

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

77115

ALİ İHSAN GENÇ

WALLMAN-FRINK KOMPAKTLAMALAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

77115

ADANA, 1998

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WALLMAN-FRINK KOMPAKTLAMALAR

ALİ İHSAN GENÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 23.12.2018 tarihinde aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oy Birliği ile Kabul Edilmiştir.

İmza

Y.Doç.Dr.Fikret KUYUCU
DANIŞMAN

İmza

Y.Doç.Dr.Doğan DÖNMEZ
ÜYE

İmza

Y.Doç.Dr.İsmet ALTINTAŞ
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod: 1483



Prof.Dr.Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Not:Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin ,çizelge,şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ**YÜKSEK LİSANS TEZİ
WALLMAN-FRINK KOMPAKTLAMALAR****ALI İHSAN GENÇ****ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU****Yıl :1998, Sayfa :31****Jüri : Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU
Yrd. Doç. Dr. Doğan DÖNMEZ
Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ**

Bu çalışmada bir X uzayının ilk olarak 1938'de Wallman tarafından verilen ve daha sonra 1964'te Frink tarafından geliştirilen bir yöntem ile Wallman-Frink kompaktlamaları inşa edilmiştir. Daha sonra bir X uzayının her kompaktlamasının Wallman-Frink olup olmadığı sorusu üzerinde durulmuş ve bu sorunun çözümü ayrık uzaylara indirgenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Tam regüler uzay, kompaktlamalar, normal baz.

**ABSTRACT
MSc THESIS**

WALLMAN-FRINK COMPACTIFICATIONS

ALİ İHSAN GENÇ

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF CUKUROVA**

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Year: 1998 , Pages:31

Jury

: Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Yrd. Doç. Dr. Doğan DÖNMEZ

Yrd. Doç. DR. İsmet ALTINTAŞ

In this work we construct the Wallman-Frink compactifications of an arbitrary topological space X . This method was first introduced by Wallman in 1938 and later developed by Frink in 1964. We also investigate whether every compactification of X is of Wallman-Frink type . We reduce this question to the case of discrete spaces.

Key Words: Completely regular space, compactifications, normal base.

TEŞEKKÜR

Başta danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Fikret KUYUCU olmak üzere
Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Başkanı Prof. Dr.
Fikri AKDENİZ'e, Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Başkanı Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Kompaktlamalar.....	1
1.2. Sıfır Kümeler.....	7
2. WALLMAN-FRINK KOMPAKTLAMALARI.....	11
2.1. Stone Topoloji.....	11
2.2. Wallman-Frink Kompaktlamalarının İnşası.....	18
3. AYRIK VE HERHANGİ BİR TYCHONOFF UZAYININ WALLMAN-FRINK KOMPAKTLAMALARININ DENKLİĞİ.....	24
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	31

1.1 Kompaktlamalar

Tanım 1.1.1: X bir topolojik uzay olsun. Her $F \subset X$ kapalı ve $x \in X - F$ için $g(x) = 0$ ve $g(F) = \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $g: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa X e *tam regüler uzay* denir.

Bu tanıma denk bir ifadeyi şöyle verebiliriz:

Her $F \subset X$ kapalı ve her $x \in X - F$ için $f(x) \notin Cl_f(F)$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow R$ fonksiyonu varsa X e *tam regüler uzay* denir.

Şimdi bu iki tanımın denklğini gösterelim:

$F \subset X$ kapalı ve $x \in X - F$ olsun. O zaman $g(x) = 0$ ve $g(F) = \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $g: X \rightarrow [0,1] \subset R$ fonksiyonu vardır. $Cl_g(F) = \{1\}$ olduğundan $g(x) \notin Cl_g(F)$ dir.

Diğer taraftan , $f(x) \notin Cl_f(F)$ ise $(f(x) - \delta, f(x) + \delta) \cap f(F) = \emptyset$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

$h: R \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunu

$$h(r) = \min \left\{ \frac{|r - f(x)|}{\delta}, 1 \right\}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $g = h \circ f: X \rightarrow [0,1]$ süreklidir ve $x \in X - F$ için $g(x) = 0$ ve $g(F) = \{1\}$ dir.

Tanım 1.1.2: X bir topolojik uzay olsun. Eğer X Hausdorff ve tam regüler ise X e *Tychonoff uzay* denir.

Tanım 1.1.3: X bir Hausdorff uzay olsun. X in ayrık ve kapalı her A, B alt kümeleri için $A \subset U$ ve $B \subset V$ olacak şekilde ayrık ve açık U, V alt kümeleri varsa X e *normal uzay* denir.

Teorem 1.1.4: Normal uzaylar tam regülerdir.

Teorem 1.1.5: Kompakt Hausdorff uzaylar tam regülerdir.

Tanım 1.1.6: X ve $\alpha \in A$ için Y_α topolojik uzaylar ve $F = \{f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha: \alpha \in A\}$ fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer her $x, y \in X, x \neq y$ için $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ olacak şekilde bir $f_\alpha \in F$ varsa F ye *noktaları ayırır* denir.

Eğer her $G \subset X$ kapalı ve her $x \in X - G$ için $f_\alpha(x) \notin Cl_\alpha(G)$ olacak şekilde bir $f_\alpha \in F$ varsa F ye *kapalı kümelerden noktaları ayırır* denir.

F tarafından belirlenen *değerlendirme fonksiyonu* ise $[e_F(x)](\alpha) = f_\alpha(x)$ ile tanımlı $e_F: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ fonksiyonudur.

Teorem 1.1.7: X ve $\alpha \in A$ için X_α topolojik uzaylar olsun. O zaman

$f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in A$ için $\pi_\alpha \circ f: X \rightarrow X_\alpha$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

Tanım 1.1.8: X ve Z iki topolojik uzay olsun. $X \sim f(X) \subset Z$ (homeomorfik) olacak şekilde bir $f: X \rightarrow Z$ fonksiyonuna X in Z içine bir *gömmesi* denir .

Teorem 1.1.9 (Gömme Teoremi):

- a) Her $\alpha \in A$ için f_α sürekli ise e_F de sürekli.
- b) Eğer F noktaları ayırıyorsa e_F bire birdir.
- c) Eğer F kapalı kümelerden noktaları ayırıyorsa $e_F: X \rightarrow e_F(X)$ açıktır.

İSPAT:

a) $\pi_\alpha \circ f$. İzdüşüm fonksiyonu olmak üzere $f_\alpha = \pi_\alpha \circ e_F$ dir. Her $\alpha \in A$ için f_α sürekli olduğundan, Teorem 1.1.7'den e_F de sürekli.

b) $x, y \in X, x \neq y$ olsun. F noktaları ayırdığından, bir $\alpha \in A$ için $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ olacak şekilde bir $f_\alpha \in F$ vardır. O zaman

$$[e_F(x)](\alpha) = f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y) = [e_F(y)](\alpha)$$

dır. Böylece $e_F(x) \neq e_F(y)$ olup e_F bire birdir.

c) $U \subset X$ açık ve $x \in U$ olsun. F kapalı kümelerden noktaları ayırdığından $f_\alpha(x) \notin Cl_\alpha(X - U)$ olacak şekilde bir $f_\alpha \in F$ vardır. $V = \pi_\alpha^{-1}[Y_\alpha - Cl_\alpha(X - U)]$

olsun. Öyleyse $e_F(x) \in V$ dir. Eğer bir $p \in X$ için $e_F(p) \in V$ fakat $p \notin U$ ise $f_\alpha(p) \in f_\alpha(X - U)$ dur.

Fakat $e_F(p) \in V$ olduğundan, $f_\alpha(p) = \pi_\alpha(e_F(p)) \in Y_\alpha - Cl_\alpha(X - U)$ dur. Bu çelişki bize $e_F(p) \in V$ ise $p \in U$ olduğunu söyler. Böylece $e_F(p) \in V$ ise $e_F(p) \in e_F(U)$ dur. Ayrıca $V \cap e_F(X)$, $e_F(x)$ in $e_F(U)$ daki açık bir komşuluğudur. O zaman $e_F(U)$ nun $e_F(X)$ te açık olduğu sonucuna varırız. ■

X bir topolojik uzay olmak üzere $C(X) = \{f: X \rightarrow R: f \text{ sürekli} \}$, $C^*(X) = \{f: X \rightarrow R: f \text{ sürekli ve sınırlı} \}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.10: $A \subset X$ ve $f: A \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $g|_A = f$ olacak şekilde sürekli bir $g: X \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa g ye f nin genişlemesi denir.

Teorem 1.1.11: A, X in yoğun bir alt kümesi ve Y Hausdorff olsun. Eğer $f: A \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun genişlemesi $g: X \rightarrow Y$ ise g tektir.

İspat: $h: X \rightarrow Y$, f nin bir başka genişlemesi olsun. $B = \{x \in X: g(x) = h(x)\}$ kümesini tanımlayalım. O zaman B kapalıdır. Öte yandan $A \subset B$ olup $B = X$ bulunur. Öyleyse $g = h$ dir. ■

Teorem 1.1.12: X bir topolojik uzay, Y_1 ve Y_2 Hausdorff ve $Cl_{Y_2} X = Y_2$ olsun.

$F: Y_2 \rightarrow Y_1$ içine ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f = F|_X: X \rightarrow F(X)$ bir homeomorfizma ise o zaman $F(Y_2 - X) \subset Y_1 - F(X)$ tir.

İspat: $y_2 \in Y_2 - X$ ve $F(y_2) = y_1$ olsun. $y_1 \in F(X)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $y_1 = F(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $x \neq y_2$ ve Y_2 Hausdorff olduğundan, $y_2 \in U, x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset Y_2$ açık kümeleri vardır. f bir homeomorfizma olduğundan $F(V \cap X)$, $F(X)$ in açık bir alt kümesidir. O zaman

$$y_1 \in F(V \cap X) = V' \cap F(X)$$

olacak şekilde $V' \subset Y_1$ açık kümesi vardır. F sürekli ve $F(y_2) = y_1 \in V'$ olduğundan, $F(G) \subset V'$ olacak şekilde bir $y_2 \in G \subset U$ açık kümesi vardır. $Cl_{Y_2} X = Y_2$ olduğundan, $G \cap X \neq \emptyset$ dir. Böylece

$$\emptyset \neq F(G \cap X) \subset F(G) \cap F(X) \subset V' \cap F(X) = F(V \cap X)$$

bulunur. Ama f bire bir olduğundan, $G \cap V \cap X \neq \emptyset$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü $G \cap V \cap X \subset U \cap V = \emptyset$ dir. Öyleyse $F(Y_2 - X) \subset Y_1 - F(X)$ dir. ■

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe bütün uzaylar Tychonoff varsayılacak.

Tanım 1.1.13: X bir topolojik uzay ve αX kompakt ve Hausdorff bir uzay olsun. Eğer $\alpha: X \rightarrow \alpha X$ gömme ve $\alpha(X)$, αX de yoğun olacak şekilde bir α fonksiyonu varsa αX e X in bir *kompaktlaması* denir.

X ile onun homeomorfik imajı olan $\alpha(X)$ i özdeşleştirirsek X in kompaktlamasını, ' X i yoğun bir alt uzay olarak içeren kompakt Hausdorff bir αX uzayına X in bir kompaktlaması denir ' şeklinde de tanımlayabiliriz.

Tanım 1.1.14: αX ve γX , X in iki kompaktlaması olsun. Eğer $f \circ \alpha = \gamma$ olacak şekilde bir $f: \alpha X \rightarrow \gamma X$ homeomorfizması varsa bu iki kompaktlamaya *eşdeğerdir* denir ve $\alpha X \cong \gamma X$ yazılır.

Eşdeğer kompaktlamalar arasında fark gözetilmez. Ayrıca X ile onun homeomorfik imajlarını özdeşleştirebildiğimizden αX ile γX kompaktlamalarının eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\Phi(x) = x$ olacak şekilde bir $\Phi: \alpha X \rightarrow \gamma X$ homeomorfizmasının olmasıdır.

X in bütün kompaktlamalarının sınıfını $K(X)$ ile göstereceğiz. Şimdi $K(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlamaya çalışalım. $Y_1, Y_2 \in K(X)$ olsun. Eğer $f: Y_2 \rightarrow Y_1$ gibi her $x \in X$ için $f(x) = x$ koşulunu sağlayan sürekli bir f fonksiyonu varsa $Y_1 \leq Y_2$ yazılır. Bu koşulları sağlayan f fonksiyonu örtendir. Üstelik Teorem 1.1.11'den $Y_1 \leq Y_2$ olmasını sağlayan ve X in noktalarını sabit bırakan tek bir $f: Y_2 \rightarrow Y_1$ sürekli fonksiyonu vardır. f böyle bir fonksiyon olduğundan Teorem 1.1.12'den $f(Y_2 - X) = Y_1 - X$ bulunur.

Teorem 1.1.15: ' $\leq$ ' bağıntısı $K(X)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat : Yansıma: Her $Y \in K(X)$ için $f: Y \rightarrow Y$ fonksiyonunu $f = I_Y$ olarak alırsak $Y \leq Y$ olur.

Ters simetri: $Y, Z \in K(X)$, $Z \leq Y$ ve $Y \leq Z$ olsun. O zaman $f: Y \rightarrow Z$ ve $g: Z \rightarrow Y$ her $x \in X$ için $f(x) = x$, $g(x) = x$ olacak şekilde f ve g sürekli fonksiyonları vardır. $f \circ g: Z \rightarrow Z$ alırsak her $x \in X$ için $(f \circ g)(x) = x$ ve $f \circ g$ sürekli olup $f \circ g = I_Z$ dir. Benzer şekilde $g \circ f = I_Y$ olur. O zaman $g = f^{-1}$ olup f bire bir ve örtendir. Böylece $Y \cong Z$ bulunur. Eşdeğer kompaktlamalar arasında fark gözetilmediğinden $Y = Z$ dir.

Geçişme: $Y, Z, T \in K(X)$ ve $Y \leq Z, Z \leq T$ olsun. O zaman $f: Z \rightarrow Y, g: T \rightarrow Z$ her $x \in X$ için $f(x) = x, g(x) = x$ olacak şekilde f ve g sürekli fonksiyonları vardır. $f \circ g: T \rightarrow Y$ alırsak her $x \in X$ için $(f \circ g)(x) = x$ ve $f \circ g$ sürekli olup $Y \leq T$ dir. ■

Şimdi $K(X)$ i ve X in Stone-Cech kompaktlaması olarak bilinen βX i inşa etmeye çalışalım. Bunun için Gömme Teoremi'ni kullanacağız.

X bir topolojik uzay, $f \in C^*(X)$ ve $I_f \subset R$ de $f(X)$ i içeren kapalı bir aralık olsun. $F \subset C^*(X)$ kümesi kapalı kümelerden noktaları ayırsın. X Hausdorff olduğundan, tek noktadan oluşan her küme kapalıdır. Dolayısıyla F ailesi noktaları da ayırır. O halde Teorem 1.1.9' dan, $e_F: X \rightarrow \prod_{f \in F} I_f$ değerlendirme fonksiyonu bir gömmedir. $e_F X = Cle_F(X)$ olarak alırsak $e_F X, X$ in bir kompaktlaması olur.

Teorem 1.1.16: $\alpha X, X$ in herhangi bir kompaktlaması ise $e_F Y \cong \alpha Y$ olacak şekilde kapalı kümelerden noktaları ayıran bir $F \subset C^*(X)$ vardır.

İspat: $F = \{ f \in C^*(X): \text{bir } f^\alpha: \alpha X \rightarrow R \text{ için } f^\alpha \circ \alpha = f \}$ olsun.

Önce F nin kapalı kümelerden noktaları ayırdığını gösterelim. $A \subset X$ kapalı ve $x \in X - A$ olsun. O zaman bir $K \subset \alpha X$ kapalı vardır öyle ki $K \cap X = A$ dir. Bu durumda $x \notin K$ dir. αX tam regüler olduğundan, bir $f^\alpha: \alpha X \rightarrow R$ sürekli fonksiyon vardır öyle ki $f^\alpha(x) \notin Cl f^\alpha(K)$ dir. $f = f^\alpha \circ \alpha$ olsun. O zaman $f \in C^*(X)$ ve $f(x) \notin Cl f(A)$ dir. Böylece Teorem 1.1.9'dan $e_F X, X$ in bir kompaktlamasıdır.

Şimdi $h: \alpha X \rightarrow \prod_{f \in F} I_f$ fonksiyonunu

$$[h(p)](f) = f^\alpha(p)$$

olarak tanımlayalım. π_f, f inci izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $\pi_f \circ h = f^\alpha$ olduğundan, h süreklidir. Ayrıca,

$$[h(\alpha(x))](f) = f^\alpha(\alpha(x)) = f(x) = e_F(x)$$

oldüğundan, $e_F(X) \subset h(\alpha X)$ bulunur. $h(\alpha X) \subset \prod_{f \in F} I_f$ kompakttır. Böylece

$$h(\alpha X) = e_F X \text{ tir.}$$

Şimdi h nin bire bir olduğunu gösterelim. $h(p) = h(q)$ olsun. O zaman her $f \in F$ için

$$[h(p)](f) = f(p) = [h(q)](f) = f(q)$$

dur. F noktaları ayırdığından, $p = q$ bulunur. Böylece h , bire birdir.

αX kompakt, $e_F X$ Hausdorff ve $h: \alpha X \rightarrow e_F X$ bire bir örten ve sürekli bir fonksiyon olduğundan, h bir homeomorfizmadır. $h \circ \alpha = e_F$ olduğundan, $\alpha X \cong e_F X$ tir. ■

Böylece kapalı kümelere noktaları ayıran her $F \subset C^*(X)$ den X in bir kompaktlaması olan $e_F X$ i elde edebileceğimizi göstermiş olduk. Dolayısıyla X in kompaktlamalarının kümesi olan $K(X)$ i

$\{e_F X: F \subset C^*(X) \text{ ve } F \text{ kapalı kümelere noktaları ayırır}\}$ kümesi olarak da düşünebiliriz.

Tanım 1.1.17: Kısmi sıralı bir kümenin boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı varsa böyle kümeye *üst yarı tam latist* denir.

Teorem 1.1.18: ' $\leq$ ' kısmi sıralama bağıntısıyla $K(X)$ bir üst yarı tam latistir.

İspat : $A = \{Y_i: i \in I\}$, $K(X)$ in herhangi bir alt kümesi olsun. Bu kümenin ' $\leq$ ' bağıntısına göre bir en küçük üst sınıra sahip olduğunu göstermeliyiz.

$e: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ fonksiyonunu $[e(x)](i) = x$ olarak tanımlayalım. Açıkça e bir gömmedir.

$eX = Cle(X)$ alırsak eX , X in bir kompaktlaması olur. Her $i \in I$ için

$f_i: eX \rightarrow Y_i$, π_i izdüşüm fonksiyonunun eX e kısıtlaması olsun. O zaman $f_i(e(x)) = x$ dir. Böylece $Y_i \leq eX$ tir. Şimdi eX in en küçük üst sınır olduğunu gösterelim. Her $i \in I$ için $Y_i \leq e_1 X$ olacak şekilde X in bir $e_1 X$ kompaktlamasının olduğunu kabul edelim. O zaman $g_i: e_1 X \rightarrow Y_i$ sürekli fonksiyonu vardır.

$$f: e_1 X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i \text{ fonksiyonunu}$$

$$[f(p)](i) = g_i(p)$$

olarak tanımlayalım. Buradan $\pi_i \circ f = g_i$ dir. O zaman f sürekli dir. Bunun yanında

$$f[e_1(x)](i) = g_i(e_1(x)) = e_1(x) = [e(x)](i)$$

dir. Bu da bize

$$f|_{e_1(X)} = e(X) , f(e_1 X) = eX$$

ve

$$eX \leq e_1 X$$

olduğunu söyler. Böylece eX , A nın en küçük üst sınırıdır. ■

Sonuç 1.1.19: $K(X)$ bir maksimum elemana sahiptir.

Tanım 1.1.20: X bir topolojik uzay ve $K(X)$, X in bütün kompaktlamalarının kümesi olsun. $K(X)$ in maksimum elemanına X in *Stone-Cech kompaktlaması* denir ve βX ile gösterilir.

1.2 Sıfır Kümeler

Tanım 1.2.1: X bir topolojik uzay olsun. $f \in C(X)$ olmak üzere

$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ kümesine X in bir *sıfır kümesi* denir.

Bununla birlikte X teki bütün sıfır kümelerin kümesi

$Z(X) = \{Z(f) : f \in C(X)\}$ ile verilir.

Tanım 1.2.2: Bir sıfır kümesinin X e göre tümleyenine *kosıfır kümesi* denir.

Teorem 1.2.3: X bir topolojik uzay olmak üzere $Z(X)$ için aşağıdakiler doğrudur.

- a) Her sıfır kümesi kapalıdır.
- b) $\emptyset, X \in Z(X)$.
- c) $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ ise $Z_1 \cup Z_2 \in Z(X)$ ve $Z_1 \cap Z_2 \in Z(X)$.
- d) $f \in C(X)$ ve $a \in R$ ise $f^{-1}(a), \{x \in X : f(x) \geq a\}, \{x \in X : f(x) \leq a\} \in Z(X)$.
- e) $Z(X) = \{Z(f) : f \in C^*(X)\}$.

İspat :

a) $Z(f) \in Z(X)$ olsun. O zaman $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ kapalıdır. Çünkü $\{0\}$ kapalı kümesinin sürekli bir fonksiyon altındaki ters görüntüsü kapalıdır.

b) $a \in R - \{0\}$ olan $f(x) = a$ sabit fonksiyonunu düşünelim. O zaman $f \in C(X)$ olup $Z(f) = \emptyset$ dir. Böylece $\emptyset \in Z(X)$. Bununla birlikte $g(x) = 0$ sabit fonksiyonu da $C(X)$ te olup $Z(g) = X$ olduğu açıktır. Öyleyse $X \in Z(X)$.

c) $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ olsun. $Z_1 = Z(f), Z_2 = Z(g)$ olsun. $Z_1 \cup Z_2 = Z(fg)$ olduğunu gösterelim. $x \in Z(fg)$ ise $(fg)(x) = 0$ olup $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$ dır. Bu ise bize $x \in Z_1$ veya $x \in Z_2$ olduğunu söyler. Yani $x \in Z_1 \cup Z_2$ dir. Diğer kısım da benzer şekilde gösterilir.

$Z_1 \cap Z_2 = Z(f^2 + g^2)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Reel değerli ve sürekli iki fonksiyonun çarpımı ve toplamı da reel değerli ve sürekli olduğundan $Z_1 \cup Z_2, Z_1 \cap Z_2 \in Z(X)$.

d) $f \in C(X)$ ve $a \in R$ olsun. Önce $f^{-1}(a) \in Z(X)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $g(x) = a$ sabit fonksiyonunu alıp $h(x) = g(x) - f(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman $h(x) \in C(X)$ ve $f^{-1}(a) = h^{-1}(0)$ dır. Böylece $f^{-1}(a) \in Z(X)$ bulunur.

Şimdi $\{x \in X: f(x) \geq a\}$ kümesinin bir sıfır kümesi olduğunu gösterelim. Bir

$$g(x) = \min\{f(x) - a, 0\}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman $g(x) \in C(X)$ ve

$$g^{-1}(0) = \{x \in X: f(x) \geq a\}$$

dır. Böylece $\{x \in X: f(x) \geq a\} \in Z(X)$ dır.

$\{x \in X: f(x) \leq a\}$ kümesinin de bir sıfır kümesi olduğunu göstermek için bir $h(x) = \min\{a - f(x), 0\}$ fonksiyonu tanımlanarak benzer işlemler yapılır.

e). $C^*(X) \subset C(X)$ olduğundan $\{Z(f): f \in C^*(X)\} \subset \{Z(f): f \in C(X)\}$ dir. $g(x) \in C(X)$ olsun. O zaman

$$f(x) = \frac{|g(x)|}{1 + |g(x)|} \in C^*(X)$$

ve $Z(g) = Z(f)$ dir. Böylece $Z(X) = \{Z(f): f \in C^*(X)\}$ bulunur. ■

Örnek 1.2.4: X bir ayrık topolojik uzay ise $Z(X) = P(X)$ dir.

Tanım 1.2.5: X bir topolojik uzay, $A_0, A_1 \subset X$ olsun. Eğer $f(A_0) \subset \{0\}$ ve $f(A_1) \subset \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa A_0 ve A_1 kümelerine X te *tamamen ayrılmıştır* denir.

Örnek 1.2.6: $E \subset X$ kapalı ve $x \in X - E$ olsun. O zaman X bir Tychonoff uzayı olduğundan, $\{x\}$ ve E kümeleri X te tamamen ayrılmıştır.

Teorem 1.2.7: Bir X topolojik uzayında tamamen ayrılmış kümeleri ve sıfır kümeleri içine alan aşağıdaki özellikler vardır.

a) X in iki alt kümesinin tamamen ayrılmış olması için gerek ve yeter koşul bu kümelerin ayrık sıfır kümeler tarafından kapsanmasıdır.

b) X in iki alt kümesi tamamen ayrılmışsa bu kümeler ayrık sıfır kümeleri tarafından kapsanır.

c) Eğer A_1 ve A_2 , X in ayrık iki sıfır kümesiye $A_1 \cap B_1 = \emptyset, A_2 \cap B_2 = \emptyset$ ve $B_1 \cup B_2 = X$ olacak şekilde X in B_1 ve B_2 gibi iki sıfır kümesi vardır.

d) Eğer U bir $x \in X$ noktasının açık komşuluğu ise o zaman $x \in K \subset A \subset U$ olacak şekilde X in bir K kosıfır ve bir A sıfır kümesi vardır.

İspat :

a) A ve B X in tamamen ayrılmış iki alt kümesi olsun. O zaman $f(A) \subset \{0\}$ ve $f(B) \subset \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu vardır. Buradan $A \subset f^{-1}(0)$ ve $B \subset f^{-1}(1)$ bulunur. Üstelik,

$$f^{-1}(0), f^{-1}(1) \in Z(X)$$

ve

$$f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

dir.

Tersine, $A, B \subset X$ ve ayrık $Z(f_1), Z(f_2)$ sıfır kümeleri için $A \subset Z(f_1)$ ve $B \subset Z(f_2)$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $|f_1(x)| + |f_2(x)| \neq 0$ olup

$$g(x) = \frac{|f_1(x)|}{|f_1(x)| + |f_2(x)|}$$

olarak tanımlanan $g: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu sürekli dir. $x \in A$ ise $x \in Z(f_1)$ ve buradan $f_1(x) = 0$ olur. O zaman $g(x) = 0$ ve böylece $g(A) \subset \{0\}$ elde ederiz. $x \in B$ ise $x \in Z(f_2)$ olup $f_2(x) = 0$ dir. Böylece $g(x) = 1$ ve $g(B) \subset \{1\}$ buluruz. Öyleyse A ve B tamamen ayrılmıştır.

b) A ve B , X in tamamen ayrılmış iki alt kümesi olsun. O zaman $g(A) \subset \{0\}$ ve $g(B) \subset \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $g: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu vardır. Öyleyse $A \subset G = g^{-1}([0, 1/2))$, $B \subset H = g^{-1}((1/2, 1])$ olup $G \cap H = \emptyset$ dir. Üstelik, G ve H kosıfır kümelerdir.

c) A_1 ve A_2 , X in ayrık iki sıfır kümesi olsun. $A_1 = Z(f_1)$ ve $A_2 = Z(f_2)$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $|f_1(x)| + |f_2(x)| \neq 0$ dir.

Şimdi bir $g: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunu

$$g(x) = \frac{|f_1(x)|}{|f_1(x)| + |f_2(x)|}$$

olarak tanımlayalım. $x \in A_1$ ise $f_1(x) = 0$ ve dolayısıyla $g(x) = 0$ dir. Böylece $A_1 \subset g^{-1}(0)$. Benzer şekilde $A_2 \subset g^{-1}(1)$ bulunur. Şimdi $A_1 \subset g^{-1}(0)$ ise $A_1 \cap g^{-1}([1/2, 1]) = \emptyset$ ve $B_1 = g^{-1}([1/2, 1]) \in Z(X)$ tir.

Benzer şekilde , $A_2 \cap g^{-1}([0,1/2]) = \emptyset$ olup $B_2 = g^{-1}([0,1/2])$ alınabilir. Üstelik $B_2 \in Z(X)$ olup $B_1 \cup B_2 = X$ bulunur.

d) $x \in X$ ve U, x noktasının bir açık komşuluğu olsun. Öyleyse $x \notin X - U$ ve $X - U$ kapalıdır. X bir Tychonoff uzayı olduğundan, $f(x) = 0$ ve $f(X - U) \subset \{1\}$ olacak şekilde sürekli bir $f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu vardır. Sıfır kümesi olarak $K = f^{-1}([0,1/2])$ ve sıfır kümesi olarak da $A = f^{-1}([0,1/2])$ alırsak $K \subset A \subset U$ elde ederiz. Açıkça $x \in K$ dır. ■

Şimdi βX , Stone-Cech kompaktlamasını sıfır kümeler ve tamamen ayrılmış kümeler cinsinden açıklayalım:

Teorem 1.2.8 : $Y \in K(X)$ ise aşağıdakiler birbirine denktir.

- i) $Y \cong \beta X$
- ii) X in tamamen ayrılmış iki alt kümesi Y de ayrık kapanışlara sahiptir.
- iii) $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ ise $Cl_Y(Z_1 \cap Z_2) = Cl_Y Z_1 \cap Cl_Y Z_2$ dir.

2.1 Stone Topoloji

Şimdi latis teorisinden biraz bahsedelim. Konu içinde ilerlerken Frink latisleri denilen bir latisler sınıfı tanımlayıp, daha sonra Stone topolojisini inşa edeceğiz.

Tanım 2.1.1: $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer $a, b \in A$ elemanlarının her çifti için $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\} \in A$ oluyorsa A ya bir *latis* denir.

L , 0 minimum ve 1 maksimum elemanlı ve dağılma özelliğine sahip bir latis olsun. Böylece L deki her a, b ikilisi yine L de bir supremuma ($a \vee b$) ve bir infimuma ($a \wedge b$) sahiptir. Üstelik $a, b, c \in L$ ise

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

ve

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

özellikleri vardır. Ayrıca her $a \in L$ için $0 \leq a$ ve $a \leq 1$ dir. Bunun yanında eğer B , L nin sonlu bir alt kümesi ise, örneğin $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ise B nin supremumu

$$\vee B = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n$$

ve infimumu

$$\wedge B = b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n$$

mevcuttur.

Bundan sonra L , 0 minimum ve 1 maksimum elemanlı ve dağılma özelliğine sahip bir latisi temsil edecektir.

Tanım 2.1.2: $K \subset L$ olsun. $0 \in K$, $1 \in K$ ve her $a, b \in K$ için $a \vee b \in K$, $a \wedge b \in K$ ise K ya L nin bir *alt latisi* denir.

Tanım 2.1.3: L nin aşağıdaki özellikleri sağlayan ve boş olmayan bir F alt kümesine L üzerinde bir *filtre* denir.

i) $0 \notin F$

ii) $a, b \in F$ ise $a \wedge b \in F$ dir.

iii) $a \in F$, $b \in L$ ise $a \vee b \in F$ dir (Buna denk olarak ' $a \in F, b \in L$ ve $a \leq b$ ise $b \in F$ dir.' ifadesi de verilebilir.)

Bazı Gerçekler :

- 1) F bir filtre ise $1 \in F$ dir. Gerçekten $1, L$ de en büyük eleman olduğundan her $a \in F$ için $a \leq 1$ dir. Böylece filtrenin tanımından, $1 \in F$ bulunur.
- 2) $F = \{1\}$ kümesi bir filtredir.
- 3) Bir $\{F_i : i \in I\}$ filtreler ailesi verildiğinde $\bigcap_{i \in I} F_i$ de bir filtredir.

Tanım 2.1.4: $B \subset L$ olsun. B nin sonlu her E alt kümesi için $\wedge E \neq 0$ ise B ye *sonlu kesişim özelliğine* (s.k.ö.) sahiptir denir.

Eğer B s.k.ö. ye sahipse

$\langle B \rangle = \{x \in L : x \geq \wedge E \text{ olacak şekilde } B \text{ nin sonlu bir } E \text{ alt kümesi vardır.}\}$

olsun.

Teorem 2.1.5: L nin boş kümeden farklı bir B alt kümesini kapsayan bir filtrenin olması için gerek ve yeter koşul B nin s.k.ö. ye sahip olmasıdır.

İspat : F bir filtre ve $B \subset F$ olsun. E, B nin sonlu bir alt kümesi olsun.

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\wedge E \neq 0$ olduğunu göstereceğiz. $e_1, e_2 \in E$ alalım. $E \subset B \subset F$ olduğundan, $e_1, e_2 \in F$ dir. F bir filtre olduğundan, $e_1 \wedge e_2 \in F$ ve $e_1 \wedge e_2 \neq 0$ dır. Aslında bu işlem her sonlu kümeye genişletilebilir. Böylece $\wedge E \neq 0$ bulunur. Yani B s.k.ö. ye sahiptir.

Diğer taraftan, $\langle B \rangle$ nin B yi kapsayan bir filtre olduğunu göstereceğiz.

$x \in B$ ise $\{x\}, B$ nin sonlu bir alt kümesi ve $\wedge \{x\} = x \leq x$ olduğundan, $x \in \langle B \rangle$

dir. Buradan, $B \subset \langle B \rangle$ sonucu elde edilir. Şimdi $\langle B \rangle$ nin bir filtre olduğunu gösterelim. B s.k.ö. ye sahip olduğundan, B nin sonlu her E alt kümesi için $\wedge E \neq 0$ dır. Öyleyse $0 \notin \langle B \rangle$ dir. $x, y \in \langle B \rangle$ ise $x \geq \wedge E_1$ ve $y \geq \wedge E_2$ olacak şekilde B nin E_1, E_2 gibi sonlu alt kümeleri vardır. O zaman

$$\wedge (E_1 \cup E_2) \leq \wedge E_1 \leq x$$

ve

$$\wedge (E_1 \cup E_2) \leq \wedge E_2 \leq y$$

olup

$$\wedge (E_1 \cup E_2) \leq x \wedge y$$

elde edilir. $E_1 \cup E_2$ de B nin sonlu bir alt kümesi olduğundan, $x \wedge y \in \langle B \rangle$ bulunur.

Şimdi filtre olmanın son şartını sağlatalım. $x \in \langle B \rangle, y \in L$ ve $x \leq y$ olsun. O zaman B nin sonlu bir E alt kümesi için $\wedge E \leq x$ olup $x \leq y$ den $y \in \langle B \rangle$ elde ederiz.

Böylece $\langle B \rangle$ bir filtredir. Şimdi B yi kapsayan en küçük filtrenin $\langle B \rangle$ olduğunu gösterelim. F bir filtre ve $B \subset F$ olsun. $\langle B \rangle \subset F$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$x \in \langle B \rangle$ ise B nin sonlu bir G alt kümesi için $x \geq \wedge G$ dir. $G \subset F$ ve F bir filtre olduğundan $\wedge G \in F$ dir. $\wedge G \leq x$ olup $x \in F$ dir. ■

Tanım 2.1.6: L nin aşağıdaki özellikleri sağlayan ve boş olmayan bir B alt kümesine L üzerinde bir *filtre bazı* denir.

- i) $0 \notin B$,
- ii) $a, b \in B$ ise $c \leq a \wedge b$ olacak şekilde bir $c \in B$ vardır.

B bir filtre bazı ise o zaman B s.k.đ. ye sahiptir ve B ye $\langle B \rangle$ nin bir filtre bazıdır deriz.

Teorem 2.1.7: F bir filtre, $B \subset F$ olsun. B nin F nin bir filtre bazı olması için gerek ve yeter koşul her $a \in F$ için $b \leq a$ olacak şekilde bir $b \in B$ olmasıdır.

İspat : B, F nin bir filtre bazı ve $F = \langle B \rangle$ olsun. $a \in F$ ise sonlu bir $E \subset B$ için $\wedge E \leq a$ dır. B filtre bazı olduğundan bir $b \in B$ vardır öyle ki $b \leq \wedge E$ dir. Öyleyse $b \leq a$ dır.

Tersine, $B \subset F$ ve B nin verilen şartı sağladığını kabul edelim. Önce B nin bir filtre bazı olduğunu gösterelim. $0 \notin F$ olduğundan, $0 \notin B$ dir. $a, b \in B$ ise $a, b \in F$ dir. F bir filtre olduğundan, $a \wedge b \in F$ dir. Hipotezden, $c \leq a \wedge b$ olacak şekilde bir $c \in B$ vardır. Şimdi $F = \langle B \rangle$ olduğunu gösterirsek B nin F filtresinin bir filtre bazı olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi $a \in F$ ise B nin sonlu $\{b\}$ alt kümesini aldığımızda $\wedge \{b\} = b \leq a$ olduğundan, $a \in \langle B \rangle$ dir. O zaman $F \subset \langle B \rangle$ dir. Böylece $F = \langle B \rangle$ bulunur. ■

Tanım 2.1.8: Küme kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı

$$\Phi = \{F: F, L \text{ üzerinde bir filtre}\}$$

kümesini ele alalım. Φ nin bir maksimal elemanına L üzerinde bir *ultra filtre* denir.

Teorem 2.1.9: Φ nin bir Γ alt kümesinin Φ de bir üst sınıra sahip olması için gerek ve yeter koşul Γ nin sonlu her $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ alt kümesi ve her $a_1 \in F_1, a_2 \in F_2, \dots, a_n \in F_n$ için $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$ olmasıdır.

İspat : Teorem 2.1.5'ten hemen sonuca varılır.

$B = \{a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n: a_i \in F_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ alınırsa her $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $F_i \subset \langle B \rangle$ olur. ■

Teorem 2.1.10: Φ kümesinde her zincirin bir üst sınırı vardır.

İspat : Γ, Φ de bir zincir ve $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}, \Gamma$ nin sonlu bir alt kümesi olsun. O zaman bir $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ vardır öyle ki her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $F_i \subset F_j$ dir. Böylece her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_i \in F_i$ ise $a_i \in F_j$ olur ki buradan da $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \in F_j$ elde edilir. $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$ olduğundan Teorem 2.1.9'dan Γ nin bir üst sınırı vardır. ■

Teorem 2.1.11: Her filtreyi içeren bir ultra filtre vardır..

İspat : $F \in \Phi$ alalım. Şimdi F yi içeren bir U ultra filtresinin var olduğunu göstereceğiz. $A = \{G: F \subset G \text{ ve } G \in \Phi\}$ olsun. Teorem 2.1.10'dan kısmi sıralı A kümesinde her zincirinin bir üst sınırı vardır. Böylece kısmi sıralı A kümesi Zorn Lemması'nın şartlarını sağlar. Öyleyse A nın bir U maksimal elemanı vardır ve $F \subset U$ dur. ■

Tanım 2.1.12: Her $a, b \in L$ için $a \vee b \in F$ olduğunda $a \in F$ veya $b \in F$ oluyorsa L üzerindeki bu F filtresine *asal filtre* denir.

Teorem 2.1.13: Her ultra filtre bir asal filtredir.

İspat : U bir ultra filtre olsun. $a, b \in L$ ve $a \vee b \in U$ olsun. $a \notin U$ olduğunu varsayalım. O zaman $U \cup \{a\}$ s.k.ö. ye sahip değildir. Böylece bir $x \in U$ için $a \wedge x = 0$ dir. O zaman $b = b \vee 0 = b \vee (a \wedge x) = (b \vee a) \wedge (b \vee x) \in U$ elde edilir. ■

Tanım 2.1.14: Eğer her $a \in L$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak şekilde a nın bir tek $a' \in L$ tümleyeni varsa L ye bir *Boolean cebiri* denir.

Teorem 2.1.15: L bir Boolean cebiri ve F, L üzerinde bir filtre olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) F bir ultra filtredir.
- ii) F bir asal filtredir.
- iii) $a \in L$ ise $a \in F$ ya da $a' \in F$ dir.

İspat :

i) $\Rightarrow$ ii): Bu sonuç Teorem 2.1.13'den elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ iii): F bir asal filtre ve $b \in L$ olsun. L bir Boolean cebiri olduğundan, $b \wedge b' = 0$ ve $b \vee b' = 1$ olacak şekilde $b' \in L$ vardır. $b \vee b' = 1 \in F$ olduğundan, $b \in F$ veya $b' \in F$ dir.

iii) $\Rightarrow$ i): $U, F \subset U$ olacak şekilde bir ultra filtre olsun. $b \in U$ ise $b' \notin U$ dur. Çünkü $b \wedge b' = 0$ ve $0 \notin U$ dur. Öyleyse $b' \notin F$ dir. Hipotezden, $b \in F$ olup $U \subset F$ elde ederiz. Böylece $U = F$ dir. ■

Tanım 2.1.16: Eğer her $a, b \in L$ için $a \wedge b = 0$ olduğunda $a \wedge x = 0, b \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ olacak şekilde $x, y \in L$ varsa L ye bir *Frink latisi* denir.

L bir Frink latisi, U da L üzerindeki bütün ultra filtrelerin kümesi olsun. Her $a \in L$ için $H(a) = \{U \in U : a \in U\}$ kümesini tanımlayalım.

Teorem 2.1.17:

- a) Her $a, b \in L$ için $H(a) \cup H(b) = H(a \vee b)$ dir.
- b) Her $a, b \in L$ için $H(a) \cap H(b) = H(a \wedge b)$ dir.
- c) $H(0) = \emptyset$ dir.
- d) $H(1) = U$ dur.

İspat :

a) $U \in H(a) \cup H(b)$ ise $U \in H(a)$ veya $U \in H(b)$ dir. $U \in H(a)$ ise $a \in U$ dur. $U \in H(b)$ ise $b \in U$ dur. Yani $a \in U$ veya $b \in U$ olup $a \vee b \in U$ buluruz. O zaman $U \in H(a \vee b)$ sonucundan $H(a) \cup H(b) \subset H(a \vee b)$ elde ederiz.

Öte yandan $V \in H(a \vee b)$ ise $a \vee b \in V$ ve V de bir asal filtre olduğundan, $a \in V$ veya $b \in V$ elde ederiz. Öyleyse $V \in H(a)$ veya $V \in H(b)$ dir. Yani $V \in H(a) \cup H(b)$ dir. Böylece $H(a) \cup H(b) \supset H(a \vee b)$ bulunur. Dolayısıyla $H(a) \cup H(b) = H(a \vee b)$ dir.

b) a)'dakine benzer şekilde yapılır.

c) Çünkü hiç bir ultra filtre 0 ı içermez.

d) Çünkü bütün ultra filtreler 1 i içerir. ■

Teorem 2.1.18: Eğer U ve V , L Frink latisi üzerinde farklı ultra filtrelerse o zaman bir $a \in U$ ve bir $b \in V$ vardır öyle ki $a \wedge b = 0$ dir.

İspat : Her $a \in U$ ve her $b \in V$ için $a \wedge b \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$B = \{a \wedge b : a \in U, b \in V\}$ kümesini tanımlayalım. $U, V \neq \emptyset$ olduğundan, $B \neq \emptyset$ dir. Ayrıca B nin sonlu her E alt kümesi için $\wedge E \neq 0$ dir. Yani B s.k.ö. ye sahiptir.

$a \in U$ ise $a \wedge b \leq a$ olduğundan, $a \in \langle B \rangle$ dir. Buradan, $U \subset \langle B \rangle$ olup $U = \langle B \rangle$ dir. Benzer şekilde $V = \langle B \rangle$ elde ederiz. Bu ise bize $U = V$ olduğunu söyler. Bu bir çelişkidir. ■

Şimdi bu bilgiler ışığında Stone uzayını tanıtalım.

Tanım 2.1.19: $U = \{U : U, L \text{ Frink latisi üzerinde bir ultra filtre}\}$ olmak üzere $\mathbb{I} = \{H(a) : a \in L\}$ kümesi Teorem 2.1.17'den dolayı U üzerindeki bir topolojinin, buna *Stone topolojisi* diyeceğiz, kapalı kümeleri için bir bazdır. U ile birlikte bu topolojiye L nin *Stone uzayı* denir ve $St(L)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.20: L bir Frink latisi ise o zaman $St(L)$ kompakt ve Hausdorff'tir.

İspat : Önce $St(L)$ nin Hausdorff olduğunu gösterelim. $U, V \in St(L), U \neq V$ olsun. O zaman bir $a \in U$ ve bir $b \in V$ vardır öyle ki $a \wedge b = 0$ dir. L bir Frink latisi olduğundan, $a \wedge x = 0, b \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ olacak şekilde $x, y \in L$ vardır. $a \in U, a \wedge x = 0$ olduğundan, $x \notin U$ dur. Öyleyse $U \notin H(x)$ olup $U \in St(L) - H(x)$ bulunur. Benzer şekilde, $V \in St(L) - H(y)$ elde edilir. $St(L) - H(x)$ ve $St(L) - H(y)$, $St(L)$ nin açık alt kümeleri olup $[St(L) - H(x)] \cap [St(L) - H(y)] = St(L) - [H(x) \cup H(y)] = St(L) - St(L) = \emptyset$ dir. Böylece $St(L)$ nin Hausdorff olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $St(L)$ nin kompakt bir uzay olduğunu gösterelim.

$A = \{H(a) : a \in B\}$, s.k.ö. ye sahip ve temel kapalı kümelerden oluşan bir küme olsun.

$St(L)$ nin kompakt olduğunu göstermek için $\bigcap_{a \in B} H(a) \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir. A s.k.ö. ye sahip olduğundan,

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset B \subset L \text{ için } \bigcap_{i=1}^n H(a_i) \neq \emptyset \text{ dir.}$$

Böylece $\bigcap_{i=1}^n H(a_i) = H(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n)$ ve $H(0) = \emptyset$ olduğundan,

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$ dir. Öyleyse B s.k.ö. ye sahiptir. Teorem 2.1.5'ten, B yi kapsayan bir V filtresi vardır. Teorem 2.1.11'den V yi içeren bir U ultra filtresi vardır. O zaman $B \subset V \subset U$ dur. Ayrıca her $a \in B$ için $B \subset U$ olduğundan, $U \in H(a)$ dir.

Böylece $\bigcap_{a \in B} H(a) \neq \emptyset$ bulunur. ■

Teorem 2.1.21: L bir Frink latisi ve $E \subset St(L)$ ise $Cl E = \left\{ U \in St(L) : \bigcap_{V \in E} V \subset U \right\}$ dir.

İspat : $A = \left\{ U \in St(L) : \bigcap_{V \in E} V \subset U \right\}$ olsun. $U \in A$ ve $U \in St(L) - H(a)$ olsun.

Öyleyse $a \notin U$ dir. $U \supset \bigcap_{V \in E} V$ olduğundan, $a \notin \bigcap_{V \in E} V$ dir. O zaman bir $V \in E$ için $a \notin V$ dir. Öyleyse $V \in St(L) - H(a)$ buluruz. Böylece $V \in [St(L) - H(a)] \cap E$ olduğundan, $U \in C/E$ dir.

Tersine, $U \in C/E$ olsun. $\bigcap_{V \in E} V \not\subset U$ olduğunu varsayalım. O zaman bir $a \in \bigcap_{V \in E} V - U$ vardır. Böylece $V \in E$ ise $a \in V$ olup $V \in H(a)$ dir. Buradan $E \subset H(a)$ elde edilir. O zaman $[St(L) - H(a)] \cap E = \emptyset$ çelişkisi doğar. Öyleyse $\bigcap_{V \in E} V \subset U$ dir. Yani $U \in A$ dir. ■

Teorem 2.1.22:

- a) Her Boolean cebiri bir Frink latisidir.
- b) Eğer L bir Boolean cebiri ise L nin Stone uzayı sıfır boyutludur.

İspat :

a) L bir Boolean cebiri olsun. $a, b \in L$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. O zaman $a \wedge x = 0, b \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ olacak şekilde $x, y \in L$ nin varlığını göstermeliyiz. L bir Boolean cebiri olduğundan, $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1, b \wedge b' = 0, b \vee b' = 1$ olacak şekilde $a', b' \in L$ vardır. O halde $x = a', y = b'$ almak yeterlidir. Ayrıca

$$x \vee y = (a \wedge b) \vee (x \vee y) = (a \vee x \vee y) \wedge (b \vee x \vee y)$$

$$= (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b') = (1 \vee b') \wedge (1 \vee a') = 1 \wedge 1 = 1$$

b) $\mathbb{B} = \{H(a) : a \in L\}$ kümesinin $St(L)$ nin kapalı kümeleri için bir baz olduğunu biliyoruz. Her $a \in L$ için $H(a)$ nın hem açık hem kapalı olduğunu göstermeliyiz.

$a \in L$ alalım. O zaman bir $a' \in L$ vardır öyle ki $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ dir. Böylece

$$H(a) \cup H(a') = H(a \vee a') = H(1) = St(L) \text{ ve}$$

$$H(a) \cap H(a') = H(a \wedge a') = H(0) = \emptyset$$

oldüğundan, $H(a)$ hem açık hem kapalı bir kümedir. ■

Teorem 2.1.23: L bir Boolean cebiri ve $\mathbb{N}(St(L)), St(L)$ deki hem açık hem kapalı kümelerin kümesi ise $\mathbb{N}(St(L)) = \{H(a); a \in L\}$ dir.

İspat : $H(a)$ kümelerinin $St(L)$ nin hem açık hem kapalı alt kümeleri olduğunu biliyoruz. Öte yandan, H hem açık hem kapalı ise H kapalı ve $\{H(a); a \in L\}$, $St(L)$ nin kapalı kümeleri için baz olduğundan, bir $A \subset L$ kümesi vardır öyle ki $H = \bigcap_{a \in A} H(a)$ dir. H açık ve her $a \in A$ için $H(a)$ kapalı olduğundan,

$H(a) - H$ kümeleri de her $a \in A$ için kapalı olur. Ayrıca

$$\bigcap_{a \in A} (H(a) - H) = \bigcap_{a \in A} H(a) - H = H - H = \emptyset$$

oldüğundan, $\{H(a) - H; a \in A\}$ kümesi s.k.ö. ye sahip değildir. O zaman bir

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$ kümesi vardır öyle ki $H = \bigcap_{i=1}^n H(a_i)$ dir.

Böylece

$$H = H(a_1) \cap H(a_2) \cap \dots \cap H(a_n) = H(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) = H(b), b \in L$$

elde edilir. ■

2.2 Wallman-Frink Kompaktlamalarının İnşası

Wallman (1938), T_1 olan bir X uzayının T_1 - kompaktlamasını inşa etmek için genel bir metod vermiştir. Eğer X normal olsaydı bu kompaktlama βX e dönüşecekti. Frink (1964), tam regüler bir X uzayının Hausdorff kompaktlamalarının bütün bir ailesini elde etmek için Wallman'ın metodunun nasıl değiştirileceğini gösterdi. σX kompaktlamasını üreten ve temeli Samuel (1948) 'in kompaktlama inşa çalışmalarına ve nihayet Wallman'ın metoduna dayanan Gillman ve Jerison (1960) 'un geliştirdiklerini kullanan Frink, X in kapalı kümelerinin bir $\mathcal{E}$ ailesinin $\mathcal{E}$ -ultra filtrelerinin kümesi üzerine bir topoloji koymak suretiyle X in bir Hausdorff kompaktlamasını elde etmek için olması gereken özellikleri ortaya koydu.

Şimdi Wallman-Frink kompaktlamalarını inşa edebiliriz.

Tanım 2.2.1: $A \subset P(X)$ ve her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ya bir *halka* denir.

X bir topolojik uzay ise $P(X)$, kuvvet kümesi, içerme bağıntısına göre $\emptyset$ minimum, X maksimum elemanlı ve dağılıma özelliğine sahip bir latistir. Dolayısıyla $A \subset P(X)$ bir halka ise alt latistir.

$\varepsilon(X) = \{B \subset X : B \text{ kapalı}\}$ olsun. O zaman $\emptyset, X \in \varepsilon(X)$ ve eğer $B_1, B_2 \in \varepsilon(X)$ ise $B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2 \in \varepsilon(X)$ dir. Böylece $\varepsilon(X), P(X)$ in bir alt latisi olur.

Tanım 2.2.2: $\varepsilon(X)$ in bir $\mathcal{F}$ alt latisi aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{F}$ ye X topolojik uzayının bir *normal bazı* deriz.

i) $\mathcal{F}$ bir Frink latistir.

ii) $\mathcal{F}, X$ in kapalı kümeleri için bazdır.

iii) V, X in açık bir alt kümesi ve $x \in V$ ise $x \in F \subset V$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{F}$ vardır.

Teorem 2.2.3: Her topolojik uzay bir normal baza sahiptir.

İspat : X bir topolojik uzay olsun. $Z(X)$ in X in bir normal bazı olduğunu gösterelim.

Teorem 1.2.3'ten, $Z(X), \varepsilon(X)$ in bir alt latisidir. Ayrıca Teorem 1.2.7. c)'den $Z(X)$ bir Frink latistir. Yine Teorem 1.2.7 d)'den normal baz olmanın ii) ve iii) şartları da sağlanır. Şimdi $Z(X)$ kümesinin X in kapalı kümeleri için bir baz olduğunu gösterelim. A, X in kapalı bir alt kümesi ve $p \notin A$ olsun. O zaman Teorem 1.2.7 d)'den dolayı $p \in X - Z(f) \subset X - A$ olacak şekilde bir $f \in C^*(X)$ vardır. Dolayısıyla $A \subset Z(f)$ ve $p \notin Z(f) \in Z(X)$ olur. Böylece $Z(X), X$ in kapalı kümeleri için bir bazdır. ■

Tanım 2.2.4: $\mathcal{F}, X$ topolojik uzayının bir normal bazı ve $x \in X$ ise $\mathcal{F}_x = \{B \in \mathcal{F} : x \in B\}$ olarak tanımlayalım.

Teorem 2.2.5: $\mathcal{F}, X$ topolojik uzayının bir normal bazı olsun. O zaman $h(x) = \mathcal{F}_x$ ile tanımlı bir $h: X \rightarrow St(\mathcal{F})$ fonksiyonu vardır ve $(St(\mathcal{F}), h), X$ in bir kompaktlamasıdır.

İspat :

$\mathcal{F}_x$ in bir filtre olduğu açıktır. Şimdi $\mathcal{F}_x$ in bir ultra filtre olduğunu gösterelim. $K \in \mathcal{F}$ ve $x \notin K$ olsun. Yani $K \notin \mathcal{F}_x$ olsun. O zaman $x \in X - K$ ve $X - K$ açıktır. $\mathcal{F}, X$ in bir normal bazı olduğundan, $x \in B \subset X - K$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{F}$ vardır. O zaman $B \in \mathcal{F}_x$ olur ve $B \cap K = \emptyset$ olur. Bu nedenle $K, \mathcal{F}_x$ i içeren hiç bir filtrenin elemanı olamaz. Böylece $\mathcal{F}_x$ bir ultra filtredir.

Dolayısıyla böyle bir h fonksiyonu mevcuttur.

h bire birdir :

$x, y \in X, x \neq y$ olsun. X bir Tychonoff uzay olduğundan, $\{y\}$ kapalıdır. $\mathcal{E}$, X in kapalı kümeleri için baz olduğundan, $x \notin K$ ve $\{y\} \subset K$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{E}$ vardır. Böylece $K \in \mathcal{E}_x$, $K \in \mathcal{E}_y$ dir. Öyleyse $\mathcal{E}_x \neq \mathcal{E}_y$, yani $h(x) \neq h(y)$ dir.

h süreklidir :

$K \in \mathcal{E}$ ise $H(K) = \{U \in St(L) : K \in U\}$ olur. Ayrıca $h^{-1}(H(K)) = \{x \in X : h(x) \in H(K)\} = \{x \in X : x \in K\} = K$ kapalı ve $\{H(K) : K \in \mathcal{E}\}$, $St(\mathcal{E})$ nin kapalı kümeleri için baz olduğundan, h süreklidir.

h kapalıdır:

V, X in kapalı bir alt kümesi ve $x_0 \in X - V$ olsun. O zaman bir $K \in \mathcal{E}$ vardır öyle ki $x_0 \notin K$ ve $V \subset K$ dir. Öyleyse $h(x_0) \notin H(K)$ dir.

Öte yandan

$$V = h^{-1}(H(V)) \subset h^{-1}(H(K))$$

olduğundan, $h(V) \subset h(h^{-1}(H(K))) \subset H(K)$ dir. $x_0 \notin V$ olduğundan, $h(x_0) \notin h(V)$ dir.

Şimdi $h(V)$ nin $h(X)$ te kapalı olduğunu göstermek için bir temel kapalı F kümesi bulmalıyız öyle ki $h(V) \subset F$ ve $h(x_0) \notin F$ olsun.

$H(K) \cap h(X), h(X)$ te kapalı olup

$$h(V) \subset H(K) \cap h(X) \text{ ve } h(x_0) \notin H(K) \cap h(X)$$

bulunur.

O zaman $F = H(K) \cap h(X)$ aldığımızda $h(V)$ nin $h(X)$ içinde kapalı olduğu gösterilmiş olur. Böylece h kapalıdır.

Böylece h , sürekli, kapalı ve bire bir olduğundan, bir gömmedir.

$Clh(X) = St(\mathcal{E})$ dir:

$h(X) = \{\mathcal{E}_x : x \in X\}$ ve $Clh(X) = \{U \in St(\mathcal{E}) : \bigcap_{x \in X} \mathcal{E}_x \subset U\}$ olduğunu biliyoruz.

$A \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x$ ise her $x \in X$ için $A \in \mathcal{F}$ ve $x \in A$ bulunur. Öyleyse

$\bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{A : A \in \mathcal{F}, X \subset A\}$ dir. Böylece $\bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{X\}$ bulunur. Buradan,

$Cl_h(X) = St(\mathcal{F})$ elde edilir. Çünkü bütün ultra filtreler X i içerir.

Dolayısıyla $St(\mathcal{F})$, $h(X)$ in bir kompaktlamasıdır. $h(X)$ ve X homeomorf olduğundan, $St(\mathcal{F})$, X in bir kompaktlamasıdır. ■

Tanım 2.2.6: $\lambda X, St(\mathcal{F})$ nin her $x \in X$ için x ile $\mathcal{F}_x$ i özdeşleştirerek elde edilen bir homeomorfik kopyası olsun. X in bu λX kompaktlamasına X in $\mathcal{F}$ -kompaktlaması denir.

Eğer $\alpha X \in K(X)$ ve $\alpha X \cong St(\mathcal{F})$ olacak şekilde X in bir $\mathcal{F}$ normal bazı varsa αX e X in bir *Wallman-Frink kompaktlaması* denir.

Teorem 2.2.7: $\mathcal{F}$, X topolojik uzayının bir normal bazı, λX de X in bir $\mathcal{F}$ -kompaktlaması olsun. O zaman $\mathcal{F}$ nin ayrık elemanları λX te ayrık kapanışlara sahiptir.

İspat : $K, L \in \mathcal{F}$ ve $K \cap L = \emptyset$ olsun. O zaman $H(K)$ ve $H(L)$, λX te kapalı kümeler olup $K \subset H(K), L \subset H(L)$ dir.

Öte yandan, $H(K) \cap H(L) = H(K \cap L) = \emptyset$ dir. Çünkü ; eğer $H(K) \cap H(L) \neq \emptyset$ olsaydı bir $U \in H(K) \cap H(L)$ için $K \in U$ ve $L \in U$ olduğundan, $K \cap L = \emptyset \in U$ çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla $Cl_{\lambda X} K \cap Cl_{\lambda X} L = \emptyset$ dir. ■

Şimdi βX in bir Wallman-Frink kompaktlaması olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.2.8: Bir X topolojik uzayının $Z(X)$ -kompaktlaması βX Stone-Cech kompaktlamasıdır.

İspat : $Z(X)$ in X uzayının bir normal bazı olduğunu biliyoruz. Şimdi bX, X in $Z(X)$ -kompaktlaması olsun. Teorem 2.2.7'den, X in ayrık sıfır kümeleri bX te ayrık kapanışlara sahiptir. Teorem 1.2.7 a)'dan, X teki tamamen ayrılmış kümeler bX te ayrık kapanışlara sahiptir. Çünkü A ve B tamamen ayrılmışsa $Z(f), Z(g) \in Z(X)$ kümeleri vardır öyle ki $A \subset Z(f)$ ve $B \subset Z(g)$ ve $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$ dir.

$\left. \begin{array}{l} Cl_{bX} A \subset Cl_{bX} Z(f) \\ Cl_{bX} B \subset Cl_{bX} Z(g) \end{array} \right\}$ ise $Cl_{bX} A \cap Cl_{bX} B = \emptyset$ dir. O zaman Teorem 1.2.8'den,

$bX, \beta X$ e denktir. Yani $bX \cong \beta X$ tir. ■

Şimdi X uzayının sıfır boyutlu olduğunu kabul edelim. O zaman X in sadece hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir bazı vardır. $\mathbb{B}(X)$, X in bütün hem açık hem kapalı alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman $\mathbb{B}(X)$, $\mathcal{A}(X)$ in bir alt latisidir ve bir Boolean cebiridir. Dolayısıyla $\mathbb{B}(X)$ bir Frink latisidir. Ayrıca normal bazın tanımındaki *iii*). şart sağlanacak şekilde $\mathbb{B}(X)$, X in topolojisi için bir baz olup X in kapalı kümeleri için de bir baz olduğundan, bir normal bazdır. Öyleyse Teorem 2.2.5'ten, $St(\mathbb{B}(X))$, X in bir kompaktlamasıdır. Ayrıca Teorem 2.1.22 b)'den, $\mathbb{B}(X)$ in Stone uzayı $St(\mathbb{B}(X))$ sıfır boyutlu bir kompaktlamadır.

Tanım 2.2.9: X boş olmayan bir topolojik uzay olsun. Eğer βX sıfır boyutluysa X uzayına *güçlü sıfır boyutludur* denir.

Açık olarak X güçlü sıfır boyutluysa sıfır boyutludur.

Şimdi eğer X sıfır boyutlu bir uzay ve $\mathbb{B}(X)$, X in hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir bazı ise $St(\mathbb{B}(X)) = \beta X$ olduğunu göstereyim. Ama önce iki teoreminiz var.

Teorem 2.2.10 X sıfır boyutlu bir uzay olsun. $E \subset X$ kompakt, $F \subset X$ kapalı ve $E \cap F = \emptyset$ ise $E \subset H$ ve $F \subset X - H$ olacak şekilde X in hem açık hem kapalı bir H alt kümesi vardır.

İspat : $\mathbb{B}$, X in hem açık hem kapalı kümelerinden oluşan bir bazı olsun. O zaman $E \subset X - F$ olduğundan her $x \in E$ için hem açık hem kapalı bir $H_x \in \mathbb{B}$ vardır öyle ki $x \in H_x \subset X - F$ dir.

E kompakt olduğundan, E nin sonlu bir M alt kümesi vardır öyle ki $E \subset \bigcup_{x \in M} H_x$ dir. Öyleyse $H = \bigcup_{x \in M} H_x$ almak yeterlidir. ■

Teorem 2.2.11: X boş olmayan bir topolojik uzay olsun. X in güçlü sıfır boyutlu olması için gerek ve yeter koşul X te tamamen ayrılmış her A, B alt kümesi için X in $A \subset H$ ve $B \subset X - H$ olacak şekilde bir H hem açık hem kapalı alt kümesine sahip olmasıdır.

İspat : X in güçlü sıfır boyutlu olduğunu varsayalım. A ve B , X in tamamen ayrılmış iki alt kümesi olsun. Teorem 2.2.7'den, $Cl_{\beta X} A \cap Cl_{\beta X} B = \emptyset$ dir. βX kompakt ve sıfır boyutlu bir uzaydır. Teorem 2.2.10'dan, βX uzayında

$$Cl_{\beta X} A \subset G \text{ ve } Cl_{\beta X} B \subset \beta X - G$$

olacak şekilde hem açık hem kapalı G kümesi vardır. Şimdi $H = G \cap X$ alırsak H, X uzayının bir hem açık hem kapalı alt kümesi olur. $B \subset Cl_{\beta X} B \subset \beta X - G$ olduğundan,

$$B \cap X = B \subset (\beta X - G) \cap X = X - H$$

elde edilir. Bunun yanında $A \subset H$ dir.

Tersine verilen hipotezler altında βX in sıfır boyutlu olduğunu gösterelim. $y_0 \in \beta X$ ve W, y_0 in βX teki bir açık komşuluğu olsun. βX , Tychonoff olduğundan, tam regüllerdir. O zaman ,

$$f(y_0) = 0 \text{ ve } f(\beta X - W) \subset \{1\}$$

olacak şekilde sürekli bir $f: \beta X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu vardır.

$$V_0 = \{y \in \beta X : f(y) < 1/3\} \text{ ve } V_1 = \{y \in \beta X : f(y) > 2/3\}$$

olsun. O zaman $V_0 \cap X$ ve $V_1 \cap X, X$ uzayının tamamen ayrılmış iki alt kümesi olur. Hipotezden, X uzayının $V_0 \cap X \subset H$ ve $V_1 \cap X \subset X - H$ olacak şekilde hem açık hem kapalı bir H alt kümesi vardır. O zaman

$$y_0 \in V_0 \subset Cl_{\beta X} V_0 = Cl_{\beta X} (V_0 \cap X) \subset Cl_{\beta X} H \text{ ve}$$

$$\beta X - W \subset V_1 \subset Cl_{\beta X} V_1 = Cl_{\beta X} (V_1 \cap X) \subset Cl_{\beta X} (X - H) \text{ bulunur.}$$

Fakat X ve $X - H$, X uzayında tamamen ayrılmıştır. Öyleyse Teorem 1.2.8.'den,

$$Cl_{\beta X} H \cap Cl_{\beta X} (X - H) = \emptyset$$

dir. Ayrıca $H \cup (X - H) = X$ olduğundan,

$$Cl_{\beta X} H \cup Cl_{\beta X} (X - H) = Cl_{\beta X} X = \beta X$$

bulunur. Böylece $Cl_{\beta X} H, \beta X$ uzayında hem açık hem kapalı olup $y_0 \in Cl_{\beta X} H \subset W$ elde edilir. Dolayısıyla βX sadece hem açık hem kapalı kümelerden oluşan bir baza sahiptir. Böylece X güçlü sıfır boyutludur. ■

Sonuç 2.2.12: βN sıfır boyutludur. Çünkü N ayrık bir topolojik uzay ve $Z(N) = P(N)$ dir.

Teorem 2.2.13: X güçlü sıfır boyutlu bir uzay olsun. O zaman $St(\mathbb{B}(X)) \cong \beta X$ tir.

İspat : B_0 ve B_1, X in tamamen ayrılmış iki alt kümesi olsun. Bunların $St(\mathbb{B}(X))$ te ayrık kapanışlara sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

B_0 ve B_1 tamamen ayrılmış olduğundan, Teorem 2.2.11'den, $B_0 \subset H$ ve $B_1 \subset X - H$ olacak şekilde X uzayında hem açık hem kapalı bir H kümesi vardır. H ve $X - H$, $\mathbb{B}(X)$ in ayrık iki elmanı olduğundan, Teorem 2.2.7'den, H ve $X - H$, $St(\mathbb{B}(X))$ te ayrık kapanışlara sahiptir. Böylece B_0 ve $B_1, St(\mathbb{B}(X))$ te ayrık kapanışlara sahip olur. O zaman, Teorem 1.2.8'den, $St(\mathbb{B}(X)) \cong \beta X$ bulunur. ■

3. AYRIK VE HERHANGİ BİR TYCHONOFF UZAYININ WALLMAN-FRINK KOMPAKTLAMALARININ DENKLİĞİ

ALİ İHSAN GENC

Frink (1964), X uzayının bütün kompaktlamalarının uygun bir $\mathcal{E}$ normal bazı için $St(\mathcal{E})$ olarak gerçekleştirilip gerçekleştirilemeyeceğini sormuştur. Bu soru hala cevapsızdır. Buna rağmen bir çok özel kompaktlamanın bu türde olduğu, yani Wallman-Frink kompaktlaması olduğu, gösterilmiştir. Bunun yanında ayrık uzayların her kompaktlaması Wallman-Frink ise tüm Hausdorff kompaktlamaların da Wallman-Frink olduğu gösterilmiştir. Bunu ilk gösteren Sapiro (1974) oldu. Bağımsız olarak Ünlü (1976) bunu yerel kompakt uzaylar için gösterdi. Steiner-Steiner (1976) yerel kompakt kısıtlamasını kaldırdılar. Bu bölümde Sapiro'nun yöntemi Ünlü, Steiner-Steiner Teoremi ile basitleştirilerek ayrık uzayların her kompaktlaması Wallman-Frink ise tüm Hausdorff kompaktlamalarının da Wallman-Frink olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.1: $\alpha X \in K(X)$ olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

- i) $\alpha X \cong St(\mathcal{E})$ olacak şekilde X in bir $\mathcal{E}$ normal bazı vardır.
- ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $Cl_{\alpha X}(A \cap X) = A$ ve αX in kapalı kümeleri için baz olacak şekilde bir $\mathcal{A}$ halkası vardır. ($\mathcal{A}$, $\mathcal{E}(\alpha X)$ in alt latisidir.)
- iii) Her $\emptyset \neq B \in \mathcal{B}$ için $B \cap X \neq \emptyset$ ve αX in kapalı kümeleri için baz olacak şekilde bir $\mathcal{B}$ halkası vardır. ($\mathcal{B}$, $\mathcal{E}(\alpha X)$ in alt latisidir.)

Teorem 3.2: (Ünlü, Steiner-Steiner)

$\alpha_1 X_1 \in K(X_1)$ ve $\alpha_2 X_2 \in K(X_2)$ olsun. Eğer ;

- a) $F: \alpha_1 X_1 \rightarrow \alpha_2 X_2$ sürekli ve $F(X_1) = X_2$ ve $F, \alpha_1 X_1 - X_1$ üzerinde bire bir ise ,
- b) $\alpha_1 X_1, X_1$ uzayının bir Wallman-Frink kompaktlaması ise,

o zaman $\alpha_2 X_2$ de X_2 uzayının bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır.

İspat : Hemen belirtelim ki F örtendir. Çünkü; $Cl_{\alpha_2 X_2} X_2 = Cl_{\alpha_2 X_2} F(X_1) = \alpha_2 X_2$ olup $F(\alpha_1 X_1) \subset \alpha_2 X_2$ ise $Cl_{\alpha_2 X_2} F(\alpha_1 X_1) \subset \alpha_2 X_2$ ve $X_1 \subset \alpha_1 X_1$ olduğundan $F(X_1) \subset F(\alpha_1 X_1)$ dir. Böylece $Cl_{\alpha_2 X_2} F(\alpha_1 X_1) \supset Cl_{\alpha_2 X_2} F(X_1) = \alpha_2 X_2$ dir. Buradan, $Cl_{\alpha_2 X_2} F(\alpha_1 X_1) = \alpha_2 X_2$ buluruz. Şimdi , $\alpha_1 X_1$ kompakt olduğundan, $F(\alpha_1 X_1)$ de kompakttır. Ayrıca $\alpha_2 X_2$, Hausdorff olduğundan, $F(\alpha_1 X_1) \subset \alpha_2 X_2$ kapalıdır. Öyleyse $Cl_{\alpha_2 X_2} F(\alpha_1 X_1) = F(\alpha_1 X_1) = \alpha_2 X_2$ olup F örtendir.

$\alpha_1 X_1, X_1$ in bir Wallman-Frink kompaktlaması olduğundan, Teorem 3.1'den, $\alpha_1 X_1$ uzayındaki kapalı kümelerin bir $\mathbb{B}_1$ baz halkası vardır öyle ki $\emptyset \neq B \in \mathbb{B}_1$ ise $B \cap X_1 \neq \emptyset$ dir. F sürekli, örten ve $\alpha_2 X_2$ kompakt olduğundan, F kapalıdır. $\mathbb{B}'_2 = \{ F(B_1) : B_1 \in \mathbb{B}_1 \}$ $\alpha_2 X_2$ nin kapalı kümeleri için bir bazdır.

Şimdi $\mathbb{B}_2, \mathbb{B}'_2$ deki elemanların bütün sonlu kesişimlerinden oluşan bir aile olsun. O zaman $\mathbb{B}_2, \alpha_2 X_2$ uzayındaki kapalı kümelerine bir baz halkası olur. $F(B_1), F(B_2), \dots, F(B_n) \in \mathbb{B}'_2$ ve $G = F(B_1) \cap F(B_2) \cap \dots \cap F(B_n) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Eğer $G \cap X_2 = \emptyset$ ise $G \subset \alpha_2 X_2 - X_2$ dir. Bu nedenle $y \in G$ ise $y = F(b_1) = F(b_2) = \dots = F(b_n), b_i \in B_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ dir. $F(X_1) = X_2$ olduğundan, hiç bir b_i, X_1 kümesine ait değildir. Böylece $b_i \in \alpha_1 X_1 - X_1, i = 1, 2, 3, \dots, n$ dir. $F, \alpha_1 X_1 - X_1$ üzerinde bire bir olduğundan, $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ dir. O zaman $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$ olur. Öyleyse, $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \in \mathbb{B}_1$ ve $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$ olduğundan, $(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \cap X_1 \neq \emptyset$ dir. Ama o zaman, $G \cap X_2 = [F(B_1) \cap F(B_2) \cap \dots \cap F(B_n)] \cap X_2 \neq \emptyset$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $G \cap X_2 \neq \emptyset$ olmak zorundadır. Böylece Teorem 3.1'den, $\alpha_2 X_2$ bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. ■

Şimdi ayrıntı her uzayın her kompaktlaması Wallman-Frink ise tam regüler her uzayın her kompaktlamasının da Wallman-Frink olduğunu göstermek istiyoruz. Ama bunu önce izole noktasız tam regüler uzaylar için yapalım. Hatırlanacağı gibi X uzayının yığılma noktası olmayan bir noktasına onun *izole noktası* denir.

X izole noktası olmayan bir uzay olsun. $\alpha X \in K(X)$ olsun. $D, |D| = |X|$ ve $D \cap X = \emptyset$ olacak şekilde ayrıntı bir uzay olsun. Şimdi D uzayının bir $\varepsilon_{\alpha X} D$ kompaktlamasını aşağıdaki gibi inşa edelim :

$f: D \rightarrow X$ bire bir ve örten olsun. D nin $\varepsilon_{\alpha X} D$ kompaktlamasını $D \cup \alpha X$ kümesi üzerinde inşa edeceğiz. Bu kümenin üzerine koyacağımız topoloji aşağıdaki şekilde olsun.:

- i) D kümesinin bütün noktaları açık olsun.
- ii) $p \in \alpha X$ noktasının komşuluk bazı V, p nin αX teki bir komşuluğu olmak üzere $V \cup [f^{-1}(V) - f^{-1}(p)]$ şeklindeki kümelere oluşsun.

Bu şekilde $D \cup \alpha X$ kümesi üzerine konulan topolojik uzayı $\varepsilon_{\alpha X} D$ ile göstereyim.

Teorem 3.3: $\varepsilon_{\alpha X} D, D$ nin bir kompaktlamasıdır.

İspat : $D, \varepsilon_{\alpha X} D$ de yoğundur.:

$p \in \alpha X$, $p \in U$ ve $U \subset \varepsilon_{\alpha X} D$ açık olsun. O zaman $p \in V \cup [f^{-1}(V) - f^{-1}(p)] \subset U$ olacak şekilde p nin bir komşuluk bazı elemanı vardır. V , p nin αX teki bir komşuluğu, X in izole noktası olmadığından ve $X, \alpha X$ te yoğun olduğundan, $p \neq q$ ve $q \in X \cap V$ olacak şekilde bir $q \in X$ vardır. O zaman $f^{-1}(q) \in [f^{-1}(V) - f^{-1}(p)]$ ve $f^{-1}(q) \in U \cap D$ olup $D, \varepsilon_{\alpha X} D$ de yoğundur.

$\varepsilon_{\alpha X} D$ Hausdorff'tir.:

$p, q \in D \cup \alpha X$ alalım. $p \neq q$ olsun. $G, H \subset D \cup \alpha X$ açık kümeler bulmalıyız öyle ki $p \in G, q \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olsun. Şimdi bunu üç durumda inceleyelim:

i) $p, q \in D$ ise $G = \{p\}$ ve $H = \{q\}$ almak yeterlidir.

ii) $p \in D, q \in \alpha X$ ise f örten olduğundan, bir $r \in X$ vardır öyle ki $f(p) = r$ dir. Şimdi $G = \{p\}$ alalım. Eğer $q = r$ ise $H = \alpha X \cup [f^{-1}(\alpha X) - f^{-1}(q)]$, $q \neq r$ ise $H = [\alpha X - \{r\}] \cup [f^{-1}(\alpha X - \{r\}) - f^{-1}(q)]$ alınırsa $G \cap H = \emptyset$ olur.

iii) $p, q \in \alpha X$ ise αX Hausdorff olduğundan, $V_1, V_2 \subset \alpha X$ açık kümeleri vardır öyle ki $p \in V_1, q \in V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dir. O zaman $G = V_1 \cup [f^{-1}(V_1) - f^{-1}(p)]$ ve $H = V_2 \cup [f^{-1}(V_2) - f^{-1}(q)]$ alınırsa $G \cap H = \emptyset$ olur.

$\varepsilon_{\alpha X} D$ kompaktır.:

$\mathbb{Q} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}, \varepsilon_{\alpha X} D$ nin bir açık örtüsü olsun. $\varepsilon_{\alpha X} D = D \cup \alpha X$ olduğundan ve $\varepsilon_{\alpha X} D$ nin inşasından dolayı αX i örtecek şekilde bir $\mathbb{H} = \{V_\alpha : \alpha \in I, V_\alpha \subset U_\alpha, \alpha X$ te açık}

kümesi vardır. αX kompakt olduğundan, $\bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i} = \alpha X$ olacak şekilde $\mathbb{H}$ nin bir

$\{V_{\alpha_i} : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ alt kümesi vardır. O zaman $D = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$ olur. Her $i=1, 2, 3, \dots, n$

için $p_i \in V_{\alpha_i}$ ve $i \neq j$ için $p_i \neq p_j$ olacak şekilde p_i noktalarını seçelim. Her

$i=1, 2, 3, \dots, n$ için $f^{-1}(p_i) \in U_{\beta_i} \in \mathbb{H}$ vardır. O zaman $D \cup \alpha X \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\beta_i}$ olur.

■

Teorem 3.4: Aynk her uzayın her kompaktlaması Wallman-Frink ise izole noktası olmayan tam regüler her uzayın her kompaktlaması da Wallman-Frink tir.

İspat : Eğer X izole noktası olmayan bir uzaysa $\varepsilon_{\alpha X}D$ yi inşa edebiliriz. Hipotezden $\varepsilon_{\alpha X}D, D$ nin bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. Şimdi αX in X uzayının bir Wallman-Frink kompaktlaması olduğunu göstereceğiz. Bunun için Teorem 3.2'i kullanacağız.

$$F: \varepsilon_{\alpha X}D \rightarrow \alpha X \text{ fonksiyonunu} \quad F(p) = \begin{cases} f(p), & p \in D \text{ ise} \\ p, & p \in \alpha X \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

F süreklidir.:

$p \in D$ ise $H \subset \alpha X$ açık ve $F(p) = f(p) \in H$ olsun. O zaman $p \in F^{-1}(H)$ ve $\{p\}, \varepsilon_{\alpha X}D$ de açık ve $F(\{p\}) \subset H$ olduğundan, $F, p \in D$ de süreklidir.

$p \in \alpha X$ ise $H \subset \alpha X$ açık ve $F(p) = p \in H$ olsun. O zaman $U = H \cup [f^{-1}(H) - f^{-1}(p)]$ alırsak $U \subset \varepsilon_{\alpha X}D$ açık, $p \in U$ ve $U \subset F^{-1}(H)$ olur. Dolayısıyla $F, p \in \alpha X$ de süreklidir. Böylece $F, \varepsilon_{\alpha X}D$ üzerinde süreklidir.

F örtendir.:

$$F(\varepsilon_{\alpha X}D) = F(D \cup \alpha X) = X \cup \alpha X = \alpha X$$

$F, \varepsilon_{\alpha X}D - D$ üzerinde bire birdir.:

$\varepsilon_{\alpha X}D - D = (D \cup \alpha X) - D = \alpha X$ ve $F, \alpha X$ üzerinde birim fonksiyon olup bire birdir.

Öyleyse Teorem 3.2'den, $\alpha X, X$ uzayının bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. ■

Teorem 3.5: $X = Y \cup Z$ ve $\alpha X \in K(X)$ olsun. $Cl_{\alpha X}Y$ ve $Cl_{\alpha X}Z$ sırasıyla Y ve Z uzaylarının Wallman-Frink kompaktlamaları olsun. O zaman αX X in bir Wallman-Frink kompaktlamadır.

İspat : $X = Y \cup Z$ olduğundan, $Cl_{\alpha X}X = Cl_{\alpha X}(Y \cup Z)$ olup $\alpha X = Cl_{\alpha X}Y \cup Cl_{\alpha X}Z$ bulunur. A ve B sırasıyla $Cl_{\alpha X}Y$ ve $Cl_{\alpha X}Z$ nin Teorem 3.1 ii)'yi sağlayan kapalı kümeleri için baz halkaları olsunlar. $W = Cl_{\alpha X}Y \cap Cl_{\alpha X}Z$ olsun.

$$\mathfrak{E} = \{ A \cup B : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B} \text{ ve } A \cap W \subset B \cap W \}$$

kümesini tanımlayalım. O zaman $\mathcal{F}$ bir halkadır. Şimdi $\mathcal{F}$ nin αX uzayındaki kapalı kümeler için bir baz olduğunu gösterelim. $F \subset \alpha X$ kapalı ve $p \in \alpha X - F$ olsun. Bir $C \in \mathcal{F}$ bulmaktayız öyle ki $F \subset C$ ve $p \notin C$ olsun.

$A \in \mathcal{A}$ $Cl_{\alpha X} Y$ nin kapalı kümeleri için baz olduğundan, bir $A \in \mathcal{A}$ vardır öyle ki $p \notin A$ ve $F \cap Cl_{\alpha X} Y \subset A$ dır. O zaman $A \cap W = A \cap Cl_{\alpha X} Y \cap Cl_{\alpha X} Z = A \cap Cl_{\alpha X} Z$ olduğundan $A \cap W \subset \alpha X$ kapalıdır. Ayrıca $p \in \alpha X - (A \cap W)$ olup $p \notin A \cap W$ ve $p \notin F$ olduğundan, $p \notin [F \cap Cl_{\alpha X} Z] \cup [A \cap W]$ dur. O zaman $[F \cap Cl_{\alpha X} Z] \cup [A \cap W] \subset Cl_{\alpha X} Z$ kapalı ve $\mathbb{B}$, $Cl_{\alpha X} Z$ nin kapalı kümeleri için bir baz olduğundan, bir $B \in \mathbb{B}$ vardır öyle ki $[F \cap Cl_{\alpha X} Z] \cup [A \cap W] \subset B$ ve $p \notin B$ dir. Ayrıca $F \cap Cl_{\alpha X} Y \subset A$ ve $[F \cap Cl_{\alpha X} Z] \cup [A \cap W] \subset B$ sonucundan, $[F \cap (Cl_{\alpha X} Y \cup Cl_{\alpha X} Z)] \cup [A \cap W] \subset A \cup B$ ve buradan da $F \subset F \cup (A \cap W) \subset A \cup B = C \in \mathcal{F}$ elde edilir.

Şimdi $C = A \cup B \in \mathcal{F}$ alalım. O zaman $Cl_{\alpha X} [(A \cup B) \cap X] = Cl_{\alpha X} [(A \cap X) \cup (B \cap X)] = Cl_{\alpha X} A \cup Cl_{\alpha X} B = A \cup B = C$ olduğundan, Teorem 3.1 ii)'den, $\alpha X, X$ in bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. ■

Teorem 3.6: Ayrık her uzayın her kompaktlaması Wallman-Frink ise tam regüler her uzayın her kompaktlaması da Wallman-Frinktir.

İspat : Ayrık her uzayın her kompaktlaması Wallman-Frink ve X herhangi bir uzay olsun. D, X uzayının bütün izole noktalarının kümesi ve $C = X - Cl_X D$ olsun. O zaman C nin izole noktası yoktur.

Eğer $\alpha X, X$ in bir kompaktlaması ise $C \cup D$ nin de bir kompaktlamasıdır. Bunun için $Cl_{\alpha X} (C \cup D) = \alpha X$ olduğunu göstermek yeterlidir. $X = C \cup Cl_X D$ olduğundan $Cl_{\alpha X} X = Cl_{\alpha X} C \cup Cl_{\alpha X} (Cl_X D)$ olup $Cl_{\alpha X} (Cl_X D) = Cl_{\alpha X} (Cl_{\alpha X} D \cap X) \subset Cl_{\alpha X} D \cap Cl_{\alpha X} X = Cl_{\alpha X} D$ bulunur. Böylece $Cl_{\alpha X} X = \alpha X \subset Cl_{\alpha X} C \cup Cl_{\alpha X} D = Cl_{\alpha X} (C \cup D)$ dir. Öyleyse $Cl_{\alpha X} (C \cup D) = \alpha X$ elde edilir.

D, X in izole noktalarından oluştuğundan D nin X ten gelen alt uzay topolojisi ayrıktır. Hipotezden, $Cl_{\alpha X} D, D$ ayrık uzayının bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. Ayrıca C nin izole noktası olmadığından, Teorem 3.4'ten, $Cl_{\alpha X} C, C$ nin bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. Böylece Teorem 3.5'ten, $\alpha X, C \cup D$ nin bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. Teorem 3.1'den, αX uzayındaki kapalı kümelerin bir $\mathcal{A}$ baz halkası vardır ve her $A \in \mathcal{A}$ için $Cl_{\alpha X} [A \cap (C \cup D)] = A$ dır. Fakat her $A \in \mathcal{A}$ için $Cl_{\alpha X} (A \cap X) = Cl_{\alpha X} [A \cap (C \cup Cl_X D)] = A$ dır. Çünkü ;

$A \cap X \subset A$ ise $Cl_{\alpha X}(A \cap X) \subset A$ ve tersine $A \cap (C \cup D) \subset A \cap (C \cup Cl_X D)$ olduğundan, $Cl_{\alpha X}[A \cap (C \cup D)] = A \subset Cl_{\alpha X}[A \cap (C \cup Cl_X D)] = Cl_{\alpha X}(A \cap X)$ sonucu bize $Cl_{\alpha X}(A \cap X) = A$ olduğunu söyler. Böylece Teorem 3.1'den, $\alpha X, X$ in bir Wallman-Frink kompaktlamasıdır. ■

Bu son teorem tam regüler her uzayın her kompaktlamasının Wallman-Frink olup olmaması probleminin , her ayrık uzayın her kompaktlamasının Wallman-Frink olup olmaması problemine denk olduğunu gösterir.



KAYNAKLAR

1. CHANDLER, R.E., 1976. Hausdorff Compactifications. Dekker, New York, 146s.
2. WILLARD, S., 1970. General Topology. Addison-Wesley, London, 368s.
3. GILLMAN, L., ; JERISON, M., 1960. Rings of Continuous Functions. Van Nostrand, Princeton, N.J., 300s.
4. PORTER, J.R. ; WOODS, R.G., 1988. Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces. Springer-Verlag.
5. KUYUCU, F., 1989. Tychonoff Uzaylarının Kompaktlamalarının Latisleri. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Balcalı-Adana, s.1-15.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Erzurum'da doğdum. 1991 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. YADİM'de 1 yıl İngilizce öğrenim gördükten sonra bölümüme geçtim ve 1996 yılında buradan mezun oldum. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi'nde yüksek lisansa ve Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'nde de Araştırma Görevliliğine başladım. Halen aynı görevde bulunmaktayım.



ÖZGEÇMİŞ KURULU
YADİM MERKEZİ