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$ formundaki eğriler üzerinde, kabul edilebilir eğri sınıfının kısımlarında, yine aynı fonksiyonelin minimumunu geçmez. Aynı metodla fonksiyon maksimumlaştırıldığı zaman fonksiyonelin yaklaşık maksimum değerini eksik olarak buluruz.

$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$ fonksiyonlarının kabul edilebilir olması için en başta gerekli olan şey, sınır şartlarını sağlamasıdır. Örneğin, $y(x_0) = y(x_1) = 0$ elemanter probleminde ya da β_{ij} 'ler katsayı olmak üzere,

$$\beta_{1j}y(x_j) + \beta_{2j}y'(x_j) = 0, \quad j = 0,1 \quad (4.2)$$

için bu sınır şartlarının sağlayan koordinat fonksiyonlarını seçmek basit iştir. Açıkça söylemek gerekirse $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$, her α_i için aynı sınır şartlarını sağlar. Örneğin, sınır şartlarını $y(x_0) = y(x_1) = 0$ formunda alalım. Koordinat fonksiyonları için, $w_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi(x)$ olarak seçebiliriz. Burada $\varphi(x)$ 'ler, sürekli fonksiyonlar ya da,

$$w_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k = 1,2,...) \quad (4.3)$$

Burada, $w_i(x) = w_i(1) = 0$ şartını sağlayan diğer fonksiyonlardır. Eğer şartlar homojen değilse, örneğin; y_0 ve y_1 sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ ise varyasyonel problemin çözümünü,

$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) + w_0(x)$ formunda aramak daha basittir. Burada,

$w_0(x)$, $w_0(x_0) = y_0$ ve $w_0(x_1) = y_1$ sınır şartlarını ve mevcut bütün $w_i(x)$ 'ler ise homojen sınır şartlarını sağlar. Örneğin böyle bir durumda $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ dır. Böyle bir seçimde çok açıktır ki, her bir α_i için $y_n(x)$ fonksiyonları verilen sınır şartlarını sağlar. $w_0(x)$ fonksiyonu için,

$$w_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \quad (4.4)$$

lineer fonksiyonu seçebiliriz. Genel olarak söylemek gerekirse bu, $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ denklem sistemleri çözmek için çok zor bir problemdir. Eğer bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinde kuadratik olan I fonksiyonelinin bir ekstremumu için test edersek, bu problem açık olarak basitleştirilmiş olur. Bu durumda denklemleri $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ denklemleri α_i noktasında lineerdir.

Koordinat fonksiyonları olarak adlandırılan $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ fonksiyonlarının bir dizisinin seçimi, açık şekilde sonraki işlemlerin zorluk derecesini etkiler ve bu yüzden metodun başarısı, büyük ölçüde fonksiyonların koordinat sisteminin seçimine bağlıdır.

Süregelemler, bütün $I[z(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)]$ fonksiyonellerine uygulanır. Bu durumda w_i , fonksiyonları $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ değişkenlerinin fonksiyonları olmalıdır. Fonksiyoneller birkaç fonksiyona bağlıdır.

Ritz Metodu, genellikle matematiksel fizik problemlerinin kesin ya da yaklaşık çözümlerinde uygulanır. Örneğin, D tanım kümesinde,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (4.5)$$

Poisson denkleminin bir çözümünü bulmak gerekliyse, D' nin sınırında seçili z değerleri için, bu problem verilen denklemin bir Ostrogradsky denklemi olduğu bir fonksiyonun ekstremumundaki varyasyonel problem tarafından tekrar yerine konulabilir. Bu durumda bu fonksiyonel,

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx dy \quad (4.6)$$

olacaktır. Bu fonksiyonelin z ekstremum fonksiyonu direkt metodların herhangi biriyle bulunabilir. Matematiksel fizik problemleri, düzenli bir şekilde, bir ekstremum için, bilinmeyen ve onun türevlerinde kuadratik olan fonksiyonelerin araştırılmasına indirgenir ve böylece zaten belirtildiği gibi, Ritz Metodunun kullanımı kolaylaşır. Varyasyonel problemin istenen çözümüne yaklaşımların Ritz Metoduyla elde edilen yakınsaklığı ve ayrıca bu yaklaşımların doğruluk derecesinin saptaması sorusu oldukça zordur. Bu yüzden kendimizi birkaç noktaya sınırlı kılacağız. Bu kesinlik için $I[y(x)]$ fonksiyoneline bakışımız,

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4.7)$$

şeklinde olacaktır. Bu fonksiyonelin minimumu ile ilgilendiğimizi farz edelim.

Koordinat fonksiyonlarının $\sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(x)$ (n yeterince büyük) lineer kombinasyonu tarafından 1.derece yakınlıktaki herhangi bir doğruluk derecesine yakın sayılabilen her bir kabul edilebilir fonksiyon anlamında tamamlayan $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ koordinat fonksiyon dizisini düşüneceğiz. Sonra

açık bir şekilde, minimumlaştırılmış dizi olarak adlandırılan y_n dizisinin,

$$y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(x) \text{ şeklinde olduğu } y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \text{ fonksiyonlarını elde etmek için}$$

Ritz metodu kullanılabilir. Örneğin, fonksiyonelin değerlerinin bir dizisi olan $I[y_1], I[y_2], \dots, I[y_n], \dots$ dizisi, $I[y(x)]$ fonksiyonelinin değerlerinin minimumuna ya da düşük bir sınırına yakınsar.

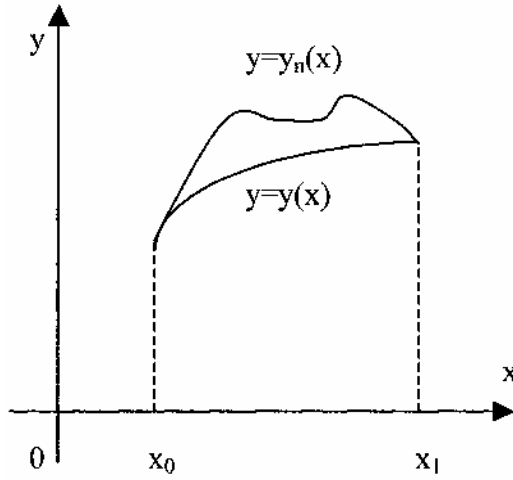
Fakat, $\lim_{n \rightarrow \infty} I[y_n(x)]$ olması, en azından $\lim_{n \rightarrow \infty} I[y_n(x)] = y(x)$ olmasını gerektirmez. Minimumlaştırılmış bir dizi, kabul edilebilir fonksiyonların sınıfında ekstremum fonksiyonlarına dönüşmeyebilir. Gerçekten aşağıda görüldüğü gibi,

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y_n'(x)) dx \quad (4.8)$$

fonksiyoneli,

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4.9)$$

fonksiyonelinde farklı olabilir. Sadece integrasyon aralığının her yerinde, $y_n(x)$ birinci yakınlıktaki $y(x)$ 'e yakınsadığı zaman ayrıca (x_0, x_1) aralığının uygun küçük parçaları üzerinde de $y_n(x)$ ve $y(x)$ fonksiyonları ve türevleri radikal bir şekilde farklı olur. Böylece (x_0, x_1) aralığının kalan kısmında yakınsak kalır (Şekil 4.1). Bu nedenden dolayı, $y_1, y_2, \dots, y_n$ minimumlaştırılmış dizileri kabul edilebilir fonksiyonlar sınıfında bir limite sahip olamaz. Böylece $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının kendileri kabul edilebilir olacaklardır.



Şekil 4.1. (x_0, x_1) aralığında yakınsaklık

Örneğin, $p(x) < 0$, $q(x) \geq 0$ olmak üzere, uygulamalarda sık sık karşılaşılan,

$$I = \int_0^1 [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + f(x)y] dx, \quad y(0) = y(1) = 0 \quad (4.10)$$

tipindeki fonksiyoneller için, sadece $w_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi x$ ($k = 1, 2, \dots$) koordinat fonksiyonları verilen fonksiyoneli minimumlaştıran $y(x)$ fonksiyonuna yaklaşımların, Ritz Metoduyla elde edilen yakınsaklığı kanıtlanmamış, ayrıca son olarak $|y(x) - y_n(x)|$ kesin hata tahminleri de verilmiştir. $(0,1)$ aralığındaki $|y(x) - y_n(x)|$ maksimum tahminlerinden birini verirsek,

$$\begin{aligned} \max |y - y_n| &\leq \frac{1}{n+1} \left[\max p(x) + \frac{\max q(x)}{(n+1)^2 \pi^2} \right]^{1/2} \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x) dx}}{\pi^2 \sqrt{2 [\min p(x)]^{5/2}}} \leq \\ &\times \left[\max |p(x)| + \frac{1}{\pi} \max q(x) + \pi \min p(x) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu karşılaştırmalı basit durumda hatanın tahmini çok zordur. Bu nedenlerle Ritz Metoduyla ya da diğer metotlarla elde edilmiş kesin sonuçları tahmin etmek için teorik olarak eksik fakat genelde pratik yolla güvenilir olan şu yol

izlenir;

$y_n(x)$ ve $y_{n+1}(x)$ 'i hesapladıktan sonra (x_0, x_1) aralığındaki birkaç noktada, bu fonksiyonlar arasında bir karşılaştırma yapılır. Eğer bu değerler istenen doğruluğun limitleriyle çakışmıyorsa o zaman $y_n(x)$, bu varyasyonel problemin istenen kesinlikteki çözümü olarak alınır. Fakat $y_n(x)$ ve $y_{n+1}(x)$ 'in değerleri verilen doğruluğun limitlerinde seçilen birkaç noktada çakışmıyorsa, $y_{n+1}(x)$ ve $y_{n+2}(x)$ 'in değerleriyle karşılaştırılır. Bu işlem, $y_{n+k}(x)$ ve $y_{n+k+1}(x)$ 'in değerlerinin verilen doğruluktaki limitleriyle çakışana kadar devam eder.

4.1. Örnek [5]

Sabit kalınlıklı üçgen şeklindeki sabit cismin titreşimlerinin çalışmasında,

$$I = \int_0^1 (ax^3 y''^2 - bxy^2) dx, \quad y(1) = y'(1) = 0$$

fonksiyonelinin bir ekstremumunu test etmek zorundayız. Sınır şartlarını sağlayan koordinat fonksiyonları için,

$$(x-1)^2, (x-1)^2 x, (x-1)^2 x^2, \dots, (x-1)^2 x^{k-1}$$

alabiliriz. Böylece, $y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k (x-1)^2 x^{k-1}$ olur. Biz, bunu sadece ilk iki terim

için düşünürsek, $y_2 = (x-1)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x)$ değerini elde ederiz. Sonra,

$$I_2 = I[y_2] = \int_0^1 [ax^3 (6\alpha_2 x + 2\alpha_1 - 4\alpha_2)^2 - bx(x-1)^4 (\alpha_1 + \alpha_2 x)^2] dx$$

$$I[y_2] = a \left| (\alpha_1 - 2\alpha_2)^2 + \frac{24}{5} \alpha_2 (\alpha_1 - 2\alpha_2) + 6\alpha_2^2 \right| - b \left(\frac{\alpha_1^2}{30} + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{105} + \frac{\alpha_2^2}{280} \right)$$

burada, ekstremum için gerekli şartlar olan,

$$\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} = 0 \text{ ve } \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} = 0 ,$$

$$\left(a - \frac{b}{30} \right) \alpha_1 + \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right) \alpha_2 = 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right) \alpha_1 + \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{180} \right) \alpha_2 = 0$$

formunu alır. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ çözümünden farklı ve üçgen şeklindeki cismin titreşiminin varlığına uygun olan çözümleri elde etmek için, lineer homojen denklem sisteminin determinantının sıfır olması gereklidir. Yani,

$$\begin{vmatrix} a - \frac{b}{30} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \\ \frac{2}{5} a - \frac{b}{105} & \frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \end{vmatrix} = 0$$

veya,

$$\left(a - \frac{b}{30} \right) \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{280} \right) - \left(\frac{2}{5} a - \frac{b}{105} \right)^2 = 0$$

olur. Bu denklem "*frekans denklemi*" olarak adlandırılır. Bu denklem, $u(x,t) = y(x) \cos bt$ fonksiyonu tarafından tanımlanmış üçgen şeklindeki cismin doğal titreşimlerinin b frekansını tanımlar. Frekans denkleminin iki tane b_1 ve b_2 köklerinin küçük olanı, üçgen şeklindeki cismin titreşiminin temel sesinin yaklaşık frekans değeri sağlar.

4.2. Örnek [4]

Prizma ya da bir silindirin dönme kuvvetinin katıldığı problemlerde bir ekstremum noktası için,

$$I[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy$$

fonksiyonelinin araştırılması gerekir. Eliptik bir dik kesiti olan bir silindir için D bölgesinde tanımlı integrasyon, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi tarafından sınırlandırılmış olacaktır. Bu durumda, sadece xy koordinat fonksiyonunu alarak,

$$z_1 = \alpha xy, \quad v[z_1] = v_1 = \frac{\pi ab}{4} [(\alpha + 1)^2 a^2 + (\alpha - 1)^2 b^2]$$

Bir ekstremum için gerekli şart olan $\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0$ bu durumda,

$(\alpha + 1)a^2 + (\alpha - 1)b^2 = 0$ formunu alır ve buradan sonuç,

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2 - b^2}, \quad z_1 = \alpha xy = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy \text{ olur.}$$

4.3. Örnek [3]

D tanım kümesi kenarları 2a ve 2b olan $(-a \leq x \leq a ; -b \leq y \leq b)$ bir dikdörtgen ise, xy, xy^3, x^3y koordinat fonksiyonlarını yerine koyarak yani,

$$z_3 = \alpha_1 xy + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y$$

aşağıdaki sonuç elde edilir;

$$\begin{aligned}
I_3 = I[z_3] &= \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left[\left(\frac{\partial z_3}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy \\
&= \frac{4}{3} ab^3 (\alpha_1 - 1)^2 + 4ab^5 \left(\frac{b^3}{7} + \frac{3a^2}{5} \right) \alpha_2^2 + 4a^5 b \left(\frac{a^2}{7} + \frac{3b^2}{5} \right) \alpha_3^2 \\
&\quad - \frac{8}{5} a^3 b^3 (a^2 + b^2) \alpha_2 \alpha_3 - \frac{8}{3} a^3 b^3 (\alpha_1 - 1) \alpha_3
\end{aligned}$$

Bir ekstremum için gerekli şartlar olan $\frac{\partial I_3}{\partial \alpha_1} = 0$, $\frac{\partial I_3}{\partial \alpha_2} = 0$, $\frac{\partial I_3}{\partial \alpha_3} = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ değerlerinin hesaplanmasına olanak verir,

$$\alpha_1 = -\frac{7(a^6 - b^6) + 135a^2b^2(a^2 - b^2)}{7(a^6 + b^6) + 107a^2b^2(a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_2 = -\frac{7a^2(3a^2 + 35b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2b^2(a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_3 = -\frac{7b^2(35a^2 + 3b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2b^2(a^2 + b^2)}.$$

4.4. Örnek [2]

Kenarları a ve b olan $(0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b)$ D dikdörtgeninin sınırında sıfıra

eşit olan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$ denkleminin D içindeki bir çözümünü bulunuz.

Bu dikdörtgenin içinde (x, y) fonksiyonunun düzgün yakınsak ikili Fourier serilerine açılabilirdiği kabul edilir. Yani,

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$$

olarak yazılabilir. Bu sınır-değer problemi, Ostrogradsky denklemi olarak verilen denklem için bir fonksiyonelin bulunduğu varyasyonel probleme indirgenebilir. Daha sonra direkt metodların birini kullanarak bu fonksiyoneli ekstremize eden fonksiyonu buluruz. Böylece asıl sınır - değer problemin çözümünü buluruz. Buradan,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ denklemi,}$$

$$I[y(x)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy$$

fonksiyoneli için bir Ostrogradsky denklemidir. D tanım kümesinin sınırında koordinat fonksiyonlarının bir sistemi için,

$$\sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

alalım. Bütün bu fonksiyonlarının ve lineer kombinasyonlarının her biri, D'nin sınırı üzerinde $z = 0$ sınır şartını sağlar. Bu fonksiyonlar bütünlük özelliğine de sahiptirler.

$$Z_{n,m} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$$

olarak,

$$\begin{aligned} I[Z_{n,m}] &= \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial Z_{nm}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_{nm}}{\partial y} \right)^2 + 2Z_{nm} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{pq} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \right] dx dy \\ &= \frac{\pi^2 ab}{4} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \alpha_{pq}^2 + \frac{ab}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \alpha_{pq} \beta_{pq} \end{aligned}$$

elde edeceğiz. Eğer $\sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$ ($p, q = 1, 2, \dots$) koordinat fonksiyonlarının D'de bir ortogonal sistem oluşturduğunu hesaba katarsak bu sonuç hemen elde edilir. Örneğin, $p = p_1$ ve $q = q_1$ durumları hariç herhangi p, q, p_1, q_1 pozitif tamsayıları için, $\iint_D \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b} \sin p_1 \frac{\pi x}{a} \sin q_1 \frac{\pi y}{b} dx dy = 0$ ayrıca $p = p_1$ ve $q = q_1$ için, $\iint_D \sin^2 p \frac{\pi x}{a} \sin^2 q \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$ bulunur.

Bunlardan sadece $\sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}, \sin p \frac{\pi x}{a} \cos q \frac{\pi y}{b}$ fonksiyonlarının karelerini içerenler hesaba katılır. Açıkça $I[z_{nm}]$ bir ekstremum için $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{pq}} = 0$ ($p = 1, \dots, n$, $q = 1, \dots, m$) temel gerekli şartı tarafından belirlenmiş $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm}$ katsayılarının bir $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm})$ fonksiyonudur.

Bu durumda bu denklem sistemi, $\alpha_{pq} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \pi^2 + \beta_{pq} = 0$ formundadır.

Buradan, $\alpha_{pq} = \frac{-\beta_{pq}}{\pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)}$ bulunur. Sonuç olarak,

$$Z_{nm} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \sin p \frac{\pi x}{a} \sin q \frac{\pi y}{b}$$

elde edilmiş olur.

5. KANTOROVİCH METOD [1,3,6]

Birkaç bağımsız değişkenin fonksiyonlarına bağlı olan $I[z(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)]$ fonksiyonellerine Ritz metodu uygulanırken, fonksiyonların bir koordinat sistemi, $w_1(x_1, x_2, \dots, x_n), w_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, w_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$ olarak seçilir. Varyasyonel problemin yaklaşık çözümü, α_k katsayıları sabitler olmak üzere,

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

formunda aranır. Kantorovich Metodu, fonksiyonların bir koordinat sistemini,

$$w_1(x_1, x_2, \dots, x_n), w_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, w_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots \quad (5.2)$$

olarak seçmeyi gerekli bulur ve yaklaşık çözüm ayrıca,

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.3)$$

formunda da aranır. Fakat $\alpha_k(x_i)$ katsayıları sabitler değildir. Bağımsız değişkenlerin bilinmeyen fonksiyonlarıdır.

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.4)$$

tipindeki fonksiyonların sınıfında $I[z]$ fonksiyoneli, bir bağımsız değişkenin m tane $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)$ fonksiyonlarına bağlı olan $I[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)]$ fonksiyoneline dönüşür. $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \dots, \alpha_m(x_i)$ fonksiyonları, I fonksiyoneli ekstremlere getirmek için seçilirler.

Eğer daha sonra $m \rightarrow \infty$ için limite geçerse, kesin şartlar altında kesin bir çözüm elde etmek mümkün olur. Fakat, limite geçiş uygulanmazsa bu metod yaklaşık bir çözümü verir. Genel olarak, aynı koordinat fonksiyonlarıyla ve aynı m sayıdaki terimler Ritz metodunu kullanmaktan daha doğru olur. Bu metodun daha büyük kesinliği, $\alpha_k(x_i)$ değişkenleriyle verilen,

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.5)$$

fonksiyon sınıfının, α_k sabiti ile verilen,

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.6)$$

fonksiyon sınıfından daha geniş olması gerçeğine bağlıdır. Böylece,

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_i) w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.6)$$

tipindeki fonksiyonlara göre, varyasyonel problemin çözümüne daha iyi

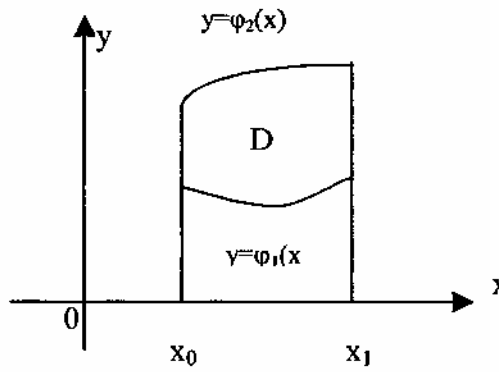
yakınsayan fonksiyonları bulmak $\sum_{k=1}^m \alpha_k w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (α_k ' lar sabitler)

formundaki fonksiyonlara göre daha mümkündür.

Örneğin, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ eğrileri ve $x = x_0$, $x = x_1$ doğruları tarafından sınırlanan D tanım kümesi boyunca uzayan,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy \quad (5.7)$$

fonksiyonelinin bir ekstremum için araştırıldığını kabul edelim. Şekil 5.1' de görüldüğü gibi $z(x, y)$ fonksiyonlarının değerleri D tanım kümesinin sınırında verilmiştir. $w_1(x, y), w_2(x, y), \dots, w_n(x, y), \dots$ koordinat fonksiyonlarının bir dizisini seçelim.



Şekil 5.1. D tanım kümesi

Bu dizinin ilk m fonksiyonu için düşündüğümüz zaman ve fonksiyonların

$$z_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x) w_k(x, y) \text{ toplam formunda varyasyonel problemin çözümünü}$$

ararken ya da $\alpha_k(x)$ 'ten $u_k(x)$ 'e işaretleri değiştirerek,

$$z_m(x, y) = u_1 w_1(x, y) + u_2 w_2(x, y) + \dots + u_m w_m(x, y) \quad (5.8)$$

elde ederiz. Burada w_k bizim seçtiğimiz fonksiyonlardır ve u_k 'larda tanımladığımız fonksiyonlardır. Böylece I fonksiyoneli ekstremize olur.

$$I[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} F\left(x, y, z_m(x, y), \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dy \quad (5.9)$$

elde ederiz. İntegrali alınan ifade, y 'nin bilinen bir fonksiyonu olduğunda, integrasyon y 'ye bağlı yapılabilir ve $I[z_m(x, y)]$ fonksiyoneli,

$$I[z_m(x, y)] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, u_1(x), \dots, u_m(x), u_1', \dots, u_m') dx \quad (5.10)$$

formunda bir fonksiyonel olacaktır. $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ fonksiyonları seçilir ve böylece $I[z_m(x, y)]$ fonksiyoneli ekstremize olur. $u_i(x)$ 'ler,

$$\varphi_{u_1} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_1'} = 0$$

$$\varphi_{u_2} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_2'} = 0$$

$$\varphi_{u_m} - \frac{d}{dx} \varphi_{u_m'} = 0$$

Euler denklem sistemini sağlamalıdır. Keyfi sabitler seçilir ve böylece $z_m(x, y)$ fonksiyonu $x = x_0$ ve $x = x_1$ doğruları üzerinde verilen sınır şartlarını sağlar.

5. 1. Örnek [7]

İntegrasyonun tanım kümesinin sınırında $z = 0$ olmak üzere,

$$I[z(x, y)] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy \text{ araştırınız. İntegrasyonun tanım}$$

kümesi, $-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$ olan bir dikdörtgendir. Biz $z_1 = (b^2 - y^2)u(x)$ formunda bir çözüm arıyoruz. Daha sonra $y = \pm b$ doğruları üzerindeki sınır şartları sağlanacaktır. Fonksiyonel,

$$I[z_1] = \int_{-a}^a \left[\frac{16}{15} b^5 u'^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2 - \frac{8}{3} b^3 u \right] dx$$

olmak üzere, bu fonksiyonel için Euler denklemi,

$$u'' - \frac{5}{2b^2}u = -\frac{5}{4b^2}$$

ve bu denklem sabit katsayılarla lineer bir denklem olup genel çözüm,

$$u = c_1 \cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + c_2 \sinh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b} + \frac{1}{2}$$

c_1 ve c_2 sabitleri $z(-a) = z(a)$ sınır şartlarından belirlenir.

$$c_2 = 0, c_1 = -\frac{1}{2 \cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \text{ den son olarak,}$$

$$u = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \right) \text{ elde ederiz. Sonuç olarak,}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(b^2 - y^2) \left(1 - \frac{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \right)$$

bulunur. Eğer daha kesin bir cevap istenirse çözüm,

$$c_2 = (b^2 y^2) u_1(x) + (b^2 - y^2)^2 u_2(x) \text{ formunda aranabilir.}$$

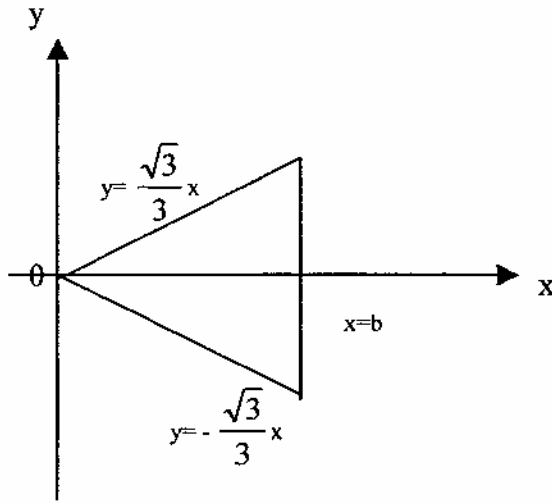
Örnek 5.2. [5]

Şekil 5.2' de verilen $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ve $x = b$ doğrularıyla sınırlı ikizkenar üçgen şeklindeki D tanım kümesi üzerinde $\Delta z = -1$ denkleminin sürekli bir çözümünü bulunuz.

Tanım kümesinin sınırı üzerinde çözüm sıfırdır. $\Delta z = -1$ denklemi,

$$v[z] = \int_0^b \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx dy$$

fonksiyoneli için bir Ostrogradsky denklemidir ve integrasyonun tanım kümesinin sınırında $z = 0$ ' dır. Kantrovich metoduna göre ilk yaklaşımı,



Şekil 5.2. İkizkenar üçgen

$$z_1 = \left[y^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x \right)^2 \right] u(x) \text{ formunda arayacağız. } z_1 \text{'in seçimleri için } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

doğruları üzerinde sınır şartları sağlanır, y 'ye göre integrasyondan sonra $I[z_1]$ fonksiyoneli,

$$I[z_1] = \frac{8\sqrt{3}}{405} \int_0^b (2x^5 u'^2 + 10x^4 uu' + 30x^3 u^2 + 15x^3 u) dx$$

formunu alır. Bu fonksiyonel için Euler denklemi, $x^2 u'' + 5xu' - 5u = \frac{15}{4}$

olacaktır. Bu tipteki lineer denklemler, diferensiyel denklemler teorisinde,

Euler denklemi olarak adlandırılır. Bu homojen olmayan denklemin bir özel çözümünün $u = -\frac{3}{4}$ olduğu açıktır. Biz, $u = x^k$ formundaki karşılıklı homojen denklemin bir çözümünü arıyoruz. Sonuç olarak, $u = c_1 x + c_2 x^{-5} - \frac{3}{4}$ elde ederiz. $x = 0$ noktasının yakınında u çözümü sınırlı olmalıdır, ardından c_2 sıfıra eşit seçilmeli ve $u(b) = 0$ şartından, $c_1 = -\frac{3}{4}$ bulunur. Sonuç olarak,

$$z_1 = -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{x}{b} \right) \left(y^2 - \frac{1}{3} x^2 \right)$$

elde edilir.

6. GALERKİN METODU [1,3]

Sınır - değer problemleri, diğer direkt metod tarafından da (varyasyonel olmayan) yaklaştırılır. Bu, Galerkin Metodu olarak adlandırılır. Bu metod, lineer sınır değer problemlerin çözümü için kısmen uygundur. Ama birçok lineer olmayan problemlere de uygulanabilir.

$y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$ homojen sınır şartlarıyla verilen,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (6.1)$$

ikinci mertebeden lineer denklemlerine uygulanan Galerkin Metodunu veriyoruz. Homojen olmayan $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$ sınır şartları

$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ değişken değişimi ile hemen homojen şartlara indirgenir.

Eş. 6.1 açık bir şekilde,

$$L(y) = f(x) \quad (6.2)$$

olarak yazılabilir. (x_0, x_1) aralığında $w_n(x_0) = w_n(x_1) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) sınır şartlarını sağlayan sürekli, lineer bağımsız,

$$w_1(x_1), w_2(x_2), \dots, w_n(x_n), \dots \quad (6.3)$$

fonksiyon sisteminin tamamını seçelim. Eş. 6.3' de ilk n fonksiyonun,

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \quad (6.4)$$

şeklindeki lineer kombinasyonu formunda, sınır - değer probleminin yaklaşık çözümünü arayacağız. Eş. 6.1' de y_n 'i yerine koyup α_i ($i=1,2,\dots,n$) katsayılarını seçelim, böylece,

$$L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)\right) - f(x) \quad (6.5)$$

fonksiyonu her $w_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) fonksiyonlarının $[x_0, x_1]$ aralığında ortogonaldır.

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \right) - f(x) \right] w_i(x) dx = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.6)$$

y_n in $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x)$ kesin çözümüne dönüşmesini beklemek $n \rightarrow \infty$ iken doğaldır. Elde edilen seriler yakınsak ise ve ikinci mertebeden terimsel türevi sağlarsa, $L(\tilde{y}) - f(x)$ fonksiyonu, $[x_0, x_1]$ aralığında ortogonaldır. Eş.6.3' de tamamlanınca bunu $L(\tilde{y}) - f(x) \equiv 0$ olması izler. Buradan,

$\tilde{y}$, $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}(x_1) = 0$ sınır şartlarını da sağlar. Çünkü her, $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ olur. Nadir olarak, bütün α_i noktalarını, bu noktalarda lineer olan Eş.6.3' den elde etmek ve $n \rightarrow \infty$ için limite geçmek mümkün hale gelir. Bu nedenle, bu α_i 'lerden biri, düzenli olarak kendisini çok küçük bir sonlu n sayısına sınırlar. ($n = 2,3,4,5$ ve bazen $n = 1$)

Burada, sadece n tane $w_i(x)$ fonksiyonlarını seçmek zorundayız. Bu yüzden bütünlük hali bozulur ve $w_i(x)$ 'leri lineer bağımsız olarak ve $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ sınır şartlarını sağlayacak biçimde seçilmelidir. Bu koordinat fonksiyonları için sık sık,

$$(x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)^2(x - x_1), (x - x_0)^3(x - x_1), \dots, (x - x_0)^n(x - x_1), \dots (6.4)$$

polinomlarını alırız. Burada koordinat merkezini x_0 noktasına taşımak daha uygundur. Eş. 6.4' de $x_0 = 0$ dır. Ya da,

$$\sin \frac{n\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (n = 1, 2, \dots, n) \quad \text{trigonometrik fonksiyonları alınır. Bu metod,}$$

her sıralı n-li denklemlere, denklem sistemlerine ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

6.1. Örnek [1,5]

Bir dikdörtgen plakada stres alanının yaklaşık sonucunu bulunuz. Airy'nin stres fonksiyonunu Ψ olarak yazarsak, Ψ diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi olur,

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0$$

Daha sonra,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y},$$

olur ve sınır şartlarını aşağıdaki gibi alırız,

$$x = \pm a \text{ için } \Psi_{yy} = s \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad \Psi_{xy} = 0$$

$$y = \pm a \text{ için } \Psi_{xx} = \Psi_{xy} = 0$$

$$\Psi = \frac{1}{2}sy^2\left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right) + (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + \dots)$$

seçersek sınır şartlarını sağlamış oluruz. Bunu Eş. 6.5' deki denklemde yazarsak,

$$\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a (\nabla^4 \Psi) \delta \Psi dx dy = 0$$

olur. Buradan,

$$\delta \Psi = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\delta a_1 + \delta a_2 x^2 + \dots)$$

yazarız. İlk yaklaşım olarak sadece a_1 'i sıfırdan farklı alıriz. Daha sonra,

$$\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a \left[24(y^2 - b^2)^2 a_1 32(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2)a_1 + 24(x^2 - a^2)a_1 - \frac{2s}{b^2} \right]$$

$$(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy = 0$$

olur. Buradan,

$$a_1 = \frac{\frac{s}{b^2}}{\frac{64}{7}b^4 + \frac{256}{49}a^2b^2 + \frac{64}{7}a^4},$$

$$\sigma_{xx} = s\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + 4(x^2 - a^2)^2(3y^2 - b^2)a_1$$

$$\sigma_{yy} = 4(y^2 - a^2)(3x^2 - a^2)a_1,$$

$$\sigma_{xy} = -16(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)xy.$$

6.2. Örnek [7]

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = 0$$

denklemini çözelim. Başlangıçtaki şartlar,

$$x = 0 \quad \text{için} \quad t = 0$$

$$\dot{x} = V_0 \quad \text{için} \quad t = 0$$

olsun. Burada Ritz metodunu kullanmak,

$$I[x] = \int_0^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt$$

ifadesinin fonksiyonel bir şekli olmadığı için zordur. Bu zorluk Galerkin metodu ile ortadan kaldırılabilir. Bu metod x'i sağlamak için kullanılır.

$$\int_0^{t_1} (m\ddot{x} + v\dot{x} + kx) \delta x dt = 0$$

Farz edelim ki,

$$x(t) = V_0 e^{-t} \sin t + a_1 e^{-t} (\cos t - 1)$$

olsun. Burada a_1 'in herhangi bir değeri için bu fonksiyon sağlanmaktadır. Buradan,

$$\delta x = e^{-t} (\cos t - 1) \delta a_1$$

elde edilir. Son iki eşitliği,

$$\int_0^{t_1} (m\ddot{x} + v\dot{x} + kx)\delta x dt = 0$$

integralinde yerine konulursa,

$$m(-2V_0 + 2a_1) - 2VV_0 + k(3V_0 - 3a_1) = 0$$

elde edilir. Daha sonra sonuç aşağıdaki gibi olur,

$$a_1 = \frac{(2m + 2V - 3k)V_0}{2m - 3k}$$

7. SONUÇLAR

i. Biz verilen problemi çözerken yani minimum veya maksimumunu bulacağımız fonksiyonu ararken, direkt metotlarla çözmeyi diğer metotlarla çözüm yapmaya tercih ederiz.

ii. Bu direkt metotlarla çözmekte zorlandığımız problemlerde, varyasyonel metotlar gerçeğe en yakın analitik çözümleri bulmamızı sağlar.

iii. Bu varyasyonel metotlar, Euler metodu, Ritz metodu, Kantorovich metodu ve Galerkin metodudur. Ayrıca bu metotların sınır şartları, destekleyici şartlar ve süreklilik şartları çözümleri de incelenebilir.

iv. Çoğu zaman Ritz metodu ile çözüm yapmak, problemi Euler denklemi ile çözmekten daha kolay bir duruma getirir.

v. Direkt ve direkt olmayan metodun karışımı olan Kantorovich metodu ile Ritz metodu arasında az bir fark vardır. Kantorovich metodu bazı durumlarda Ritz metodundan daha açık bir çözüm sağlar.

vi. Galerkin metodu sınır değişken problemlerinin yaklaşım metodunu oluşturur. Bu metod, Euler denklemini çözmek için kullanılan yaklaşım metodudur. Ayrıca Ritz metodu kullanıldığında elde ettiğimiz deneme fonksiyonları doğal sınır şartlarını sağlamak zorunda değilken, Galerkin metodu ile bu sorun ortadan kalkarak bütün sınır şartları sağlanır.

KAYNAKLAR

1. Mura, T. And Koya T, " Variational Methods in Mechanics", **Oxford Univ. Press**, New York, 3-45 (1992).
2. Reddy, J. N., "An Introduction to the finite element method", **Mc Graw Hill**, New York, 36-50 (1985).
3. Acar, O, " Varyasyonel Problemlerde Direkt Metodlar", **Gazi Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Matematik Araştırma Projesi**, Ankara, 5-22 (2003).
4. Dettman, J. W., "Mathematical Methods in Physics and Engineering", **Mc Graw Hill**, New York, 68-89 (1962).
5. Pinsky, M. A., "Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems With Applications", **Mc Graw Hill**, New York, 388-394 (1991).
6. Zweben, C., " Composite Materials and Mechanical Design, Mechanical Engineer's Handbook" 2nd ed., **John Willey and Sons Inc.**, New York, 48-52 (1998).
7. Schwartz M. M., "Composites Metarials Handbook", **Mc Graw Hill**, New York, 22-24 (1992).

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : EFEKAN, Gülriz

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 18.11.1970

Medeni hali : Evli

Telefon : 0 (312) 4837608

e-mail : gefekan@hotmail.com

Eğitim**Derece****Eğitim Birimi****Mezuniyet tarihi**

Lisans

Ege Üniversitesi/ Fen Fak. Mat. Böl.

1993

Lise

İzmir İnönü Lisesi

1988

İş Deneyimi**Yıl****Yer****Görev**

1994-1997

Erzincan Üzümlü Lisesi

Öğretmen

1997-2007

Kara Harp Okulu Komutanlığı

Öğ. Yüzbaşı

Yabancı Dil

İngilizce