

WAVELETLERLE İNTEGRAL DENKLEMLERİNE YAKLAŞIM

Tahir COŞGUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI ADI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2015

AMASYA

ÖN SÖZ

Dalgacıklar (Wavelets), bir sinyali farklı çözünürlük seviyesindeki bileşenlerine ayırarak analiz etmeye yarayan matematiksel araçlardır ve geleneksel Fourier yöntemlerine göre daha iyi bir zaman yerelleştirmesi sağlarlar. Bu yüzden birçok mühendislik ve fizik problemini çözmek için, bilhassa pürüzlü fonksiyonların analizinde dalgacık yöntemleri tercih edilmektedir [1-3].

Bu tez çalışmasının amacı, integral denklemlerin Dalgacık Analizi yardımıyla nasıl çözülebileceğini göstermektir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle “Temel Kavramlar” bölümünde teorinin gelişimi açısından da önemli olan temel bilgiler verilecektir. “Skaler Dalgacık Teorisi’ne Giriş” bölümünde çalışmada kullanılacak temel araç olan dalgacıklar, “İntegral denklemler” bölümünde ise bu çalışmanın kaynağı olan problem tanıtılacaktır. “Literatür Taraması” bölümünde dalgacıkların integral denklemlerin çözümlerine dair uygulamaları ile ilgili bir özet bilgi sunulacaktır. “Yöntem” bölümünde ise Dalgacık Moment Metodunun ve Dalgacık Sıralama Metodunun integral denklemlere birer uygulaması önerilecek ve bu uygulamalar açıklayıcı örneklerle destekleneceklerdir. “Sonuç ve Öneriler” bölümünde ise önerilen metotların kısa bir değerlendirmesi yapılacak ve uygulamaya dair bazı önerilere yer verilecektir.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında desteklerini her aşamada yanımda hissettiğim hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK’e teşekkürü borç bilirim. Ayrıca üzerimde çok emekleri bulunan ailem Sadık ve Fadime COŞGUN’a sonsuz teşekkürler.

Temmuz 2015

Tahir COŞGUN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. SKALER DALGACIK TEORİSİNE GİRİŞ	11
3.1 İnceltilebilir Fonksiyonlar	11
3.2 Çoklu Çözünürlük Analizi ve Dalgacıklar	19
3.3 Momentler	26
3.4 Yaklaşım Mertebesi	28
3.5 Ayrık Dalgacık Dönüşümü	31
3.6 Harmonik Dalgacıklar	32
4. İNTEGRAL DENKLEMLER	35
5. LİTERATÜR TARAMASI	36
6. YÖNTEM	38
6.1 Bir İntegral Denklemin Dalgacık Sıralama Metodu Yardımıyla Çözümü	38
6.1.1 Hata Analizi	39
6.1 Bir İntegral Denklemin Dalgacık Moment Metodu Yardımıyla Çözümü	43
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	47
8. KAYNAKLAR	48
9. ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ	54

ÖZET

Waveletlerle İntegral Denklemlerine Yaklaşım

Bu tez çalışmasının amacı, farklı tiplerdeki integral denklemleri dalgacık yöntemleriyle çözmektir. Özel olarak dalgacık sıralama metodu için Periyodik Harmonik Dalgacıklar ve dalgacık moment metodu için Haar dalgacıkları kullanılmış, önerilen yöntemlerin uygulanabilirliğini göstermek için açıklayıcı bazı örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Dalgacık Analizi, Harmonik Dalgacıklar, Dalgacık Sıralama Metodu, Dalgacık Moment Metodu, İntegral Denklemler

ABSTRACT

Approximate Solutions of Integral Equations Via Wavelets

The purpose of this thesis is to solve some certain types of integral equations by using wavelets. In particular, we use Periodized Harmonic Wavelets in the wavelet collocation method and Haar wavelets in the wavelet moment method to obtain exact or approximate solutions. Illustrative examples are provided to show the applicability and advantages of the proposed methods.

Key Words: Wavelet Analysis, Harmonic Wavelets, Wavelet Collocation Method, Wavelet Moment Method, Integral Equations

TABLO VE ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1 Haar Fonksiyonu.....	12
Şekil 3.2 Meksika Şapka Fonksiyonu ve Yineleme Bağıntısı.....	13
Şekil 3.3 Dalgacık Vektör Uzayları.....	22
Şekil 3.4 Haar Dalgacık Fonksiyonu.....	25
Şekil 3.5 Ana harmonik dalgacık $w(x)$ 'in (a) reel ve (b) sanal kısımları.....	33
Şekil 3.6 (a) $\psi_{0,0}(x)$ 'in reel ve sanal kısımları (b) $\psi_{1,1}(x)$ 'in reel ve sanal kısımları.....	34
Şekil 6.1 Örnek için yaklaşık ve tam çözümler.....	42
Şekil 6.2 Örnek için yaklaşık ve tam çözümler.....	43
Şekil 6.3 Örnek için yaklaşık ve tam çözümler.....	45
Tablo 6.1 Hata Analiz Tablosu.....	46

KISALTMALAR LİSTESİ

Üniversite: Amasya Üniversitesi

Enstitü: Fen Bilimleri Enstitüsü

Tez: Yüksek lisans tezi

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar

$L^2(\mathbb{R})$: Karesinin integrali sonlu fonksiyonlar uzayı

$L^1(\mathbb{R})$: İntegrali sonlu fonksiyonlar uzayı

$L^2(a, b)$: Karesinin (a, b) aralığı üzerinde integrali sonlu fonksiyonlar uzayı

$C_c(\mathbb{R})$: Kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı

$D_c f(x) : \frac{1}{\sqrt{c}} f(x/c)$

$T_k f(x) : f(x - k)$

$\text{supp } f : f(x)$ 'in desteği

$V \oplus W$: V ile W uzaylarının direkt toplamı

$\bar{z} : z \in \mathbb{C}$ 'nin karmaşık eşleniği

MRA: Çoklu Çözünürlük Analizi (Multiresolution Analysis)

PHD: Periyodik Harmonik Dalgacıklar

PHW: Periodized Harmonic Wavelets

$\bar{V} : V$ 'nin kapanışı

$V^\perp : V$ 'nin dik tümleyeni

1 GİRİŞ

İntegral denklemler bilinmeyen bir fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler şeklinde tarif edilmekle beraber bu tanım aslında yeterince açıklayıcı değildir. Çünkü integral denklemleri genelleyip tek bir çatı altında birleştirmek mümkün değildir. İntegral denklemler tanımlayıcı integralin sınırları, integrand içerisinde bulunan çekirdek dediğimiz fonksiyonun durumu veya denklemin lineer olup olmaması gibi farklı kriterlere göre sınıflandırılabilirler. Bu, integral denklemleri analitik olarak çözmek için genel bir metot ortaya konulmasını neredeyse imkânsız kılmakla birlikte, farklı tipteki integral denklemler için yaklaşık çözümlerin aranmasını makul kılmaktadır.

Kısmi integrasyon yardımıyla bir integral alınırken kullanılan yöntemlerden de hatırlanacağı üzere, en basit fonksiyonlar üstel fonksiyonlardır ve kompleks üstel fonksiyonlar trigonometrik polinomlar olarak adlandırılmaktadırlar. Bir fonksiyona trigonometrik polinomlarla yaklaşmak için kullanılacak araçlardan biri şüphesiz Fourier analizi olacaktır. Fourier dönüşümü, diğer bütün dönüşümlerin en önemlisi olması ile birlikte “*the king of all transforms*” unvanına layık görülmüş olsa da; diğer tüm yaklaşım metotları gibi Fourier dönüşümü de uygulamaya gelindiğinde kusursuz değildir. Fourier analizi, aslında eş zamanlı olarak zaman ve frekans analizi yapılmasına olanak sağlar. Bu analiz esnasında matematiksel literatürde “Fourier belirsizliği” veya “Heisenberg’in belirsizlik ilkesi” diye de bilinen bir belirsizlik söz konusudur.

Fourier belirsizliğini minimize etmek için, Fourier dönüşümünün kısa zamanlı Fourier dönüşümü (short time Fourier transform) gibi bazı uzantıları inşa edilmiştir. Zaman içerisinde bu yeni dönüşümlerin de uygulamadaki ihtiyaçları karşılamada yetersiz kalmasıyla arayışa giren bilim insanları, dalgacık analizini (wavelet analysis) keşfetmişlerdir.

İlk dalgacık 1909 yılında Alfred Haar tarafından inşa edilmesine karşın, dalgacık ifadesini ortaya atan ilk kişi Fransız jeofizik mühendisi olan Jean Morlet’dir (1984).

Morlet'nin çalışmaları daha sonraları, kuantum fizikçisi Alex Grossmann'a, harmonik analist Yves Meyer'e, elektronik mühendisi Stephane Mallat'ya ve diğeri bir kuantum fizikçisi Ingrid Daubechies'ye (ki kendisinin doktora tez danışmanı A. Grossman'dır) ilham vermiştir. 1988'de, Mallat oklu çözünürlük analizini (multiresolution analysis) doktora tezi olarak savunmuştur. Sonraki yıllarda Daubechies, herhangi bir uygulamada ihtiyaç duyulabilecek gayet iyi yaklaşıma sahip, sürekli ve kompakt destekli Daubechies dalgacıklarını inşa etmiş ve uygulamaya sunmuştur [2].

Yukarıda bahsedilen süreçten de anlaşılacağı gibi bu tez çalışmasının amacı frekans kümesi üzerinden dalgacıkların nasıl inşa edilebileceğini göstermek ve dalgacıkları tanıtmaktır. Sonrasında da, Harmonik dalgacıklarla dalgacık sıralama metodu ve Haar dalgacıklarıyla dalgacık moment metodu kullanılarak bir integral denklemin nasıl zlebileceğı gösterilerek açıklayıcı örneklerle de desteklenecektir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu tez çalışmasının asıl amacı, integral denklemlerinin dalgacık yöntemleri kullanılarak nasıl çözülebileceğini incelemektir. Bu çalışma esnasında bazı temel matematiksel araçlara ihtiyaç duyulacağından, bu bölümde çalışma içerisinde gerekli olacak birtakım temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu kavramlar üzerine daha ayrıntılı bilgi edinebilmek için [60-65]'te verilen kaynaklardan faydalanılabilir.

2.1 Tanım

V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+$, V 'de tanımlı toplama şeklinde adlandırılan ve $\cdot$, K ve V 'nin elemanları arasında tanımlı çarpma şeklinde adlandırılan birer işlem olsunlar.

1. Her $u, v, w \in V$ için

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

2. V 'de 0 ile gösterilen bir eleman vardır öyle ki her $u \in V$ için

$$0 + u = u + 0 = u.$$

3. Her $u \in V$ için V 'de bir $(-u)$ elemanı vardır öyle ki

$$u + (-u) = 0.$$

4. Her $u, v \in V$ için

$$u + v = v + u.$$

5. Her $c \in K$ ve her $u, v \in V$ için $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$.

6. Her $a, b \in K$ ve her $u \in V$ için $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

7. Her $a, b \in K$ ve her $u \in V$ için $(ab) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$.

8. 1 sayısı $(K, \cdot)$ 'nin birim elemanı olmak üzere her $u \in V$ için $1 \cdot u = u$.

Yukarıdaki şartları sağlayan V kümesine, K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Örneğin; $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde ve $\mathbb{C}^n$ ise $\mathbb{C}$ cismi üzerinde birer vektör uzayıdır.

2.2 Tanım

V bir küme ve d , V üzerinde bir metrik (ya da bir uzaklık fonksiyonu), yani, $V \times V$ üzerinde, her $x, y, z \in V$ için

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere (V, d) ikilisine metrik uzay denir.

2.3 Tanım

V , K üzerinde bir vektör uzayı olsun. $u, v \in V$ ve $a \in K$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna V üzerinde bir norm denir.

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|u\| = 0$ ancak ve ancak $u = 0_v$
3. Her $a \in K$ için $\|a \cdot u\| = |a| \|u\|$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Üzerinde bir norm tanımlanmış olan vektör uzayına normlu vektör uzayı veya kısaca normlu uzay denir. Örneğin $\mathbb{R}^n$ uzayı $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ normu ile birlikte bir normlu uzaydır.

2.4 Tanım

V bir normlu vektör uzayı olsun. V , üzerindeki norm $\|\cdot\|$, $u, v \in V$ için V üzerinde

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

ile verilen bir metrik tanımlar. Bu metrik norm tarafından indirgenen metrik olarak adlandırılır. Bu durumda (V, d) ikilisine de normdan indirgenen metrik uzay denir.

2.5 Tanım

x_n bir sayı dizisi olsun. Her pozitif ε için ve her $n, m \geq N$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyorsa x_n dizisi bir Cauchy dizisidir.

2.6 Not

Bir metrik uzay içerisinde her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzay tamdır.

2.7 Tanım

Bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metriğe göre tam ise; bu uzay bir Banach uzayı olarak adlandırılır.

Mühendislik uygulamalarında çoğunlukla Banach uzayları kullanılır. Banach uzaylarına örnek olarak “Öklid uzayları” verilebilir. Bununla birlikte, uygulamada en sık karşılaşılan fonksiyon uzaylarından olan L^p uzayları ve dizi uzaylarından olan l^p uzayları da Banach uzaylarıdır.

Örnek

$p \in [1, \infty)$ olmak üzere, $l^p(N) = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} < \infty\}$ uzayı

$$\|\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu tarafından indirgenen metriğe göre tamdır. Özel olarak,

$l^2(N) = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2} < \infty\}$ uzayı

$$\|\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Örnek

$p \in [1, \infty)$ olmak üzere, $L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) : \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$ uzayı

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu tarafından indirgenen metriğe göre tamdır. Özel olarak ise,

$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) : \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\}$ uzayı

$$\|f(x)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.8 Tanım

Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna, iç çarpım denir.

1. $u, v, w \in V$ için $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
2. $u, v \in V$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ için $\langle au, bv \rangle = a\bar{b}\langle u, v \rangle$
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0$ ancak ve ancak $u = 0_V$
5. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

Üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış vektör uzayına, iç çarpım uzayı denir. Örneğin; “Öklid uzayları”, üzerlerinde tanımlı standart iç çarpımla birlikte bir iç çarpım uzayı oluştururlar.

2.9 Tanım

u ve v , V iç çarpım uzayının iki elemanı olsunlar. $\langle u, v \rangle = 0$ ise u ve v ortogonaldır denir ve bu durum $u \perp v$ ile gösterilir. Eğer u ve v 'nin, V üzerindeki iç çarpımdan indirgenen norma göre büyüklükleri bir birim ise u ve v ortonormaldir denir.

2.10 Lemma

V bir iç çarpım uzayı ve $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ kümesi V 'de ortonormal bir sistem olsun. Her $f \in V$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

eşitliğinin doğru olması için gerekli ve yeterli bir şart $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ kümesinin V 'de tam ortonormal bir sistem olmasıdır.

İspat

İspat için [62]'ye bakınız.

2.11 Teorem

V bir iç çarpım uzayı ve $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ kümesi V 'de ortonormal bir sistem olsun. Her $f \in V$ için

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2$$

eşitliğinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ kümesinin V 'de tam olmasıdır. Bu teorem Parseval teoremi diye bilinmekle birlikte, geometrik olarak Pisagor teoreminin bir genellemesi şeklinde düşünülebilir.

İspat

İspat için [62]'ye bakınız.

2.12 Not

Bütün normlar iç çarpımlardan gelmemekle birlikte, her iç çarpım bir norm üretir ve bu norm $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ ile tanımlanır. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir normlu uzay üzerindeki normun bir iç çarpım tarafından üretilip üretilmediğini öğrenmenin yollarından birisi; bu normun, paralelkenar yasası olarak bilinen

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$$

özdeşliğini sağlayıp sağlamadığını kontrol etmektir.

2.13 Tanım

Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımdan indirgenen norm ve bu normdan indirgenen metriğe göre tam ise; bu uzay bir Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

2.14 Teorem

$L^2(\mathbb{R})$ uzayı

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımı ile birlikte bir Hilbert uzayıdır.

2.15 Not

$p \neq 2$ için $L^p(\mathbb{R})$ uzayı, üzerindeki norm paralelkenar yasasını sağlamadığından dolayı; $L^p(\mathbb{R})$ uzayları arasında Hilbert uzayı olan tek uzay, $L^2(\mathbb{R})$ uzayıdır. Enerjisi sonlu sinyaller uzayı olarak bilinen $L^2(\mathbb{R})$ uzayı, uygulamada en sık karşılaşılan uzaylardan birisidir.

2.16 Tanım

$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_a f(x) = f(x - a)$$

ile tanımlanan T_a operatörüne öteleme operatörü denir.

2.17 Tanım

$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ve $c > 0$ olsun.

$$D_c f(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(x/c)$$

ile tanımlanan D_c operatörüne ölçekleme operatörü denir.

2.18 Not

İlerleyen bölümlerde, $L^2(\mathbb{R})$ 'ın dalgacık denilen bazı çok özel $\psi(x)$ elemanları için, $\{D_j T_k \psi(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ kümesi dalgacık sistemi olarak tanımlanacaktır. Bu nedenle yukarıda tanımlanan D_j ve T_k operatörleri bu çalışma için büyük önem arz ederler.

2.19 Teorem

V bir Hilbert uzayı ve W , V 'nin kapalı bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$$V = W \oplus W^\perp.$$

İspat

İspat için [60]'a bakınız.

2.20 Tanım

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu için f 'nin desteği $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0\}}$ kümesidir. $\text{supp } f$ sınırlıysa, diğer bir deyişle $\text{supp } f \subset [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sabitleri bulunabiliyorsa, f 'ye kompakt desteklidir denir.

2.21 Tanım

Süreklili ve kompakt destekli fonksiyonların uzayı

$$C_c(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: f \text{ sürekli ve } f \text{ kompakt destekli}\}$$

şeklinde tanımlanır. Kompakt destek kabulü uygulamalar için daha gerçekçi olmakla birlikte $C_c(\mathbb{R})$ bir Banach uzayı veya Hilbert uzayı değildir.

2.22 Tanım

V bir metrik uzay ve $W \subset V$ olmak üzere $V \subset \bar{W}$ şartını sağlayan W 'ya V 'de yoğundur denir.

2.23 Teorem

$C_c(\mathbb{R})$ uzayı $p \in [1, \infty)$ için $L^p(\mathbb{R})$ uzayında yoğundur.

İspat

İspat için [61]'e bakınız.

3 SKALER DALGACIK TEORİSİNE GİRİŞ

3.1 İnceltilebilir Fonksiyonlar (Refinable Functions)

Bu bölümde, tek boyutlu klasik Dalgacık Teorisi'ne bir giriş yapılacaktır. Burada kullanılan temel kaynaklar [4] ve [8] olmakla birlikte bu konuyla ilgili daha fazla bilgi [1-9]'da verilmiştir.

Zaman veya mekânın salınımlı fonksiyonları, genel olarak dalga şeklinde adlandırılır. Dalgacık ise enerjisi hem zaman hem de mekân uzaylarında belli bölgelerde yoğunlaşmış küçük dalga şeklinde tarif edilebilir. Teknik anlamda ise dalgacık, tek bir ana fonksiyonun ötelemeleri ve ölçeklemeleri ile Hilbert uzayının taban fonksiyonlarını oluşturan ana fonksiyon şeklinde tanımlanabilir. Dalgacıklar geçişken, durağan olmayan veya zamana göre değişim gösterebilen sinyallerin analizinde etkin olarak kullanılabilen araçlardır [1,3].

3.1.1 Tanım

Bir

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonu, eğer

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=k_0}^{k_1} h_k \varphi(2x - k) \quad (3.1)$$

iki-ölçekli fark denklemini (veya yineleme bağıntısı) sağlıyorsa, φ 'ye inceltilebilir fonksiyon denir. Burada $h_k \in \mathbb{C}$ 'ler yineleme katsayıları olarak bilinirler. $\sqrt{2}$ ise Fourier analizindeki $\sqrt{2\pi}$ gibi L^2 uzayında normalizasyon için kullanılmaktadır.

Eğer $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\langle \varphi(x), \varphi(x - k) \rangle = \delta_{0k}$$

ise φ ortogonal olarak nitelendirilir. Burada

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon Kronecker delta fonksiyonu olarak bilinmektedir.

Örnek

Haar Fonksiyonu, birim genişlik ve birim yüksekliğe sahip

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \notin [0,1] \end{cases}$$

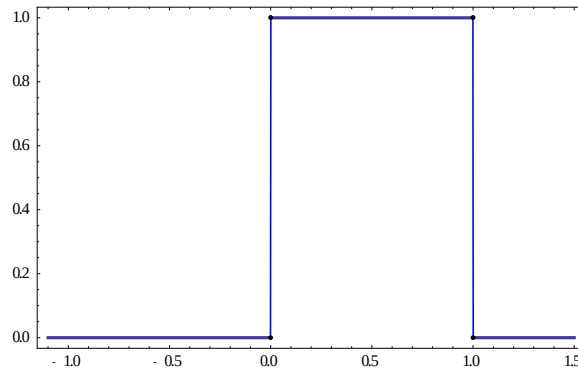
fonksiyonudur. Burada $\varphi(2x)$ kullanılarak, $\varphi(x)$ 'in aşağıdaki gibi elde edilebileceği açıktır.

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$$

eşitliği için, (3.1)'den

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğu görülebilir. Bu eşitlikten Haar fonksiyonunun ortogonal olduğu görülmektedir.



Şekil 3.1 Haar Fonksiyonu

Örnek

Meksika şapka fonksiyonu

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

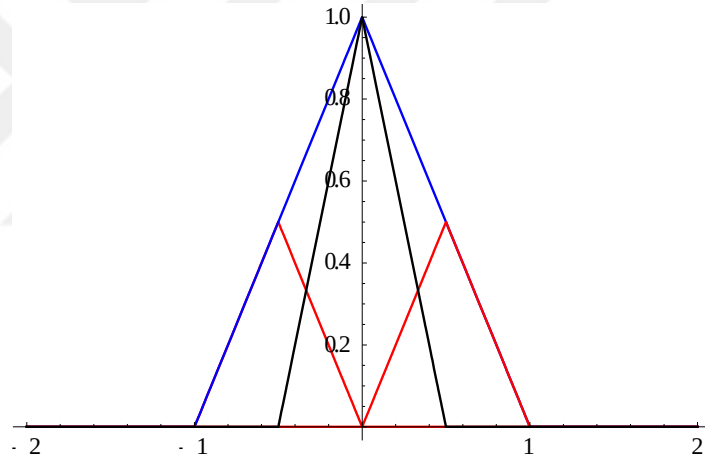
şeklinde tanımlanır. $\varphi(x)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}\varphi(2x+1) + \varphi(2x) + \frac{1}{2}\varphi(2x-1) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi(2x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\varphi(2x-1) \right).\end{aligned}$$

Son eşitlik ele alındığında

$$h_{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Burada $\langle \varphi(x), \varphi(x-1) \rangle \neq 0$ olduğundan Şapka Fonksiyonu ortogonal değildir.



Şekil 3.2 Meksika Şapka Fonksiyonu ve yineleme bağıntısı

3.1.2 Teorem

h_k 'lar yineleme katsayıları olmak üzere

$$\sum_k h_k \overline{h_{k-2l}} = \delta_{0l} \quad (3.2)$$

eşitliği ortogonalite için gerekli bir koşuldur.

İspat

$$\begin{aligned}
\delta_{0l} &= \langle \varphi(x), \varphi(x-l) \rangle \\
&= \langle \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x-k), \sqrt{2} \sum_m h_m \varphi(2x-2l-m) \rangle \\
&= 2 \sum_k \sum_m h_k \overline{h_m} \langle \varphi(2x-k), \varphi(2x-2l-m) \rangle \\
&= \sum_k \sum_m h_k \overline{h_m} \delta_{k,2l+m} \\
&= \sum_k h_k \overline{h_{k-2l}}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki teorem göz önüne alındığında ortogonal bir φ fonksiyonunun çift sayıda yineleme katsayısına sahip olduğu görülür. Aksi taktirde ilk ve son yineleme katsayılarının çarpımları sıfıra eşit olur ki bu bir çelişkidir.

3.1.3 Tanım

f , $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. f 'nin Fourier Dönüşümü $\hat{f}$ ile gösterilir ve

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

şeklinde tanımlanır. Fourier dönüşümü kompakt destekli herhangi bir $f \in L^2$ fonksiyonu için de tanımlıdır.

3.1.4 Teorem

Herhangi bir $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ için aşağıdaki koşullar denktir:

1. $\{\varphi_{0,k} \equiv \varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ sistemi ortonormaldir.
2. Neredeyse her yerde $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ dir.

İspat

$\varphi(x - k)$ 'nın Fourier dönüşümü $\hat{\varphi}_{0,k}(\xi) = e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi)$ 'dir. Diğer yandan Parseval Teoreminin tanımından dolayı $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ olduğundan, aşağıdaki işlemler yapılabilir

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(x - k), \varphi(x - m) \rangle &= \langle \varphi(x), \varphi(x - m + k) \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m-k)\xi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} e^{-i(m-k)\xi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-k)\xi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi
 \end{aligned}$$

$\{e^{-ik\xi}, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $L^2(0, 2\pi)$ uzayında tam olduğundan ispat sonlandırılır.

3.1.5 Tanım

$k \in \mathbb{Z}$ için e^{ikx} fonksiyonlarının herhangi bir sonlu lineer toplamı trigonometrik polinom olarak adlandırılır.

3.1.5 Tanım

$$h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{k_1} h_k e^{-ik\xi}$$

trigonometrik polinomu inceltilabilir φ fonksiyonunun sembolü (symbol) olarak tanımlanır.

3.1.6 Lemma

φ inceltilebilir bir fonksiyon olmak üzere φ 'nin Fourier dönüşümü

$$\hat{\varphi}(\xi) = h\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlar.

İspat.

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k)$$

eşitliğinin her iki yanının Fourier dönüşümü alınırsa

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{\frac{-ik\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

elde edilir. Sembolün tanımı kullanılarak istenen eşitliğe ulaşılabilir.

3.1.7 Lemma

(3.2) ile verilen ortogonalite şartı, aşağıdaki eşitlikle denktir:

$$|h(\xi)|^2 + |h(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (3.4)$$

İspat.

$$\begin{aligned}
 |h(\xi)|^2 + |h(\xi + \pi)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} h_m \overline{h_n} e^{-i(m-n)\xi} [1 + (-1)^{m-n}] \\
 &= \sum_l h_m \overline{h_{m-2l}} e^{-2il\xi} \\
 &= \sum_l \delta_{0,l} e^{-2il\xi} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

3.1.8 Tanım

İnceltme denkleminde sabit nokta iterasyonunun uygulanması ile elde edilen algoritma, Basamak (Cascade) algoritması olarak adlandırılır. $\varphi^{(0)}$ başlangıç tahmini olmak üzere diğer basamaklar aşağıdaki bağıntı yardımıyla hesaplanabilirler.

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi^{(n)}(2x - k).$$

3.1.9 Lemma

Eğer h , (3.4)'ü sağlıyor ve basamak algoritması yakınsıyor ise φ ortogonaldır ve kompakt bir desteğe sahiptir.

İspat

(3.4) şartı, ortogonalliğin basamak algoritmasının her adımında korunmasını sağlayacaktır. Diğer yandan $\varphi^{(n)}$ 'nin desteği $[k_0, k_1]$ kapalı aralığına yakınsamaktadır. İspatın ayrıntıları için [3]'e bakınız.

3.1.10 Tanım

$h(\xi)$ sembolü için

$$Tf(\xi) = \left| h\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 f\left(\frac{\xi}{2}\right) + \left| h\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 f\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)$$

şeklinde tanımlanan T operatörüne geçiş operatörü denir. Bu operatör 2π –periyodik fonksiyonları 2π –periyodik fonksiyonlara götürür.

3.1.11 Lemma

Basamak algoritmasının yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, 1 sayısının T 'nin tekrarsız bir özdeğeri olması ve T 'nin diğer bütün özdeğerlerinin normunun 1'den küçük olmasıdır.

İspat

İspat için [2]'ye bakınız.

3.1.12 Tanım

Eğer, $0 < A \leq B < \infty$ olacak şekilde, her $c_k \in l^2$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak A ve B sabitleri varsa; inceltilebilir φ fonksiyonuna kararlı ötelemelere (stable shifts) sahiptir denir.

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k \bar{c}_k \varphi(x - k) \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2$$

Eğer φ ortogonalse, $A = B = 1$ seçimi ile φ 'nin kararlı ötelemelere sahip olduğu görülür.

3.1.13 Tanım

İnceltilebilir φ fonksiyonu, (3.1) inceltme denkleminin integrali sıfır olmayan, kararlı ötelemelere sahip, kompakt destekli ve L^2 uzayının elemanı olan bir çözümüyse φ için, minimal düzgünlük şartlarını sağlıyor denir.

3.1.14 Teorem

φ minimal düzgünlük şartlarını sağlıyor olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

1. $h(0) = 1$.
2. $\sum_k \varphi(x - k) = c, c \neq 0$ bir sabit.
3. $h(\pi) = 0$.

İspat.

İspat için [4]'e bakınız.

Burada φ ortogonal ise (2) şartındaki c sabitinin mutlak değerinin 1 olması gerektiği görülür. φ genellikle normalize edildiğinden bu sabitin büyüklüğü de genellikle 1 birimdir. Bu bölümden itibaren, φ 'nin minimal düzgünlük şartlarını sağladığı kabul edilecektir.

3.2 Çoklu Çözünürlük Analizi ve Dalgacıklar

3.2.1 Tanım

$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ailesi, $L^2(\mathbb{R})$ 'ın iç içe kapalı bir alt uzaylar dizisi olsun.

1. Her $j \in \mathbb{Z}$ için $V_j \subset V_{j+1}$.
2. Her $j \in \mathbb{Z}$ için $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

3. $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
4. $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
5. $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi V_0 'in ortonormal bir tabanı olacak şekilde bir $\varphi \in V_0$ vardır [6,7].

Yukarıdaki şartları sağlayan bir $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ailesi, Çoklu Çözünürlük Analizi (MRA) olarak adlandırılır. φ fonksiyonu, verilen MRA'nin ölçekleme fonksiyonu şeklinde adlandırılır.

(2) şartı MRA'nin temel özelliğidir. Bu şart, her V_n 'in, V_0 'daki her bir fonksiyonun 2^{-n} 'le ölçeklenmiş bir kopyasını içermesini sağlar ve bu sayede V_n için bir ortonormal taban

$$\{\varphi_{nk} : k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde belirlenmiş olur. Burada $\varphi_{nk}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - k)$ 'dir. Ayrıca $2^{n/2}$ çarpanı L^2 normunu korumak için eklenmiştir. Diğer yandan $V_0 \subset V_1$ olduğundan, φ fonksiyonu bazı h_k katsayıları için V_1 'in taban fonksiyonları cinsinden

$$\varphi(x) = \sum_k h_k \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k) \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu da ölçekleme fonksiyonunun aynı zamanda inceltilebilir bir fonksiyon olduğu anlamına gelir. Artık inceltme denkleminin bir çözümü olan inceltilebilir bir fonksiyonun ne gibi şartlar altında bir MRA ürettiği merak edilebilir. Diğer şartlar görece aşikâr olmakla birlikte, (4)'teki yoğunluk şartının sağlanması için φ 'nin sembolü sıfır civarında pozitif bir büyüklüğe sahip olmalıdır. Aşağıdaki teorem bu durumu açıklamaktadır.

3.2.2 Teorem

$h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{k_1} h_k e^{-ik\xi}$ olsun ve basamak algoritması yakınsasın. Eğer,

$$h(0) = 1$$

$$|h(\xi)|^2 + |h(\xi + \pi)|^2 = 1$$

ise inceltme denkleminin $\varphi(x)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm aynı zamanda bir MRA için ölçekleme fonksiyonudur.

İspat

İspat için [6]'ya bakılabilir.

3.2.3 Not

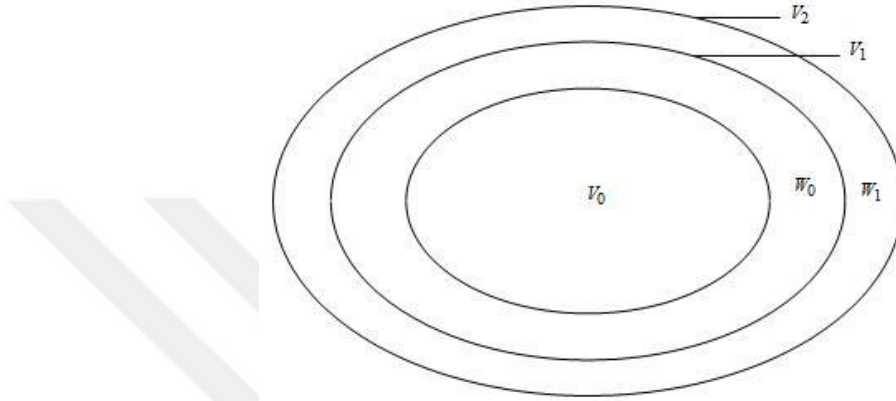
Ortogonal olmayan MRA'leri de tanımlamak da mümkündür, fakat ortogonal MRA'lerin işlem maliyeti daha avantajlıdır. Ek olarak, Parseval Teoremi sayesinde ortogonal bir MRA ile analiz edilen bir sinyalin enerjisinin dalgacık dönüşüm tanım kümesinde bir parçalanışını görmek mümkündür. Bu sebeplerden ötürü bu çalışmada φ 'nin ortogonal olduğu kabul edilecektir.

Bir sinyalin önemli özelliklerini ortaya çıkarmak, anlamak ve analiz etmek için $\varphi_{j,k}(x)$ fonksiyonlarını kullanarak ve j 'yi artırarak daha iyi bir çözünürlük seviyesine ulaşmaya çalışmak yerine, $\psi_{j,k}(x)$ şeklinde yeni bir fonksiyon ailesi tanımlayarak farklı çözünürlük seviyeleri arasındaki farkları incelemek yerinde olacaktır. Bu yeni tanımlanan fonksiyonlara dalgacıklar denilmektedir. $\varphi_{j,k}(x)$ fonksiyonlarında olduğu gibi $\psi_{j,k}(x)$ fonksiyonları da tek bir prototip fonksiyonun ölçekleme ve ötelemelerinden elde edilmektedir. Bu prototip fonksiyon ψ ile gösterilmekle birlikte dalgacık fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

V_j 'nin V_{j+1} uzayı içerisindeki ortogonal tümleyeni W_j olsun. Diğer bir deyişle V_j 'deki her fonksiyon, W_j 'deki her fonksiyona dik olsun. Yani, her $j, k, l \in \mathbb{Z}$ için

$$\langle \varphi_{j,k}(x), \psi_{j,l}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(x) \overline{\psi_{j,l}(x)} dx = 0$$

olsun.



Şekil 3.3 Dalgacık Vektör Uzayları

Dalgacık fonksiyonunun ölçekleme ve ötelemelerinin gerdiği uzay W_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki yazım doğrudur:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Benzer şekilde V_2 uzayı

$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu yazımlar genelleştirilerek $L^2(\mathbb{R})$ uzayı için

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir. Şekil 3.3'ten de görülebileceği üzere V_j uzayları iç içe geçmiştir. Burada başlangıç uzayı V_0 uzayı olmak zorunda değildir. Örneğin daha yüksek bir çözünürlük için

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{10} \oplus W_{10} \oplus W_{11} \oplus W_{12} \oplus \dots$$

veya daha düşük bir çözünürlük için

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{-10} \oplus W_{-10} \oplus W_{-9} \oplus W_{-8} \oplus \dots$$

yazımları doğrudur. Hatta L^2 uzayı sadece dalgacık uzayları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$$

İşlem maliyeti de göz önünde bulundurulduğunda, uygulamada bu ayrışım yerine (3.6)'daki ayrışımı kullanılmak daha etkili olmaktadır. Daha dikkatli bakıldığında, V_0 uzayının, daha düşük çözünürlükteki dalgacık uzaylarının tümünün bilgisini içerdiği görülmektedir.

$$W_{-\infty} \oplus \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} = V_0.$$

Bu bölümün en önemli sonuçlarından birisi $W_0 \subset V_1$ olduğundan dolayı ana dalgacık fonksiyonu olan ψ 'nin bazı $n \in \mathbb{N}$ ve g_n katsayıları için

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_n \varphi(2x - n) \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilmektedir [2].

Ölçekleme fonksiyonunda olduğu gibi ψ fonksiyonunun sembolü

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\xi}$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde, (3.6)'nın her iki yanının Fourier dönüşümü alınarak

$$\hat{\psi}(\xi) = g\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

eşitliği elde edilir. φ ve ψ 'nin ortogonalliği için

$$\begin{aligned} \sum_k h_k \overline{h_{k-2l}} &= \sum_k g_k \overline{g_{k-2l}} = \delta_{0l} \\ \sum_k h_k \overline{g_{k-2l}} &= \sum_k g_k \overline{h_{k-2l}} = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri veya eşdeğer olarak

$$\begin{aligned} |h(\xi)|^2 + |h(\xi + \pi)|^2 &= |g(\xi)|^2 + |g(\xi + \pi)|^2 = 1 \\ h(\xi) \overline{g(\xi)} + h(\xi + \pi) \overline{g(\xi + \pi)} &= g(\xi) \overline{h(\xi)} + g(\xi + \pi) \overline{h(\xi + \pi)} = 0 \end{aligned}$$

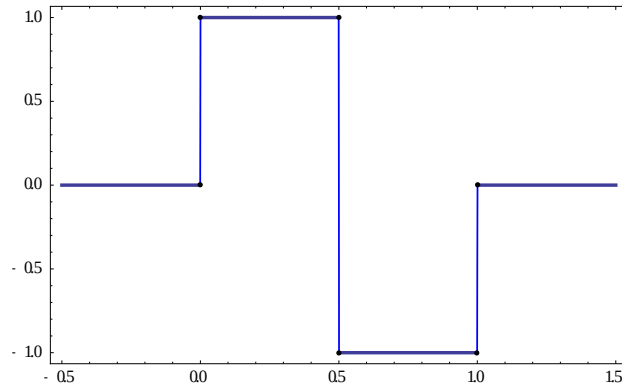
eşitliklerinin sağlanması gereklidir. Bu ifadelerin ispatı için Teorem 3.4 veya Lemma 3.9'a bakılabilir.

Örnek

Eğer

$$\psi(x) = \begin{cases} +1 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa ψ Haar ölçekleme fonksiyonunun ürettiği MRA için ortonormal bir dalgacık olur. Bu dalgacığa Haar Dalgacığı denir.



Şekil 3.4 Haar Dalgacık Fonksiyonu

Sonuç olarak, artık elimizde $L^2(\mathbb{R})$ 'ı geren, elemanları $\varphi_j(x)$ ve $\psi_{j,k}(x)$ fonksiyonları olan bir küme mevcut. O halde herhangi bir $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, ölçekleme fonksiyonu ve dalgacıklar cinsinden

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (3.8)$$

şeklinde bir seriye açılabilir [2].

3.2.4 Teorem

φ ölçekleme fonksiyonu olmak üzere, her ortogonal MRA için aşağıdakiler doğrudur.

1. $\bigoplus_n W_n$ kümesi L^2 uzayında yoğundur.
2. Eğer $k \neq n$ ise $W_n \perp W_k$.
3. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(x) \in W_n \Leftrightarrow f(2x) \in W_{n+1}$.
4. Her $n, k \in \mathbb{Z}$ için $f(x) \in W_n \Leftrightarrow f(x - 2^{-n}k) \in W_n$.
5. L^2 uzayı içerisinde $\{\psi(x - k)\}_k$ kümesi W_0 uzayının bir ortonormal tabanı olacak şekilde bir ψ fonksiyonu mevcuttur. Bu durumda $\{\psi_{n,k}: n, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi de L^2 için ortonormal bir tabandır.
6. $\psi \in V_1$ olduğundan bazı g_n katsayıları için

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_n \varphi(2x - n)$$

şeklinde olacaktır.

İspat.

İspat için [4]'e bakınız.

3.2.5 Not

h_k 'lar φ 'nin yineleme katsayıları, N daha sonra belirlenecek bir tek doğal sayı olmak üzere ψ 'nin yineleme katsayıları

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{N-k}}$$

olarak seçilebilir.

3.3 Momentler

3.3.1 Tanım

φ ve ψ 'nin k 'ıncı ayrık momentleri

$$m_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l l^k h_l$$

$$n_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_l l^k g_l$$

ile tanımlıdır ve D türev operatörü olmak üzere bu momentler karşılık gelen sembollere

$$m_k = i^k D^k h(0)$$

$$n_k = i^k D^k g(0)$$

eşitlikleri ile bağılırlar. Burada dikkat edilirse ayrık momentlerin tanımlarından dolayı tek oldukları görülür.

3.3.2 Tanım

φ ve ψ 'nin k 'inci sürekli momentleri

$$\mu_k = \int x^k \varphi(x) dx$$

$$v_k = \int x^k \psi(x) dx$$

ile tanımlıdır ve bu momentler φ ve ψ 'nin Fourier dönüşümlerine

$$\mu_k = 2\pi i^k D^k \hat{\varphi}(0)$$

$$v_k = 2\pi i^k D^k \hat{\psi}(0)$$

eşitlikleri ile bağılırlar. Burada μ_0 sürekli momentinin inceltme denklemi tarafından belirlenmediği aşıkardır. Ortogonal dalgacıklar için $|\mu_0| = 1$ olmakla birlikte bu çalışmada genelliği bozmadan $\mu_0 = 1$ olduğu kabul edilecektir.

3.3.3 Teorem

Sürekli ve ayrık momentler

$$\mu_k = 2^{-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m_{k-j} \mu_j$$

$$v_k = 2^{-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n_{k-j} \mu_j$$

eşitlikleri ile birbirine bağlıdır. Eğer μ_0 biliniyorsa, diğer sürekli momentler yukarıdaki bağıntılar yardımıyla hesaplanabilirler.

İspat

İnceltme denklemi sürekli moment tanımında yerine yazılarak ve ayık momentin tanımı kullanılarak bu teorem ispatlanabilir.

3.3.4 Lemma

μ_0 'ın 1 olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ için

$$m_k = 0 \Leftrightarrow \mu_k = 0$$

ve

$$n_k = 0 \Leftrightarrow v_k = 0.$$

Diğer bir deyişle, belirli bir mertebeye kadar sürekli momentlerin sıfırlanması ancak ve ancak bu mertebeye kadar olan ayık momentlerin sıfırlanmasıyla mümkündür.

İspat

Teorem 3.2.5'teki formüller kullanılarak tümevarımla ispatlanabilir.

3.4 Yaklaşım Mertebesi

f fonksiyonunun V_n uzayı üzerine izdüşümü olan $P_n f$, f fonksiyonuna 2^{-n} çözünürlükte bir yaklaşım olarak ele alınabilir.

3.4.1 Tanım

x_n ve y_n iki sayı dizisi olsun ve $n \geq N$ için $|x_n| \leq C|y_n|$ olacak şekilde N ve C sabitleri bulunabiliyor olsun. Bu durum

$$x_n = O(y_n)$$

yazımı ile ifade edilir ve bu gösterime “büyük O ” notasyonu denir.

3.4.2 Tanım

f fonksiyonu p tane sürekli türeve sahip ve

$$\|f - P_n f\| = O(2^{-np})$$

olsun. Bu durumda ölçekleme fonksiyonu olan φ ’nin yaklaşım mertebesi, p ’dir denir.

3.4.3 Tanım

Derecesi $p - 1$ ’e kadar olan bütün polinomlar, $1 \leq n \leq p - 1$ olmak üzere, bazı c_{nk} katsayıları için

$$x^n = \sum_k \overline{c_{nk}} \varphi(x - k)$$

şeklinde ifade edilebiliyor olsun. Bu durumda ölçekleme fonksiyonu φ için p kesinliğe sahiptir denir.

Burada dikkat edilecek olursa, φ ’nin yaklaşım mertebesinin p olması veya p kesinliğe sahip olması, φ ’nin derecesi $p - 1$ ’e kadar olan polinomların kaba bilgisini içerdiği anlamına gelir. Diğer bir deyişle, derecesi $p - 1$ ’e kadar olan polinomlar dalgacık

fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan ölçekleme fonksiyonu kullanılarak analiz edilebilirler.

3.4.4 Tanım

$n = 0, 1, \dots, p - 1$ için;

$$\sum_k (-1)^k k^n h_k = 0$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda inceltme denkleminin yineleme katsayıları olan $\{h_k\}$ 'lar p . mertebeden toplam kuralını sağlıyordur denir.

3.4.5 Teorem

φ 'nin temel düzgünlük şartlarını sağladığını kabul edelim. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1. φ 'nin yaklaşım mertebesi p 'dir.
2. φ, p kesinliğe sahiptir.
3. $\{h_k\}, p$. mertebeden toplam kuralını sağlıyordur.
4. h sembolü, $\xi = \pi$ 'de p . dereceden bir köke sahiptir; öyle ki h_0 yine bir trigonometrik bir polinom olmak üzere

$$h(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^p h_0(\xi).$$

5. $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ ve $n = 0, 1, \dots, p - 1$ için $\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi}(0) \neq 0$$

$$D^n \hat{\varphi}(2k\pi) = 0$$

şartlarını sağlar.

Eğer, $\varphi(x)$ bir biortogonal dalgacığın parçasıysa aşağıdaki şartlar da yukarıdaki şartlara denktir.

6. $\tilde{g}, 0$ 'da p . dereceden bir köke sahiptir.
7. $\hat{\psi}, p$ tane sıfırlanan momente sahiptir.

İspat

İspat için [2]'ye bakınız.

3.5 Ayrık Dalgacık Dönüşümü

Elimizde bir dalgacık sistemi olsun. Bu dalgacık sisteminin bir MRA ürettiğini kabul edelim. Bu durumda bir f fonksiyonunun V_n uzayı üzerine izdüşümü olan $P_n f$ ile V_{n+1} uzayı üzerine izdüşümü olan $P_{n+1} f$ arasındaki farka, 2^{-n} çözünürlük seviyesindeki ince detay denir. Kısaca bu ince detay $Q_n f$ ile gösterilsin.

$$Q_n f = P_{n+1} f - P_n f.$$

Buradaki $Q_n f$ detayı, analiz edilecek fonksiyonun W_n uzayı üzerine izdüşümüdür. Böylelikle dalgacık analizine tabi tutulan bir fonksiyonun taşıdığı ince detay W_j alt uzayları içerisinde kalırken; fonksiyonun içerdiği kaba bilgiyi V_k uzayı barındırmaktadır. Bu yüzden, uygulamada $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{D_{1/2}^j T_k \psi\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$ kümesi $L^2(\mathbb{R})$ uzayının tabanı olarak daha fazla tercih edilmektedir.

3.5.1 Tanım

Bir $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ farklı çözünürlükteki bileşenlerine

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_k \varphi \rangle T_k \varphi(x) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, D_{1/2}^j T_k \psi \rangle D_{1/2}^j T_k \psi(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x - k) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi(2^j x - k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Bu ayrışım Ayrık Dalgacık Dönüşümü olarak adlandırılır.

3.5.2 Teorem

Eğer ölçekleme fonksiyonu ve dalgacıklar bir ortonormal taban oluşturuyor ise $f(x)$ fonksiyonunun enerjisini $f(x)$ 'in bileşenleri ve dalgacık katsayıları ile ilişkilendiren bir Parseval eşitliği vardır. Öyle ki;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 + \sum_{j \in N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2. \quad (3.10)$$

Bu eşitlik, $f(x)$ sinyalinin enerjisinin tam olarak dalgacık katsayıları tarafından taşındığını ifade etmektedir [1-6].

3.6 Harmonik Dalgacıklar

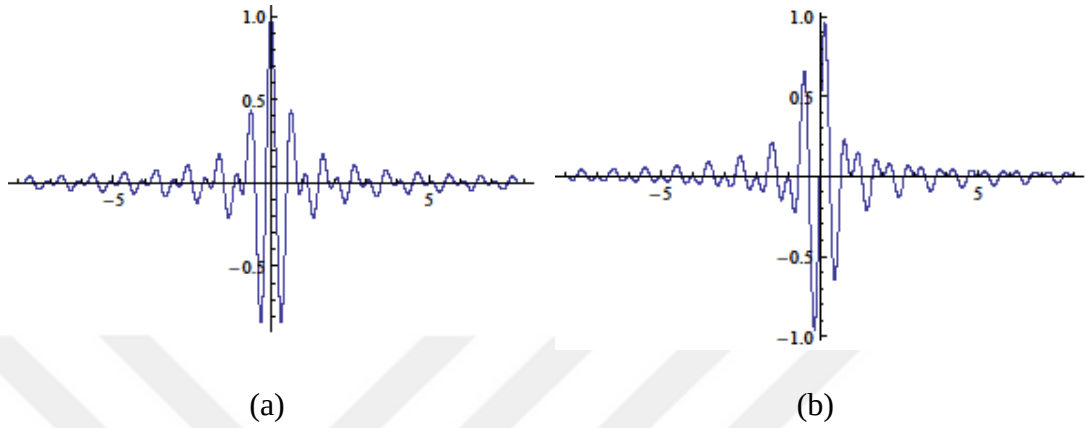
Birçok dalgacık, bir fark denkleminde yola çıkılarak tanımlandığından dolayı pek de bariz olmayan pürüzlü formdadırlar. Harmonik dalgacıklar ise tam tersine, ana dalgacığı

$$w(x) = \frac{e^{i4\pi x} - e^{i2\pi x}}{i2\pi x} \quad (3.11)$$

şeklinde kapalı formda tanımlanan ve düzgün yapıda bir dalgacık ailesidir. Harmonik dalgacıklar birbirinden bağımsız olarak, ilk defa [16] ve [19]'da tanıtılmışlardır. Genel olarak dalgacıklar mükemmel bir zaman yerelleştirmesine sahipken, harmonik dalgacıklar doğaları gereği, bu yerelleştirme özelliğine zaman tanım kümesinden ziyade frekans tanım kümesinde sahiptirler.

$$\hat{w}(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi & , 2\pi \leq \omega \leq 4\pi \\ 0 & , \text{diğer.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Dikkat edilirse $w(x)$ ana dalgacığının frekans spektrumunun, 1 oktavlık bir banda hapsediği görülebilir.



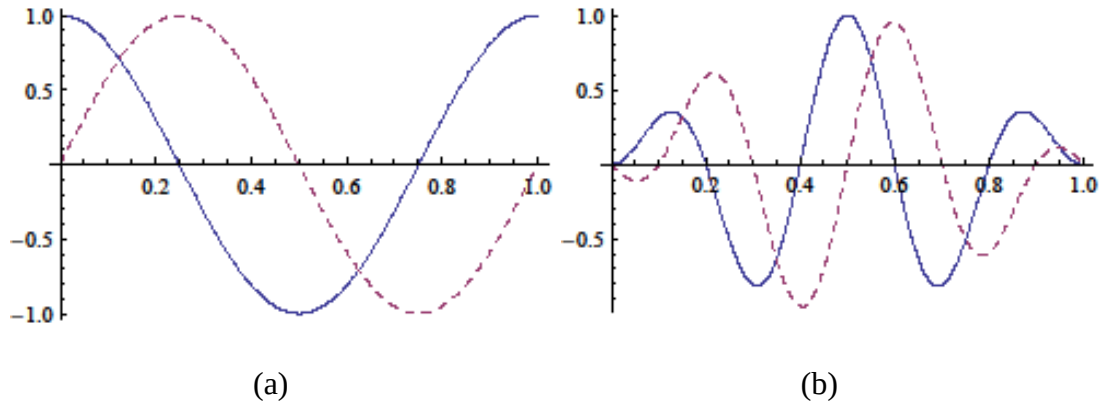
Şekil 3.5 Ana harmonik dalgacık $w(x)$ 'in (a) reel (b) sanal kısımları

3.6.1 Tanım

Yukarıda tanımlanan $w(x)$ fonksiyonu periyodize edilerek elde edilen

$$\psi_{j,k}^{per}(x) := 2^{-j} \sum_{m=2^j}^{2^{j+1}-1} e^{i2\pi m(x - \frac{k}{2^j})} \quad (3.13)$$

fonksiyonlar ailesi *periyodik harmonik dalgacıklar* (PHD) olarak adlandırılır. PHD'nin bir MRA oluşturduğu [16] ve [18]'de gösterilmiştir. Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında *per* üst indisi kullanılmayacaktır.



Şekil 3.6 (a) $\psi_{0,0}(x)$ 'in reel ve sanal kısımları (b) $\psi_{1,1}(x)$ 'in reel ve sanal kısımları

Bu durumda 1 periyodik bir $u(x)$ veya $\overline{\text{supp}}\{u(x)\} \subset [0,1]$ olan bir $u(x)$ için

$$u(x) = a_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_{j,k} \psi_{j,k}(x) + \tilde{a}_{j,k} \bar{\psi}_{j,k}(x)\} \quad (3.14)$$

eşitliği yazılabilir. p yaklaşım mertebesi ve n yaklaşımdaki adım veya üzerine izdüşümün alındığı V_n alt uzayının indisi olmak üzere, verilen bir fonksiyona harmonik dalgacıklarla yaklaşımda hatanın $O(2^{-np})$ ile sifıra yaklaştığı [15]'te gösterilmiştir.

4 İNTEGRAL DENKLEMLER

4.1 Tanım

Bilinmeyen bir $u(x)$ fonksiyonunun integral işareti altında gözüktüğü denklemlere integral denklem denir. Genel olarak bir integral denklem şu tiptedir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (4.1)$$

Burada homojenliği bozan terim $f(x)$, sınırlar $g(x)$ ve $h(x)$, ve çekirdek $K(x, t)$ önceden biliniyorken; $u(x)$ bilinmeyen fonksiyondur. Özdeğer parametresi λ , önceden verilebilir de verilmeyebilir de. Burada $g(x)$ ve $h(x)$ 'in her ikisi de sabitse, denklem Fredholm integral denklemi; en az birisi değişken içeriyorsa, denklem Volterra integral denklemi olarak adlandırılır [10-12].

Bu çalışmada özel olarak ele alınacak olan denklemler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, t)u(t)dt \quad (4.2)$$

şeklindeki Fredholm integral denklemleri ve

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (4.3)$$

şeklindeki Volterra integral denklemleri olacaktır.

5 LİTERATÜR TARAMASI

İntegral denklemlerin doğuşu 19. yüzyılın başlarına kadar uzanır. 1823 yılında, Abel tautochrone veya isochrone (eş zaman) problemi olarak bilinen bir mekanik problemini çözmeye çalışırken ilk integral denklemle karşılaşmıştır. İntegral denklem ismini öneren ilk kişi ise, 1888'deki bir çalışmasında Du Bois Reymond olmuştur. İntegral denklemlerle ilgili [10-12] başta olmak üzere farklı bilim insanlarına ait kaynaklar mevcuttur.

İntegral denklemlerin çözümüne dair pek çok analitik ve özellikle de sayısal yöntem geliştirilmiş ve önerilmiştir. İntegral denklemlerin çözümünde analitik metotların olmadığı veya bu metotlar yardımıyla çözümün elde edilmesinin çok zor olduğu durumlarda yaklaşık metotlar kullanmak faydalı olabilmektedirler. İntegral denklemleri çözmek için bugüne kadar homotopik yöntemler [51-53], Adomian ayrışımı [47,48], Taylor ve diğer polinom açılım yöntemleri [43,45,50], direkt çözüm metodu [56], kesirli analiz [46] ve Laplace, Fourier ve Mellin dönüşümü [30,42] gibi farklı yöntemler kullanılmıştır.

Fourier analizinin tamamlayıcı bir uzantısı niteliğindeki dalgacık dönüşümünün popülaritesi her geçen gün artmaktadır. Teorik bilginin Dalgacık analizi kadar anlaşılabilir bir şekilde günlük hayata girdiği çok az saha vardır. Örneğin HD veya ultra HD olarak bilinen high definition görüntü veya high definition ses sistemlerinde çözünürlük Dalgacık Teknolojisi sayesinde bu kadar artırılabilmiştir. JPEG formatında kaydedilen resimlerde Daubechies dalgacıkları kullanılmaktadır.

Dalgacık teknolojisinin yine uygulama alanlarına, Dalgacık analizinin doğduğu sahalardan biri olan jeofizik mühendisliği, daha öncelikli olarak ise sismik araştırma faaliyetleri örnek gösterilebilir. Bir diğer örnek olarak ise finans uzmanlarının ellerindeki zaman serilerini analiz ederken Dalgacık analizini kullanmaları gösterilebilir [36]. Bir ülkedeki parasal genişleme ile enflasyon arasındaki ilişki [39] veya tutsat (mortgage) piyasası ile ülkenin gayri safi milli hasılası arasındaki ilişki [40]

araştırılırken Dalgacık analizi kullanılabilir. Dalgacık analizi geçmiş veriler yardımıyla geleceğe dönük ekonomik kestirimler yapmak için de sıklıkla kullanılmaktadır. Yakın zamanda yapılan çalışmalarda bilhassa petrol ve altın fiyatlarıyla ilgili modellemeler Dalgacık Analizi yardımıyla yapılmıştır [38].

Savunma sanayi ve güvenlik teknolojileri de Dalgacık metodlarının yer bulduğu kullanım alanları içerisine girmektedir. Örneğin, FBI milyonlarca insanın parmak izini Daubechies'nin geliştirdiği dalgacıkları kullanarak günümüz teknolojisiyle en az yer kaplayacak şekilde sıkıştırıp, en az ödünle kaydetmektedir. Diğer bir örnek ise ISAR görüntüleme ile radarların hedef tayininde dalgacıkların kullanılmasıdır [34].

Birçok bilim insanının güvenlik sistemlerinde hareketli objeleri tespit etmek için veya yaşlanan dünyada Alzheimer gibi hastalıkların ön tanısı için dalgacık yöntemlerini kullanmaları ise güncel araştırmalara örnek olarak sunulabilir.

Bu kadar geniş uygulama yelpazesine sahip matematiksel bir yöntemin, integral denklemlerin çözümünde kullanılması gayet makul bir fikirdir. Nitekim farklı yapısal tipteki lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde Chebyshev dalgacıkları [20], Haar dalgacıkları [21,24,29], Legendre dalgacıkları [25,27], CAS dalgacıkları [26], Sinc dalgacıkları [23] ve diğer dalgacık yöntemleri [20-30] başarılı sonuçlar vermiştir.

Bu tez çalışmasının “Yöntem” bölümünde integral denklemlerin öncelikle periyodik harmonik dalgacıklar ve dalgacık sıralama metodu kullanılarak nasıl çözülebileceği gösterilecektir. İkinci olarak ise bir integral denklemin Haar dalgacıkları ve dalgacık moment metodu kullanılarak nasıl çözülebileceği ele alınacaktır.

6 YÖNTEM

Bu bölümde (4.2) ve (4.3)'teki problemlerin dalgacık yöntemleriyle nasıl çözülebileceği gösterilecektir. Gösterim kolaylığı açısından bu problemler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{g(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (6.1)$$

şeklinde ifade edilsin. İlk bölümde Harmonik dalgacık ailesini kullanarak dalgacık sıralama yöntemiyle bu problemlerin nasıl çözülebileceği gösterilecektir. İkinci tip Fredholm integral denklemlerini bu yöntemle nasıl çözülebileceği Cattani ve Kudreyko tarafından gösterilmişti [14]. Burada Volterra integral denklemleri de çözülmek istendiği için bir hata analizi de verilecektir.

İkinci bölümde kullanılacak metot ise ilk olarak Babolian ve arkadaşları tarafından birinci tip Fredholm integral denklemlerini çözmek için kullanılmıştı [13]. Burada bu metot yine daha genel bir haliyle sunulacaktır.

6.1. Bir İntegral Denklemin Dalgacık Sıralama Metodu Yardımıyla Çözümü

Öncelikle, (3.14)'te verilen seri kesilerek bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonuna harmonik dalgacıklar yardımıyla bir yaklaşım yapılsın:

$$u(x) \approx P_N u(x) = a_0 + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} \{a_{j,k} \psi_{j,k}(x) + \tilde{a}_{j,k} \bar{\psi}_{j,k}(x)\}$$

Burada özel olarak şunu belirtmek gerekir ki: eğer $u(x)$ reel değerli ise $a_0 \in \mathbb{R}$ ve $\tilde{a}_{j,k} = \overline{a_{j,k}}$ olmaktadır. Şimdi, yapılan yaklaşım (6.1) probleminde yerine yazılırsa

$$P_N u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{g(x)} K(x, t) P_N u(t) dt$$

elde edilir. Burada dikkat edilecek olursa N . seviyede tam olarak 2^{N+1} adet bilinmeyen dalgacık katsayısı vardır. O halde $k = 0, 1, \dots, 2^{N+1}$ için

$$x_k = \frac{k}{(2^{N+1} + 1)}$$

değerleri sıralama noktaları olarak alınsın. Sıralama yöntemindeki amaç bu sıralama noktalarında hatanın sıfır olduğunu kabul ederek bir lineer sistem elde etmektir.

Anlaşılabilirlik açısından ifade etmek gerekirse, özel olarak $N = 0$ için bilinmeyen dalgacık katsayıları a_0 ve $a_{0,0}$ olup bunların hesaplanabilmesi için iki tane sıralama noktasına ihtiyaç vardır. Önerilen metotta bu noktalar $x_1 = 1/3$ ve $x_2 = 2/3$ 'tür. Dolayısıyla $N = 0$ için çözmemiz gereken denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_0 + a_{0,0} \psi_{0,0}(x_1) + \tilde{a}_{0,0} \bar{\psi}_{0,0}(x_1) \\ = f(x_1) + \lambda \int_0^{g(x_1)} K(x_1, t) (a_0 + a_{0,0} \psi_{0,0}(t) + \tilde{a}_{0,0} \bar{\psi}_{0,0}(t)) dt \\ a_0 + a_{0,0} \psi_{0,0}(x_2) + \tilde{a}_{0,0} \bar{\psi}_{0,0}(x_2) \\ = f(x_2) + \lambda \int_0^{g(x_2)} K(x_2, t) (a_0 + a_{0,0} \psi_{0,0}(t) + \tilde{a}_{0,0} \bar{\psi}_{0,0}(t)) dt \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_{0,0} = \bar{a}_{0,0}$$

şeklinde elde edilir.

6.1.1 Hata Analizi

$F(x)$, integral denklem lineer olmadığı durumlarda, lineerliği bozan terim ve N . adım için hata $E_N(x)$ olmak üzere yukarıda önerilen metot için sadece bazı temel eşitsizlikler kullanılarak aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$\begin{aligned}
\|E_N(x)\|_{L^\infty} &= \|u(x) - P_N u(x)\| \\
&= \left\| \lambda \int_0^{g(x)} K(x, t) (F(u(t)) - F(P_N u(t))) dt \right\| \\
&\leq |\lambda| \int_0^1 \|K(x, t)\| \|F(u(t)) - F(P_N u(t))\| dt \\
&\leq k|\lambda| \int_0^1 \|K(x, t)\| \|u(t) - P_N u(t)\| dt \\
&\leq k|\lambda| \int_0^1 \|K(x, t)\| \|e_N^{per}(t)\| dt \\
&\leq k|\lambda| \|K(x, t)\| 2^{-NP} \|u(x)\|_{L^\infty} \\
&= O(2^{-NP}).
\end{aligned}$$

Burada eğer integral denklem lineer değil ise denklemin bir çözümünün olabilmesi için $F(x)$ 'in $0 < k < 1$ olacak şekilde bir k sabiti için $\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\|$ şartını sağlayacak şekilde bir büzüşme olması gereklidir [12].

Örnek

Tam çözümü $u(x) = \cos(x)$ olan

$$u(x) = \cos x + \sin x - \int_0^x u(t) dt$$

integral denklemi ele alınsın. Öncelikle $x = 2\pi\tilde{x}$ ve $t = 2\pi\tilde{t}$ dönüşümleri yapılarak denklem

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \cos(2\pi\tilde{x}) + \sin(2\pi\tilde{x}) - 2\pi \int_0^{\tilde{x}} \tilde{u}(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

formunda yazılsın. Şimdi $\tilde{u}(\tilde{x})$ fonksiyonuna $N = 0$ seviyesinde PHD ile bir yaklaşım yapılsın ve ayrışım noktaları $\tilde{x}_1 = 0,25$ ve $\tilde{x}_2 = 0,50$ olarak alınsın; sonra bu noktalardaki hata sıfır kabul edilirse aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{aligned} a_0 + (a_{0,0} - \tilde{a}_{0,0})i &= 1 - \frac{\pi}{2}a_0 - (1+i)a_{0,0} - (1-i)\tilde{a}_{0,0} \\ a_0 - a_{0,0} - \tilde{a}_{0,0} &= -1 - \pi a_0 - 2(a_{0,0} - \tilde{a}_{0,0})i \\ \tilde{a}_{0,0} &= \overline{a_{0,0}} \end{aligned}$$

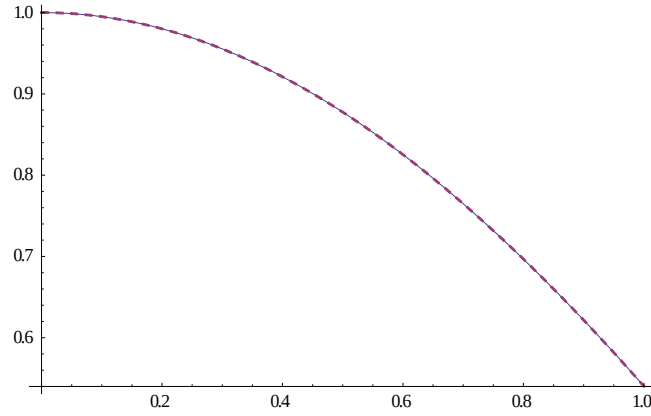
Bu sistem a_0 ve $a_{0,0}$ için çözülürse $a_0 = 0$, $a_{0,0} = 1/2$ ve $\tilde{a}_{0,0} = 1/2$ olarak bulunur. Bu değerler yerine yazılıp orijinal değişkenlere geri dönüldüğünde $u(x) = \cos(x)$ tam çözümü elde edilir.

Örnek

Benzer şekilde çözümü $u(x) = \cos(x)$ olan

$$u(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt$$

denklemini ele alınsın. Önceki örnekteki yol takip edilirse, $a_0 = -1,2 \times 10^{-15}$ ve $a_{0,0} = 0,5$ olduğu görülür. Bu şekilde daha ilk adımda gerçek çözüme oldukça iyi bir yaklaşım yapılmıştır. Bu örnekte, homojenliği bozan terimin ve çekirdeğin içerisindeki periyodik olmayan kısımların, PHDla yaklaşımda bir miktar hataya sebep olması öngörülebilirdir.



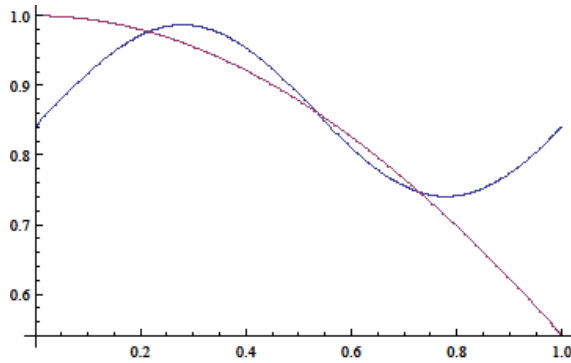
Şekil 6.1 Örnek için yaklaşık ve tam çözümler

Örnek

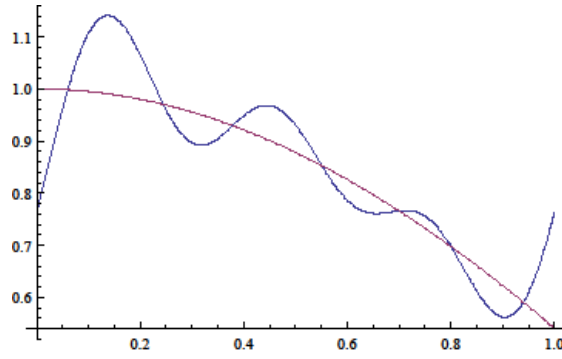
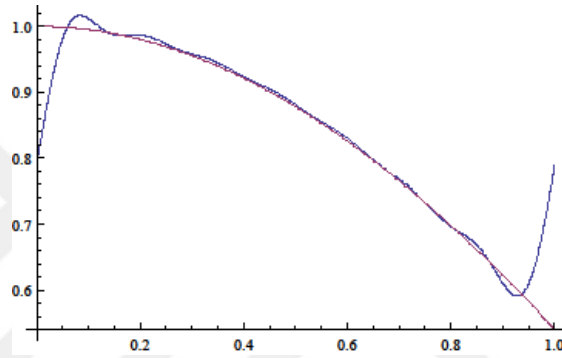
Tam çözümü $u(x) = \cos(x)$ olan

$$u(x) = \sin x + \cos x - \int_0^x u(t) dt$$

örneğini ele alalım. Burada $\tilde{a}_{j,k}$ 'lar $a_{j,k}$ 'lardan bağımsız katsayılar olarak düşünüldüğünde, her $\tilde{a}_{j,k}$ için ayrıca bir sıralama noktası seçmek gerekecektir. Bu durumda çözülmesi gereken lineer sistemin büyüklüğü yaklaşık iki katına çıkmakla birlikte yaklaşımın nasıl daha iyi hale geldiği aşağıdaki şekillerde gözlemlenebilir.



(a) $N = 0$

(b) $N = 1$ (c) $N = 2$

Şekil 6.2 Örnek için yaklaşık ve tam çözümler
(a) $N = 0$, (b) $N = 1$, (c) $N = 2$

6.2. Bir İntegral Denklemin Dalgacık Moment Metodu Yardımıyla Çözümü

Öncelikle (6.1)'deki integral denklemi ele alınarak, bilinmeyen fonksiyona bir dalgacık sistemi kullanılarak

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2^{j-1}n} d_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

şeklinde yakınsanmalı. Bu yaklaşım integral denklemde bilinmeyen fonksiyon yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2^{j-1}n} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \\ = f(x) + \lambda \int_0^{g(x)} K(x,t) \left(\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2^{j-1}n} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right) dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ardından ise elde edilen bu eşitliğin her iki yanının $m = 0, 1, 2, \dots, n$ için $\varphi_m(x)$ ile, $l = 1, 2, \dots, N$ ve $h = 1, 2, \dots, 2^{l-1}n$ için $\psi_{l,h}(x)$ ile iç çarpımları hesaplanarak, $n2^N + 1$ adet bilinmeyen dalgacık katsayı içeren lineer bir sistem elde edilir. Elde edilen sistem bilinmeyen dalgacık katsayıları için çözüldüğünde eldeki integral denklem için yaklaşık bir çözüm elde edilmiş olur.

Bu yöntem kullanılarak, birinci tip Fredholm integral denklemlerinin çözülebileceği [13]'te gösterilmiştir.

Örnek

Tam çözümü $u(x) = 1$ olan

$$u(x) = \cos(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)dt$$

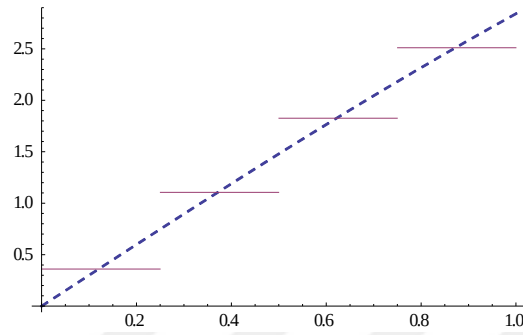
integral denklemi, Haar dalgacık sistemi ve dalgacık moment metodu kullanılarak çözüldüğünde daha ilk adımda $c_0 = 1$ bulunarak tam çözüm elde edilmiştir. Bu örnekte tam çözüm derecesi sıfır olan bir polinomdur. Bu da, Haar dalgacıkları kullanılarak yapılan yaklaşımda hatanın sıfır olmasını sağlamıştır.

Örnek

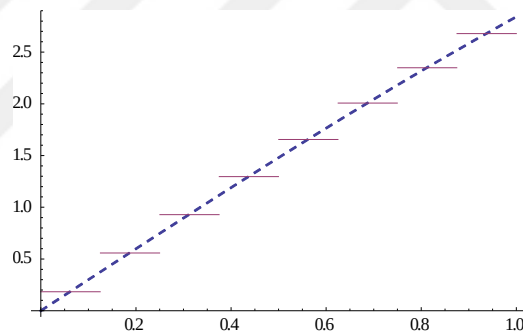
Tam çözümü $u(x) = 2x + \sin(x)$ olan

$$u(x) = 2x + \sin x + x^2 - \cos x + 1 - \int_0^x u(t)dt$$

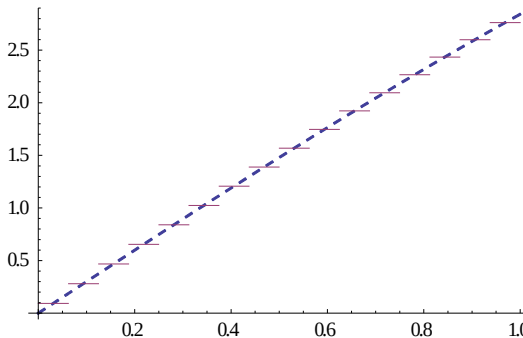
integral denklemi Haar dalgacık sistemi ve dalgacık moment metodu kullanılarak çözüldüğünde farklı çözünürlük seviyelerinde elde edilen çözümlerin grafikleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.



(a) $N = 0$



(b) $N = 1$



(c) $N = 2$

Şekil 6.3 Örnek için yaklaşık ve tam çözümler
(a) $N = 0$, (b) $N = 1$, (c) $N = 2$

Örnek

Tam çözümü $u(x) = e^x$ olan

$$\frac{e^{x+1} - 1}{x + 1} = \int_0^1 e^{xt} u(t) dt$$

integral denklemi Haar dalgacık sistemi ve dalgacık moment metodu kullanılarak çözüldüğünde, elde edilen mutlak hatalar, farklı dalgacık aileleri için [13]'ten alınan mutlak hatalarla birlikte Tablo 6.1'de verilmiştir.

Tablo 6.1 Hata analiz tablosu

N	Haar	Coiflet	Sinc
2	4.91762×10^{-1}	5.1×10^{-1}	2.1×10^{-1}
3	4.91560×10^{-1}	5.8×10^{-2}	5.8×10^{-2}
4	4.91515×10^{-1}	8.4×10^{-1}	1.4×10^{-3}
5	4.91505×10^{-1}	9.6×10^{-3}	3.6×10^{-3}
6	4.91502×10^{-1}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}
7	4.91502×10^{-1}	1.7×10^{-4}	5.7×10^{-5}

Önceki örneklerin aksine bu örnekte mutlak hatanın görece fazla olduğu aşikârdır. Bunun temel sebebi, homojenliği bozan terimin ve çekirdeğin üstel fonksiyonlar olmalarına karşın Haar dalgacıklarının sadece derecesi sıfır olan polinomların bilgisini içermesidir.

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında farklı tipteki integral denklemlerin dalgacık sıralama metodu ve dalgacık moment metodu ile nasıl çözülebileceği ele alınmıştır. Bu metotlar farklı dalgacık aileleri ile birlikte kullanılabilir. Bu çalışmada, dalgacık sıralama metodu ile periyodik harmonik dalgacıklar, dalgacık moment metodu ile ise Haar dalgacıkları birlikte kullanılmıştır.

Herhangi bir dalgacık için p sıfırlanan momentlerin sayısı ve n problemin içerisinde çözülmeye çalışıldığı dalgacık alt uzayının indisi olmak üzere; her iki metottaki mutlak hatalar, $O(2^{-np})$ ile orantılı olarak sıfıra yaklaşmaktadır. Burada, çözülmesi gereken lineer sistemdeki bilinmeyen katsayıların adedinin de katlanarak artmakta olduğunu ifade etmekte fayda var.

Bu çalışmada uygulanan metotlar problemin doğasını değiştiremeyeceklerinden dolayı, bu tez çalışmasında Fredholm integral denklemleri için bulunan çözümler çoğunlukla global olmakla birlikte; Volterra integral denklemleri için elde edilen çözümler daha çok lokaldirler.

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgular daha teorik olmakla birlikte özel olarak eğer homojenliği bozan terim ve çekirdek periyodik ise PHD'ın kullanılması daha etkili sonuçlar verebilmektedir.

Bu tez çalışmasında, dalgacık sıralama metodu ve dalgacık moment metodunun farklı tipteki integral denklemlere uygulanışları ele alınmış ve çalışma mümkün olduğunca örneklendirilmiştir. Bu metotların integro-diferansiyel denklemlere ve fonksiyonel integral denklemlere uygulanmasıyla elde edilecek sonuçlar, teorik ve nümerik olarak farklı araştırmalarda incelenebilir.

8 KAYNAKLAR

1. Burrus, C. S., Gopinath, R. A., Guo, H., "Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer", **Prentice Hall**, Upper Saddle River, New Jersey (1998).
2. Daubechies, I., "Ten Lectures on Wavelets" , **SIAM**, Philedelphia (1992).
3. Grapsh, A., "An Introduction to Wavelets", **IEEE Computational Science and Engineering**, 2(2) (1995).
4. Keinert, F., "Wavelets and Multiwavelets", **Chapman & Hall/CRC** (2004).
5. Mallat, S. G., "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition", **IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, Vol. 2(7), (1989).
6. Mallat, S. G., "Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$ ", **Trans. Amer. Math. Soc.**,315(1):69-87, (1989).
7. Walter, G. G., "Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications", **CRC Press**, (1994).
8. Altürk, A., "Matrix Valued Wavelets", **Iowa State University**, Ames, Iowa, (2004).
9. Jia, R., Q., "Shift-invariant Spaces on the Real Line", **Proceedings of the American Mathematical Society**, 125: 785-793 (1997).
10. Tricomi, F. G., "Integral Equations", **Dover**, (1985).
11. Wazwaz, A. M., "Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications", **Springer Verlag**, Berlin Heidelberg, (2011).
12. Zemyan, S., M., "The Classical Theory of Integral Equations: A Concise Treatment", **Birkhauser**, (2012).
13. Babolian, E., Lotfi, T., Paripour, M., "Wavelet Moment Method for Solving Fredholm Integral Equations of the First Kind", **Applied Mathematics and Computation** 186: 1467-1471 (2007).
14. Cattani, C., Kudreyko, A., "Harmonic Wavelet Method towards Solution of the Fredholm type Integral Equations of the Second Kind", **Applied Mathematics and Computation** 215: 4164-4171 (2010).
15. Cattani, C., Kudreyko, A., "Application of Periodized Harmonic Wavelets towards Solution of Eigenvalue Problems for Integral Equations", **Hindawi**

- Publishing Corporation**, Mathematical Problems in Engineering, 570136, (2010).
16. Newland D. E, "Harmonic Wavelet Analysis", ***Proceedings of the Royal Society of London***, A(443): 203-225 (1993).
 17. Newland, D. E., "Wavelet Analysis of Vibration", ***Proceedings of Structural Dynamics and Vibration Symposium***, ASME Energy Sources Technology Conference, American Society of Mechanical Engineers, Houston, USA, 52:1-12 (1993).
 18. Cattani, C., Kudreyko, A., "On the Discrete Harmonic Wavelet Transform", ***Hindawi Publishing Corporation***, Mathematical Problems in Engineering, 687318, (2008).
 19. Walter, G., G., Cai , L., "Periodic Wavelets from Scrath", ***Journal of Computational Analysis and Applications***, 1(1), (1999).
 20. Adibi, H., Assari, P., "Chebyshev Wavelet Method for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind", ***Hindawi Publishing Corporation***, Mathematical Problems in Engineering, 138408, (2010).
 21. Lepik, Ü., Tamme, E., "Application of the Haar Wavelets for Solution of Linear Integral Equations" ***Proceedings of the Dynamical Systems and Applications***, Antalya, 494-507 (2004).
 22. Maleknejad, K., Mahdiani, K., "Solution and Error Analysis of Two Dimensional Fredholm-Volterra Integral Equations Using Piecewise Constant Functions", *American Journal of Computational and Applied Mathematics* 2(1): 53-57 (2012).
 23. Mesgarani, H., Mollapurasl, R., "Theoretical Investigation on Error Analysis of Sinc Approximation for Mixed Volterra-Fredholm Integral Equation", ***Computational Mathematics and Mathematical Physics***, 53(5): 530-539 (2013).
 24. Shahsavaran, A., "Haar Wavelet Method to Solve Volterra Integral Equations with Weakly Singular Kernel by Collocation Method", ***Applied Mathematical Sciences***, 5(65): 3201-3210 (2011).
 25. Yousefi, S., Razzaghi, M., "Legendre Wavelets Method for the Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations", ***Mathematics and Computers in Simulation***, 70: 1-8 (2005).

26. Yousefi, S., Banifatemi, A., “Numerical Solution of Fredholm Integral Equations by Using CAS Wavelets”, ***Applied Mathematics and Computation***, 183: 458-463 (2006).
27. Yousefi, S., “Numerical Solution of Abel’s Integral Equation by Using Legendre Wavelets”, ***Applied Mathematics and Computation***, 183: 574-580 (2006).
28. Venkatesh, S., G., Ayyaswamy, S., K., Balachandar, S., R., Kannan, K., “Wavelet Solution for Class of Nonlinear Integro-differential Equations”, ***Indian Journal of Science and Technology***, 6(6) (2013).
29. Islam, S., Aziz, I., Al-Fhaid, A., S., “An Improved Method Based on Haar Wavelets for Numerical Solution of Nonlinear Integral and Integro-differential Equations of the First and Higher Orders” ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 260: 449-469 (2014).
30. Eker, E., “Abel ve Tekil İntegral Denklemlerin Farklı Çözüm Metotları”, ***Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Erzurum, (2014).
31. Strang, G., “Wavelets”, ***American Scientist***, 82: 250-255 (1994).
32. Strang, G., “Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction”, ***Siam Review***, 31: 613-627 (1989).
33. Polikar, R., “The Story of Wavelets”, ***Proceedings of IMACS/IEEE***, 5481-5486 (1999).
34. Kumar, B., K., S., Prabhakar, B., Suryanaryana, K., Thilagavathi, V., Rajagopal, R., “Target Identification Using Harmonic Wavelet Based ISAR Imaging”, ***Hindawi Publishing Corporation***, EUROSIP Journal on Applied Signal Processing, 86053, 1-13 (2006).
35. Erdoğan, P., Pekçakar, A., “Dalgacık Dönüşümü ile EKG Sinyallerinin Özellik Çıkarımı ve Yapay Sinir Ağları ile Sınıflandırılması”, ***5. Uluslararası İleri Teknolojiler Sempozyumu***, Karabük, (2009).
36. Rua, A., “Wavelets in Economics”, ***Banco De Portugal***, Economic Bulletin, 71-79 (2012).
37. Alp, H., Akıncı, T., Ç., Albora, M., “Jeofizik Uygulamalarda Fourier ve Dalgacık Dönüşümlerinin Karşılaştırılması”, ***Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi***, 14(1): 67-76 (2008).
38. Yousefi, S., Weinreich, I., Reinartz, D., “Wavelet-based Prediction of Oil Prices”, ***Chaos, Solutions and Fractals***, 25: 265-275 (2005).

39. Jiang, C., Chang, T., Li, X., L., “Money Growth and Inflation in China: New Evidence from a Wavelet Analysis”, ***International Review of Economics and Finance***, 35: 249-261 (2015).
40. Concepcion, C., G., Farina, G., M., C., Gabino, C., P., “Using Wavelets to Understand the Relationship between Mortgages and Gross Domestic Product in Spain”, ***Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics***, 917247, (2012).
41. Yang, C., “An Efficient Method for Solving Abel Integral Equation”, ***Applied Mathematics and Computation***, 227: 656-661 (2014)
42. Hashmiparast, S., M., Fallahgoul, H., “Fourier Approximation for Integral Equation on the Real Line”, ***Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering***, 786368, (2009).
43. Shahsavaran, A., Babolian, E., “Numerical Implementation of an Expansion Method for Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind with Weakly Singular Kernel”, ***International Journal of Applied Mathematics and Computation***, 3(1): 1-8 (2011).
44. Maleknejad, K., Shamloo, A., S., “Numerical Solution of Singular Volterra Integral Equations System of Convolution Type by Using Operational Matrices”, ***Applied Mathematics and Computation***, 195: 500-505 (2008).
45. Maleknejad, K., Damercheli, T., “Improving the Accuracy of Solutions of the Linear Second Kind Volterra Integral Equations by Using the Taylor Expansion Method”, ***Indian Journal of Pure and Applied Mathematics***, 45(3): 363-376 (2014).
46. Avazzadeh, Z., Shafiee, B., Loghmani, G., B., “Fractional Calculus for Solving Abel’s Integral Equations Using Chebyshev Polynomials”, ***Applied Mathematical Sciences***, 5(41): 2207-2216 (2011).
47. Abdelwahid, F., “Adomian Decomposition Method Applied to Nonlinear Integral Equations”, ***Alexandria Journal of Mathematics***, 1(1): 11-18 (2010).
48. Khan, R., H., Bakodah, H., O., “Adomian Decomposition Method and its Modification for Nonlinear Abel’s Integral Equation”, ***International Journal of Mathematical Analysis***, 7(48), 2349-2358 (2013).
49. Groetsch, C., W., “Integral Equations of the First Kind, Inverse Problems and Regularization: A Crash Course”, ***Journal of Physics: Conference Series***, Inverse Problems in Applied Mathematics, 73, (2007).

50. Liu, Y., "Application of the Chebyshev Polynomial in Solving Fredholm Integral Equations", *Mathematical and Computer Modeling*, 50: 465-469 (2009).
51. Franklin, J., N., "On Tikhonov's Method for Ill-Posed Problems", *Mathematics of Computation*, 28(128): 889-907 (1974).
52. Abbasbandy, S., "Numerical Solutions of the Integral Equations: Homotopy Perturbation Method and Adomian's Decomposition Method", *Applied Mathematics and Computation*, 173: 493-500 (2006).
53. Vahdati, S., Abbas, Z., Ghasemi, M., "Application of Homotopy Analysis Method to Fredholm and Volterra Integral Equations", *Mathematical Sciences*, 4(3): 267-282 (2010).
54. Wazwaz, A., M., "The Regularization Method for Fredholm Integral Equations of the First Kind", *Computers and Mathematics with Applications*, 61: 2981-2986 (2011).
55. Tang, T., Xu, X., Cheng, J., "On Spectral Methods for Volterra Integral Equations and the Convergence Analysis", *Journal of Computational Mathematics*, 26(6): 825-837 (2008).
56. Wazwaz, A., M., "Two Methods for Solving Integral Equations", *Applied Mathematics and Computation*, 77: 79-89 (1996).
57. Tulga, İ., "İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Isparta, (2006).
58. Demirbaş, M., "İntegral denklemlerin Yaklaşık Çözümleri", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Isparta, (2002).
59. Lang, S., "Linear Algebra", *Springer*, New Haven, Connecticut (2004).
60. Kreyszig, E., "Introductory Functional Analysis with Applications", *John Wiley and Sons. Inc.*, New York, (1978).
61. Hunter, J. K., Nachtergaele, B., "Applied Analysis", *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 5 Toh Tuck Link, Singapore, (2005).
62. Marsden, J. E., "Elementary Classical Analysis", *W. H. Freeman and Company*, San Fransisco, (1974).
63. Rudin, W., "Principles of Mathematical Analysis", *McGraw-Hill Inc.*, New York, (1976).

64. Soykan, Y., “Foksiyonel Analiz”, *Nobel Akademi Yayınları*, Ankara, (2012).
65. Çakar, Ö., “Fonksiyonel Analize Giriş I”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, Ankara, (2007).



9. ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Tahir Coşgun, 1988 yılında Yozgat'ta doğmuştur. İlköğrenimini Bursa ve Yozgat'ta almış olup 2005 yılında Kayseri Fen Lisesi'nden mezun olmuştur. Aynı yıl Boğaziçi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne başlamıştır. 2012 yılından beri Amasya Üniversitesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. İngilizce bilmektedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ:

Adres: Amasya Üniversitesi, İpekköy Yerleşkesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Elmek: tahir.coskun@amasya.edu.tr