

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**VEKTÖR ALANLARININ DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ VE
UYGULAMALARI**

Elif TÜRKAY

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

ŞUBAT 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

VEKTÖR ALANLARININ DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ VE UYGULAMALARI

Tez Yazarı
Elif TÜRKAY

Danışman
Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ

ŞUBAT 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Vektör Alanlarının Diferensiyel Geometrisi ve Uygulamaları
Yazarı:	Elif TÜRKAY
İlk Teslim Tarihi:	04.01.2022
Savunma Tarihi:	03.02.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Hülya GÜN BOZOK Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Vektör Alanlarının Diferensiyel Geometrisi ve Uygulamaları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

03.02.2022

Elif TÜRKAY



ÖNSÖZ

Vektör alanları Diferensiyel Geometride önemli bir yere sahip olup birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Dolayısıyla birçok uygulamasının olduğu açıktır. Bu tez çalışması bazı özel vektör alanlarının özelliklerini ve uygulamalarını içermektedir. Eğitimin başından itibaren bu yüksek lisans tezinin oluşturulması sürecinde gerekli bütün imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkânlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilir saygılarımı sunarım. Son olarak tüm hayatım boyunca yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen ve beni cesaretlendiren aileme sonsuz şükranlarımı sunar teşekkür ederim.

Elif TÜRKAY

ELAZIĞ, 2022



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLAR VE TORKLU VEKTÖR ALANLARI.....	10
3.1. Torklu Vektör Alanları	10
3.2. Bir Torklu Vektör Alanına Göre Rektifiye Altmanifoldların Karakterizasyonları	13
3.3. Dairesel Vektör Alanına Göre Rektifiye Altmanifoldların Temel Özellikleri.....	15
4. TORKLU VEKTÖR ALANLARININ RICCI SOLİTONLARA UYGULANMASI.....	17
4.1. Torklu Vektör Alanlarının Sınıflandırılması	17
4.2. Torklu Vektör Alanlarının Ricci Solitonlara Uygulamaları	20
4.3. Kanonik Torklu Vektör Alana Sahip Ricci Solitonlar	22
5. MATERYAL VE METOT	25
6. BULGULAR.....	26
7. SONUÇLAR.....	27
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Vektör Alanlarının Diferensiyel Geometrisi ve Uygulamaları

Elif TÜRKAY

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2022, Sayfa: ix + 31

Son zamanlarda Öklid uzayında rektifiye altmanifoldlar tanımlanmış ve sınıflandırılmıştır. Bu çalışmalar aslında 3-boyutlu Öklid uzayında rektifiye eğriler için yapılan çalışmaların bir genellemesidir. Bu çalışmada ilk olarak keyfi bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifold kavramı verilmektedir. Daha sonra Riemann manifoldlarında torklu vektör alanları detaylıca incelenmekte ve bu vektör alanı ile tanımlı Riemann manifoldlarının bir sınıflandırılması verilmektedir. Ardından bu vektör alanı ile birlikte verilen Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldlar açıklanmaktadır. Ayrıca torklu potansiyel vektör alanına sahip Ricci solitonlar incelenmektedir. Son olarak Ricci solitonlarla ilgili elde edilen bazı sonuçlar verilmektedir ve uygulamaları detaylıca incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Torklu vektör alanı, Rektifiye altmanifold, Riemann manifold, Dairesel vektör alanı, Twisted çarpım, Ricci soliton

ABSTRACT

Differential Geometry of Vector Fields and Its Applications

Elif TÜRKAY

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

February 2022, Pages: ix + 31

Recently, rectifying submanifolds in Euclidean space have been defined and classified. These studies are actually a generalization of the studies for rectifying curves in 3-dimensional Euclidean space. In this study, firstly, the concept of rectifying submanifold in an arbitrary Riemannian manifold is given. Then, torqued vector fields in Riemannian manifolds are examined in detail and a classification of Riemannian manifolds defined by this vector field is given. Then rectifying submanifolds in the Riemannian manifold given with this vector field are explained. In addition, Ricci solitons with torqued potential vector fields are studied. Finally, some results about Ricci solitons are given and their applications are examined in detail.

Keywords: Torqued vector field, Rectifying submanifold, Riemannian manifold, Conircular vector field, Twisted product, Ricci soliton

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$boyM$	: M manifoldunun boyutu
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
g_F	: F 'nin metrik tensörü
$\tilde{g}_F$	: g_F 'in konformal metrik tensörü
H^f	: f 'nin Hessian'ı
Imh_p	: p noktasında ilk normal uzay
$Im(\bar{\nabla}h_p)$	: p noktasında ikinci normal uzay
$\mathcal{L}_\xi g$	: g metrik tensörün Lie türevi
Ric	: Ricci tensörü
$T_p M$	: p noktasındaki tanjant uzay
$T_p^\perp M$	: p noktasındaki normal uzay
$\mathcal{T}_{ca}^f$	: Kanonik torklu vektör alanı
Z^N	: Z 'nin normal bileşeni
Z^T	: Z 'nin teğetsel bileşeni
∇f	: f fonksiyonunun gradienti
$\Delta(\ln f)$	: $\ln f$ 'in Laplacianı
$\langle, \rangle$	: İç çarpım
$\ , \ $	: Norm
$\wedge$	: Vektörel çarpım

1. Giriş

$E^3, <, >$ iç çarpımına sahip 3-boyutlu Öklid uzayı olsun. $I = (a, b)$ bir reel aralık olmak üzere bir $x: I \rightarrow E^3$ birim hızlı uzay eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin konum vektörü x ise teğet vektörü de $x' = t$ ile gösterilir.

Genel olarak bazı s ler için $t'(s) = 0$ olabilir; ancak, çalışma boyunca $t'(s) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $t' = \kappa n$ olacak şekilde pozitif bir κ fonksiyonu seçilebilir. Burada t' eğrilik vektör alanı, n asli normal vektör alanı ve κ eğrinin eğriliği olarak adlandırılabilir. t sabit uzunluklu olduğu için n, t' ye ortogonaldır. Binormal vektör alanı ise $b = t \times n$ şeklinde tanımlanır, bu hem t hem de n için ortogonal bir birim vektör alanıdır. $b' = -\tau n$ denklemindeki τ ise eğrinin torsiyonu olur.

Bu eğri için Serret-Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n, \\ n' &= -\kappa t + \tau b, \\ b' &= -\tau n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

şeklinde verilir. Eğrinin her noktasında $\{t, n\}, \{t, b\}$ ve $\{n, b\}$ ile kapsanan düzlemler sırasıyla oskülatör düzlem, rektifiye düzlem ve normal düzlem olarak bilinir.

Temel diferansiyel geometriden, eğer E^3 'deki bir eğrinin konum vektörü her noktada oskülatör düzlemde yatıyorsa, bu eğrinin düzlemde yattığı, eğer konum vektörü her noktada normal düzlemde yatıyorsa bir küre üzerinde yattığı iyi bilinmektedir.

Bu açıklamalardan sonra 'Bir $x: I \rightarrow E^3$ uzay eğrisinin konum vektörü ne zaman rektifiye düzlemde yatar?' sorusu birçok araştırmacının zihnini meşgul etmiştir. [1]'de böyle bir eğri rektifiye eğri olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmada rektifiye eğrilerinin birçok temel özelliği elde edilmiştir ve özellikle bütün rektifiye eğriler sınıflandırılmıştır. Rektifiye eğrilerinin centrodes, sabit oran eğriliği ve kıvrım manifoldları ile ilgili olduğuda [2-7] de belirtilmiştir.

[8]'de rektifiye eğriler kavramı bir Öklid uzayındaki rektifiye altmanifoldlar kavramına genişletilmiştir ve rektifiye altmanifoldlar sınıflandırılmıştır.

Bir M (yarı) Riemann manifoldu üzerindeki v vektör alanı her $x \in TM$ için

$$\nabla_X v = \phi X + \psi(X)v \tag{1.2}$$

şartını sağlıyorsa torklu form vektör alanı olarak isimlendirilir [9], burada ϕ bir fonksiyon, ψ bir 1-form ve ∇ da M 'nin Levi-Civita konneksiyonudur [10,11]. Eğer (1.2) eşitliğindeki ψ 1-formu özdeş olarak sıfır ise o zaman v dairesel vektör alanı olur [11-14]. Eğer $\phi = 1$ ve $\psi = 0$ ise bu durumda v eş zamanlı vektör alanı olarak isimlendirilir [11,14]. $\phi = 0$ iken (1.2) eşitliğini sağlayan v vektör alanı tekrarlı vektör alanı olarak adlandırılır. Eğer $\phi = \psi = 0$ ise o zaman (1.2) eşitliğindeki v paralel vektör alanı olarak adlandırılır.

Eğer bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki ξ vektör alanı

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g + Ric = \lambda g \quad (1.3)$$

eşitliğini sağlıyorsa bir Ricci soliton tanımlar, burada $\mathcal{L}_\xi g$, ξ 'ye uygun g metrik tensörün Lie türevidir. Ric ise (M, g) 'nin Ricci tensörü olup, λ da bir sabittir. Bir Ricci solitonu (M, g, ξ, λ) ile göstereceğiz. Burada ξ vektör alanına Ricci solitonun potansiyel vektör alanı denir. Bu (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ veya $\lambda < 0$ olması durumuna göre sırasıyla küçülen, sabit veya genişleyen olarak isimlendirilir [15-19]. Bir keyfi Ricci solitonu ξ potansiyel vektör alanının sıfır veya Killing olduğu bir durumdur, bu durumda da metrik Einstein metriğidir.

Kompakt Ricci solitonları Ricci akışının sabit noktalarıdır:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

eşitliği metrik uzaydan onun bölüm modül diffeomorfizmlerine ve ölçeklerine tanımlıdır ve kompakt manifoldlar üzerinde genellikle Ricci akışının patlama sınırlarını ortaya çıkarır. Ayrıca Ricci solitonlar Ricci akışındaki tekiliğin oluşumunu modelliyor ve bunlar kendine benzer çözümlere uygundur [19].

Son yirmi yıl boyunca, Ricci solitonların geometrisi birçok matematikçi için ilgi odağı olmuştur. Özellikle 1904'te Poincare hipotezinin uzun süreli çözümü için Ricci solitonları uygulayan Grigori Perelman'dan sonra daha da önemli hale gelmiştir [19].

Bu çalışmada, ilk olarak keyfi bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldlar kavramı verilmiştir. Daha sonra Riemann manifoldlarında torklu vektör alanları verilmiş ve torklu vektör alanına sahip Riemann manifoldlarının bazı sınıflandırılmaları incelenmiştir. Bir torklu vektör alanına sahip bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldların bazı karakterizasyonları incelenmiştir.

Bir diğer bölümde ise Riemann manifoldları üzerindeki bütün torklu vektör alanları sınıflandırılmıştır. Ayrıca torklu potansiyel vektör alanına sahip Ricci solitonlar incelenmiştir. Özellikle bir $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ Ricci solitonu eğer $\mathcal{T}$ torklu potansiyel vektör alanına sahip ise o zaman (M, g) 'nin hemen hemen yarı-Einstein manifold olması durumu verilmiştir. Bu durumda (M, g) 'nin bir Einstein manifold olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{T}$ torklu vektör alanının bir dairesel vektör alanı olması gerektiği ispat halinde verilmiştir. Son olarak Ricci solitonlarla ilgili elde edilen bazı sonuçlara değinilmiştir.

Yukarıda kısaca verilen çalışmalarla ilgili elde edilen sonuçlar ve uygulamalar ise tezin son kısmında detaylıca verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlere temel teşkil eden bazı önemli kavramlara ve açıklamalara yer verilecektir.

Tanım 2.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A 'ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir [20].

$$A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A_2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Tanım 2.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V 'de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A 'da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece bu afin uzay Öklid uzay adını alır [20].

Tanım 2.3. E^n 'de bir açık alt cümle U olmak üzere $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir [20].

Tanım 2.4. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n - manifold) dur denir [20].

(M1): M bir Hausdorff uzayıdır.

(M2): M 'nin herbir açık alt cümlesi E^n 'e veya E^n 'in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3): M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.5. $X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \psi(\alpha \wedge \beta)$$

şeklinde tanımlı $\times$ iç işlemine vektörel çarpım işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de vektörel çarpım denir [20].

Tanım 2.6. V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir [20].

Tanım 2.7. $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir [20].

Tanım 2.8. $v, w \in X(\mathbb{R}^n)$ olsun. $p \in \mathbb{R}^n$ için $(D_v w)_{(p)} = D_{v(p)} w$ eşitliğiyle tanımlı $D_v w$ vektör alanına w 'nın v yönündeki kovaryant türevi denir [20].

Tanım 2.9. E^n 'in bir hiperyüzeyi M ve M 'nin birim normal vektör alanı, N ile verilsin. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M 'nin Weingarten dönüşümü denir [20].

Tanım 2.10. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomlar ile tanımlanan bir $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne (reel değerli fonksiyona) denir ve değeri $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir [21].

1) Simetri aksiyomu:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V$$

2) Bilineerlik aksiyomu:

$$\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2, v \rangle$$

$$\langle u, av_1 + bv_2 \rangle = a \langle u, v_1 \rangle + b \langle u, v_2 \rangle$$

3) Pozitif tanımlılık:

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \forall u, v \in V,$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}.$$

Tanım 2.11. Bir reel vektör uzayı üzerinde belli bir iç çarpım tanımlanırsa bu vektör uzayına bir iç çarpım uzayı denir.

V bir iç çarpım uzayı olsun. $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ şeklinde tanımlanan ifadeye V iç çarpım uzayında bir u vektörünün normu (veya uzunluğu) denir [21].

Tanım 2.12. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $|\alpha'(s)| = 1$ ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir [22].

Tanım 2.13. U , $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt cümlesi olsun. U 'nun her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyona, U üstünde bir vektör alanı denir [22].

Tanım 2.14. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi üstündeki X vektör alanının bileşenlerinin her biri düzgün fonksiyonlar ise X vektör alanı düzgün vektör alanıdır denir [22].

Tanım 2.15. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $T(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı denir [22].

Tanım 2.16. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektör alanı (birim dik vektör alanı) denir [22].

Tanım 2.17. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyinin her bir p noktasına

$$|_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad |_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

fonksiyonuna karşılık getiren $|$ fonksiyonuna, M üstünde birinci temel form denir.

$$\|_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

biçiminde tanımlı $||$ fonksiyonuna, M üstünde ikinci temel form denir [22].

Tanım 2.18. Kabul edelim ki M yüzeyi $r(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ ile verilmiş olsun. Burada diferensiyellenebilir a, b, c fonksiyonlarına r 'nin koordinat fonksiyonları adı verilir. Bu durumda birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E = \langle r_x, r_x \rangle, F = \langle r_y, r_x \rangle, G = \langle r_y, r_y \rangle,$$

$$L = \langle r_{xx}, n \rangle, M = \langle r_{xy}, n \rangle, N = \langle r_{yy}, n \rangle,$$

ile verilir. Burada

$$n = \frac{r_x \times r_y}{||r_x \times r_y||}$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır. Yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)},$$

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

ile verilir [22].

Tanım 2.19. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$V: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(\mathbb{R}^3)$$

biçiminde bir V fonksiyonu her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(\mathbb{R}^3)$ önermesini doğruluyorsa V fonksiyonuna, M yüzeyi üstünde bir vektör alanı denir, M yüzeyinin her bir p noktasına, p noktasındaki $T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayının bir elemanını karşılık getiren bir V fonksiyonuna M yüzeyi üstünde bir vektör alanı denir.

Her $p \in M$ için $V(p) \in T_p(M)$ ise V ye M üstünde teğet vektör alanı denir. Her $p \in M$ için $V(p)$ vektörü $T_p(M)$ uzayına dik ise V 'ye M üstünde dik vektör alanı denir.

V, M üstünde bir vektör alanı ise $p \in M$ için

$$V(p) = \sum_{i=1}^3 V^i(p) \frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

biçimindedir. Burada V^i fonksiyonları, M 'den $\mathbb{R}$ 'ye giden fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar düzgün ise V 'ye M üstünde düzgün vektör alanı denir. $V(p)$ yerine V_p gösterimi de kullanılır [22].

Tanım 2.20. $U, \mathbb{R}^n$ uzayının bir açık altkümesi olsun. U 'nun her bir q noktasına, q noktasında bir kotanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyona, U üstünde bir kotanjant vektör alanı veya 1-form denir [22].

Tanım 2.21. $(\bar{M}, g)$ ve M sırası ile m boyutlu Riemann manifold ve n boyutlu keyfi manifold olsun. Bu durumda $i: M \rightarrow \bar{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. i immersiyonu M üzerine i^*g ile tanımlı simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı form, yani Riemann metriği indirger. Bu formu da g ile gösterelim. Bu durumda (M, g) bir Riemann manifoldu ve i de izometrik immersiyon olur [23].

Tanım 2.22. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($\nabla g = 0$) bir tek ∇ lineer konneksiyon vardır. Verilen konneksiyona Levi-Civita konneksiyon, Riemann konneksiyon veya metrik konneksiyon adı verilir [23].

Tanım 2.23. M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin teğet vektör alanı α boyunca paralel ise eğriye jeodeziktir denir. Öklidyen uzayda doğrular birer jeodeziktir. Keyfi bir manifoldda jeodezik kavramı doğruya karşılık gelen geometrik nesneler olarak düşünülebilir. Örneğin kürede iki noktayı birbirine bağlayan en kısa uzunluğa sahip eğri, yani kürenin jeodeziği, büyük çemberlerdir. Bu eğriler kürenin merkezinden geçen düzlemler ile kürenin kesişimi olan eğrilerdir. Bu tür eğriler uzun mesafe hava ulaşımında takip edilen yollardır, çünkü bir noktadan diğer noktaya en kısa zamanda gidilebilecek yol bu jeodezik üzerindedir [23].

Tanım 2.24. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $f: (M, g) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. (M, g) üzerinde f fonksiyonunun gradyenti ∇f , M üzerinde bir vektör alanıdır ve $X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f)$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzay ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ standart bazı olsun. Bu durumda f fonksiyonunun gradyenti

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i$$

dir [23].

Tanım 2.25. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $f: (M, g) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyon olsun. Bu durumda

$$H_f: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow H_f(X, Y) = g(h_f(X), Y)$$

tensörüne (M, g) üzerinde f fonksiyonunun Hessiyen formu denir. f fonksiyonunun Hessiyen tensörü self-adjoint olduğundan, Hessiyen formu (M, g) üzerinde simetriktir [23].

Tanım 2.26. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları $e_1, \dots, e_n$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \text{iz} R(., X)Y$$

dönüşümü ile tanımlı (2,0)-mertebeli

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun Ricci tensörü adı verilir. M manifoldunun Ricci operatörü Ric ise,

$$g(RicX, Y) = S(X, Y)$$

ile tanımlanır [23].

Tanım 2.27. ϕ , r . mertebeden kovaryant tensör olsun. $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ ve σ permütasyonu için, eğer $\phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \phi(v_1, v_2, \dots, v_r)$ ise ϕ tensörüne simetrik tensör, eğer

$\phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}\sigma \phi(v_1, v_2, \dots, v_r)$ ise ϕ tensörüne anti-simetrik tensör adı verilir. Simetrik tensörlerin uzayı ve anti-simetrik kovaryant tensörlerin uzayı, kovaryant tensörlerin uzayı olan $T^r(V)$ uzayının altuzaylarıdır ve sırasıyla $\Sigma^r(V)$ ve $\Lambda^r(V)$ ile gösterilir. r . mertebeden anti-simetrik kovaryant tensörlere kısaca r -form denir [23].

Tanım 2.28. (M, g) bir Riemann manifoldu ve X manifold üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına Killing vektör alanı adı verilir. Kolayca görülür ki X vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter şart $Y, Z \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

olmasıdır [23].

Tanım 2.29. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\alpha: I \rightarrow M$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Eğer

$$E_1 = \frac{d\alpha}{ds},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\alpha E_1 = k_1 E_2,$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\alpha E_i = -k_{i-1} E_{i-1} + k_i E_{i+1}, \forall i = 2, \dots, r-1$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\alpha E_r = -k_{r-1} E_{r-1},$$

olacak şekilde α -boyunca $\{E_i\}_{i=1}^r$ ortonormal çatısı varsa α -eğrisine r . mertebeden Frenet eğrisi denir, burada $k_1, \dots, k_{r-1}$, I üzerindeki pozitif fonksiyonlardır, bu fonksiyonlara α eğrisinin eğrilikleri denir [23].

Tanım 2.30. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(a) \quad g(X, Y) = g(Y, X),$$

$$(b) \quad g(X, X) \geq 0 \text{ ve } \forall X \text{ için } g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M, g) ikilisine Riemann manifoldu denir [23].

Tanım 2.31. M bir manifold, X manifold üzerinde bir vektör alanı φ_t de 1-parametrelili dönüşümlerin grubu olsun. Bu durumda Φ , M üzerinde bir tensör alanı olmak üzere, Φ tensörünün X vektör alanına göre Lie türevi

$$(L_X \Phi)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_p - (\tilde{\varphi}_t \Phi)_p], p \in M$$

ile tanımlanır, burada $\tilde{\varphi}, T(\varphi^{-1}(p))$ tensör cebirinden $T(p)$ tensör cebirine bir izomorfizmadır ve

$$(\tilde{\varphi} \Phi)_p = \tilde{\varphi} \Phi_{\varphi^{-1}(p)}$$

ile tanımlanır [23].

Tanım 2.32. Bir $\varphi: S \rightarrow \bar{S}$ difeomorfizmasını düşünelim. Eğer, S üzerinde tanımlı, her yerde sıfırdan farklı, türevlenebilir bir λ^2 fonksiyonu ve her $p \in S, v_1, v_2 \in T_p(S)$ için

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p$$

ise, φ difeomorfizması bir konformal dönüşüm olarak adlandırılır; bu durumda S ve $\bar{S}$ yüzeyleri konformaldır denir [24].

Tanım 2.33. Eğer $p \in S$ noktasında $k_1 = k_2$ ise, p noktasına S yüzeyinin bir umbilik noktası denir; özel olarak düzlemsel noktalar ($k_1 = k_2 = 0$) umbilik noktalar. Küredeki ve düzlemdeki tüm noktalar umbilik noktalar [24].

Açıklamalar 2.1. $x: M \rightarrow \tilde{M}$, $\tilde{M}$ Riemann manifoldu başka bir M Riemann manifoldunun izometrik immersiyonu olsun. Her $p \in M$ noktası için $T_p M$ ile p noktasındaki tanjant uzayı $T_p^\perp M$ ile de normal uzayı gösterelim. Burada doğal ortogonal bir ayrışım:

$$T_p \tilde{M} = T_p M \oplus T_p^\perp M \quad (2.1)$$

Sırasıyla M ve $\tilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonlarını ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ile gösterelim. Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi$$

verilsin [25,26]. Burada X, Y vektör alanları M 'ye teğet ve ξ, M 'ye normal, h ikinci temel form, D normal konneksiyon ve A da M 'nin şekil operatörüdür.

Verilen bir $p \in M$ noktası için E^m de $Im h_p$ ile gösterilen M nin ilk normal uzayı

$$Im h_p = Span\{h(X, Y): X, Y \in T_p M\}$$

ile verilen bir alt uzaydır.

p de her ξ normal vektörü için A_ξ şekil operatörü $T_p M$ nin self-adjoint endomorfizmidir.

h ikinci temel form ile A şekil operatörü arasında

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle$$

bağıntısı vardır, burada $\langle, \rangle$ hem $\tilde{M}$ ambient uzayı üzerinde hem de M üzerindeki iç çarpımdır.

$TM \oplus T^\perp M$ üzerindeki konneksiyona göre h 'ın $\bar{\nabla} h$ kovaryant türevi

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

ile tanımlanır.

Verilen bir $p \in M$ noktası için

$$Im (\bar{\nabla} h_p) = \{(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z): X, Y, Z \in T_p M\}$$

dir. $Im (\bar{\nabla} h_p)$ alt uzayı p noktasında ikinci normal uzay olarak adlandırılır.

Codazzi denklemi

$$(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

şeklindedir, burada $(\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp, \tilde{R}(X, Y)Z$ nin normal bileşenidir.

Bir $x: I \rightarrow E^3$ rektifiye eğrisinin tanımından x 'in x konum vektör alanı bazı λ ve μ fonksiyonları için

$$x(s) = \lambda(s)t(s) + \mu(s)b(s)$$

eşitliğini sağlar.

$s_0 \in I$ iken $\kappa(s_0) \neq 0$ olacak şekilde $x: I \rightarrow E^3$ eğrisi için s_0 noktasındaki ilk normal uzay $n(s_0)$ asli normal vektörü tarafından gerilen doğrudur. Buradan, s_0 noktasındaki rektifiye düzlem s_0 noktasındaki ilk normal uzaya ortogonal olan düzlemden başka bir şey değildir. Bu yüzden, E^m 'nin $T_p E^m$ 'in alt uzayı olarak adlandırılan M altmanifoldu için $p \in M$ noktasında $Im\sigma_p$ ilk normal uzayına ortogonal komplemanı bu p noktasında M nin rektifiye uzayıdır [27].

Şimdi aşağıdaki tanımlar verilebilir.

Tanım 2.34. V bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldu üzerinde sıfırdan farklı bir vektör alanı olsun, M de $\tilde{M}$ 'nin bir altmanifoldu olsun, V 'nin V^N normal bileşeni M üzerinde her yerde sıfırdır. O zaman M 'nin (V 'ye göre) bir rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şart $p \in M$ 'nin her noktasında

$$\langle V(p), Imh_p \rangle = 0$$

olmasıdır [27].

Tanım 2.35. Bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir M altmanifoldu eğer $p \in M$ noktası için

$$Im\bar{V}h_p \not\subseteq Imh_p$$

ise twisted olarak adlandırılır [27].

Tanım 2.35'den E^3 'deki bir eğrinin twisted olması için gerek ve yeter şart her noktada sıfırdan farklı torsiyona sahip olmasıdır denilir.

Tanım 2.36. İki yarı Riemann manifoldu (B, g_B) ve (F, g_F) 'nin $B \times_\lambda F$ twisted çarpımları

$$g = g_B + \lambda^2 g_F \quad (2.2)$$

yarı Riemann metriği ile verilen $B \times F$ şeklinde bir çarpım manifoldudur, burada λ , $B \times F$ üzerinde twisting fonksiyonu olarak adlandırılan pozitif bir fonksiyondur.

Özellikle, eğer (2,2)'deki λ fonksiyonu sadece B 'ye bağlı ise warped çarpımı olarak adlandırılır ve λ fonksiyonuna warping fonksiyonu denir [27].

Tanım 2.37. (B, g_B) ve (F, g_F) iki yarı Riemann manifoldunun twisted çarpımı $B \times_\lambda F$ eğer λ twisted fonksiyonu B üzerinde sadece f 'e bağlı ve F üzerinde sadece k 'ya bağlı diğer bir fonksiyonun çarpımı olarak ifade edilemiyorsa proper olarak adlandırılır [27].

3. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLAR VE TORKLU VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde [27]'de verilen torklu vektör alanları, torklu vektör alanına göre rektifiye altmanifoldların karakterizasyonları ve dairesel vektör alanına göre rektifiye altmanifoldların temel özelliklerine yer verilecektir.

3.1. Torklu Vektör Alanları

M yarı Riemann manifoldu üzerindeki bir v vektör alanı eğer bazı ϕ fonksiyonu, γ 1-formu ve herhangi bir $X \in TM$ vektörü için

$$\nabla_X v = \phi X + \gamma(X)v$$

sağlanıyorsa torklu form olarak adlandırılır, burada ∇ , M 'nin Levi-Civita konneksiyonudur [9,28]. γ 1-formu üretici form olarak adlandırılır ve ϕ fonksiyonu v 'nin konformal skaleri olarak adlandırılır [10].

Kolaylık için aşağıdaki tanım yapılmıştır.

Tanım 3.1.1. (Yarı) Riemann manifoldu üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan bir $\mathcal{T}$ vektör alanı aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa bir torklu vektör alanı olarak adlandırılır.

$$\nabla_X \mathcal{T} = \phi X + \alpha(X)\mathcal{T} \text{ ve } \alpha(\mathcal{T}) = 0 \quad (3.1)$$

ϕ fonksiyonu ve α 1-formu sırasıyla torklu fonksiyonu ve $\mathcal{T}$ torklu vektör alanının torklu formu olarak adlandırılır [27].

Bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı dairesel vektör alanı değilse yani torklu formu aşikar değilse proper olarak adlandırılır.

Bu bölümün temel sonucu aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.1. Bir M Riemann n -manifoldunun bir torklu vektör alanı olması için gerek ve yeter şart bir $I \times_\lambda F$ twisted çarpımının lokal olmasıdır. Burada I bir açık aralık, F Riemann $(n - 1)$ - manifold ve λ twisting fonksiyondur [27].

İspat: $\mathcal{T}$ 'nin bir M Riemann n -manifoldu üzerinde bir torklu vektör alanı olduğunu farz edelim. $\rho = |\mathcal{T}|$ olsun. O zaman

$$\mathcal{T} = \rho e_1 \quad (3.2)$$

dir, burada e_1 , M üzerinde bir birim vektör alanıdır. (3.1) ve (3.2)'den

$$\rho \phi e_1 = \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = (\mathcal{T}\rho)e_1 + \rho^2 \nabla_{e_1} e_1$$

elde edilir. $\nabla_{e_1} e_1$, e_1 'e dik olduğundan

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0 \text{ ve } \mathcal{T}(\ln \rho) = \phi \quad (3.3)$$

bulunur.

(3.3)'deki ilk denklem, e_1 integrallenebilir eğrilerin M 'de jeodezik olduğunu gösterir. Böylece, $\mathcal{D} = \text{Span}\{e_1\}$ de alınırsa $\mathcal{D}$ tamamen jeodezik bir yapı olur, yani $\mathcal{D}$ integrallenebilir bir dağılımdır ve onun kısımları M 'de tamamen jeodeziktir.

Bir e_1 birim vektör alanı M üzerinde $e_1, \dots, e_n$ lokal bir ortonormal çatıya genişletilebilir. Eğer

$$\nabla_{e_j} e_i = \sum_{k=1}^n w_i^k(e_j) e_k, i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

alınırsa o zaman $w_i^k = -w_k^i$ elde edilir.

$\mathcal{D}^\perp = \text{Span}\{e_2, \dots, e_n\}$ de yerine koyulsun. O zaman (3.1) ve (3.2)'nin türevinden $j = 2, \dots, n$ için

$$\varphi e_j + \alpha(e_j) \rho e_1 = \nabla_{e_j} \mathcal{T} = (e_j \rho) e_1 + \rho \nabla_{e_j} e_1 \quad (3.5)$$

dır. (3.4) ve (3.5)'den

$$w_1^k(e_j) = \frac{\varphi}{\rho} \delta_{jk}, j, k = 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$\alpha(e_j) = e_j(\ln \rho), j = 2, \dots, n \quad (3.7)$$

bulunur.

Ayrıca, (3.1) ve (3.2)

$$\alpha(e_1) = 0 \quad (3.8)$$

verir.

Denklem (3.6) $\mathcal{D}^\perp$ 'in kısımları M 'nin tamamen umbilik hiperyüzeyleri olan integrallenebilir bir dağılım olduğunu gösterir. Bu nedenle R 'nin bir sonucu çıkar. Ponge ve H. Reckziegel [29], M 'nin bir $I \times_\lambda F$ twisted çarpımı lokaldır, burada I bir açık aralık, F bir Riemann $(n-1)$ -manifold ve $\lambda, I \times F$ üzerinde pozitif bir fonksiyondur, böylece M 'nin g metrik tensörü $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$ ile

$$g = ds^2 + \lambda^2 g_F \quad (3.9)$$

dan alır.

(3.2) ve (3.3)'den, $\mathcal{T}$ 'nin torklu fonksiyonunun $\varphi = \frac{\partial \rho}{\partial s}$ 'i sağladığı bilinir. Üstelik (3.7) ve (3.8) den $\mathcal{T}$ 'nin α torklu formu $d\pi_F(\nabla(\ln f))$ 'in dual 1-formu olduğu çıkar, burada $\pi_F: I \times_\lambda F \rightarrow F$ doğal izdüşüm ve $\nabla(\ln f)$ de $\ln f$ 'in gradyentidir.

Tersine M 'nin bir (3.9) metriği ile verilen bir F Riemann $(n-1)$ -manifoldu ile bir açık aralığın $I \times_\lambda F$ twisted çarpımı olduğunu kabul edelim. O zaman F 'e teğet olan V ler için

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = 0, \nabla_V \frac{\partial}{\partial s} = \left(\frac{\partial \ln \lambda}{\partial s} \right) V \quad (3.10)$$

elde edilir [26,29,30].

$$v = \lambda \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.11)$$

alabiliriz.

O zaman (3.10) ve (3.11)'den

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} v = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.12)$$

$$\nabla_V v = (V\lambda) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) V, V \perp \frac{\partial}{\partial s} \quad (3.13)$$

çıkar.

Şimdi M üzerinde φ skaler fonksiyonunu

$$\varphi = \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (3.14)$$

ile tanımlayalım ve M üzerinde α 1-formunu

$$\begin{cases} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = 0, \\ \alpha(V) = V(\ln \lambda), \text{ eğer } V \perp \frac{\partial}{\partial s} \end{cases} \quad (3.15)$$

ile tanımlayalım.

O zaman (3.11)-(3.15)'den

$$\nabla_X v = \varphi X + \alpha(X)v, \text{ her } X \in TM \text{ için}$$

$$\alpha(v) = 0$$

elde edilir, sonuç olarak $I \times_\lambda F$ twisted çarpımı $v = \lambda \frac{\partial}{\partial s}$ ile verilen bir torklu vektör alanına sahiptir.

Teorem 3.1.1'in ispatında verilen aynı metot uygulanarak aşağıdaki teorem ve açıklamalar elde edilir [27].

Teorem 3.1.2. Bir M Lorentzian n -manifoldunun bir time-like torklu vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart M 'nin bir lokal $I \times_\lambda F$ twisted çarpımı olmasıdır, burada I bir açık aralık, F bir Riemann $(n - 1)$ -manifold öyle ki M 'deki metrik

$$g = -ds^2 + \lambda^2 g_F$$

dir, burada λ , $I \times F$ üzerinde pozitif bir fonksiyondur.

Açıklama 3.1.1. Teorem 3.1.2, [12]'de verilen Teorem 1 in genişletilmiş olarak kabul edilebilir.

Açıklama 3.1.2. Temel diferensiyel geometride bir yüzeyde verilen kapalı olmayan basit bir eğri γ için, yüzey γ boyunca bir jeodezik koordinat parçasına sahiptir. Çünkü bir yüzey üzerindeki her jeodezik koordinat parçası, yüzeydeki bir twisted çarpım metriği olduğundan twisted çarpımlar yoğun bir şekilde mevcuttur. Sonuç olarak Teorem 3.1.1'e göre bir torklu vektör alana sahip Riemann manifoldlarının birçok örneği vardır.

Diğer taraftan [30]'da $boyF > 1$ iken (B, g_B) ve (F, g_F) 'nin $B \times_f F$ twisted çarpımı bir Einstein manifold olması durumunda proper olmadığı bilinmektedir. Diğer bir deyişle, $B \times_f F$, ϕ warped fonksiyonu olmak üzere (B, g_B) ve $(F, \tilde{g}_F)$ 'nin $B \times_\phi F$ warped çarpımı olarak ifade edilebilir, burada $\tilde{g}_F, g_F$ 'in konformal metrik tensörüdür. Sonuç olarak, her Riemann manifoldun bir proper twisted çarpımı lokal olarak ifade edilemez.

Açıklama 3.1.3. Bir $I \times_{\lambda} F$ twisted çarpım manifoldunda bir koordinat sistem $\{s, u_2, \dots, u_n\}$ olsun öyle ki $g_F = \sum_{j,k=2}^n g_{jk}^F du_j du_k$ olan

$$g = \pm ds^2 + \lambda^2 g_F$$

ile verildiği düşünölsün. Böyle bir koordinat sistemi $I \times_{\lambda} F$ twisted çarpımı üzerinde bir jeodezik koordinat parçası olarak kabul edilebilir.

Bir M Riemann manifoldu üzerindeki bir vektör alanı eğer M 'deki bazı f fonksiyonlarının gradyenti ∇f ise gradyent vektör alanı olarak adlandırılır.

Bu durumda torklu vektör alanları için aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1.1. Eğer bir M Riemann manifoldu üzerinde bir torklu vektör alanı bir gradyent alanı ise, o zaman bir dairesel vektör alanıdır [27].

İspat: $\mathcal{T}$, torklu fonksiyonu φ ve torklu formu α olan bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir torklu vektör alanı olsun. O zaman (3.1) deki iki şart sağlanır. Farz edelim ki $\mathcal{T}$ 'nin M 'deki bir f fonksiyonu için gradyent vektör alanı ∇f olsun. f 'nin Hessian'ı H^f

$$\begin{aligned} H^f(X, Y) &= XYf - (\nabla_X Y)f = Xg(Y, \nabla f) - g(\nabla_X Y, \nabla f) = g(Y, \nabla_X(\nabla f)) \\ &= g(Y, \nabla_X \mathcal{T}) = \varphi g(X, Y) + \alpha(X)g(Y, \mathcal{T}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

sağlanır.

f 'nin Hessian'ı $H^f(X, Y)$, X ve Y de simetrik olduğundan, (3.16)'dan M 'ye teğet olan X ve Y vektör alanları için

$$\alpha(X)g(Y, \mathcal{T}) = \alpha(Y)g(X, \mathcal{T}) \quad (3.17)$$

elde edilir.

Eğer X ve Y vektör alanlarını $X = \mathcal{T}$ ve $Y \perp \mathcal{T}$ olacak şekilde seçersek, (3.17) 'den

$$0 = \alpha(Y)g(\mathcal{T}, \mathcal{T})$$

buluruz.

$\mathcal{T}$ torklu vektör alanı Tanım 3.1.1'e göre hiçbir yerde sıfır olmadığından (3.17)'den $\mathcal{T}$ 'ya dik herhangi bir Y için $\alpha(Y) = 0$ elde ederiz. Bu nedenle, bunu (3.1)'deki ikinci şartla birleştirdikten sonra $\alpha = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak, $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı bir dairesel vektör alanıdır.

3.2. Bir Torklu Vektör Alanına Göre Rektifiye Altmanifoldların Karakterizasyonları

$\tilde{M}$ bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı ile donatılmış bir Riemann m -manifold olsun. $\mathcal{T}$ 'ya göre $\tilde{M}$ 'nin rektifiye altmanifoldlarının çok basit karakterizasyonları aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.1. M bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı ile verilen $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer $\mathcal{T}$ 'nin $\mathcal{T}^T$ teğetsel bileşeni M üzerinde sıfırdan farklı ise o zaman M 'nin ($\mathcal{T}$ 'ya göre) rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}^T$ 'nin, M üzerinde torklu formda vektör alanı

olmasıdır ki onun konformal skaleri torklu fonksiyonunun kısıtlaması ve üreteç formu M üzerinde $\mathcal{T}$ 'nin torklu formunun kısıtlamasıdır [27].

İspat: M bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı ile verilen $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. M ile kısıtlı $\mathcal{T}$ 'nin

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^T + \mathcal{T}^N, [(2.1)'e göre] \quad (3.18)$$

ortogonal ayrışımını düşünelim, burada $\mathcal{T}^T$ ve $\mathcal{T}^N$ sırasıyla $\mathcal{T}$ 'nin teğetsel ve normal bileşenleridir.

$$(3.1), (3.18) \text{ ve Gauss ve Weingarten formüllerinden herhangi bir } X \in TM \text{ için} \\ \varphi X + \alpha(X)\mathcal{T} = \tilde{\nabla}_X \mathcal{T} = \nabla_X \mathcal{T}^T + h(X, \mathcal{T}^T) - A_{\mathcal{T}^N} X + D_X \mathcal{T}^N \quad (3.19)$$

bulunur. (3.19)'daki teğetsel bileşenler karşılaştırıldıktan sonra

$$A_{\mathcal{T}^N} X = \nabla_X \mathcal{T}^T - \varphi X - \alpha(X)\mathcal{T}^T \quad (3.20)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.19)'daki normal bileşenleri karşılaştırarak

$$D_X \mathcal{T}^N = \alpha(X)\mathcal{T}^N - h(X, \mathcal{T}^T)$$

elde edilir.

Şimdi farz edelim ki $M, \mathcal{T}$ 'ya göre bir rektifiye altmanifold olsun. O zaman Tanım 2.34'den M üzerinde $\mathcal{T}^N$ 'nin sıfır olmadığı bilinir. Ayrıca Tanım 2.34'den

$$\langle \mathcal{T}, h(X, Y) \rangle = 0, \text{ her } X, Y \in TM \text{ için} \quad (3.21)$$

elde edilir ki bu eşitlik $A_{\mathcal{T}^N} = 0$ 'ı verir. (3.20)'den

$$\nabla_X \mathcal{T}^T = \varphi X + \alpha(X)\mathcal{T}^T$$

yazılabilir. Bu yüzden $\mathcal{T}^T, M$ üzerinde torklu formda vektör alanıdır ki onun konformal skaleri M üzerinde $\mathcal{T}$ 'nin torklu fonksiyonunun kısıtlaması ve üreteç formu M üzerinde $\mathcal{T}$ 'nin torklu formunun kısıtlamasıdır.

Tersine, farz edelim ki $\mathcal{T}^T, M$ üzerinde torklu formda vektör alanıdır ki onun konformal skaleri M üzerinde $\mathcal{T}$ 'nin torklu fonksiyonunun kısıtlaması ve üretici formu M üzerinde $\mathcal{T}$ 'nin torklu formunun kısıtlaması olsun. O zaman M ile teğet herhangi bir X vektörü için

$$\nabla_X \mathcal{T}^T = \varphi X + \alpha(X)\mathcal{T}^T \quad (3.22)$$

olur. Bu nedenle (3.20) ile (3.22) birleştirildikten sonra $A_{\mathcal{T}^N} = 0$ elde edilir. Buradan (3.21) elde edilir. Sonuç olarak $M, \mathcal{T}$ 'ya göre $\tilde{M}$ 'nin rektifiye altmanifoldudur sonucu elde edilir.

Hatırlarsak $\tilde{M}$ Riemann manifoldu üzerinde sıfırdan farklı bir vektör alanı Z , eğer

$$\tilde{\nabla}_X Z = \phi X, \text{ her } X \in T\tilde{M} \text{ için} \quad (3.23)$$

sağlarsa dairesel vektör alanı olarak adlandırılır, burada ϕ bir fonksiyon ve $\tilde{\nabla}, \tilde{M}$ 'nin Levi-Civita konneksiyonudur. ϕ fonksiyonu Z 'nin dairesel fonksiyonu olarak adlandırılır (bakınız [12] dairesel vektör alanının kısa tarihçesi). Açıkçası, aşikar bir torklu formuna sahip torklu vektör alanı (yani $\alpha = 0$) bir dairesel vektör alanıdır.

Bir dairesel vektör alanı eğer (3.23)'deki ϕ fonksiyonu 1'e eşitse eş zamanlı vektör alanı olarak adlandırılır [14].

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.2.1'den kolayca elde edilir.

Teorem 3.2.2. $M, Z^T \neq 0$ iken $Z \neq 0$ dairesel vektör alanına sahip bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. O zaman M 'nin, Z 'ye göre bir rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şart Z 'nin teğetsel bileşeni Z^T 'nin, M üzerinde Z 'nin dairesel fonksiyonunun kısıtlaması ile verilen dairesel fonksiyonunun bir dairesel vektör alanı olmasıdır [27].

İspat: $M, Z^T \neq 0$ iken $Z \neq 0$ dairesel vektör alanına sahip bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Açıkça görülüyor ki, dairesel vektör alanı Z keyfi torklu formu olan bir torklu vektör alanıdır.

Farz edelim ki M, Z 'ye göre $\tilde{M}$ 'nin rektifiye altmanifoldu olsun. O zaman Teorem 3.2.1'den M üzerinde Z 'nin Z^T teğetsel bileşeni bir torklu formda vektör alanıdır öyle ki onun konformal skaleri M üzerinde Z 'nin torklu fonksiyonunun kısıtlaması ve Z keyfi torklu forma sahip olduğu için üreteç formu keyfi 1-formdur.

Sonuç olarak, Z^T dairesel vektör alanı öyle ki dairesel fonksiyon M üzerinde Z 'nin dairesel fonksiyonunun kısıtlamasıdır. Terside benzer bir hesaplama ile gösterilebilir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.2.2'nin doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 3.2.1. $M, Z^T \neq 0$ iken $Z \neq 0$ eş zamanlı vektör alanına sahip bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. O zaman M 'nin, Z 'ye göre bir rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şart Z 'nin Z^T teğetsel bileşeninin M üzerinde bir eş zamanlı vektör alanı olmasıdır [27].

3.3. Dairesel Vektör Alanına Göre Rektifiye Altmanifoldların Temel Özellikleri

Bir dairesel vektör alanı Z ile donatılmış $\tilde{M}$ 'nin rektifiye altmanifoldlarının iki temel özelliği aşağıdaki önerme ile verilebilir.

Önerme 3.3.1. $\tilde{M}$ bir Z dairesel vektör alanı ile verilen bir Riemann m -manifold olsun. Eğer M, Z 'ye göre $\tilde{M}$ 'nin bir rektifiye altmanifoldu ise o zaman

- (1) Z^N 'nin sabit uzunluğu $\neq 0$
- (2) Z^T 'nin φ dairesel fonksiyonu $\varphi = Z^T(\ln \rho)$ ile verilir, burada $\rho = |Z^T|$ dir [27].

İspat: $\tilde{M}$ bir Z dairesel vektör alanı ile verilen bir Riemann m -manifold olsun. Farz edelim ki M, Z 'ye göre $\tilde{M}$ 'nin bir rektifiye altmanifoldudur. O zaman tanımdan $Z^N \neq 0$ olur.

Şimdi (3.23) uygulandığında (3.19)'daki denklem

$$\varphi X = \nabla_X Z^T + h(X, Z^T) - A_{Z^N} X + D_X Z^N \quad (3.24)$$

indirgenir. (3.24)'deki normal bileşenlerle karşılaştırıldığında herhangi bir $X \in TM$ için

$$D_X Z^N = -h(X, Z^T) \quad (3.25)$$

bulunur.

(3.21) ve (3.25)'den $\langle Z, D_X Z^N \rangle = 0$ sonucu çıkar. Buradan

$$X \langle Z^N, Z^N \rangle = 0$$

elde edilir, Z^N 'nin sabit uzunluğu $\neq 0$ kastedilir. Bu ifadeyle (1) sağlanır.

M üzerinde $A_{Z^N} = 0$ olduğundan (3.24)'den M ile teğet X için

$$\nabla_X Z^T = \varphi X \quad (3.26)$$

bulunur. Eğer $\rho = |Z^T|$ yerine koyulursa, o zaman

$$Z^T = \rho e_1 \quad (3.27)$$

olur, burada e_1 , M ile teğet bir birim vektör alanıdır.

$X = e_1$ iken (3.26) ile (3.27)'den

$$\varphi e_1 = \nabla_{e_1} Z^T = (e_1 \rho) e_1 + \rho \nabla_{e_1} e_1$$

bulunur, bu ise

$$\varphi = e_1 \rho, \nabla_{e_1} e_1 = 0 \quad (3.28)$$

eşitliklerini verir.

Ayrıca $X = V \perp e_1$ iken (3.26) ve (3.27)'den

$$V \rho = 0, \text{ her } V \perp e_1 \text{ için} \quad (3.29)$$

olduğu görülür. Şimdi (3.28) ve (3.29)'dan M üzerinde bir s fonksiyonunun var olduğu anlaşılır,

öyle ki $\rho = \rho(s)$ ve $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$ dir. Buradan $\varphi = \rho'(s)$ elde edilir. Sonuç olarak (3.27) ile ifade (2) elde edilir.

4. TORKLU VEKTÖR ALANLARININ RICCI SOLİTONLARA UYGULANMASI

Bu bölümde [31]'de verilen torklu vektör alanlarının sınıflandırılması, torklu vektör alanlarının Ricci solitonlara uygulamaları, kanonik torklu vektör alanına sahip Ricci solitonlara yer verilecektir.

4.1. Torklu Vektör Alanlarının Sınıflandırılması

$g = ds^2$ metriğine sahip 1-boyutlu bir M Riemann manifoldu için M üzerinde sıfırdan farklı $\mathcal{T} = \rho \partial / \partial s$ vektör alanı

$$\nabla_X \mathcal{T} = \frac{\partial \rho}{\partial s} X$$

eşitliğini sağlar. Bu nedenle 1-boyutlu Riemann manifold üzerinde sıfırdan farklı vektör alanı bir torklu vektör alanıdır. Bu yüzden bu çalışma boyunca boyutu 2 den büyük olan Riemann manifoldları üzerindeki torklu vektör alanlarını göz önüne alacağız.

Tanım 4.1.1. (B, g_B) ve (F, g_F) iki yarı-Riemann manifoldunun $B \times_f F$ twisted çarpımı

$$g = g_B + f^2 g_F \quad (4.1)$$

metriğine sahip $B \times F$ çarpım manifoldudur, burada f , $B \times F$ üzerinde tanımlı pozitif bir fonksiyondur ve twisting fonksiyon olarak adlandırılır.

Eğer (4.1) eşitliğindeki f fonksiyonu sadece B 'ye bağlı ise o zaman bu çarpım warped çarpım olarak adlandırılır ve f 'de warping fonksiyon adını alır [31].

B ve F 'den $B \times F$ 'e tanımlı vektör alanlarının liflerinin cümlesini sırasıyla $\mathcal{L}(B)$ ve $\mathcal{L}(F)$ göstereceğiz.

Şimdi ispatı [27] de bulunan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.1. Eğer M Riemann manifoldu bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanına sahip ise o zaman $\mathcal{T}$ genellikle I 'ya teğet olacak şekilde M lokal olarak bir $I \times_f F$ twisted çarpımıdır, burada I bir açık aralıktır.

Tersine herhangi bir $I \times_f F$ twisted çarpımı için I 'ya hemen hemen teğet olacak şekilde bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı mevcuttur [31].

Teorem 4.1.1 göz önüne alınırsa aşağıdaki tanım ve teoremi verebiliriz.

Tanım 4.1.2. Bir $\mathcal{T}$ vektör alanı eğer I 'ya teğet ise o zaman $I \times_f F$ twisted çarpımı ile birleştirilmiştir denir [31].

Şimdi torklu vektör alanının bir sınıflandırılması olan aşağıdaki sonucun ispatını verebiliriz.

Teorem 4.1.2. $I \times_f F$ twisted çarpımı ile birleştirilen her $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı

$$\mathcal{T} = \mu f \frac{\partial}{\partial s}$$

formundadır, burada s , I 'nin yay uzunluğu parametresi, μ , F üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyon ve f de twisting fonksiyonudur [31].

İspat: M , f twisting fonksiyonuna sahip $M = I \times_f F$ şeklinde bir twisted çarpımı olsun. O zaman M 'nin metrik tensörü

$$g = ds^2 + f^2 g_F \quad (4.2)$$

ile verilir, burada s , I 'nin yay uzunluğu parametresi ve g_F de F 'nin metrik tensörüdür.

M üzerinde $v = \mu f \partial / \partial s$ şeklinde tanımlı bir vektör alanını göz önüne alalım, burada μ , F üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyondur. O zaman

$$\nabla_v v = \mu \frac{\partial f}{\partial s} v,$$

$$\nabla_V v = (V \ln(\mu f))v + \mu \frac{\partial f}{\partial s} V$$

yazabiliriz. Böylece $v = \mu f \partial / \partial s$, $\varphi = \mu \partial f / \partial s$ torklu fonksiyonuna sahip (3.1) eşitliğini sağlayan bir torklu vektör alanı olur ve α tork formu her $V \in \mathcal{L}(F)$ vektörü alanı için

$$\alpha(v) = 0 \text{ ve } \alpha(V) = V(\ln \mu f)$$

şartlarını sağlar.

Şimdi $\mathcal{T}$ 'yu $I \times_f F$ ile irtibatlı olarak keyfi bir torklu vektör alanı olarak seçelim. O zaman tanımdan

$$\nabla_X \mathcal{T} = \varphi X + \alpha(X)\mathcal{T} \text{ ve } \alpha(\mathcal{T}) = 0 \quad (4.3)$$

yazılabilir. $\mathcal{T}$, I 'ya teğet olduğundan

$$\mathcal{T} = \rho \frac{\partial}{\partial s}, \rho = |\mathcal{T}| \quad (4.4)$$

alabiliriz. Ardından (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\rho \varphi \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = (\mathcal{T} \rho) \frac{\partial}{\partial s} + \rho^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} \quad (4.5)$$

olur. Diğer bir deyişle (4.2) eşitliğinden $I \times_f F$ 'nin Levi-Civita konneksiyonu her $V \in \mathcal{L}(F)$ vektör alanı için

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = 0, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V = \nabla_V \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial(\ln f)}{\partial s} V \quad (4.6)$$

eşitliklerini sağlar [32]. Böylece (4.5) eşitliğinden ve (4.6)'nın ilk denkleminde

$$\varphi = \rho \frac{\partial(\ln \rho)}{\partial s} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.3), (4.4) ve (4.6)'nın ikinci denkleminde her $V \in \mathcal{L}(F)$ için

$$\varphi V + \alpha(V)\mathcal{T} = \nabla_V \mathcal{T} = (V \rho) \frac{\partial}{\partial s} + \rho \frac{\partial(\ln f)}{\partial s} V$$

bulunur. Böylece

$$\varphi = \rho \frac{\partial(\ln f)}{\partial s}, \alpha(V) = V(\ln \rho) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial s} (\ln f - \ln \rho) = 0$$

yazılabilir.

F üzerinde bazı μ fonksiyonları için $\rho = \mu f$ alınabilir. Böylece ispatlanmış olur. Teorem 4.1.2'nin bir uygulaması olarak, Einstein manifoldları üzerindeki torklu vektör alanlarının bir sınıflandırılması aşağıdaki teoremden verilebilir.

Teorem 4.1.3. Bir M Einstein manifoldu üzerindeki her $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı

$$\mathcal{T} = \zeta Z \quad (4.9)$$

formundadır, burada Z , M üzerinde dairesel vektör alanıdır ve ζ , $Z\zeta = 0$ şartını sağlayan bir fonksiyondur.

Tersine (4.9) formundaki her vektör alanı M üzerinde bir torklu vektör alanıdır [31].

İspat: $\mathcal{T}$ bir M Riemann manifoldu üzerinde torklu vektör alanı olsun. O zaman Teorem 4.1.2 $\mathcal{T}\mu = 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bazı M fonksiyonları için $\mathcal{T} = \mu f \partial/\partial s$ olacak şekilde M 'nin bir $I \times_f F$ twisted çarpımı olduğunu verir. Özellikle eğer M bir Einstein manifold ise o zaman M lokal olarak, $\tilde{f}$ warping fonksiyonuna sahip bir $I \times_{\tilde{f}} \tilde{F}$ warped çarpımı olur, burada $\tilde{F}$, F 'e konformal olarak eşdeğer bir Riemann manifoldudur [30]. Böylece

$$\mathcal{T} = \zeta \tilde{f} \frac{\partial}{\partial s}$$

elde edilir ki burada ζ , $\mathcal{T}\mu = 0$ şartını sağlayan bir fonksiyondur.

Şimdi $Z = \tilde{f} \partial/\partial s$ alınırsa (4.6) eşitliğinden her $V \in \mathcal{L}(F)$ için

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} Z = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s},$$

$$\nabla_V Z = \tilde{f} \nabla_V \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} V \quad (4.10)$$

bulunur. Sonuç olarak $Z\zeta = 0$ iken $\mathcal{T} = \zeta Z$ olacak şekilde bir dairesel Z vektör alanı mevcuttur.

Tersine, (4.9) ile verilen vektör alanının bir torklu vektör alanı olduğu gösterilebilir. Teorem 4.1.2'nin bir diğer uygulaması aşağıdaki şekilde verilebilir.

Sonuç 4.1.1. Sabitlere kadar, $I \times_{\eta} F$ warped çarpımı ile bağlantılı en fazla bir tane dairesel vektör alanı vardır [31].

İspat: Z_1 ve Z_2 , $I \times_{\eta} F$ warped çarpımı ile bağlantılı iki dairesel vektör alanı olsunlar. Teorem 4.1.2'den F üzerinde μ_1 ve μ_2 sabitleri için

$$Z_i = \mu_i \eta \frac{\partial}{\partial s}, \quad i = 1, 2$$

yazılabilir. (4.6), (4.10) ve dairesel vektör alanının tanımı göz önüne alınırsa her $V \in \mathcal{L}(F)$ için

$$\varphi_i V = \nabla_V Z_i = \eta (V\mu_i) \frac{\partial}{\partial s} + \mu_i \frac{\partial \eta}{\partial s} V$$

elde edilir. Böylece $V\mu_i = 0$ bulunur. Burada μ_1 ve μ_2 sabitlerdir. O halde Z_1 ve Z_2 sadece bir sabit ile birbirinden farklıdır.

Hatırlatma 4.1.1. Eğer v_1 ve v_2 bir M Riemann manifoldu üzerinde iki eş zamanlı vektör alanı ise o zaman $i = 1, 2$ için $\nabla_X v_i = X$ olur. O halde

$$\nabla_X(v_1 - v_2) = 0$$

olur. Böylece $v_2 = v_1 + c$ yazılabilir, burada c bir paralel vektördür. Yani $\nabla c = 0$ dır. Sonuç olarak, paralel vektörlere kadar, bir Riemann manifoldu üzerinde en fazla bir tane eş zamanlı vektör alanı mevcuttur [31].

4.2. Torklu Vektör Alanlarının Ricci Solitonlara Uygulamaları

(M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. a, b birer fonksiyon ve α bir 1-form olmak üzere eğer (M, g) 'nin Ricci tensörü

$$Ric = ag + b\alpha \otimes \alpha$$

eşitliğini sağlıyorsa (M, g) bir yarı-Einstein manifoldu olarak adlandırılır.

Yarı-Einstein manifoldları Einstein alan denklemlerinin tam çözümü çalışırken, konformal flat uzaylarının yarı-umbilik hiperyüzeylerinin göz önüne alınması ile birlikte ortaya çıkmıştır. Özellikle iyi bilinen Robertson-Walker (spacetime) yarı-Einstein manifoldudur [33].

Sabit eğrilikli uzaylardaki yarı-Einstein hiperyüzeyleri üzerinde birçok sonuç elde edilmiştir [34-36]. Son zamanlarda yarı-Einstein manifoldları birçok araştırmacı tarafından ele alınmaktadır [37-41].

Hatırlatma 4.2.1. Bilindiği kadarıyla yarı-Einstein terimi ilk olarak 1980'li yıllarda kullanılmıştır [42,43].

Bir (M, g) yarı-Riemann manifoldunda Ricci tensörü

$$Ric = ag + b\alpha \otimes \alpha + c\beta \otimes \beta$$

eşitliğini sağlar ise genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold [44],

$$Ric = ag + b\alpha \otimes \beta + c\beta \otimes \alpha \text{ veya } Ric = ag + bE$$

eşitliğini sağlar ise karışık yarı-Einstein manifold [45] (veya hemen hemen yarı-Einstein manifold [46]) olarak adlandırılır. Burada a, b, c fonksiyon, α, β 1-form ve E de M üzerinde sıfır olmayan bir $(0, 2)$ simetrik tensördür.

Bu bölümde ise (torklu vektör alanlarının sınıflandırılması ve Ricci solitonlar için uygulamalar) ele alınan aşağıdaki ifadeler yer verilecektir.

Tanım 4.2.1. Bir yarı-Riemann manifoldu eğer onun Ricci tensörü

$$Ric = ag + b(\beta \otimes \gamma + \gamma \otimes \beta)$$

şartını sağlarsa hemen hemen yarı-Einstein olarak adlandırılır, burada a, b bazı fonksiyonlar ve β, γ birer 1-formdur [31].

Aşağıda torklu potansiyel alanlara sahip Ricci solitonların bazı sonuçlarını vereceğiz.

Önerme 4.2.1. Bir $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ Ricci solitonun potansiyel alanı bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı ise o zaman (M, g) bir hemen hemen yarı-Einstein manifoldudur [31].

İspat: Kabul edelim ki $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ potansiyel alanı torklu vektör alanı olan bir Ricci soliton olsun. O zaman (3.1)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathcal{T}}g)(X, Y) &= g(\nabla_X \mathcal{T}, Y) + g(\nabla_Y \mathcal{T}, X) \\ &= 2\varphi g(X, Y) + \alpha(X)g(\mathcal{T}, Y) + \alpha(Y)g(\mathcal{T}, X) \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak yazılabilir, burada X, Y M 'ye teğet vektör alanlarıdır.

(1.3) ve (4.11) birlikte düşünülürse

$$Ric(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) - \frac{1}{2}\alpha(X)g(\mathcal{T}, Y) - \frac{1}{2}\alpha(Y)g(\mathcal{T}, X) \quad (4.12)$$

elde edilir. Eğer $\mathcal{T}$ 'nin dual 1-formu γ ile gösterilirse (4.12)

$$Ric = (\lambda - \varphi)g - \frac{1}{2}(\alpha \otimes \gamma + \gamma \otimes \alpha)$$

şeklinde yazılır. Böylece (M, g) bir hemen hemen yarı-Einstein manifoldu olur. Buradan (4.11) göz önüne alınırsa aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.1. Bir M Riemann manifoldu üzerindeki $\mathcal{T}$ torklu vektör alanının Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart bir tekrarlı vektör alanının

$$\nabla_X \mathcal{T} = \alpha(X)\mathcal{T} \text{ ve } \alpha(\mathcal{T}) = 0$$

eşitliğini sağlamasıdır, burada α bir 1-formdur [31].

$boy M \geq 3$ olmak üzere (M, g) bir Einstein manifold ise (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu, aşikar olarak adlandırılır. Bu açıklamadan sonra aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1. $\mathcal{T}$ torklu potansiyel alanına sahip bir $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ Ricci solitonunun aşikar olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}$ 'nin bir dairesel vektör alanı olmasıdır [31].

İspat: $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ 'nın n -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde Ricci solitonu olduğunu kabul edelim. O zaman M 'ye teğet her X, Y vektör alanı için (4.12) eşitliği sağlanır. Özellikle her V dik vektör alanı için

$$Ric(\mathcal{T}, V) = -\frac{1}{2}\alpha(\mathcal{T})g(\mathcal{T}, V) - \frac{1}{2}\alpha(V)g(\mathcal{T}, \mathcal{T})$$

yazılabilir. $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı olduğundan $\alpha(\mathcal{T}) = 0$ olur. Böylece $\mathcal{T}$ 'ya dik her V dik vektör alanı için

$$Ric(\mathcal{T}, V) = -\frac{1}{2}\alpha(V)g(\mathcal{T}, \mathcal{T}) \quad (4.13)$$

olur. O halde eğer (M, g) bir Einstein manifold ise (4.13)'den $\alpha(V)g(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = 0$ yazılabilir. $\mathcal{T}$ sıfırdan farklı olduğundan $\mathcal{T}$ 'ya ortogonal olan her V vektörü için $\alpha(V) = 0$ elde edilir. Ayrıca $\alpha(\mathcal{T}) = 0$ olduğundan $\alpha = 0$ olur. Böylece $\mathcal{T}$ potansiyel alanı bir dairesel vektör alanı olur.

Tersine, eğer (M, g, Z, λ) bir dairesel Z vektör alanına sahip Ricci solitonu ise o zaman bazı φ fonksiyonları için $\nabla_X Z = \varphi X$ yazılabilir. Böylece M 'ye teğet her X, Y için

$$(\mathcal{L}_Z g)(X, Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) = 2\varphi g(X, Y)$$

olur. Son eşitlik (1.3) ile beraber düşünülürse

$$Ric(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) \quad (4.14)$$

bulunur. Bu ise (M, g) 'nin bir Einstein manifold olması demektir. Sonuç olarak Ricci soliton aşıkardır.

Hatırlatma 4.2.2. $boyM \geq 3$ olmak üzere (M, g, ξ, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer Ricci solitonun ξ bir potansiyel alanı bir dairesel Z vektör alanı ise o zaman Z bazı c sabitleri için $\nabla_X Z = cX$ eşitliğini sağlar. Bu ise aşağıdaki şekilde görülebilir. λ , (4.14)'de verilen bir sabit ve $boyM \geq 3$ olduğundan (4.14)'deki φ fonksiyonu da (M, g) bir Einstein manifold olduğundan, bir sabit olur [31].

4.3. Kanonik Torklu Vektör Alana Sahip Ricci Solitonlar

Bu kısımda Teorem 4.1.1 bakış açısıyla aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.3.1. Bir $I \times_f F$ twisted çarpımı için, $f \partial/\partial s$ torklu vektör alanı $I \times_f F$ 'in kanonik torklu vektör alanı olarak adlandırılır, burada s , I üzerindeki yay uzunluğu parametresidir. $f \partial/\partial s$ kanonik vektör alanını $\mathcal{T}_{ca}^f$ ile göstereceğiz [31].

Teorem 4.1.1'den, eğer bir M Riemann manifoldu torklu vektör alanına sahip ise o zaman M lokal olarak bir $I \times_f F$ twisted çarpımdır, burada f twisting fonksiyonu ve F bir $(n-1)$ -boyutlu Riemann manifoldudur.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1. Eğer $(I \times_f F, g, \mathcal{T}_{ca}^f, \lambda)$, $\mathcal{T}_{ca}^f$ kanonik torklu vektör alanına sahip bir Ricci soliton ise o zaman

- a) $\mathcal{T}_{ca}^f$ bir dairesel vektör alanıdır,
- b) $(I \times_f F, g)$ bir Einstein manifolddur [31].

İspat: Kabul edelim ki $(I \times_f F, g, \mathcal{T}_{ca}^f, \lambda)$ potansiyel alan $\mathcal{T}_{ca}^f$ torklu kanonik vektör alanına sahip bir Ricci soliton olsun. O zaman $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{ca}^f$ için (3.1) sağlanır ve M 'ye teğet her X, Y için

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{ca}^f} g)(X, Y) = 2\varphi g(X, Y) + \alpha(X)g(\mathcal{T}_{ca}^f, Y) + \alpha(Y)g(\mathcal{T}_{ca}^f, X) \quad (4.15)$$

olur. (1.3) ve (4.15) birlikte düşünülürse

$$Ric(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) - \frac{1}{2}\alpha(X)g(\mathcal{T}_{ca}^f, Y) - \frac{1}{2}\alpha(Y)g(\mathcal{T}_{ca}^f, X) \quad (4.16)$$

elde edilir.

$\mathcal{T}_{ca}^f, I \times_f F$ üzerinde kanonik torklu vektör alanı olduğundan

$$g = ds^2 + f^2 g_F, \mathcal{T}_{ca}^f = f \frac{\partial}{\partial s} \quad (4.17)$$

bulunur. Böylece (4.8)'den her $V \in \mathcal{L}(F)$ vektör alanı için

$$\varphi = f_s, \alpha(V) = V(\ln f) \quad (4.18)$$

olur. $\alpha(\mathcal{T}_{ca}^f) = 0$ olduğundan (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden $V, W \in \mathcal{L}(F)$ vektör alanları için

$$Ric(\mathcal{T}_{ca}^f, \mathcal{T}_{ca}^f) = (\lambda - f_s)f^2 \quad (4.19)$$

$$Ric(\mathcal{T}_{ca}^f, V) = -\frac{V(f^2)}{4} \quad (4.20)$$

$$Ric(V, W) = (\lambda - f_s)g(V, W)$$

bulunur. $M, I \times_f F$ twisted çarpımının açık kısmı olduğundan her $V, W \in \mathcal{L}(F)$ vektör alanları için

$$Ric(\mathcal{T}_{ca}^f, \mathcal{T}_{ca}^f) = (1 - n)ff_{ss}, n = \dim M \quad (4.21)$$

$$Ric(\mathcal{T}_{ca}^f, V) = (2 - n)V(f_s) \quad (4.22)$$

$$Ric(V, W) = Ric^F(V, W) + (3 - n)\{VW(\ln f) - (\nabla_V^F W)(\ln f)\} + (n - 1)V(\ln f)W(\ln f) - g(V, W)\{\Delta(\ln f) + g(\nabla(\ln f), \nabla(\ln f))\} \quad (4.23)$$

yazılır [30], burada $\Delta(\ln f)$, M üzerinde $\ln f$ 'in Laplacianıdır.

(4.19) ve (4.21) eşitliklerinden

$$(1 - n)f_{ss} = (\lambda - f_s)f \quad (4.24)$$

bulunur. Diğer bir deyişle (4.20) ve (4.22) eşitliklerinden her $V \in \mathcal{L}(F)$ için

$$4(n - 2)V(f_s) = V(f^2)$$

elde edilir.

(4.23) diferensiyel denklemi çözüldükten sonra bazı $k = k(s)$ fonksiyonları için

$$4(n - 2)f_s - f^2 = k(s) \quad (4.25)$$

bulunur. (4.25) eşitliğinde türev alınırsa

$$f_{ss} = \frac{2ff_s + k'(s)}{4(n-2)} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) eşitliği (4.24)'de yerine yazılırsa

$$(n - 3)f_s = (n - 1)\frac{k'(s)}{2f} + 2(n - 2)\lambda \quad (4.27)$$

yazılabilir.

(4.25) denklemi f_s için çözülür ve (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$(n - 3)f^3 - [(n - 3)k(s) + 8(n - 2)^2\lambda]f = 2(n^2 - 3n + 2)k'(s) \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) denklemi f twisting fonksiyonunun sadece s 'e bağlı bir fonksiyon olduğunu verir, fakat F üzerinde değildir. Böylece $I \times_f F$ bir warped çarpımıdır. Dolayısıyla $\mathcal{T}_{ca}^f$ kanonik torklu vektör alanı dairesel bir vektör alanıdır.

Sonuç olarak Teorem 4.2.1'den $(I \times_f F, g)$ bir Einstein manifold olur.

Hatırlatma 4.3.1. Z dairesel potansiyel alanına sahip (M, g, Z, λ) Ricci solitonları tam olarak [47]'de belirlenmiştir.

Hatırlatma 4.3.2. Eğer Teorem 4.3.1 de $(I \times_f F, g)$ üzerinde tanımlanan Ricci solitonların potansiyel alanı $I \times_f F$ ile uyumlu keyfî bir torklu vektör alanı ise o zaman Teorem 4.1.2'den F

üzerindeki bazı μ fonksiyonları için $\mathcal{T} = \mu f \partial / \partial s$ olur. Bu durumda $I \times_{\tilde{f}} \tilde{F}$ twisted çarpımını göz önüne alabiliriz, burada $\tilde{f} = \mu f$ ve $\tilde{F}$ da $\tilde{g}_F = -\mu^2 g_F$ metriğine sahip bir manifolddur. O zaman $\tilde{g} = ds^2 + \tilde{f}^2 \tilde{g}_F$ metriğine sahip $(I \times_{\tilde{f}} \tilde{F}, \tilde{g}, \mathcal{T}, \lambda)$ bir Ricci solitondur ki onun $\mathcal{T}$ potansiyel alanı $I \times_{\tilde{f}} \tilde{F}$ 'in $\mathcal{T}_{ca}^{\tilde{f}}$ kanonik torklu vektör alanıdır [31].

Teorem 4.3.1'in bir uygulaması olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3.1. $(I \times_f F, g, \mathcal{T}_{ca}^f, \lambda)$, potansiyel alanı olan $\mathcal{T}_{ca}^f$ kanonik torklu vektör alanına sahip sabit bir Ricci soliton olsun. Eğer $boyF \geq 2$ ise o zaman aşağıdakiler geçerlidir [31].

- a) $\mathcal{T}_{ca}^f$ bir paralel vektör alanıdır.
- b) f bir sabittir. (c 'ye eşit)
- c) $(I \times_c F, g)$ bir Ricci-flat manifolddur.
- d) F Ricci-flattır.

İspat: $(I \times_f F, g, \mathcal{T}_{ca}^f, \lambda)$, potansiyel alanı olan $\mathcal{T}_{ca}^f$ kanonik torklu vektör alanına sahip bir Ricci soliton olsun. O zaman Teorem 4.3.1'den $\mathcal{T}_{ca}^f$ bir dairesel vektör alanıdır. Böylece bazı φ fonksiyonları için

$$\nabla_X \mathcal{T}_{ca}^f = \varphi X \quad (4.29)$$

bulunur. (4.16) eşitliğinden $I \times_f F$ Ricci tensörünün her X, Y vektör alanı için

$$Ric(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) \quad (4.30)$$

eşitliğini sağladığı görülür. $boyF \geq 2$ ve $I \times_f F$ 'in bir Einstein manifold olmasından dolayı (4.30) eşitliği φ 'nin b gibi bir sabit olduğunu verir. Dolayısıyla (4.29)'dan

$$\nabla_X \mathcal{T}_{ca}^f = bX \quad (4.31)$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki Ricci soliton sabit olsun. O zaman $\lambda = 0$ olur. (4.30) denkleminde her X, Y vektör alanı için

$$Ric(X, Y) = -bg(X, Y) \quad (4.32)$$

bulunur.

Diğer bir deyişle (4.29) denkleminde R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, \mathcal{T}_{ca}^f) \mathcal{T}_{ca}^f = \nabla_X \nabla_{\mathcal{T}_{ca}^f} \mathcal{T}_{ca}^f - \nabla_{\mathcal{T}_{ca}^f} \nabla_X \mathcal{T}_{ca}^f - \nabla_{[X, \mathcal{T}_{ca}^f]} \mathcal{T}_{ca}^f = 0$$

eşitliğini sağlar. Böylece $Ric(\mathcal{T}_{ca}^f, \mathcal{T}_{ca}^f) = 0$ olur. Dolayısıyla $b = 0$ elde edilir ve (4.32)'den $I \times_f F$ 'in bir Ricci-flat manifold olduğu görülür. Ayrıca (4.31)'den $\mathcal{T}_{ca}^f$ 'in bir paralel vektör alanı olduğu bulunur ve (4.19)'dan $f_s = 0$ elde edilir. Böylece f bir sabittir ve F , Ricci-flat olur.

5. MATERYAL VE METOT

Rektifiye altmanifoldlar ve torklu vektör alanı, torklu vektör alanları ve bazı uygulamaları, eş zamanlı vektör alanları, konformal vektör alanları, dairesel vektör alanları ve Ricci solitonların geometrisi bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalar bazı özel vektör alanlarının özelliklerini ve uygulamalarını içermekte ve prestijli dergilerde yayınlanmış makalelerdir. Vektör alanlarının diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olduğu ve birçok uygulamasının olduğu açıktır. Literatürde yukarıda verilen ve daha başka konu ile alakalı çalışmaları incelemek ve bu çalışmalarda değinilmeyen vektör alanlarının özelliklerini incelemek, daha sonra yapılacak çalışmalara bir ön bilgi oluşturacaktır. Ayrıca açık problemler üzerinde durularak eğer hesaplamalardan önemli sonuçlar çıkarılıp bu sonuçlar anlamlandırılırsa çalışma özgün bir değere de kavuşacaktır. Bu bağlamda konu ile ilgili kaynaklar incelendi, bununla ilgili makale ve kitaplar araştırıldı. Aynı zamanda Riemann manifoldu üzerinde vektör alanları incelendi ve farklı uzaydaki karşılıkları araştırıldı.

6. BULGULAR

Bu çalışmada, ilk olarak keyfi bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldlar kavramı verilmiştir. Daha sonra Riemann manifoldlarında torklu vektör alanları verilmiş ve torklu vektör alanına sahip Riemann manifoldlarının bazı sınıflandırılmaları incelenmiştir. Bir torklu vektör alanına sahip bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldların bazı karakterizasyonları incelenmiştir. Riemann manifoldları üzerindeki bütün torklu vektör alanları sınıflandırılmıştır. Ayrıca torklu potansiyel vektör alanına sahip Ricci solitonlar incelenmiştir. Özellikle her Ricci solitonu eğer torklu potansiyel vektör alanına sahip ise o zaman hemen hemen yarı-Einstein manifold olması durumu verilmiş ve Einstein manifold olması için gerek ve yeter şartın torklu vektör alanının bir dairesel vektör alanı olması gerektiği kanıtlanmıştır. Son olarak Ricci solitonlarla ilgili elde edilen bazı sonuçlara değinilmiş, çalışmalarla ilgili elde edilen sonuçlar ve uygulamalar detaylıca incelenmiştir.

7. SONUÇLAR

- 1) Keyfi bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldlar kavramı verildi.
- 2) Riemann manifoldlarında torklu vektör alanları verildi.
- 3) E^3 'deki bir eğrinin twisted olması için gerek ve yeter şart her noktada sıfırdan farklı torsiyona sahip olmasıdır.
- 4) Bir M Riemann n -manifoldunun bir torklu vektör alanı olması için gerek ve yeter şart bir $I \times_\lambda F$ twisted çarpımının lokal olmasıdır teoremi verildi.
- 5) Torklu vektör alana sahip Riemann manifoldlarının birçok örneği olduğu görüldü.
- 6) Her Riemann manifoldun bir proper twisted çarpımı lokal olarak ifade edilemez sonucu elde edildi.
- 7) Bir M Riemann manifoldu üzerinde bir torklu vektör alanı bir gradyent alanı ise, o zaman bir dairesel vektör alanı olduğu görüldü.
- 8) Torklu vektör alanına sahip bir Riemann manifoldunda rektifiye altmanifoldların bazı karakterizasyonları incelendi.
- 9) $M, Z^T \neq 0$ iken $Z \neq 0$ dairesel vektör alanına sahip bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. O zaman M 'nin, Z 'ye göre bir rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şartın Z 'nin teğetsel bileşeni Z^T 'nin, M üzerinde Z 'nin dairesel fonksiyonunun kısıtlaması ile verilen dairesel fonksiyonunun bir dairesel vektör alanı olduğu görüldü.
- 10) $M, Z^T \neq 0$ iken $Z \neq 0$ eş zamanlı vektör alanına sahip bir $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. O zaman M 'nin, Z 'ye göre bir rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şartın Z 'nin Z^T teğetsel bileşeninin M üzerinde bir eş zamanlı vektör alanı olduğu görüldü.
- 11) Riemann manifoldları üzerindeki torklu vektör alanları sınıflandırıldı.
- 12) Sabitlere kadar, $I \times_\eta F$ warped çarpımı ile bağlantılı en fazla bir tane dairesel vektör alanı olduğu görüldü.
- 13) Paralel vektörlere kadar, bir Riemann manifoldu üzerinde en fazla bir tane eş zamanlı vektör alanı mevcut olduğu sonucuna varıldı.
- 14) Torklu vektör alanına sahip Ricci solitonlar incelendi.
- 15) Bir $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ Ricci solitonun potansiyel alanı bir $\mathcal{T}$ torklu vektör alanı ise o zaman (M, g) bir hemen hemen yarı-Einstein manifoldudur önermesi verildi.
- 16) Bir M Riemann manifoldu üzerindeki $\mathcal{T}$ torklu vektör alanının Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart olarak bir tekrarlı vektör alanının $\nabla_X \mathcal{T} = \alpha(X)\mathcal{T}$ ve $\alpha(\mathcal{T}) = 0$ eşitliğini sağlaması gerektiği görüldü.

- 17) $\mathcal{T}$ torklu potansiyel alanına sahip bir $(M, g, \mathcal{T}, \lambda)$ Ricci solitonunun aşıkâr olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{T}$ 'nin bir dairesel vektör alanı olması gerektiği görüldü.



KAYNAKLAR

- [1] Chen, B.-Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane, *Amer. Math. Monthly*, 110(2), 147-152
- [2] Chen, B.-Y. (2001). Constant-ratio hypersurfaces, *Soochow J. Math.*, 21, 353-361
- [3] Chen, B.-Y. (2002). Convolution of Riemannian manifolds and its applications, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 66(2), 177-191
- [4] Chen, B.-Y. (2002). Geometry of position functions of Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean space., *J. Geom.*, 74, 61-77
- [5] Chen, B.-Y. (2003). Constant-ratio space-like submanifolds in pseudo-Euclidean space, *Houston J. Math.*, 29(2), 281-294
- [6] Chen, B.-Y. (2003). More on convolution of Riemannian manifolds, *Beiträge Algebra Geom.*, 44, 9-24
- [7] Chen, B.-Y. (2016). Topics in differential geometry associated with position vector fields on Euclidean submanifolds, *Arab J. Math. Sci.*, DOI 10.1016/j.ajmsc.08.001
- [8] Chen, B.-Y. (2016). Differential geometry of rectifying submanifolds, *Int. Electron. J. Geom.*, 9(2), 1-8
- [9] Yano, K. (1944). On torse forming direction in a Riemannian space., *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20, 340-345
- [10] Mihai, A. and Mihai, I. (2013). Torse forming vector fields and exterior concurrent vector fields on Riemannian manifolds and applications, *J. Geom. Phys.*, 73, 200-208
- [11] Schouten, J. A. (1954). Ricci Calculus, *Springer-Verlag*, Berlin
- [12] Chen, B.-Y. (2014). A simple characterization of generalized Robertson-Walker spacetimes, *Gen. Relativity Gravitation*, 46(12), Article ID 1833
- [13] Yano, K. (1940). Concircular geometry. I, Concircular transformations, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 16, 195-200
- [14] Yano, K. and Chen, B.-Y. (1971). On the concurrent vector fields of immersed manifolds., *Kodai Math. Sem. Rep.*, 23, 343-350
- [15] Chen, B.-Y. (2016). A survey on Ricci solitons on Riemannian submanifolds, *Contemp. Math.*, 674, 27-39
- [16] Chen, B.-Y. and Deshmukh, S. (2014). Classification of Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces, *Internat. J. Math.*, 25(11), Article ID 1450104
- [17] Chen, B.-Y. and Deshmukh, S. (2014). Geometry of compact shrinking Ricci solitons, *Balkan J. Geom. Appl.*, 19(1), 13-21
- [18] Chen, B.-Y. and Deshmukh, S. (2015). Ricci solitons and concurrent vector fields, *Balkan J. Geom. Appl.*, 20(1), 14-25
- [19] Morgan, J. and Tian, G. (2014). Ricci Flow and the Poincaré Conjecture, *Clay Mathematics Monographs*, 5, Cambridge, MA
- [20] Hacısalıhoğlu, H. H. (1993). *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları
- [21] Hacısalıhoğlu, H. H. (1975). *Lineer Cebir*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları
- [22] Sabuncuoğlu, A. (2006). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım

- [23] Şahin, B. (2021). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık
- [24] Do Carmo, M. P. (2012). *Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler*, Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara
- [25] Chen, B.-Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York
- [26] Chen, B.-Y. (2011). *Pseudo-Riemannian geometry, δ -invariants and applications*, World Scientific, Singapore
- [27] Chen, B.-Y. (2017). Rectifying submanifolds of Riemannian manifolds and torqued vector fields, *Kragujevac J. Math.*, 41(1), 93-103
- [28] Mihai, I., Rosca, R. and Verstraelen, L. (1996). *Some Aspects of the Differential Geometry of Vector Fields: on Skew Symmetric Killing and Conformal Vector Fields and their Relations to Various Geometrical Structures*, vol. 2, Publication of Centre for Pure and Applied Differential Geometry, Brussels
- [29] Ponge, R. and Reckziegel, H. (1993). Twisted products in pseudo-Riemannian geometry, *Geom. Dedicata*, 48(1), 15-25
- [30] Fernández-López, M., García-Río, E., Kupeli, D. N. and Ünal, B. (2001). A curvature condition for a twisted product to be a warped product, *Manuscripta Math.*, 106(2), 213-217
- [31] Chen, B.-Y. (2017). Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitons, *Kragujevac J. Math.*, 41(2), 239-250
- [32] Chen, B.-Y. (1981). *Geometry of Submanifolds and Its Applications*, Science University of Tokyo, Tokyo
- [33] Deszcz, R., Glogowska, M., Jelowicki, J., Petrović-Torgašev, M. and Zafindratafa, G. (2013). On Riemann and Weyl compatible tensors, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 94(108), 111-124
- [34] Deszcz, R., Glogowska, M., Hotłoś, M. and Sentürk, Z. (1998). On certain quasi-Einstein semisymmetric hypersurfaces, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 41, 151-164
- [35] Deszcz, R., Hotłoś, M. and Sentürk, Z. (2001). On curvature properties of quasi-Einstein hypersurfaces in semi-Euclidean spaces, *Soochow J. Math.*, 27, 375-389
- [36] Deszcz, R. and Verstraelen, L. (1991). Hypersurfaces of semi-Riemannian conformally flat manifolds, in: *Geometry and Topology of Submanifolds, III*, World Sci., River Edge, NJ, 131-147
- [37] Chaki, M. C. and Maity, R. K. (2000). On quasi Einstein manifold, *Publ. Math. Debrecen*, 57, 297-306
- [38] Dumitru, D. (2012). On quasi-Einstein warped products, *Jordan J. Math. Stat.*, 5, 85-95
- [39] Jana, S. K., Shaikh, A. A. (2012). On quasi-Einstein spacetime with space-matter tensor, *Lobachevskii J. Math.*, 33, 255-261
- [40] Kiosak, V. A. (2012). On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces, *J. Math. Sci.*, 184, 12-18
- [41] Lemence, R. S. (2012). On sectional curvature of quasi-Einstein manifolds, *Int. J. Math. Analysis*, 6, 1105-1113
- [42] Goldberg, S. I. and Vaisman, I. (1980). On compact locally conformal Kaehler manifolds with nonnegative sectional curvature, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Ser. V*, 2(2), 117-123
- [43] Nikolaenko, V. M. (1980). Higgs mesons in gauge gravitation, *Theoret. and Math. Phys.*, 42(2), 128-133
- [44] De, U. C. and Ghosh, G. C. (2004). On generalized quasi-Einstein manifolds, *Kyungpook Math. J.*, 44, 607-615

- [45] Mallick, S. and De, U. C. (2014). On mixed quasi-Einstein manifolds, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 57, 59-73
- [46] De, U. C. and Gazi, A. K. (2008). On nearly quasi Einstein manifold, *Novi Sad J. Math.*, 38(2), 115-121
- [47] Chen, B.-Y. (2015). Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons, *Bull. Korean Math. Soc.*, 52, 1535-1547



ÖZGEÇMİŞ

Elif TÜRKAY

