

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
AĞIRLIKLİ DEĞİŞKEN ÜSLÜ
SOBOLEV UZAYLARI
VE
BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

YAZAR
Cihan KÖKSAL

DANIŞMAN
DOÇ. DR. İSMAİL AYDIN

SİNOP - 2020

TEZ KABUL

Cihan KÖKSAL tarafından hazırlanan “Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayları ve Bazı Temel Özellikleri” başlıklı bu çalışma, 21.01.2020 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR
Amasya Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi



Üye Doç. Dr. İsmail AYDIN
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi



Üye Doç. Dr. Murat UZUNCA
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi



ETİK BEYANI

Sinop Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Cihan KÖKSAL

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2.GENEL BİLGİLER	3
2.1. Bazı Tanım ve Kavramlar	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	8
4. BULGULAR.....	9
4.1. Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzayları	9
4.2. $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Uzayının Bazı Özellikleri.....	13
4.3. Zayıf Türev ve Bazı Önemli Kavramlar	18
4.4. Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayı.....	22
4.5. Kompakt Gömmeler.....	26
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$ A $ veya $\mu(A)$	: A kümesinin Lebesgue ölçümü
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ üzerinde her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayı
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı, her mertebeden sürekli türevlenebilen, kompakt destekli fonksiyonların uzayı
$W_w^{k,p(\cdot)}$	: Ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı
$\ \cdot\ _{k,p(\cdot),w}$	: $W_w^{k,p(\cdot)}$ uzayının normu
$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$	: Değişken üslü Lebesgue uzayı
$\ \cdot\ _{p(\cdot)}$	: $L^{p(\cdot)}$ uzayının normu
$L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$	: Ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayı
$\ \cdot\ _{p(\cdot),w}$	: $L_w^{p(\cdot)}$ uzayının normu
$L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$	: Lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$\rho_{p(\cdot)}$	: Modüler fonksiyon
$X \hookrightarrow Y$	: X uzayının Y uzayına sürekli gömülmesi
$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$	: X uzayının Y uzayına kompakt gömülmesi
h.h.h.	: Hemen hemen her yerde
$P(\mathbb{R}^n)$	: Değişken üs fonksiyonlarının ailesi
Essinf	: Hemen hemen her yerde alt sınırların en büyüğü
Essup	: Hemen hemen her yerde üst sınırların en küçüğü
Supp f	: f fonksiyonunun desteği

ÖZET

AĞIRLIKLIL DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARI

VE

BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu tez çalışması üç temel kısımdan oluşmaktadır. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde değişken üslü Lebesgue uzaylarının ve Sobolev uzaylarının tarihçesi ve günümüzdeki kullanım alanları kısaca ele alındı.

İkinci bölümde tezde kullanılan bazı temel kavramlar, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ değişken üslü Lebesgue uzayı ve önemli bazı temel özellikleri incelendi.

Bulgular bölümünün birinci kısmında $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı değişken üslü Lebesgue ve $W_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzaylarının bazı temel özellikleri incelendi. İkinci kısmında ise bu iki uzay ile ilgili kompakt gömülme özellikleri araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Değişken üslü Lebesgue uzayları, ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları, Kapsama özellikleri, Kompakt gömülme.

ABSTRACT

WEIGHTED VARIABLE EXPONENT SOBOLEV SPACES

AND

SOME BASIC FEATURES

This thesis study is consist of three basic parts. The first part is deviated to the characteristics of introduction, in which the history of variable exponent Lebesgue spaces and Sobolev spaces and their current usage areas are briefly discussed.

In the second part, some basic concepts used in the thesis, variable exponent Lebesgue space and some important basic properties are examined.

In the first chapter of the findings section, some basic properties of the weighted variable exponent Lebesgue and the weighted variable exponent Sobolev spaces are examined. In the second part, compact embedding properties of these two spaces are investigated.

Key Words: Variable exponent Lebesgue spaces, Weighted variable exponent Sobolev spaces, Coverage features, Compact embedding.

TEŐEKKÖR

Bu tez çalıřmasının yűrűtűlmesi sırasında tecrűbelerini aktarıp, yardımlarını esirgemeyen danıřman hocam Doç. Dr. İsmail AYDIN'a teőekkűr etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca bařta ailem olmak űzere beni destekleyen bűtűn arkadařlarıma teőekkűr ederim.



1.GİRİŞ

Değişken üslü Lebesgue uzayları literatürde ilk olarak Orlicz (1931) tarafından tanımlanmıştır. Orlicz uzaylarının bir genelleştirilmesi olan modüler uzaylar düzenli olarak ilk kez Nakano (1950), (1951) tarafından çalışıldı. Fakat buna rağmen Orlicz uzayları kadar ilgi görmedi. 1970 ve 1980'li yıllarda, modüler fonksiyon uzayları, (Hudzik, 1976), (Hudzik, 1983), (Musielak, 1983) başta olmak üzere birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, (Sharapudinov, 1979) çalışmasında $L^{p(\cdot)}([0,1])$ uzayı üzerindeki topoloji üzerine bazı incelemeler yapılmıştır.

Literatürde değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki en önemli çalışma Kovacik ve Rakosnik (1991) tarafından ele alınmıştır. Değişken üslü Lebesgue uzayı olarak ifade edilen $L^{p(\cdot)}$ uzayının özel bir Orlicz-Musielak uzayı olduğu ve $p(\cdot) = p$ sabit alındığında, $L^{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayının, L^p klasik Lebesgue uzayı olacağı çalışmada yer alan özelliklerinden birkaçıdır. Değişken üslü Lebesgue uzayları ile klasik Lebesgue uzaylarının ortak birçok özellikleri olmasına rağmen, ötelemelerin invaryantlığı, ötelemelerin sürekliliği ve girişim gibi önemli özellikler L^p uzayında sağlanıyorken $L^{p(\cdot)}$ uzayında sağlanmaz (Kováčik ve Rákosník, 1991), (Samko, 1998). Ayrıca, (Diening, 2004) çalışmasında sınırlı bölgede tanımlı $L^{p(\cdot)}$ uzayında maksimal operatörün sınırlılığı ispatlanmıştır. Bu çalışmadan sonra bu uzaylara olan ilgi artmış ve günümüze kadar çeşitli konularda makaleler yapılmıştır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları teorisi son yıllarda, elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesap ve bazı özel diferansiyel denklemler ile ilgili problemler üzerine çalışıldı. Elektroeolojik akışkanlar (EA) ile ilgili ilk önemli bilgiler (Winslow, 1949) çalışmasında ifade edilmiştir.

Sobolev uzayları literatürde ilk olarak Sobolev (1938), (1963) tarafından tanımlanmıştır. Sobolev, yaptığı çalışmalarda klasik Sobolev uzayı ile klasik Lebesgue uzayı ve $C^m(\mathbb{R}^n)$ uzayları arasındaki gömülme teoremlerini vermiştir. Yine çok değişkenli türevlenebilir fonksiyonlar için genel integral eşitsizlikleri ispatlanmış ve bunları matematiksel fiziğin birçok problemde uygulamıştır. Sobolev uzayı özellikle Morrey (1940), Deny ve Lions (1955), Meyers ve Serrin (1964) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Besov ve ark. (1978), (1979), Kufner (1980), Hebey(1996), Hudzik(1976), (1979), (1983) Sobolev tipi eşitsizliklerden faydalanan ve geliştiren matematikçilerdendir. Sobolev uzayları, kısmi diferansiyel denklemler, matematiksel fizik, diferansiyel geometri ve daha birçok çeşitli matematiksel analizin teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynar. Yine başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin çözümünde kullanılır. Değişken üslü fonksiyon uzayları, son yıllarda, elastik mekanik, akışkanlar dinamiği ile ilgili problemler üzerine çalışılmaktadır.

1960'lı yıllarda dejenere kısmi diferansiyel denklemler ve katsayılarında çeşitli singülerlikler bulunan denklemlerin çözümlerinin araştırılması için bu uzaylar üzerinde ağırlık fonksiyonları tanımlanarak ağırlıklı Sobolev uzayları oluşturulmuştur. Bu çalışmada kullanılan w ağırlık fonksiyonu ilk kez A. Beurling tarafından 1938 yılındaki (LX, Congrès

Math. Scand., Helsinki, 1938) çalışmasında tanıtıldığından Beurling ağırlık fonksiyonu olarak bilinir.

Bu tez çalışmasında, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları tanımlanıp bazı temel özellikler ele alınıp, sürekli gömülmeler ve eşitsizlikler verilecektir. Tez çalışmasının son kısmında ise ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı tanımlanacaktır. Ayrıca bu uzayın bazı sürekli ve kompakt gömülmeleri verilip sonuçları incelenecektir.



2.GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Bazı Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. X bir topolojik uzay, E bir vektör uzayı, f fonksiyonu da X kümesinden E uzayına tanımlı olmak üzere $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ şeklinde tanımlanan kümenin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve bu küme $\text{Supp} f$ ile gösterilir (Treves, 1967).

Tanım 2.1.2. X bir yerel kompakt topolojik uzay, f , X üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $y \in X - K$ olduğunda $|f(y)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan X uzayının K kompakt alt kümesi varsa, f fonksiyonuna sonsuzda sıfırdır denir. X üzerinde tanımlı, sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı $C_0(X)$ ile gösterilir. Yine X bir kompakt uzay olmak üzere X üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli ve kompakt destekli fonksiyonların vektör uzayı $C_c(X)$ ile gösterilir (Rudin, 1966).

Tanım 2.1.3. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $X \subset Y$ olsun. Eğer herhangi bir $f \in X$ fonksiyonu için $\|f\|_Y \leq c \|f\|_X$ olacak şekilde bir $c > 0$ varsa X uzayı Y uzayına sürekli olarak gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Kufner ve ark., 1977).

Tanım 2.1.4. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzayları ve $T: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer, $X \hookrightarrow Y$ sağlanıyorsa ve her $(x_n) \subset X$ sınırlı dizisi için $(T(x_n)) \subset Y$ operatör dizisinin yakınsak bir alt dizisi bulunuyorsa, X uzayı Y uzayına kompakt olarak gömülür denir ve $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Kufner ve ark., 1977)

Teorem 2.1.5. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ iki normlu uzaylar ve X yansımali bir uzay olsun. Ayrıca, $T: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Bu takdirde, $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ olması için gerek ve yeter koşul, T operatörünün X uzayında zayıf yakınsak dizileri Y uzayında kuvvetli yakınsak dizilere dönüştürmesidir (Ciarlet, 2013), (Conway, 1985)

Tanım 2.1.6. X kümesi K ($K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Bir $\rho: X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $f, g \in X$ için;

(a) $\rho(f) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f = 0$

(b) $\rho(f) = \rho(-f)$

(c) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde, ρ fonksiyonuna X üzerinde bir modüler fonksiyon denir.

Eğer $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve $x \in X$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$$

oluyorsa, ρ fonksiyonuna X üzerinde bir konveks modüler fonksiyon adı verilir (Musielak, 1983).

Tanım 2.1.7. $p: \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonuna değişken üs denir. Değişken üs fonksiyonlarının ailesi $P(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. Ayrıca

$$p^- : \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \text{ ve } p^+ : \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

olmak üzere $1 \leq p^- \leq p(\cdot) \leq p^+ \leq \infty$ olduğu açıktır.

Herhangi bir $p \in P(\mathbb{R}^n)$ ve $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx$$

konveks modüler fonksiyonu tanımlansın. Değişken üslü Lebesgue uzayları

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty, \exists \lambda > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Değişken üslü Lebesgue uzayının

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır (Kovacik ve Rakosnik, 1991).

Özel olarak $p(\cdot) \equiv p$ sabit ise $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı ile $L^p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayı çakışır.

Tanım 2.1.8. $p_1(\cdot)$ ve $p_2(\cdot)$ $\mathbb{R}^n$ 'deki iki üs olsun. $p_2(\cdot)$ 'nin $p_1(\cdot)$ 'den daha zayıf olmaması için gerek ve yeter şart $\Phi_{p_1}(x, t) = t^{p_1(x)}$ fonksiyonuna göre Musielak anlamında daha zayıf olmamasıdır. Yani her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $t \geq 0$ için

$$\Phi_{p_1}(x, t) \leq K_1 \Phi_{p_2}(x, K_2 t) + h(x) \quad (2.1.8.1)$$

eşitsizliği olacak şekilde $K_1, K_2 > 0$ ve $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h > 0$ fonksiyonu vardır ve $p_1(\cdot) \preceq p_2(\cdot)$ ile gösterilir.

Eğer $p_1(\cdot)$ ve $p_2(\cdot)$ üsleri (2.1.8.1) koşulunu sağlıyorsa $L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi vardır (Aydın, 2012).

Tanım 2.1.9. f ve g fonksiyonları G kompakt Abel grubu üzerinde birer Borel fonksiyonları olsunlar. Bu fonksiyonların girişimi $f * g$ şeklinde gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$$

biçiminde tanımlıdır. Bu girişim işleminin tanımlı olabilmesi için

$$\int_G |f(x-y)g(y)|dy < \infty$$

olmalıdır (Rudin, 1962).

Teorem 2.1.10. (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği) Herhangi $p, p_1, p_2 \in P(\mathbb{R}^n)$ değişken üs olsun ve $\frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_2(\cdot)}$ gerçeklensin. Bu takdirde herhangi $f \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq r_{p,p_1} \|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}$$

olacak şekilde f ve g den bağımsız bir $r_{p,p_1} \geq 1$ sabit vardır (Kovacik ve Rakosnik, 1991), (Huang ve Xu, 2010).

İspat : $\|f\|_{p_1(\cdot)} > 0$ ve $\|g\|_{p_2(\cdot)} > 0$ alınsın. Yine $q_1 = \frac{p_1(\cdot)}{p(\cdot)}$ ve $q_2 = \frac{p_2(\cdot)}{p(\cdot)}$ olsun. O halde

$q_1(\cdot), q_2(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ ve $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_2(\cdot)} = 1$ dir. Ayrıca Young eşitsizliğinde

$p = q_1(\cdot), q = q_2(\cdot), a = \left(\frac{|f(\cdot)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)}} \right)^{p(\cdot)}, b = \left(\frac{|g(\cdot)|}{\|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(\cdot)}$ olarak alınıp $\mathbb{R}^n$ üzerinden integral

alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{q_1(x)} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)}} \right)^{p_1(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{q_2(x)} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p_2(x)} dx \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q_1(x)} \rho_{p_1(\cdot)} \left(\frac{f}{\|f\|_{p_1(\cdot)}} \right) + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q_2(x)} \rho_{p_2(\cdot)} \left(\frac{g}{\|g\|_{p_2(\cdot)}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yine $0 < \|f\|_{p(\cdot)} < \infty$ olan her f için $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) = 1$ olduğundan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q_1(x)} + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q_2(x)} \text{ elde edilir. Ayrıca}$$

$$(i) \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q_1(x)} = \frac{1}{\operatorname{ess\,inf} q_1(x)} = \frac{1}{q_1^-}$$

$$(ii) \frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_2(\cdot)} = 1 \text{ için}$$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{q_2(x)} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ess\,sup} q_1(x)} = 1 - \frac{1}{q_1^+}$$

olup, (i) ve (ii) den

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \leq 1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_1^+} \quad (2.1.10.1)$$

elde edilir.

Her $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ için $1 \leq p^- \leq p(\cdot) \leq p^+ < \infty$ eşitsizliği göz önüne alınırsa $1 \leq \frac{p(\cdot)}{p^-}$

bulunur. Yine $1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_2^+} \geq 1$ olduğundan $\lambda = \left(1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_2^+} \geq 1\right)^{\frac{1}{p^-}} \geq 1$ için (2.1.10.1)

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_2^+}\right)^{\frac{p(x)}{p^-}}} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_2^+}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)g(x)|}{\lambda \|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}} \right)^{p(x)} dx \leq 1$$

bulunur. Luxemburg normu tanımından $r_{p,p_1} = \left(1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_1^+}\right)^{\frac{1}{p^-}}$ olmak üzere

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq \left(1 + \frac{1}{q_1^-} - \frac{1}{q_1^+}\right)^{\frac{1}{p^-}} \|f\|_{p_1(\cdot)} \|g\|_{p_2(\cdot)}$$

elde edilir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünde ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayı tanımlanarak (Aydın, 2012) ve (Wang, 1977) çalışmalarındaki bazı özellikler ele alındı. Daha sonra ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarının arakesiti olarak tanımlanan uzayın temel özellikleri ele alındı. Ayrıca, bu arakesit uzayının diğer uzaylarla arasındaki sürekli ve kompakt gömülmeleri (Kim ve ark., 2010), (Mashiyev ve ark., 2010), (Saiedinezhad ve Ghaemi, 2015) çalışmaları göz önüne alınarak incelendi. Son olarak ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayıyla ilgili (Saiedinezhad, S., Ghaemi, M. B. 2015), (Ky Ho, Inbo Sim, 2015) ve (Yun-Ho Kim, Lihe Wang, Chao Zhang, 2010) çalışmaları göz önüne alınarak sürekli ve kompakt gömülmeler incelendi.



4. BULGULAR

4.1. Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

Bu bölümde $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarının bazı temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı ile ilgili bazı önemli teoremler, önermeler ifade edilip ispatlanacaktır.

Tanım 4.1.1: Pozitif, ölçülebilir ve yerel sınırlı bir $w: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Ayrıca, ağırlık modüler fonksiyonu

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} w(x) dx$$

olarak tanımlanır.

Ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayı $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ biçiminde gösterilirse bu uzay tüm

$\|f\|_{p(\cdot),w} = \left\| f w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} < \infty$ koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarından oluşur. Ayrıca

$L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\|\cdot\|_{p(\cdot),w}$ normuna göre bir Banach uzaydır (Aydın, 2012)

Tanım 4.1.2: $w, \mathbb{R}^n$ üzerinde pozitif, ölçülebilir ve yerel olarak integrallenebilir fonksiyon olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $w(x) \geq 1$ ve $w(x+y) \leq w(x).w(y)$ koşulları sağlanıyorsa, w ye Beurling ağırlık fonksiyonu denir (Aydın, 2012)

Örnek 4.1.3: Herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $s \geq 0$ için $w_s(x) = (1+|x|)^s$ fonksiyonu bir Beurling ağırlık fonksiyonudur. Gerçekten $w_s(x)$ fonksiyonu,

(i) $w_s(x) \geq 1$,

(ii) $w_s(x+y) = (1+|x+y|)^s \leq (1+|x|+|y|)^s \leq (1+|x|+|y|+|x+y|)^s$

$$= \left[(1+|x|)(1+|y|) \right]^s = (1+|x|)^s (1+|y|)^s$$

$$= w_s(x).w_s(y)$$

koşullarını sağlar. Bu fonksiyona polinom tipten ağırlık fonksiyonu da denir.

Tanım 4.1.4: $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi iki w_1, w_2 ağırlık fonksiyonları verilsin. Eğer her x için $w_2(x) \leq C w_1(x)$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa w_2 fonksiyonu w_1 ağırlık fonksiyonundan önde gelir denir ve $w_2 \prec w_1$ şeklinde gösterilir. Yine $w_1 \prec w_2$ ve $w_2 \prec w_1$ ise w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonları denktir denir ve $w_1 \approx w_2$ şeklinde gösterilir (Wang, 1977).

Önerme 4.1.5. (i) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w(x) \geq 1$ ise $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi gerçekleşir.

(ii) $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ kapsaması vardır.

(iii) $C_c(\mathbb{R}^n)$, $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur.

İspat : (i) Herhangi bir $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu alınsın. Eğer $w(x) \geq 1$ olması kullanılırsa;

$$|f(x)|^{p(x)} \leq |f(x)|^{p(x)} w(x)$$

ve

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot),w}(f) < \infty$$

olur. Bu ise, $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterir. Ayrıca $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normunun tanımı kullanılırsa,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \left\| fw^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),w}$$

elde edilir. Böylece $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sürekli gömüldüğünü gösterir.

(ii) Herhangi bir $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ alınsın ve $\text{supp} f = K$ kompakt olsun. Yine $p^+ < \infty$ olmak üzere $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$ olduğu biliniyor (Aydın, 2012). Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot),w,K}(f) &= \int_K |f(x)|^{p(x)} w(x) dx \\ &\leq \left(\sup_{x \in K} w(x) \right) \rho_{p(\cdot)}(f) < \infty \end{aligned}$$

ve $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ yazılır.

(iii) Eğer (ii) kullanılırsa $C_c(\mathbb{R}^n) \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $\overline{C_c}(\mathbb{R}^n) \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Şimdi $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{C_c}(\mathbb{R}^n)$ ters kapsaması gösterilsin. Herhangi bir $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Bu takdirde $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının tanımı kullanılırsa $fw^{\frac{1}{p(\cdot)}} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olur. Eğer $\overline{C_c}(\mathbb{R}^n) = L^{p(\cdot)}$ kullanılırsa (Aydın, 2010), herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\left\| fw^{\frac{1}{p(\cdot)}} - g \right\|_{p(\cdot)} < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır. Yine (K.R.Unni, 1973) çalışmasındaki Lemma-4 den dolayı w ağırlık fonksiyonu sürekli kabul edilebilir.

Böylece $h = gw^{-\frac{1}{p(\cdot)}}$ seçilirse $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ olur. O halde her $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f - h\|_{p(\cdot),w} = \left\| f - \frac{g}{w^{\frac{1}{p(\cdot)}}} \right\|_{p(\cdot),w} = \left\| fw^{\frac{1}{p(\cdot)}} - g \right\|_{p(\cdot)} < \varepsilon$$

olacak şekilde $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 4.1.6. (i) $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı güçlü karakter değişmezdir.

(ii) $t \rightarrow M_t f$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ kümesinden $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayına süreklidir (Aydın, 2012).

İspat : (i) Herhangi $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Her $t \in \mathbb{R}^n$ için

$$|M_t f(x)| = |\langle x, t \rangle f(x)| = |f(x)|$$

ve

$$\|M_t f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{p(\cdot),w}$$

elde edilir.

(ii) Önerme 4.1.5. den dolayı $C_c(\mathbb{R}^n)$ kümesinin $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğu biliniyor. Bu takdirde, herhangi $f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|f - g\|_{p(\cdot),w} < \varepsilon \quad (4.1.6.1)$$

olacak şekilde bir $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır. Eğer $\text{supp} g = K$ denirse, her $t \in \mathbb{R}^n$ için $\text{supp}(M_t g - g) \subset K$ bulunur. Yine M_t karakter fonksiyonunun tanımı kullanılırsa kullanılırsa;

$$\begin{aligned} |M_t g(x) - g(x)| &= |\langle x, t \rangle g(x) - g(x)| = |g(x)| |\langle x, t \rangle - 1| \\ &\leq |g(x)| \sup_{x \in K} |\langle x, t \rangle - 1| = \|g(x)\| \|\langle \cdot, t \rangle - 1\|_{\infty, K} \end{aligned}$$

ve bu nedenle

$$\|M_t g - g\|_{p(\cdot),w} \leq \|\langle \cdot, t \rangle - 1\|_{\infty, K} \|g\|_{p(\cdot),w} \quad (4.1.6.2)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.1.6.2) eşitsizliği ve (i) kullanılırsa,

$$\|M_t f - f\|_{p(\cdot),w} \leq \|M_t f - M_t g\|_{p(\cdot),w} + \|M_t g - g\|_{p(\cdot),w} + \|f - g\|_{p(\cdot),w}$$

$$\leq 2\|f - g\|_{p(\cdot),w} + \|\langle \cdot, t \rangle - 1\|_{\infty,K} \|g\|_{p(\cdot),w}$$

yazılır. Yine $t \rightarrow 0$ için $\|\langle \cdot, t \rangle\|_{\infty,K} \rightarrow 0$ olduğu biliniyor. Böylece her $t \in U$ için,

$$\|\langle \cdot, t \rangle\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{3\|g\|_{p(\cdot),w}} \quad (4.1.6.3)$$

olacak şekilde sıfırın bir U komşuluğu vardır. O halde (4.1.6.1) ve (4.1.6.3) eşitsizlikleri kullanılırsa her $t \in U$ için,

$$\|M_t f - f\|_{p(\cdot),w} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\|g\|_{p(\cdot),w}} \|g\|_{p(\cdot),w} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 4.1.7. (i) Eğer $w_1 < w_2$ ise $L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dir.

(ii) Eğer $w_1 \approx w_2$ ise $L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L_{w_1}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dir.

(iii) Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \mu(\Omega) < \infty$, $w_1 < w_2$ ve $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot)$ ise $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi elde edilir.

İspat: **(i)** Herhangi $f \in L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu verilsin. $w_1 < w_2$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w_1(x) \leq C w_2(x)$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla,

$$|f(x)|^{p(\cdot)} w_1(x) \leq C |f(x)|^{p(\cdot)} w_2(x)$$

yazılır. Böylece her $f \in L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_{p(\cdot),w_1} \leq C \|f\|_{p(\cdot),w_2}$$

olduğu görülür.

(ii) $w_1 < w_2$ ve $w_2 < w_1$ olması ve (i) koşulu kullanılırsa istenilen elde edilir.

(iii) Eğer $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot)$ olması kullanılırsa $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ olur (Kovacik ve Rakosnik, 1991). Yine $w_1 < w_2$ ve (i) kullanılırsa, $L_{w_2}^{p_1(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 4.1.8. Eğer $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot)$ ve $w_1 < w_2$ ise $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi vardır (Aydın, 2012).

İspat: Eğer $p_1(\cdot) \preceq p_2(\cdot)$ ve tanım 2.1.8. kullanılırsa $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olur. Ayrıca Önerme 4.1.7. deki (i) koşulu kullanılırsa, $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

Uyarı 4.1.9. Banach uzaylarında kapalı grafik teoremini kullanarak $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesini ispatlamak için $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

4.2. $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Uzayının Bazı Özellikleri

Bu bölümde $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ile $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının arakesiti olarak tanımlanan $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ kümesinin bir vektör ve normlu uzay olduğu gösterilerek bazı özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.2.1. $K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat: Keyfi $f, g \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları verilsin. Buradan $f, g \in L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $f, g \in L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olup $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ birer vektör uzayı olduklarından $f + g \in L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $f + g \in L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ yazılır. O halde $f + g \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Herhangi bir $f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in K$ verilsin. Yine, $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ birer vektör uzayı olduklarından $\lambda f \in L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda f \in L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olup, $\lambda f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ yazılır.

Yukarıda tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemleri kullanılarak vektör uzayı olma koşullarının sağlandığı gösterilebilir.

Herhangi bir $f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için $\|\cdot\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}$ fonksiyonu $\|f\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)} = \|f\|_{p_1(\cdot), w_1} + \|f\|_{p_2(\cdot), w_2}$ biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyon, iki normun toplamı olduğundan $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ vektör uzayı üzerinde bir normdur. Böylece $(A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)})$ uzayı bir normlu uzayıdır.

Bu bölümde her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w_1(x), w_2(x) \geq 1$ ve $p_1^+, p_2^+ < \infty$ ve oldukları kabul edilecektir.

Teorem 4.2.2. $(A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)})$ uzayı bir Banach uzayıdır (Aydın, 2010).

İspat: $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ normlu uzayında herhangi bir $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi alınsın. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n, m \geq n_1$ için

$$\|f_n - f_m\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)} = \|f_n - f_m\|_{w_1}^{p_1(\cdot)} + \|f_n - f_m\|_{w_2}^{p_2(\cdot)}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu ise $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin hem $(L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_1}^{p_1(\cdot)})$ hem de $(L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_2}^{p_2(\cdot)})$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Öte yandan $(L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_1}^{p_1(\cdot)})$ ve $(L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_2}^{p_2(\cdot)})$ uzayları birer Banach uzayı olduklarından $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_1}^{p_1(\cdot)})$ uzayında bir $f \in L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna, $(L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{w_2}^{p_2(\cdot)})$ uzayında da bir $g \in L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - f\|_{p_1(\cdot), w_1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.2.2.1)$$

ve her $n \geq n_3$ olduğunda

$$\|f_n - g\|_{p_2(\cdot), w_2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.2.2.2)$$

olacak şekilde $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Önerme 4.1.5. den dolayı $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan

$$\|f_n - f\|_{p_1(\cdot)} \leq \|f_n - f\|_{p_1(\cdot), w_1}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında f fonksiyonuna yakınsar. Buradan $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin f fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan bir $\{f_{n_k}\}$ alt dizisi vardır (Kovacik ve Rakosnik, 1991). Benzer şekilde $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olup, $\{f_{n_k}\}$ alt dizisi $g \in L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsadığından g fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan bir $\{f_{n_{k_\ell}}\}$ alt dizisi vardır. Ayrıca $\{f_{n_{k_\ell}}\}$ alt dizisi f fonksiyonuna h.h.h. yakınsar. O halde $\{f_{n_{k_\ell}}\}$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini K_1 ile gösterirsek, $\mu(K_1) = 0$ olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}^n - K_1$ için aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n_{k_\ell} \geq n_4$ olduğunda

$$|f_{n_{k_\ell}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.2.2.3)$$

olacak şekilde bir $n_4 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca $\{f_{n_{k_\ell}}\}$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini K_2 ile gösterirsek $\mu(K_2) = 0$ olur. Böylece verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in \mathbb{R}^n - K_2$ olmak üzere her $n_{k_\ell} \geq n_5$ için

$$|f_{n_{k_\ell}}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.2.2.4)$$

olacak şekilde bir $n_5 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $n_0 = \max\{n_4, n_5\}$ olarak seçilirse her $x \in \mathbb{R}^n - (K_1 \cup K_2)$ için $x \notin K_1$ ve $x \notin K_2$ olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n_{k_\ell} \geq n_0$ için (4.2.2.3) ve (4.2.2.4) eşitsizlikleri de kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &< |f(x) - f_{n_{k_\ell}}(x) + f_{n_{k_\ell}}(x) - g(x)| \\ &\leq |f_{n_{k_\ell}}(x) - f(x)| + |f_{n_{k_\ell}}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Yine $\mu(K_1), \mu(K_2) = 0$ olduğundan $\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2) = 0$ olup, $\mu(K_1 \cup K_2) = 0$ çıkar. Böylece h.h.h. $f = g$ elde edilir. Halbuki $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının elemanları denklik sınıflarından oluştuğundan $f = g$ olur. Buradan $f \in L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olup, $f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Eğer $k_0 = \max\{n_2, n_3\}$ seçilip ve (4.2.2.1) ve (4.2.2.2) eşitsizlikleri de kullanılırsa her $n \geq k_0$ için

$$\|f_n - f\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)} = \|f_n - f\|_{w_1}^{p_1(\cdot)} + \|f_n - f\|_{w_2}^{p_2(\cdot)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. O halde $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\|\cdot\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}$ normuna göre $f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsadığından $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir Banach uzayı olur.

Teorem 4.2.3. w_2 ağırlık fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w_2(x) \geq c > 0$ koşulunu sağlasın. Bu takdirde $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir BF-uzayıdır.

İspat: Normlarının tanımından $L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür. Ayrıca $w_2(x) \geq c > 0$ için $L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi ve $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir BF-uzay olduğu biliniyor (Aydın, 2012). O halde

$$L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$$

ifadesinden, herhangi bir $f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_{L_{loc}^1} \leq c_1 \|f\|_{p(\cdot)} \leq c_1 c_2 \|f\|_{p(\cdot), w_2} \leq c_1 c_2 c_3 \|f\|_{p_2(\cdot), w_2}$$

olacak şekilde $c_1 c_2 c_3 > 0$ sayıları vardır. O halde $C = c_1 c_2 c_3$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_{loc}^1} \leq C \left(\|f\|_{p_1(\cdot), w_1} + \|f\|_{p_2(\cdot), w_2} \right) = C \|f\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}$$

elde edilir. Böylece $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

Teorem 4.2.4. $1 < p_2^- \leq p_2(\cdot) \leq p_1(\cdot) < p_1^+ < \infty$ ve $\left\| \frac{w_2}{w_1} \right\|_{\frac{p_1(\cdot)}{p_1(\cdot) - p_2(\cdot)}, w_1} < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A_{w_1, w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Herhangi bir $f \in A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ verilsin. Buradan $f \in L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in L_{w_2}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Ayrıca (Edmunds ve ark., 2006) çalışmasındaki Teorem 5.1'den $\left\| \frac{w_2}{w_1} \right\|_{\frac{p_1(\cdot)}{p_1(\cdot) - p_2(\cdot)}, w_1} < \infty$ koşulu

için $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. O halde,

$$\|f\|_{p_2(\cdot), w_2} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p_2(\cdot), w_2} \leq c \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p_1(\cdot), w_1} = c \|f\|_{p_1(\cdot), w_1}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_2(\cdot), w_1, w_2} &= \|f\|_{w_1} + \|f\|_{p_2(\cdot), w_2} \leq \|f\|_{p_1(\cdot), w_1} + c \|f\|_{p_1(\cdot), p_2(\cdot), w_1} \\ &\leq \max\{1, c\} \left(\|f\|_{w_1} + \|f\|_{p_1(\cdot), w_2} \right) = \max\{1, c\} \|f\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $A_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A_{w_1, w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.5. Eğer $w_1 < w_3$ ve $w_2 < w_4$ ise $L_{w_3}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_4}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi sağlanır.

İspat: $w_1 < w_3$ olup, Önerme 4.1.7. kullanılırsa $L_{w_3}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi yazılır. O halde her $f \in L_{w_3}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için $\|f\|_{p_1(\cdot), w_1} \leq c_1 \|f\|_{p_1(\cdot), w_3}$ olacak şekilde en az bir $c_1 > 0$ sayısı

vardır. Yine benzer şekilde $w_2 < w_4$ olduğundan $L_{w_4}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi

sağlanır. Böylece her $f \in L_{w_4}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için $\|f\|_{p_2(\cdot), w_2} \leq c_2 \|f\|_{p_2(\cdot), w_4}$ olacak şekilde en az bir $c_2 > 0$ sayısı vardır. Eğer $c = \max\{c_1, c_2\}$ seçilirse,

$$\|f\|_{w_1, w_2}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)} \leq c \|f\|_{w_3, w_4}^{p_1(\cdot), p_2(\cdot)}$$

elde edilir. Bu ise $L_{w_3}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_4}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.6. Eğer $w_1 \approx w_3$ ve $w_2 \approx w_4$ ise $L_{w_3}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_4}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 4.2.7. Eğer $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot) \leq p_3(\cdot)$ ve $w_2 < w_1$ ise,

$$L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_1}^{p_3(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \text{ sürekli gömülmesi gerçekleşir.}$$

İspat: Eğer $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot) \leq p_3(\cdot)$ olması kullanılırsa,

$$|f(x)|^{p_2(x)} w_1(x) \leq |f(x)|^{p_1(x)} w_1(x) \chi_{\{|f(x)| \leq 1\}} + |f(x)|^{p_3(x)} w_1(x) \chi_{\{|f(x)| \geq 1\}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $L_{w_1}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_1}^{p_3(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_1}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ yazılır. Ayrıca Önerme 4.1.7. kullanılırsa, $L_{w_1}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ yazılır.

Sonuç 4.2.8. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $w_2 < w_1$ olsun.

$$L_{w_1}^{p^-}(\mathbb{R}^n) \cap L_{w_1}^{p^+}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \text{ dir.}$$

İspat: Önerme 4.2.7. de ispatlandı.

Teorem 4.2.9. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w^*(x) = w^{1-q(x)}$ ve $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} = 1$ olsun. Bu takdirde her

$$f \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ ve } g \in L_{w^*}^{q(\cdot)}(\Omega) \text{ için}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq c \|f\|_{p(\cdot), w} \|g\|_{q(\cdot), w^*}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır.

İspat: Herhangi bir $f \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $g \in L_{w^*}^{q(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonları verilsin. Bu takdirde $f w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $g w^{*\frac{1}{q(\cdot)}} \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ yazılır. Eğer değişken üslü Lebesgue uzaylarında Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| w^{\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right| \left| g(x) w^{-\frac{1}{q(\cdot)}} \right| dx \\
&\leq c \left\| f w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} \left\| g w^{-\frac{1}{q(\cdot)}} \right\|_{q(\cdot)} \\
&= c \|f\|_{p(\cdot), w} \|g\|_{q(\cdot), w^*}
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı vardır.

4.3. Zayıf Türev ve Bazı Önemli Kavramlar

Tanım 4.3.1. Herhangi $j \in \mathbb{N}$ için $\alpha_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ şeklinde tanımlanan α ya çoklu indis denir ve tüm çoklu indislerin kümesi $\mathbb{N}_0^n$ ile gösterilir. Ayrıca

$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ olmak üzere $1 \leq j \leq n$ için $D_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ ise, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$ $|\alpha|$ -ıncı mertebeden

bir diferansiyel operatör belirtir (Burenkov, 1998).

Tanım 4.3.2. Her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayına $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir. Uzayın elemanları düzgün (smooth) fonksiyon adını da alır. Yine her mertebeden sürekli türevlere sahip kompakt destekli fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayına $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ veya $D(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir. Buradan

$$D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp} \phi = K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}\}$$

yazılır. Uzayın elemanlarına test fonksiyonu da denir. Örneğin; $c > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{c}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayının elemanıdır.

Şimdi herhangi $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Bu takdirde $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayında $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \phi$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) Her $j \in \mathbb{N}$ için $\text{supp} \phi_j \subset K$ olacak şekilde en az bir $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi vardır.

(ii) Her $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ için ve her $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi için $\lim_{j \rightarrow \infty} \|D^\alpha \phi_j - D^\alpha \phi\|_{\infty, K} = 0$ sağlanır. Yani $\{D^\alpha \phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi her $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi üzerinde $D^\alpha \phi$ ye düzgün yakınsar (Treves, 1967).

Tanım 4.3.3. (Distribüsyon Uzaı) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathbb{C}$ uzayına giden doğrusal, sürekli fonksiyonların uzaı adını alır ve

$$D'(\mathbb{R}^n) = \{T | T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \text{ doğrusal, sürekli}\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ fonksiyoneline distribüsyon denir. O halde $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel için herhangi $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ verildiğinde,

$$(i) T(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) = \lambda_1 T(\phi_1) + \lambda_2 T(\phi_2)$$

$$(ii) C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ uzayında } \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \phi \text{ için } \mathbb{C}' \text{ de } \lim_{j \rightarrow \infty} T(\phi_j) = T(\phi) \text{ sağlanır.}$$

Tanım 4.3.4. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ çoklu indis ve herhangi $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ verilsin. Eğer herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(x) \phi(x) dx$$

koşulunu sağlayan $g_\alpha \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ bulunuyor ise g_α fonksiyonuna f fonksiyonunun α -ıncı zayıf türevi denir ve $D^\alpha f = g_\alpha$ olarak gösterilir (Adams ve Fournier, 2003).

Eğer f fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha f$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, $D^\alpha f$ aynı zamanda f 'nin zayıf türevidir. Gerçekten herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x) \phi(x) dx$$

eşitliğinde $j=1,2,\dots,n$ için x_j değişkenlerine göre α_j -kez kısmi integrasyon yapılırsa istenilen eşitsizlikler bulunur (Burenkov,1998).

Yine kısmi türevin doğrusallığındaki benzer işlemlerle zayıf türevin doğrusal olduğu görülür.

Örnek 4.3.5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = |x|$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun zayıf türevi $\text{sgn}(x)$ fonksiyonudur (Burenkov,1998).

Çözüm: Fonksiyonun tanımından $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür. Ayrıca herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{-\infty}^0 x\phi'(x)dx + \int_0^{\infty} x\phi'(x)dx$$

yazılır. İntegrallerde ayrı ayrı kısmi integrasyon yapılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx &= \int_{-\infty}^0 \phi(x)dx - \int_0^{\infty} \phi(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

olup $\text{sgn}(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu bulunmuş olur. Dolayısıyla $D'f = \text{Sgn}(x)$ elde edilir.

Önerme 4.3.6. Lokal olarak integrallenebilen her fonksiyon bir distribüsyondur.

İspat: Herhangi $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Ayrıca $T_f : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ için

$$T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \quad \text{fonksiyoneli tanımlansın. İlk olarak tanımlanan}$$

fonksiyonelin iyi tanımlılığı gösterilsin. Yine $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $\text{Supp}\phi = K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi için

$$\begin{aligned}|T_f(\phi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\|\phi(x)\|dx = \int_K |f(x)|\|\phi(x)\|dx + \int_{K^c} |f(x)|\|\phi(x)\|dx \\ &= \int_K |f(x)|\|\phi(x)\|dx \leq \int_K |f(x)|dx < \infty\end{aligned}$$

sağlanır. Buradan $T_f(\phi)$ mutlak yakınsak olup T_f iyi tanımlıdır.

Şimdi T_f fonksiyonelinin bir distribüsyon olduğu gösterilsin. Herhangi

$\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ alınsın. Bu takdirde T_f nin tanımından,

$$\begin{aligned}T_f(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x))dx \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_1(x)dx + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_2(x)dx \\ &= \lambda_1 T_f(\phi_1) + \lambda_2 T_f(\phi_2)\end{aligned}$$

olup $T_f(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1 T_f(\phi_1) + \lambda_2 T_f(\phi_2)$ elde edilir. Ayrıca herhangi $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $\{\phi_j - \phi\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ olup her $j \in \mathbb{N}$ için

$\text{supp}(\phi_j - \phi) \subset K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi vardır. O halde

$$\begin{aligned}
|T_f(\phi_j) - T_f(\phi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \|(\phi_j(x) - \phi(x))\| dx \\
&= \int_K |f(x)| \|(\phi_j(x) - \phi(x))\| dx \leq \max_{x \in K} \|(\phi_j(x) - \phi(x))\| \int_K |f(x)| dx
\end{aligned}$$

olup $|T_f(\phi_j) - T_f(\phi)| \leq \max_{x \in K} \|(\phi_j(x) - \phi(x))\| \int_K |f(x)| dx$ elde edilir. Yine $D(\mathbb{R}^n)$ uzayı üzerindeki topoloji tanımından $j \rightarrow \infty$ için $\max_{x \in K} \|\phi_j(x) - \phi(x)\| \rightarrow 0$ düzgün yakınsar. Bu takdirde $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için $\int_K |f(x)| dx < \infty$ olup $|T_f(\phi_j) - T_f(\phi)| \rightarrow 0$ elde edilir. O halde T_f süreklidir.

Önerme 4.3.7. w , $\mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olsun. Eğer $w^{-\frac{1}{p(\cdot)-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli gömülmesi elde edilir.

İspat : Herhangi bir $f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve herhangi $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi alınsın. Eğer $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} = 1$ için Teorem 2.1.10 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_K |f(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_K(x) w^{\frac{1}{p(x)}} w^{-\frac{1}{p(x)}} dx \\
&\leq C \left\| f w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} \cdot \left\| \chi_K w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{q(\cdot)} \\
&= C \|f\|_{p(\cdot), w} \cdot \left\| \chi_K w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{q(\cdot)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\left\| \chi_K w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \right\|_{q(\cdot)} < \infty$ olduğu gösterilsin. Yine $q^+ < \infty$ ve $h \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\|h\|_{q(\cdot)} < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho_{q(\cdot)}(h) < \infty$ olmasıydı. Eğer $w^{-\frac{1}{p(\cdot)-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olması kullanılırsa

$$\rho_{q(\cdot)} \left(\chi_K w^{-\frac{1}{p(x)}} \right) = \int_K w^{-\frac{q(x)}{p(x)}} dx = \int_K w^{-\frac{1}{p(x)-1}} dx < \infty$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.4. Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayı

Tanım 4.4.1: $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq p^+ < \infty$ ve $w^{-\frac{1}{p(\cdot)-1}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Önerme 4.3.7 den dolayı $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi vardır. Dolayısıyla $L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ uzayının her elemanının zayıf türevi vardır. Ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı $W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ iyi tanımlıdır. Böylece ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı

$$W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq k, D^\alpha f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n) \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca $f \in W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere;

$$\|f\|_{k,p(\cdot),w} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı $W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ için bir norm belirtir. Yine $W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ uzayı, $\|f\|_{k,p(\cdot),w}$ normuna göre bir Banach uzaydır (Aydın, 2010).

Önerme 4.4.2. Herhangi $f \in W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ verildiğinde $\|f\|_{k,p(\cdot),w} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir norm belirtir.

İspat: Herhangi $f, g \in W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ alınsın.

(N1) $f \in W^{k,p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ verildiğinde ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı tanımından $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, 0 \leq |\alpha| \leq k$ için $D^\alpha f \in L^{p(\cdot)}_w(\mathbb{R}^n)$ bulunur. O halde $\|f\|_{k,p(\cdot),w} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} \geq 0$ olup $\|f\|_{k,p(\cdot),w} \geq 0$ bulunur.

(N2) Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{k,p(\cdot),w} &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha(\lambda f)\|_{p(\cdot),w} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\lambda D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} \\ &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |\lambda| \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} = |\lambda| \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} = |\lambda| \|f\|_{k,p(\cdot),w} \end{aligned}$$

olup buradan $\|\lambda f\|_{k,p(\cdot),w} = |\lambda| \|f\|_{k,p(\cdot),w}$ elde edilir.

(N3) Varsayalım ki $\|f\|_{k,p(\cdot),w} = 0$ olsun. Buradan $\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} = 0$ olup her $0 \leq |\alpha| \leq k$ için $\|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} = 0$ sağlanır. Özel olarak $\alpha = 0$ için de eşitlik doğru olup Luxemburg normu tanımından;

$$\|D^0 f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{p(\cdot),w} = 0$$

eşitliğinden $f = 0$ (h.h.h) elde edilir.

Diğer taraftan $f = 0$ (h.h.h) olsun. O halde $0 \leq |\alpha| \leq k$ için $\|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} = 0$ olduğu açıktır. Buradan $\|f\|_{k,p(\cdot),w} = 0$ sağlanır.

(N4) Yine

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{k,p(\cdot),w} &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f + D^\alpha g\|_{p(\cdot),w} \\ &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (\|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} + \|D^\alpha g\|_{p(\cdot),w}) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha g\|_{p(\cdot),w} \\ &= \|f\|_{k,p(\cdot),w} + \|g\|_{k,p(\cdot),w} \end{aligned}$$

olup $\|f + g\|_{k,p(\cdot),w} \leq \|f\|_{k,p(\cdot),w} + \|g\|_{k,p(\cdot),w}$ üçgen eşitsizliği sağlanır.

Sonuç olarak tanımlanan fonksiyon (N1), (N2), (N3) ve (N4) özelliklerini sağladığından $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir normdur.

Teorem 4.4.3. $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\|\cdot\|_{k,p(\cdot),w}$ normuna göre bir Banach uzaydır (Aydın, 2010).

İspat: Herhangi $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Cauchy dizisi alınsın. Buradan $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olup $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de Cauchy dizisidir. Yine değişken üslü Sobolev uzayı tanımından her $0 \leq |\alpha| \leq k$ için $\{D^\alpha f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ bir Cauchy dizisidir. $L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı Banach uzay olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha f_n - g_\alpha\| = 0$ olacak şekilde $f, g_\alpha \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları mevcuttur.

İddia: $D^\alpha f = g_\alpha$

Herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} = 1$ olmak üzere genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$$

olarak tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(\phi) - T_f(\phi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\phi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_n(x) - f(x))\phi(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)| |\phi(x)| dx \leq r_{1,p} \|\phi\|_{q(\cdot),w} \|f_n - f\|_{p(\cdot),w} \end{aligned}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}(\phi) = T_f(\phi) \quad (4.4.3.1)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^{\alpha} f_n}(\phi) = T_{g_{\alpha}}(\phi) \quad (4.4.3.2)$$

olduğu görülür. O halde (4.4.3.2) den

$$T_{g_{\alpha}}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^{\alpha} f_n}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{f_n}(D^{\alpha} \phi)$$

olup herhangi $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ için $D^{\alpha} \phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ olacağından (4.4.3.1) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}(D^{\alpha} \phi) = T_f(D^{\alpha} \phi) \text{ yazılabilir. O halde (4.4.3.1) ve (4.4.3.2) den}$$

$$T_{g_{\alpha}}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{f_n}(D^{\alpha} \phi) = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}(D^{\alpha} \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^{\alpha} \phi)$$

olup açık olarak

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha}(x)\phi(x)dx = T_{g_{\alpha}}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(D^{\alpha} \phi)$$

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha} \phi(x) dx$$

elde edilir. Bu ise $0 \leq |\alpha| \leq k$ için

$$D^{\alpha} f = g_{\alpha} \quad (4.4.3.3)$$

iddiasının doğru olduğunu gösterir. Yine hipotezden $g_{\alpha} \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ verildiğinde $0 \leq |\alpha| \leq k$ için $D^{\alpha} f \in L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olacaktır. Buradan $f \in W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Ayrıca (4.4.3.2) ve (4.4.3.3) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{k,p(\cdot),w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f_n - D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} \right\} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha f_n - D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} \right\}$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{k,p(\cdot),w} = 0$, $f \in W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. O halde $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir Banach uzayı belirtir.

Teorem 4.4.4. $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ kapsamasının doğruluğu açıktır. Şimdi herhangi $f \in W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Ağırlıklı Değişken üslü Sobolev normu tanımından,

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leq \|f\|_{p(\cdot),w} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{k,p(\cdot),w}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi gerçekleşir.

Sonuç 4.4.5. $W_w^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ gömülmesi sağlanır.

Teorem 4.4.6. Herhangi $p_1, p_2 \in P(\mathbb{R}^n)$ ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere $1 \leq p_1^- \leq p_1(\cdot) \leq p_1^+ < \infty$ ve $1 \leq p_2^- \leq p_2(\cdot) \leq p_2^+ < \infty$ olsun. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $0 < |\Omega| < \infty$ için $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot)$ ise $W_w^{k,p_2(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W_w^{k,p_1(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Herhangi $f \in W_w^{k,p_2(\cdot)}(\Omega)$ alınsın. Bu takdirde $f \in L_w^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ olup her $0 \leq |\alpha| \leq k$ için $D^\alpha f \in L_w^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ sağlanır. Yine $p_1(\cdot) \leq p_2(\cdot)$ olduğundan $L_w^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_w^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğu Önerme 2.3.9. de gösterilmişti. Buradan $f \in L_w^{p_2(\cdot)}(\Omega)$ ve her $0 \leq |\alpha| \leq k$ için $D^\alpha f \in L_w^{p_1(\cdot)}(\Omega)$ olup $f \in W_w^{k,p_1(\cdot)}(\Omega)$ sağlanır. O halde $W_w^{k,p_2(\cdot)}(\Omega) \subset W_w^{k,p_1(\cdot)}(\Omega)$ sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|f\|_{k,p_1(\cdot),w} &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p_1(\cdot),w} \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} c \|D^\alpha f\|_{p_2(\cdot),w} \\ &= c \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{p_2(\cdot),w} = c \|f\|_{k,p_2(\cdot),w} \end{aligned}$$

olup $\|f\|_{k,p_1(\cdot),w} = c \|f\|_{k,p_2(\cdot),w}$ olacak şekilde $c > 0$ vardır. O halde $W_w^{k,p_2(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W_w^{k,p_1(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir.

Sonuç 4.4.7. Herhangi $p_1, p_2 \in P(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Eğer $p_1(\cdot) \prec p_2(\cdot)$ ise $W_w^{k,p_2(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W_w^{k,p_1(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Önerme 4.1.8. den $p_1(\cdot) < p_2(\cdot)$ ise $L^{p_2(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p_1(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\mathbb{R}^n)$ olur. Buradan $W^{k,p_2(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p_1(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega)$ elde edilir.

4.5. Kompakt Gömmeler

Bu bölümde ağırlıklı Değişken üslü Sobolev uzayı $W^{1,p(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : \nabla(u) \in L^{p(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega)\}$ ve normu $\|u\|_{p(\cdot)} + \|\nabla\|_{p(\cdot),\mathbf{w}}$ olarak tanımlanacak.

Önerme 4.5.1. $p(x)$ ve $q(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere $p(x) \in L^\infty(\Omega)$ ve her $x \in \Omega$ için $1 \leq p(x)q(x) \leq \infty$ olsun. Yine $u \neq 0$ için $u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ alınırsa $\min \left\{ \|u\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}}^-, \|u\|_{p(\cdot),q(\cdot)}^{p^+} \right\} \leq \|u\|_{q(\cdot)}^{p(\cdot)} \leq \max \left\{ \|u\|_{p(\cdot),q(\cdot)}^-, \|u\|_{p(\cdot),q(\cdot)}^{p^+} \right\}$ eşitsizliği elde edilir (Saiedinezhad, S., Ghaemi, M. B. 2015).

Teorem 4.5.2. $p \in C(\overline{\Omega})$ olmak üzere her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < p(x)$ olsun. Eğer

(i) $0 < w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ için $w(x)^{-\frac{1}{p(x)-1}} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,

(ii) $s(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $s(x) > \frac{1}{p(x)-1}$ olduğunda $w(x)^{-s(x)} \in L^1(\Omega)$,

(iii) $\xi(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < \xi(x) < p(x)$ olduğunda $w(x)^{-\frac{\xi(x)}{p(x)-\xi(x)}} \in L^1(\Omega)$

koşulları sağlanıyorsa, her $q \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < q(x) < \frac{\xi^*(x)}{\beta'(x)}$ için $W^{1,p(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}_{\mathbf{b}}(\Omega)$

kompakt gömülmesi vardır (S. Saiedinezhad and M. B. Ghaemi, 2015)

İspat: İlk olarak $W^{1,p(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\xi(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega)$ sürekli gömülmesinin varlığı gösterilsin.

Herhangi bir $u \in W^{1,p(\cdot)}_{\mathbf{w}}(\Omega)$ elemanı alınsın. O halde

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{\xi(x)} dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{\xi(x)} w(x)^{\frac{\xi(x)}{p(x)}} w(x)^{-\frac{\xi(x)}{p(x)}} dx \\ &\leq C \left\| w(x)^{-\frac{\xi(x)}{p(x)}} \right\|_{\frac{p(x)}{p(x)-\xi(x)}} \left\| w(x)^{\frac{\xi(x)}{p(x)}} |\nabla u|^{\xi(x)} \right\|_{\frac{p(x)}{\xi(x)}} \end{aligned}$$

elde edilir. (Saiedinezhad, S., Ghaemi, M. B. 2015) çalışmasındaki (iii) özelliği kullanılırsa,

$$\left\| w(x)^{-\frac{\xi(x)}{p(x)}} \right\|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-\xi(x)}}(\Omega)} \leq \left(\int_{\Omega} w(x)^{-\frac{\xi(x)}{p(x)-\xi(x)}} dx + 1 \right)^{\frac{p^+-\xi^-}{p^-}}$$

yazılır. Daha sonra (iii) koşulu kullanılırsa;

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{\xi(x)} dx \leq C \left\| w(x)^{\frac{\xi(x)}{p(x)}} |\nabla u|^{\xi(x)} \right\|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-\xi(x)}}(\Omega)} \quad (4.5.2.1)$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı bulunur. Genelliği bozmadan $\int_{\Omega} |\nabla u|^{\xi(x)} dx > 1$ kabul edilsin.

(4.5.2.1) eşitsizliği ve Önerme 4.5.1 den;

$$\int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^{p(x)} < 1 \text{ olduğunda}$$

$$\|\nabla u\|_{L^{\xi(x)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-\xi(x)}}(\Omega)}^{\frac{p^-}{p^+}}$$

elde edilir. Ayrıca $\int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^{p(x)} > 1$ ise $\beta = \frac{p^+\xi^+}{p^-\xi^-}$ için

$$\|\nabla u\|_{L^{\xi(x)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-\xi(x)}}(\Omega)}^{\beta}$$

bulunur. Buradan $\nabla u \in L^{\xi(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir.

Diğer bir yandan, $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\xi(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi gerçekleşir. Dolayısıyla

$W_{w(\cdot)}^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\xi(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi vardır. Yine (Saiedinezhad, S., Ghaemi, M. B. 2015) çalışmasındaki (vi) özelliği kullanılırsa, $r(x) < \xi^*(x)$ için

$$W^{1,\xi(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega) \quad (4.5.2.2)$$

kompakt gömülmesi vardır.

Yine $r(x) = q(x)\beta'(x)$ olsun. Bu nedenle eğer $u \in W_{w(\cdot)}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ise o halde

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(x) |u|^{q(x)} dx &\leq C \|b\|_{L^{\beta(x)}(\Omega)} \|u\|_{L^{\beta(x)}(\Omega)}^{q^+} \\ &\leq C \|b\|_{L^{\beta(x)}(\Omega)} \max \left\{ \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{q^+}, \|u\|_{L^{r(x)}(\Omega)}^{q^-} \right\} \end{aligned}$$

bulunur ve $u \in L^{r(x)}(\Omega)$ olduğundan $u \in L_{b(x)}^{q(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir. Ayrıca, $u_n \xrightarrow{w} 0$ $W_{w(\cdot)}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsıyor ise $u_n \rightarrow 0$ $L^{r(\cdot)}(\Omega)$ uzayında kuvvetli yakınsar. Bundan dolayı

$$\int_{\Omega} b(x) |u_n|^{q(x)} dx \leq C \|b\|_{L^{\beta(\cdot)}(\Omega)} \|u_n\|_{L^{\beta(\cdot)}(\Omega)}^{q(x)} \rightarrow 0 \text{ bulunur.}$$

Bu da $\|u_n\|_{L_{b(x)}^{q(\cdot)}(\Omega)} \rightarrow 0$ kuvvetli yakınsar demektir. Dolayısıyla $W_{w(\cdot)}^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{b(\cdot)}^{w(\cdot)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi elde edilir.

Yeni bir sürekli ve kompakt özellikleri için $p(\cdot)$ ve w nin sağladığı (Q) ve (C) koşulları verilsin.

(Q) : $p \in C_+^{\log}(\Omega)$, $p^+ < N$; $w \in P_+(\Omega)$, bazı $s \in C(\bar{\Omega})$ için $w^{-s} \in L^1(\Omega)$ öyle ki; her $x \in \bar{\Omega}$ için $s(x) \in \left(\frac{N}{p(x)}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{p(x)-1}, \infty\right)$; $\Omega_0 \subset \Omega$ Lipschitz alanı vardır öyle ki; Ω_0 daki herhangi c_1, c_2 pozitif sayıları için $c_1 \leq w(x) \leq c_2$ gerçekleşir ve herhangi $\alpha \in C_+(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0)$ için $w \in L^{\alpha(\cdot)}(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0)$ elemanı vardır öyle ki; her $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_0$ için $p(x) < \frac{a(x)-1}{a(x)} p_s^*(x)$ eşitsizliği sağlansın (Ky Ho, Inbo Sim, 2015).

Şimdi (Q) koşulu altında $q(\cdot)$ ve b elemanlarının sağladığı (C) koşulu verilsin.

(C) : $q \in C_+(\bar{\Omega})$, her $x \in \bar{\Omega}$ için $p(x) < q(x) \leq p^*(x)$, $\emptyset \neq A = \{x \in \bar{\Omega} : p_s^*(x) \leq q(x) \leq p^*(x)\} \subset \Omega_0$; $b \in P_+(\Omega)$, Ω_0 da $c_1 \leq b(x) \leq c_2$; $b \in L^{\beta(\cdot)}(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0)$ ve her $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_0$ ve bazı $\beta \in C_+(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0)$ için $q(x) < \frac{\beta(x)-1}{\beta(x)} p_s^*(x)$ eşitsizliği sağlansın (Ky Ho, Inbo Sim, 2015).

Lemma 4.5.5. (Q) koşulu sağlansın. Bu takdirde $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi vardır (Ky Ho, Inbo Sim, 2015).

İspat: (Q) koşulundan her $x \in \bar{\Omega}$ için $\tilde{p} \in C_+(\bar{\Omega})$ bulunabilir öyle ki; $\tilde{p}(x) < p_s^*(x)$ olur ve $\alpha'(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}$ olduğunda $\tilde{p}|_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_0} = p\alpha'$ elde edilir. $u \in W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w |u|^{p(x)} dx &= \int_{\Omega_0} w |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} w |u|^{p(x)} dx \\ &\leq c_2 \int_{\Omega_0} |u|^{p(x)} dx + 2 \|w\|_{L^{\alpha(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_0)} \| |u|^p \|_{L^{\alpha'(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_0)} \end{aligned} \quad (4.5.5.1)$$

elde edilir. Bu nedenle $\int_{\Omega} w|u|^{p(x)} dx < \infty$ olur öyle ki;

$$\int_{\Omega_0} |u|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx, \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_0} w|u|^{p(x)\alpha(x)} dx \leq \int_{\Omega} |u|^{\tilde{p}(x)} dx \quad (4.5.5.2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bunun sonucunda $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ kapsaması sağlanır. $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında $u_n \xrightarrow{w} 0$ zayıf yakınsasın. (4.5.5.1) ve (4.5.5.2) eşitsizliklerinde $u = u_n$ alınır,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \int_{\Omega} w|u_n|^{p(x)} dx \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan $L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında $u_n \rightarrow 0$ kuvvetli yakınsaması vardır. Bunun sonucunda $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi elde edilir.

Lemma 4.5.6. (Q) ve (C) koşulları sağlansın. O halde $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{b(\cdot)}^{q(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi vardır (Ky Ho, Inbo Sim, 2015).

İspat: Bir $u \in W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için $\beta'(x) = \frac{\beta(x)}{\beta(x)-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b|u|^{q(x)} dx &= \int_{\Omega_0} b|u|^{q(x)} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} b|u|^{q(x)} dx \\ &\leq c_2 \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx + 2\|b\|_{L^{\beta(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_0)} \|u\|_{L^{\beta'(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_0)}^q \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.5.5 in ispatındaki gibi aynı teknik kullanılırsa $\|b\|_{L^{\beta(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_0)} \|u\|_{L^{\beta'(\cdot)}(\Omega \setminus \Omega_0)}^q < \infty$ elde edilir. Ayrıca ağırlık fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) = W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega_0) \hookrightarrow L^{p^*(\cdot)}(\Omega_0) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega_0)$$

bulunur. Bundan dolayı $\int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx < \infty$ olur ve buradan $\int_{\Omega} b|u|^{q(x)} dx < \infty$ elde edilir.

Dolayısıyla $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_{b(\cdot)}^{q(\cdot)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi vardır.

Lemma 4.5.8. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Lipschitz sınırına sahip açık ve sınırlı bir küme ve $1 < p^- \leq p^+ < N$ olan Hölder eşitsizliği koşulu altında $p \in C_+(\bar{\Omega})$ olsun. Eğer $r^- > 1$ ve $r \in L^\infty(\Omega)$ olduğunda her $x \in \Omega$ için

$$r(x) \leq p^*(x) := \frac{Np(x)}{N-p(x)}$$

olur. Dolayısıyla $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi vardır ve eğer

$\inf_{x \in \Omega} (p^*(x) - r(x)) > 0$ ise gömülme kompakttır (Yun-Ho Kim, Lihe Wang, Chao Zhang, 2010).

Uyarı 4.5.9. Aynı koşullar altında yukarıdaki lemmaya ek olarak log-Hölder eşitsizliğinde

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|} \text{ şartı kaldırılırsa,}$$

$p, r \in C_+(\overline{\Omega})$ ve $r(x) \leq p^*(x)$ olduğunda her $x \in \Omega$ için

$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi vardır. (Yun-Ho Kim, Lihe Wang, Chao Zhang, 2010).

Lemma 4.5.10. Her $u \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ için $\rho(u) = \int_{\Omega} w(x)|u|^{p(x)} dx$ olsun. O zaman

(1) $\rho(u) > 1 (=1; <1)$ olması için gerek ve yeterli şart $\|u\|_{L_w^{p(\cdot)}} > 1 (=1; <1)$ olmasıdır,

(2) $\|u\|_{L_w^{p(\cdot)}} > 1$ ise o zaman $\|u\|_{L_w^{p(\cdot)}}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{L_w^{p(\cdot)}}^{p^+}$ dir,

(3) $\|u\|_{L_w^{p(\cdot)}} < 1$ ise o zaman $\|u\|_{L_w^{p(\cdot)}}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{L_w^{p(\cdot)}}^{p^-}$ dir (Yun-Ho Kim, Lihe Wang, Chao Zhang, 2010).

Teorem 4.5.11. $p, s \in C_+(\overline{\Omega})$ ve

(i) $w \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve $w^{-\frac{1}{p(x)-1}} \in L_{loc}^1(\Omega)$

(ii) $s(x) \in \left(\frac{N}{p(x)}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{p(x)-1}, \infty\right)$ için $w^{-s(x)} \in L_{loc}^1(\Omega)$

koşulları sağlansın. O halde $r \in C_+(\overline{\Omega})$ ve her $x \in \Omega$ için $1 \leq r(x) < p_s^*(x)$ olmak şartıyla

$W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi vardır (Yun-Ho Kim, Lihe Wang, Chao Zhang, 2010).

İspat: İlk olarak $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W_w^{1,p_s(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesinin varlığı gösterilsin. $u \in W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ olsun. Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_s(x)} dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{\frac{p(x)s(x)}{s(x)+1}} dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^{\frac{p(x)s(x)}{s(x)+1}} w^{\frac{s(x)}{s(x)+1}} w^{-\frac{s(x)}{s(x)+1}} dx \\
&\leq 2 \left\| w^{\frac{s(x)}{s(x)+1}} |\nabla u|^{\frac{p(x)s(x)}{s(x)+1}} \right\|_{L^{\frac{s(\cdot)}{s(\cdot)+1}}} \left\| w^{-\frac{s(x)}{s(x)+1}} \right\|_{L^{s(\cdot)+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine (ii) ve Lemma 4.5.10 kullanılırsa

$$\left\| w^{-\frac{s(x)}{s(x)+1}} \right\|_{L^{s(\cdot)+1}} \leq \left(\int_{\Omega} w^{-s(x)}(x) dx + 1 \right)^{\frac{1}{s^-+1}} \leq C$$

bulunur. Böylece

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_s(x)} dx \leq C \left\| w^{\frac{s(x)}{s(x)+1}} |\nabla u|^{\frac{p(x)s(x)}{s(x)+1}} \right\|_{L^{\frac{s(\cdot)+1}{s(\cdot)}}} \quad (4.5.11.1)$$

elde edilir. Genelliği bozmadan $\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_s(x)} dx > 1$ olduğunu kabul edilsin. Eğer değilse Lemma 4.5.10. dan $u \in W^{1,p_s(\cdot)}(\Omega)$ olduğu görülür.

$\int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^{p(x)} dx < 1$ ise, (4.5.11.1) ve Lemma 4.5.10. dan

$$\|\nabla u\|_{L^{p_s(\cdot)}(\Omega)}^{\frac{p^- s^-}{s^-+1}} \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_s(x)} dx \leq C \left(\int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^{\frac{s^-}{1+s^-}} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(w,\Omega)}^{\frac{p^- s^-}{s^-+1}}$$

elde edilir. Yani

$$\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(w,\Omega)} \quad (4.5.11.2)$$

olur. Diğer taraftan,

$\int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^{p(x)} dx > 1$ ise (4.5.11.1) ve Lemma 4.5.10. dan

$$\|\nabla u\|_{L^{p_s(\cdot)}(\Omega)}^{\frac{p^- s^-}{s^-+1}} \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_s(x)} dx \leq C \left(\int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^{p(x)} dx \right)^{\frac{s^+}{1+s^+}} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(w,\Omega)}^{\frac{p^+ s^+}{s^++1}}$$

bulunur. Yani, $\beta = \frac{s^- + 1}{p^- s^-} \cdot \frac{p^+ s^+}{s^+ + 1}$ olduğunda

$$\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(w, \Omega)}^\beta \quad (4.5.11.3)$$

olur. (4.5.11.2) ve (4.5.11.3) eşitsizliğinden $\nabla u \in L^{p_s(\cdot)}(\Omega)$ bulunur. Yine $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında $p_s(x) < p(x)$ için $\|u\|_{L^{p_s(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ olduğu biliniyor. Bundan dolayı $u \in L^{p_s(\cdot)}(\Omega)$ olur. Bu nedenle $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W_w^{1,p_s(\cdot)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi vardır. Ayrıca Lemma 4.5.8 den $1 \leq r(x) < p_s^*(x)$ için $W_w^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi vardır.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. , Fournier, J.J.F. 2003. Sobolev Spaces (2nd Ed.). Academic Press, Amsterdam, 305.
- Aydın, İ. 2009 $L^{p(x)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları ve $W(L^{p(x)}, L^q)$ amalgam uzaylarının bazı özellikleri. Doktora tezi, Ondokuz Mayıs üniversitesi, Samsun, 110.
- Aydın, İ. 2010, Weighted Variable Sobolev Spaces and Capacity
- Aydın, İ. 2012. On variable expotent Amalgam spaces. Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanda- Seria Matematica, Vol. XX, Fasc. 3.
- Burenkov, V. I. 1998. Sobolev Spaces on Domains. Springer, 312.
- Ciarlet, P. G. 2013. Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications, SIAM.
- Conway, J. B. 1985. A Course in Functional Analysis (Graduate Texts in Mathematics), Springer, New York.
- Edmunds, E., Fiorenza, A., Meskhi, A. 2006. On a measure of non-compactness for some classical operators. Acta Math. Sin. 22(6): 1847-1862.
- Huang, A. , Xu, J. 2010. Multilinear singular integrals and commutators in variable exponent Lebesgue spaces. Appl. Math. J., 25(1): 69-77.
- G. N. K. Murthy and K. R. Unni 1973, Multipliers on weighted spaces, Functional Analysis and its Applications, Lecture Notes in Math., vol. 399, Springer-Verlag, pp. 272–291. MR 53 8788. Zbl 298.46031.
- Kim, Y., Wang, L., Zhang, C. 2010. Global bifurcation for a class of degenerate elliptic equations with variable exponents. J. Math. Anal. Appl. 371: 624-637.
- Kovacik, O. , Rakosnik, J. 1991. On spaces and . Czech Math. J., vol 41, No. 4: 592-618.
- Kufner, A., John, O., Fucik, S. 1977. Function Spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden, pp. 145-146.
- Ky Ho, Inbo Sim, 2015. On degenerate $p(x)$ -Laplace equations involving critical growth with two parameters, Nonlinear Analysis 132 95–114
- Lu, S., Ding, Y., Yan, D. 2007. Singular Integrals and Related Topics. World Scientific Publishing Company.
- Muckenhoupt, B. 1972. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165: 207-226.
- Musielak, J. 1983. Orlicz spaces and modular spaces. Lecture Notes in Math. 1034. Springer-Verlag, Berlin.

- Rudin, W. 1966. Real and Complex Analysis. Mc. Graw-Hill, New York.
- Saiedinezhad, S., Ghaemi, M. B. 2015. The fibering map approach to a quasilinear degenerate $p(x)$ -laplacian equation. Bull. Iranian Math. Soc. 41(6): 1477-1492.
- Treves, F. 1967. Topological Vector Space, Distributions and Kernels. Academic Press, 565.
- Wang, H.C., 1977. Homogeneous Banach Algebras, Marcel Dekker Inc., New York, 204s.



ÖZGEÇMİŞ

1. Kişisel Bilgiler

Ad Soyad	Cihan KÖKSAL
Doğum Tarihi	18.12.1988
Doğum Yeri	SAMSUN
E-posta Adresi	koksalcnn@gmail.com

2. Eğitim Bilgileri

Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi, SAMSUN (2010-2015)
Yüksek Lisans	Sinop Üniversitesi, Sinop (2017-...)