



**WEST NILE VIRUS MODELİNİN CAPUTO-FABRIZIO  
KESİRLİ TÜREVİ İLE ANALİZİ**

**Hilal POLAT**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU**

**AĞRI-2021**

**Her hakkı saklıdır**

**T.C.**  
**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Hilal POLAT

West Nile Virus Modelinin Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi İle Analizi

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TEZ YÖNETİCİSİ**

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

**AĞRI – 2021**

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### West Nile Virus Modelinin Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi İle Analizi

Jüri: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU

Bu tez de Sivrisinek-Kuş-İnsan zoonotik döngü içerisinde olan West Nile Virus (WNV) Modeli Caputo-Fabrizio Kesirli Türevine genişletilecektir. Sivrisinek nüfusu ile konakçılar (İnsanlar ve Kuşlar) dinamik sistem teknikleri kullanılarak analiz edilecek ve model için sabit nokta teoremi yardımıyla varlık çözümü yapılacaktır. Picard-Lindelöf dönüşümü kullanılarak hangi şartlar altında tek çözümlerinin olduğu incelenecektir. Daha sonra Adam-Basford metodunun kesirli türev operatörlerine entegre edilmiş hali kullanılarak matematiksel modelin nümerik çözümleri yapılacaktır. Son olarak simülasyonlar yardımıyla deyatlı bir analiz yapılacaktır.

2021, 58 sayfa

**Anahtar Kelimeler:** Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü, Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü, Sabit nokta teoremi, Picard-Lindelöf yaklaşımı, Adam-Basford metodu.

## **ABSTRACT**

### **MASTER'S THESIS**

#### **Analysis of West Nile Virus Model with Caputo-Fabrizio Fractional Derivative**

**Jury: Prof. Dr. Ercan ÇELİK**

**Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**

**Assoc. Prof. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU**

In this thesis, a model will be obtained by extending the West Nile Virus (WNV) Model to the Caputo-Fabrizio Fractional Derivative within the Mosquito-Bird-Human zoonotic cycle. The mosquito population and hosts (People and Birds) will be analyzed using dynamic system techniques and an asset solution will be made for the model with the help of the fixed point theorem. Using the Picard-Lindelöf transformation, it will be examined under what conditions they have one solution. Finally, numerical solutions will be made and simulations will be shown by comparing the simulations obtained by simulations.

**2021, 58 pages**

**Key Words:** Caputo-Fabrizio fractional derivative, Fixed point theorem, Picard-Lindelöf approach.

## TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgisinden faydalandığım ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından dolayı değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Mustafa Ali Dokuyucu'ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteğini eksik etmeyen sevgili eşim Kadirhan Polat'a, çalışmalarımı yakından takip eden biricik kızım Öykü Şevval'e ve hayatımın her döneminde yanımda olan aileme teşekkür ederim.

**Nisan 2021**

**Hilal Polat**



# İÇİNDEKİLER

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖZET .....                                                                      | ii        |
| ABSTRACT .....                                                                  | iii       |
| TEŞEKKÜR .....                                                                  | iv        |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                                                          | vi        |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                            | vii       |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                                           | <b>1</b>  |
| <b>2. KURAMSAL TEMELLER .....</b>                                               | <b>7</b>  |
| 2.1. Gama Fonksiyonu .....                                                      | 7         |
| 2.2. Beta Fonksiyonu .....                                                      | 8         |
| 2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu .....                                            | 9         |
| 2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali .....     | 9         |
| 2.5. Varlık-Teklik .....                                                        | 13        |
| 2.5.1. Çözümün Varlığı .....                                                    | 13        |
| 2.5.2. Çözümün Tekliği .....                                                    | 14        |
| <b>3. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>                                              | <b>19</b> |
| 3.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi .....                                       | 19        |
| 3.2. $NFD_t$ 'nin Laplace dönüşümü .....                                        | 23        |
| 3.3. Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemler .....                                 | 24        |
| 3.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ile İki Aşamalı Adams-Bashford Şeması ..... | 28        |
| <b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>                                             | <b>33</b> |
| 4.1. West Nile Virus Modeli .....                                               | 33        |
| 4.1.1. West Nile Virüs Modeli için Çözümün Varlığı .....                        | 34        |
| 4.1.2. West Nile Virüs Modeli için Çözümünün Tekliği .....                      | 44        |
| 4.1.3. West Nile Virus Modelinin Nümerik Çözümü .....                           | 45        |
| <b>5. SONUÇ .....</b>                                                           | <b>56</b> |
| KAYNAKLAR .....                                                                 | 57        |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                  | 57        |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

| <u>Şekil</u>                                                                                   | <u>Sayfa</u> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2.1 Gamma Fonksiyonu .....                                                                     | 7            |
| 3.1 $\alpha = 0.66$ olmak üzere $[-8, 25]$ zaman aralığında $NFD_t$ (3.7) nin simülasyonu .... | 21           |
| 3.2 $\alpha = 0.66$ olmak üzere $[-8, 25]$ zaman aralığında $UFD_t$ (3.1) nin simülasyonu .... | 21           |
| 3.3 $\alpha = 0.1$ olmak üzere $[-8, 50]$ zaman aralığında $NFD_t$ (3.7) nin simülasyonu ..... | 22           |
| 3.4 $\alpha = 0.1$ olmak üzere $[-8, 50]$ zaman aralığında $UFD_t$ (3.1) nin simülasyonu ..... | 22           |
| 4.1 $M_S$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                      | 51           |
| 4.2 $B_S$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                      | 51           |
| 4.3 $S$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                        | 52           |
| 4.4 $M_I$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                      | 52           |
| 4.5 $B_I$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                      | 53           |
| 4.6 $I$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                        | 53           |
| 4.7 $E$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                        | 54           |
| 4.8 $H$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                        | 54           |
| 4.9 $R$ fonksiyonunun farklı $\rho$ değerleri için simülasyonları .....                        | 55           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|               |                                                                   |
|---------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\leq$        | : Küçük veya eşittir                                              |
| $\geq$        | : Büyük veya eşittir                                              |
| $\Sigma$      | : Toplam                                                          |
| $\int$        | : İntegral                                                        |
| $I^a$         | : $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville integrali               |
| $D^a$         | : $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville türevi                  |
| ${}^CD^a$     | : $\alpha$ . mertebeden Caputo türevi                             |
| ${}^{CF}I^a$  | : $\alpha$ . mertebeden Caputo-Fabrizio integrali                 |
| ${}^{CF}D^a$  | : $\alpha$ . mertebeden Caputo-Fabrizio türevi                    |
| ${}^{AB}I^a$  | : $\alpha$ . mertebeden Atangana-Baleanu integrali                |
| ${}^{ABC}D^a$ | : $\alpha$ . mertebeden Caputo anlamında Atangana-Baleanu türevi  |
| ${}^{ABR}D^a$ | : $\alpha$ . mertebeden Riemann anlamında Atangana-Baleanu türevi |
| $\Gamma$      | : Gamma fonksiyonu                                                |
| $E_\alpha$    | : Mittag-Leffler fonksiyonu                                       |
| $L$           | : Laplace fonksiyonu                                              |

# 1. GİRİŞ

Kesirli basamaktan türev kavramı ilk olarak L'Hospital ve Leibniz arasındaki mektuplaşma sırasında ortaya çıkmıştır. Leibniz, bir çalışmasında  $y(x)$  fonksiyonunun  $n$ . basamaktan türevi için  $d^n y/dx^n$  ifadesini kullanmıştır. Bu ifade ile ilgili olarak L'Hospital, Leibniz'e  $n$  nin bir tamsayı olmaması ve hatta  $n = 1/2$  kesirli olması durumuyla ilgili bir soru sormuş ve bu soruya Leibniz 30.09.1695 tarihli bir mektupla cevap vermiştir Böylelikle kesirli basamaktan türev ortaya çıkmıştır. (Miller ve Ross 1993).

Kesirli basamaktan türev kavramının ilk kez kullanımının yapıldığı bu mektuptan sonra bir çok matematikçi bu konu üzerine çalışmalar yapmış ve geliştirilmiştir (Miller ve Ross 1993, Podlubny 1999).

Leibniz ve L'Hospital'den sonra 1730 yılında kesirli basamaktan türev kavramı Euler'in de dikkatini çekmiştir. Daha sonra 1812 yılında P. S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türevi tanımlamış ve 1822 yılında J. B. J. Fourier keyfi mertebeden türevleri çalışma konusu yapmıştır.

Kesirli operatörler ilk kez N. H. Abel tarafından 1823 yılında fiziksel bir problem olan tau-tochurane probleminin çözümünde kullanmıştır. 1847 yılında Riemann, bugün de en sık kullanılan kesirli integral olan Riemann-Liouville integralinin tanımını vermiştir. Yine G. F. B. Riemann, yayımladığı çalışmasında kesirli integrasyon teorisini geliştirmiş, A. V. Letnikov, M. Caputo, I. Podlubny, M. Fabrizio, A. Atangana, D. Balenau bu konu üzerine ciddi çalışmalar ortaya koymuşlardır ve aşağıda konu ile ilgili yapmış oldukları bazı tanımlara yer verilmiştir.

**N. H. Abel (1823-1826):** Keyfi bir  $\alpha$  değeri için,

$$\int_0^x \frac{k'(\mu) d_\mu}{(x - \mu)^\alpha} = \varphi(x),$$

eşitliğini kullanarak,

$$k(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d^{-\alpha} \varphi(x)}{dx^{-\alpha}} \quad (1.1)$$

ile tanımlar.

**L. Euler (1730):**

$$\frac{d^a x^b}{dx^a} = b(b - 1) \dots (b - a + 1) x^{b-a}, \quad (1.2)$$

eşitliğini ve Gamma fonksiyonunun özelliğini kullanarak,

$$\Gamma(b + 1) = b(b - 1) \dots (b - a + 1) \Gamma(b - a + 1)$$

$$\frac{d^a x^b}{dx^a} = \frac{\Gamma(b + 1)}{\Gamma(b - a + 1)} x^{b-a} \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlar.

**J. B. J. Fourier (1820-1822):**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp,$$

eşitliği yardımı ile,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz + n\frac{\pi}{2}) dp \quad (1.4)$$

ifadesini elde eder.

**J. Liouville (1832-1855):**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x}$$

seri açılımından faydalanarak,

$$\frac{d^v f(x)}{dx^v} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x} \quad (1.5)$$

ile tanımlar.

**Riemann-Liouville:**

$$(n-1) \leq \alpha \leq n$$

koşulu ile,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.6)$$

tanımlar.

**G. F. B. Riemann (1847-1876):**

$$D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \psi(t), \quad (1.7)$$

ile tanımlamıştır.

**Grünwald-Letnikov:**

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{t-\alpha}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.8)$$

**M. Caputo (1967):**

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (1.9)$$

**M.Caputo , M.Fabrizio (2015):**

$\alpha \in [0, 1], f \in H^1(a, b), b > a$  olmak üzere;

$${}_a\mathfrak{D}_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t \dot{f}(\tau) \exp\left[\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau$$

ile tanımlanır. Burada  $M(\alpha)$  normalleştirme sabiti olup,  $M(0) = M(1) = 1$  dir. Caputo-Fabrizio integral operatörü de,

$${}^{CF}I^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

şeklinde ifade edilir.

**J. Losada, J. J. Nieto (2015):**  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,  $\alpha$ . mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi,

$${}^{CF}D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) \exp\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right] ds \quad t \geq 0$$

ile tanımlanır.

**A. Atangana, D. Baleanu (2015):**  $\alpha \in [0, 1], f \in H^1(a, b), b > a$  olmak üzere;

$${}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_b^t f'(\tau) E_\alpha\left[\frac{-\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}\right] d\tau \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlar. Burada  $B(\alpha)$  normalleştirme sabiti olup,  $B(0) = B(1) = 1$  dir.

**A. Atangana, D. Baleanu (2015):**  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,

$${}^{AB}_\alpha I_t^\alpha f(t) = \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t u(y)(t-y)^{\alpha-1} dy, \quad (1.11)$$

ile tanımlanır.

Epidemiyolojide belirli bir dönemde belirli bir insan popülasyonundaki önceki uygulamalarla karşılaştırıldığında salgın; yeni vakalar gibi görünen ancak beklenenden daha fazla etkiye sahip olan hastalığı ifade eder. Salgınlar insanlık tarihi boyunca şehirleri, ülkeleri, kıtaları ve bazende tüm dünyayı büyük ölçüde etkisi altına almıştır .

Bu hastalıkların başında Ortaçağda meydana gelen kara veba, daha sonra birinci dünya savaşı sonrası İspanyol gribi gibi örnekler verilebilir. Virüslerin ortaya çıkması salgın hastalıkları da kaçınılmaz hale getirmiştir.

Bulaşıcı hastalıkların çoğu için hastalığa yakalanmanın en kolay yolu bir enfekte kişi veya hayvan ile olabilmektedir. Ayrıca hastalığın bulaşma durumu doğrudan olabilmektedir. Doğrudan bulaşma türleri şu şekilde sıralanabilir;

- **İnsandan insana :** Genelde doğrudan bakteri transferi ile yayılan bulaşıcı hastalıklar olmakla birlikte bakterileri, virüsleri veya mikropları taşıyan bir kişinin hapşırma, öksürme, dokunma veya sağlıklı bir kişiye sarılmasıyla doğrudan bulaşmaktadır.
- **Hayvandan insana :** Evcil hayvanlar da dahil olmak üzere enfekte bir hayvan tarafından ısırılmak veya çizilmek hastalığa neden olabilir. Kuduz veya tetanoz gibi bazı bulaşıcı hastalıklar tedavi edilmezse ölümcül olabilir.
- **Doğmamış bebeklere :** Hamile bir kadın bulaşıcı hastalıklara neden olan mikropları doğmamış bebeğine bulaştırabilir. Bazı mikroplar plasenta veya anne sütü yoluyla bulaşabilir.

Bulaşıcı bir hastalık olarak ortaya çıkan Batı Nil Virüsü (WNV) insanlar ve evcil hayvanlar (özellikle atlar) arasında ara konakçı olarak kuşlar (öncelikle kargalar ve ötücü kuşlar) ile yayılır. WNV farklı diğer sivrisinek kaynaklı hastalıklar arasında çapraz enfeksiyon içerdiğinden ayrıca kuşlar ve sivri sineklerin mekan sınırları olmadığından hastalık yayılım göstermiştir. Ayrıca hastalığın ciddiyeti coğrafi konumlara göre de farklılık göstermiştir. Hastalığın yayılmasının önlenmesi adına etkili bir tedavi yöntemi yada aşı bulunamaması durumunda kişisel olarak korunmaya yada sivrisinek azaltma stratejilerine gidilmiştir. Bu önlemler sivrisinek mevsimlerinde daha yoğun bir şekilde uygulanmalıdır. Bir sağlık raporu Batı Nil Virüsü ile ilgili hastalığın ciddi oranda artmasının nedeninin sıklık ve coğrafi kap-

sam olduğunu gösteriyor. Bu küresel yayılma Batı Nil Virüsünün yayılmasıyla mücadele etmek için uyumlu bir küresel çabayı gerektirmektedir.

Sonuç olarak bu çalışmanın temel amacı bir popülasyondaki Batı Nil Virusunun bulaşma durumları hakkında bilgi edinmek için optimal kontrol önlemlerinin belirlenmesi üzerine matematiksel modelleme ve analiz kullanmaktır.

Bu çalışmanın amacı iki yönlüdür. Birincisi, sabit olmayan temas oranlarına sahip standart bir WNV modelinin, geriye doğru çatallanma durumunu sergileyip sergilemediğini araştırmak.

İkinci amaç; belirli bir popülasyonda Batı Nil Virusunun yayılmasıyla mücadele için yoğunluğa bağlı demografik parametreler gibi bazı önemli epidemiyolojik özellikler, ölçüm cihazları ve kontrol fonksiyonları (kişisel koruma yada sivri sinek azaltma stratejileri gibi) dahil edilmesi düşünülen modeli genişletmektir. Genişletilmiş model daha sonra uygun maliyetli stratejileri belirlemek için kullanılacaktır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

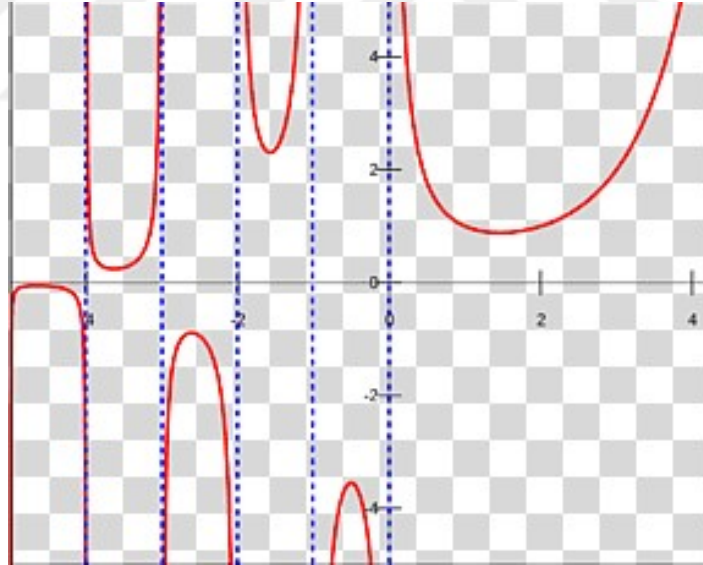
### 2.1. Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonu kesirli analizin temel fonksiyonlarından biridir.

Gama fonksiyonu  $Re(z) > 0$  olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, z \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır.



Şekil 2.1. Gama Fonksiyonu

#### Gama Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Gama fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

dir.  $\forall(z) \neq 0, 1, 2, \dots$  kompleks sayıları için tanımlıdır. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi

ile kolayca ispatlanabilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left[ e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad (2.3)$$

Buradan görülmektedir ki,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $z = 1, 2, 3$  için

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$\vdots$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z.(z-1)! = z!$$

dir (Podlubny (1998)).

## 2.2. Beta Fonksiyonu

Birçok durumda beta fonksiyonunun kullanılması daha doğru olur. Gama fonksiyonunun belirli bir değer kombinasyonunun değeri için Beta fonksiyonu genellikle

$$B(z, \vartheta) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\vartheta-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\vartheta) > 0$$

şeklinde tanımlanır.

### Özellikler:

1)  $B(z) = \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)},$

2)  $B(z, \vartheta) = B(\vartheta, z),$

3)  $B(z, \vartheta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(z+\vartheta)},$

4)  $B(z, \vartheta) = \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+\vartheta}} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\vartheta) > 0,$

5)  $B(\frac{1}{2}) = \pi.$

### 2.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

**Tanım 2.1** Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli analizde çok yaygın kullanım alanı bulunan, önemli bir fonksiyondur.  $e^z$  üstel fonksiyonu tamsayı basamaktan diferansiyel denklemler teorisinde oldukça önemli rol oynar. Üstel fonksiyonun bir parametrelili genelleme;

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.4)$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir.

Özel olarak  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 2$  durumunda;

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.5)$$

ve

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k + 1)} = \cosh(\sqrt{z}) \quad (2.6)$$

dir.

### 2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Türevi ve İntegrali

**Tanım 2.2** :  $f, [a, b]$  üzerinde integrallenebilen ve  $n \geq \alpha \geq n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville sol ve sağ kesirli türevleri (Podlubny (1998)),

$$\begin{aligned} {}_\alpha D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_\alpha^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ {}_t D_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( - \frac{d}{dt} \right)^n \int_\alpha^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.3** : Caputo kesirli türevi,

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer  $\alpha$  değerini  $\alpha \in (0, 1)$  aralığında bir değer alırsak

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \quad (2.9)$$

$\alpha = n, n \in \mathbb{N}$  olması durumunda ise,

$$D_n^\alpha f(t) = f^n(x)$$

eşitliği elde edilir.  $n = 0$  değeri için de Caputo kesirli türevi,

$$D_0^\alpha f(t) = f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Caputo tanımının diğer tanımlara göre daha kullanışlı olmasının nedeni, kesirli türevin başlangıç koşullarının, tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerinin başlangıç koşulları cinsinden ifade edilebilir olmasıdır şeklinde bir çıkarımda bulunabiliriz.

Ayrıca caputo tanımında kullanılan  $(t-\tau)^\alpha$  çekirdeğinde  $t = \tau$  alındığında çekirdeğin tekil olmadığı görülmektedir ve bundan dolayı Caputo ve Fabrizio 2015 yılında kesirli türev fonksiyonu tanımını şu şekilde tanımlamıştır:

**Tanım 2.4**  $\alpha \in (0, 1)$  olmak üzere;

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \quad (2.10)$$

(2.10) denkleminde  $(t-\tau)^\alpha$  çekirdeği yerine  $e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$  ve  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  yerinede  $\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)}$  yazarsak,

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f(t) e^{\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad (2.11)$$

denklemleri elde edilir. Burada  $M(\alpha)$  normalleştirme sabiti olup  $M(0) = M(1) = 1$  dir (Caputo ve Fabrizio (2015)).

**Tanım 2.5** Bilimin farklı alanlarında çok sayıda uygulama bir fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden Caputo kesirli türevini aşağıdaki gibi bulur (Kilbas ve dig. (2006) Bagley ve Torvik (1986) Caputo (1966) Caputo ve Mainardi (1971) Hilfer ve dig. (2000));  
 $b > 0, f \in H^1(0, b)$  olmak üzere;

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \quad t > 0 \quad 0 < \alpha < 1.$$

Yukarıdaki denklemde çekirdek olan  $(t-s)^{-\alpha}$  ifadesi yerine  $e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$ , ve  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  ifadesi için de  $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha^2)}}$  yazıldığında,  $0 < \alpha < 1$  aralığı için yeni caputo-fabrizio kesirli türevini alır ve aşağıdaki ifade tanımlanır (Caputo ve Fabrizio (2015)).

$${}^{CF} D^\alpha f(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right) f'(s) ds \quad t > 0.$$

burada  $M(\alpha)$ ,  $\alpha$  ya bağlı normalleştirme sabitidir.

Bu tanıma göre  $f$  sabit bir fonksiyon ise, normal caputo türevinde olduğu gibi

$${}^{CF} D^\alpha f = 0$$

olduğu açıktır. Eski ve yeni tanım arasındaki temel fark, eski tanımın aksine, yeni çekirdeğin  $t = s$  için singularity (tekillik) olmamasıdır.

Laplace dönüşümünün sıradan diferansiyel denklemlerin çalışmasında önemli bir rol oynadığı iyi bilinmektedir. Bu yeni kesirli tanım söz konusu olduğunda,  
 $0 < \alpha < 1$  için,

$$L({}^{CF} D^\alpha f(t))(s) = \frac{2-\alpha M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))} (sL(f(t))(s) - f(0)) \quad s > 0. \quad (2.12)$$

Burada bir  $g$  fonksiyonun Laplace dönüşümü  $L[g(t)]$  olarak tanımlanır.

Bu nedenle, Caputo - Fabrizio türevi ile çalışıldığında, Laplace dönüşümünün de çok faydalı bir araç olacağı açıktır.

$0 < \alpha < 1$  mertebeli kesirli türev kavramından sonra,  $0 < \alpha < 1$  mertebeden kesirli integrali doğal bir gereklilik haline gelir. Bu bölümde, daha önce tanıtılan Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile ilişkili kesirli integrali elde ediyoruz.

$0 < \alpha < 1$  için aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi ele alalım;

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = u(t), \quad t \geq 0, \quad (2.13)$$

Laplace dönüşümü kullanarak,

$$L({}^{CF}D^\alpha f(t))(s) = L(u(t))(s), \quad s > 0,$$

(2.12) denklemini kullanarak;

$$\frac{2 - \alpha M(\alpha)}{2(s + \alpha(1 - s))} (sL(f(t))(s) - f(0)) = L(u(t))(s), \quad s > 0,$$

veya benzer olarak;

$$L(f(t))(s) = \frac{1}{s}f(0) + \frac{2\alpha}{s(2 - \alpha)M(\alpha)}L(u(t))(s) + \frac{2(1 - \alpha)}{(2 - \alpha)M(\alpha)}L(u(t))(s) \quad s > 0,$$

dolayısıyla, ters Laplace dönüşümünün özelliklerini kullanarak,

$$f(t) = \frac{2(1 - \alpha)}{(2 - \alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2 - \alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

Başka bir deyişle,

$$f(t) = \frac{2(1 - \alpha)}{(2 - \alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2 - \alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s)ds + c, \quad t \geq 0.$$

burada  $c \in \Re$  sabittir, aynı zamanda (2.13) denkleminin bir çözümüdür.

Ayrıca (2.13) kesirli diferansiyel denklemi

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = \frac{(2 - \alpha)M(\alpha)}{2(1 - \alpha)} \int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha}{1 - \alpha}(t - s)\right) f'(s)ds = u(t), \quad t \geq 0,$$

veya eşdeğer olarak;

$$\int_0^t \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(s)\right) f'(s) ds = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(t)\right) u(t), \quad t \geq 0.$$

Sonra denklemin her iki tarafını da ortak paranteze alırsak;

$$f'(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \left( u'(t) + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} u(t) \right), \quad t \geq 0.$$

(2.14) denkleminde de olduğu gibi gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} [u(t) - u(0)] + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds + f(0), \quad t \geq 0.$$

dolayısıyla, sonuç olarak, Caputo-Fabrizio kesirli integralinin aşağıdaki tanımını verebiliriz.

**Tanım 2.6** *Bir  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden kesirli integrali*

$${}^{CF}I^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

şeklinde gösterilir.

## 2.5. Varlık-Teklik

Varlık teklik başlangıç değer problemi olan diferansiyel denklemlerle ilgilidir (Başlangıç değeri verilip çözümün var olduğu ve tek olduğu en geniş aralık sorulduğunda da varlık tekliğe bakılır). Varlık teklik için öncelikle çözümün varlığına bakılır daha sonra tekliği incelenir.

### 2.5.1. Çözümün Varlığı

#### Tanım 2.7

$$u'' = g(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

*başlangıç koşulunu ele alalım, burada  $g, I \times \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon,  $I \subset \mathbb{R}$  açık bir aralıktır.  $I$  üzerinde tanımlı olan ve aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan bir  $\sigma(t)$  fonksiyonuna (1)-(2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir:*

1.  $t \in I$  için  $\sigma'(t)$  mevcuttur,
2.  $\sigma(t_0) = u_0, t_0 \in I$
3.  $t \in I$  için  $(t, \sigma(t)) \in I \times \mathbb{R}$
4.  $t \in I$  için  $\sigma'(t) = g(t, \sigma(t))$

**Tanım 2.8** Her  $(t, u_1), (t, u_2) \in R(a, b)$  için

$$|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2|$$

*eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir  $K$  sabiti mevcutsa,  $g$  fonksiyonuna  $R(a, b)$  bölgesinde bir Lipschitz koşulunu sağlıyor denir,  $K$  sabitine de Lipschitz sabiti denir.*

**Tanım 2.9**  $X, H$  de bir Banach uzayı olsun.  $H \leq E$  için sınırlı bir yaklaşım oluşturur.

$$y \geq x \Rightarrow y - x \in H$$

### 2.5.2. Çözümün Tekliği

Çözümün tekliği başlangıç değer probleminin yalnız bir çözümü olduğu anlamına gelir. Picard-Lindelöf teoremi başlangıç değer probleminin uygun aralıkta varlığını ve tekliğini göstermek için kullanılan bir yöntemdir.

**Teorem 2.1**  $g(t, u)$  ve  $\frac{\delta(g)}{\delta(u)}$  fonksiyonları  $R(a, b) = \{(t, u) : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$  kapalı ve sınırlı bölgesinde  $t$  ve  $u$  ya göre sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlıyorsa bu durumda

(1)-(2) başlangıç değer probleminin  $|g(t, u)| \leq M$  ve  $h = \min(a, \frac{b}{M})$  olmak üzere  $|t - t_0| \leq h$  aralığında tanımlı tek bir  $u(t)$  çözümü vardır.

1.  $t \in I$  için  $\sigma'(t)$  mevcuttur,

2.  $\sigma(t_0) = u_0, t_0 \in I$

**Teorem 2.2 (Picard-Lindelöf) :** Başlangıç değer problemi için;

$B \subset \mathbb{R}^2$   $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  olacak şekilde bir  $B$  alanı ve  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  ve  $y(x_0) = y_0$  olacak şekilde bir  $f$  fonksiyonu tanımlansın eğer;

- $f, B$  de sürekli bir fonksiyon ve
- $f(x, y)$  ve  $y$  Lipschitz şartı ile  $B$  de sürekli ise  $\epsilon > 0$  sabit sayısı için;

$B$  de tek bir çözüm vardır.

**İspat**  $(x_0, y_0) \in B$  iç noktası ve  $a > 0, b > 0$  sabit noktaları alınsın.  $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset B$  olacak şekilde bir dikdörtgensel alan olsun.

$$M = \max_{(x,y) \in B} f(x, y)$$

$h = \min(a, \frac{b}{M})$  olmak üzere;

$|x - x_0| \leq h$  aralığında başlangıç değer problemi tek bir çözüme sahiptir.  $a < \frac{b}{M}$  olduğunda  $h = a$  olur. Buradan  $R_1 = R$  bulunur.  $\frac{b}{M} < a$  olduğunda  $h = \frac{b}{M}$  olur. Buradan  $R_1 \subset R$  olur.

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

$$R_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq b\}$$

Ardışık yaklaşımlarla Picard teoreminin ispatı yapılabilir. Bunun için problemin çözümüne yakınsayacak fonksiyon dizisi kullanılarak çözümün bulunması sağlanır. O halde;

$|x - x_0| < h$  aralığında  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \dots$  fonksiyonları tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \\
\Psi_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Psi_1(t)) dt \\
\Psi_3 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Psi_2(t)) dt \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
\Psi_n &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Psi_{n-1}(t)) dt
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Öncelikle başlangıç değer probleminin  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında varlığı kanıtlanır. Benzer şekilde  $[x_0 - h, x_0]$  aralığında da varlık gösterilir. Daha sonra çözümün tekliği ispatlanır. Bunun için ispat dört aşamaya ayrılırsa:

1.  $\Psi_n$  (2.92) te tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

- a) iyi tanımlı,
- b)  $\Psi_n$  sürekli ve kısmi türe ve sahip,
- c)  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında  $|\Psi_n(x) - y_0| \leq b$ ,
- d)  $f(x, \Psi_n(x))$  iyi tanımlıdır.

O halde  $\Psi_n$  fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  üzerinde bir çözümdür.

**İspat** Varsayalım  $\Phi_{n-1}(x)$  fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında türe ve sahip olsun ve  $x \in [x_0, x_0 + h]$  için  $|\Phi_{n-1}(x) - y_0| \leq b$  olsun. Buradan  $(x, \Psi_{n-1}(x)) \in R_1$  olur.  $(x, \Psi_{n-1}(x))$  aralığında tanımlanmış sürekli bir  $f(x, \Psi_{n-1}(x))$  fonksiyonu vardır. Buradan  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında  $|f(x, \Psi_{n-1}(x))| \leq M$  yazılabilir.  $\Psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Psi_{n-1}(x)) dt$  olduğu düşünülürse;  $\Psi_n$  fonksiyonu vardır ve bu fonksiyonun  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında sürekli türevi vardır. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
|\Psi_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \Psi_{n-1}(x)) dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^x f(t, \Psi_{n-1}(x)) dt \\
&\leq \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0) \quad h = \min(a, \frac{b}{M}) \\
&\leq Mh \leq b
\end{aligned}$$

$(x, \Psi_n(x))$   $R_1$  de bir nokta bu nedenle  $f(x, \Psi_n(x))$  fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyondur.

Örneğin  $n = 1$  alınırsa;  $\Psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$  olur.

Buradan  $\Psi_1$  fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} |\Psi_1(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \\ &\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

dır.

O halde  $n = 1$  için  $(x, \Psi_1(x))$  noktası  $R_1$  de bir nokta ve  $f(\Psi_1(x))$  fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında sürekli bir fonksiyondur ve  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında bir çözümdür. Benzer şekilde (2.95) te tanımlanan  $\{\Psi_n\}$  dizi fonksiyonlarının tümevarım yöntemi ile  $[x_0, x_0 + h]$  aralığındaki tüm özellikleri gösterilmiş olur. O halde  $\Psi$  fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında denklemin bir çözümüdür. Buradan ispat tamamlanmış olur.

**2.**  $(x_0, x_0 + h)$  aralığında  $\{\Psi_n\}$  çözümü tektir ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında  $|\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| \leq \frac{M(\alpha h)^n}{\alpha n!}$  dır.

**İspat**  $x \in (x_0, x_0 + h)$  için  $|\Psi_{n-1}(x) - \Psi_{n-2}(x)| \leq \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$  olduğu varsayılırsa;

$$\begin{aligned} |\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t, \Psi_{n-1}(t)) - f(t, \Psi_{n-2}(t))) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \Psi_{n-1}(t)) - f(t, \Psi_{n-2}(t))| dt \end{aligned}$$

1. ifadeden  $x \in (x_0, x_0 + h)$  aralığında  $|\Psi_n(x) - y_0| \leq b$  dır. Bu nedenle  $(x, \Psi_{n-1}(x))$  ve  $(x, \Psi_{n-2}(x))$  noktaları  $x \in (x_0, x_0 + h)$  aralığında  $R_1$  de iki noktadır.

Lipschitz teoreminden;  $|\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| \leq \alpha \int_{x_0}^x |\Psi_{n-1}(t) - \Psi_{n-2}(t)| dt$

$$\begin{aligned} |\Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)| &\leq \alpha \int_{x_0}^x |\Psi_{n-1}(t) - \Psi_{n-2}(t)| dt \\ &\leq \alpha \int_{x_0}^x \frac{M\alpha^{n-2}}{(n-1)!} (t - x_0)^{n-1} dt \\ &\leq \frac{M\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \frac{(t - x_0)^n}{n} \right]_{x_0}^x = \frac{M\alpha^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n = \frac{M}{\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} h^n \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \frac{(\alpha h)^n}{n!} \quad \left( |x - x_0| \leq h \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan ispat tamamlanmış olur. Yani çözüm tektir.

**3.**  $n \rightarrow \infty$   $\Psi_n$  sürekli fonksiyonu  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında eşit aralıklarla  $\Psi$  ye yakınsar.

**4.**  $\Psi$  fonksiyonunun limiti  $[x_0, x_0 + h]$  aralığında başlangıç değer problemine karşılık gelmektedir.



### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Son yıllarda kesirli hesaplama bir çok matematiksel çalışmada gösterildiği gibi dikkate değer bir gelişme göstermiştir. Burada kesirli türevin yeni bir tanımı için zamansal ve mekansal değişkenlere bağlı tanımı verilecektir. İlk gösterim zaman değişkenleri üzerinde çalışır, burada gerçek sonuçlar ve hesaplamalar olağan kesirli türevin çözümleri formüllerde bazı basitleştirmelerle birlikte tam sayı üslerine dönüşecektir. Bu çerçevede Laplace dönüşümünü kullanmak uygun olacaktır.

İkinci temsil, mekansal değişkenler dolayısıyla bu yerel olmayan kesirli türev için Fourier dönüşümü ile çalışmak daha uygun olacaktır.

Bu yeni yaklaşıma olan ilgi; viskoelastik malzemeler, termal ortam, elektromanyetik sistemler vb. klasik yaklaşımın davranışını tanımlayan bir model kullanma gerekliliğinden kaynaklanmaktadır.

Bu çalışma aynı zamanda trigonometrik fonksiyonlar ve klasik fonksiyonlar gibi yeni türevin davranışlarıyla ilgili bazı uygulamalar ve simülasyonları da içermektedir. Bu simülasyonlar olağan kesirli türeve göre sonuçları karşılık gelen bazı benzerlikler göstermektedir.

#### 3.1. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi

$\alpha$ . dereceden bilinen Caputo kesirli zaman türevini ( $UFD_t$ ) hatırlayalım.

$$D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{-\alpha}} d\tau \quad (3.1)$$

$$\alpha \in [0, 1], \alpha \in [\infty, t), f \in H^1(a, b), b > a$$

şeklinde tanımlanır.

$(t-\tau)^{-\alpha}$  çekirdeğini  $\exp^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$  fonksiyonu ile  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  ifadesini de  $\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)}$  ile değiştirilirse aşağıdaki yeni kesirli zaman türevi  $NFD_t$  tanımını elde ederiz.

$$D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t} \right] d\tau \quad (3.2)$$

burada  $M(\alpha)$ ,  $M(0) = M(1) = 1$  olacak şekilde bir normalleştirme fonksiyonudur. (3.2) tanımına göre  $f(t)$  fonksiyonu sabit iken  $(UFD_t)$  denkleminde olduğu gibi  $NFD_t$  denkleminde sıfırdır. Ancak  $(UFD_t)$  denkleminin aksine çekirdek  $t = \tau$  noktasında tekilliğe sahip değildir. Yeni tanım olan  $NFD_t$   $H^1(a, b)$  uzayına ait olmayan durumlarda da kullanılabilir. Nitekim, tanım (3.2) herhangi bir  $f \in L^1(-\infty, b)$  ve herhangi bir  $\alpha \in [0, 1]$  için de formüle edilebilir.

$$D_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{(1 - \alpha)} \int_{-\infty}^t (f(t) - f(\tau)) \left[ \exp^{-\frac{\alpha}{1-\alpha} t} \right] d\tau.$$

Ayrıca

$$\sigma = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \in [0, \infty], \quad \alpha = \frac{1}{1 + \sigma} \in [0, 1].$$

$NFD_t$ 'nin tanımı (3.2) aşağıdaki formu alır:

$$D_t^{(\sigma)} f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_{\alpha}^t f(\tau) \left[ \exp^{-\frac{(t-\tau)}{\sigma} t} \right] d\tau, \quad (3.3)$$

burada  $\sigma \in [0, \infty]$  ve  $N(\sigma)$ ,  $M(\alpha)$  ya karşılık gelen normalleştirme fonksiyonudur, öyle ki  $N(0) = N(\infty) = 1$  dir. Diğer taraftan ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \left[ \exp^{-\frac{(t-\tau)}{\sigma} t} \right] = \delta(t - \tau), \quad (3.4)$$

ve  $\alpha \rightarrow 1$  için  $\sigma \rightarrow 0$  olacaktır.

Daha sonra (Guillemín ve diğ. (1980), Hewitt ve Stromberg (2013)),

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} M(\alpha)(1 - \alpha) \int_{\alpha}^t f(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)t}} \right] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_{\alpha}^t f(\tau) \left[ \exp^{-\frac{(t-\tau)}{(1-\alpha)t}} \right] d\tau = f(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

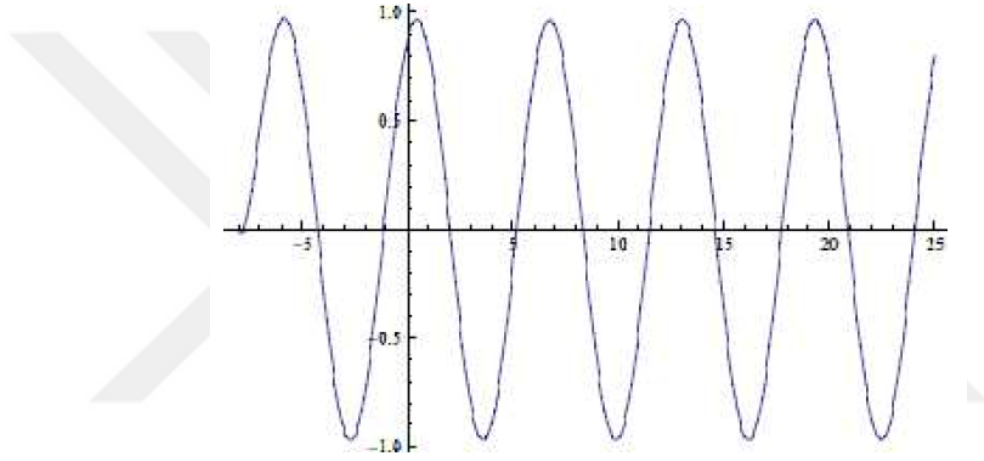
Aksi takdirde,  $\alpha \rightarrow 0$  olduğunda,  $\sigma \rightarrow +\infty$  olur. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} D_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha)}{(1 - \alpha)} \int_{\alpha}^t f(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)t}} \right] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_{\alpha}^t f(\tau) \left[ \exp^{-\frac{(t-\tau)}{(1-\alpha)t}} \right] d\tau = f(t) - f(\alpha). \end{aligned} \quad (3.6)$$

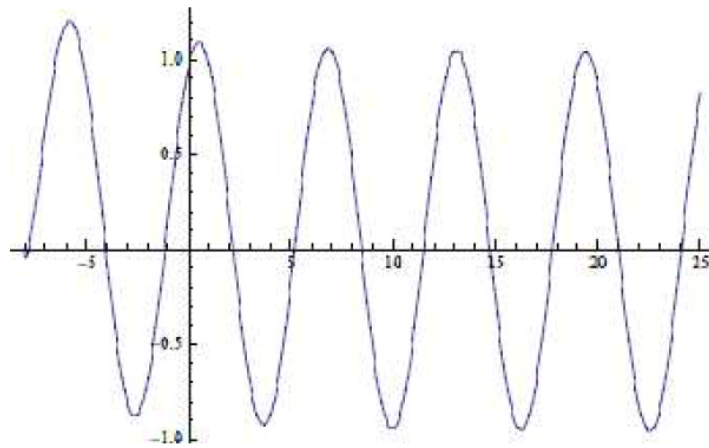
$\alpha = 0.66$ ,  $\alpha = -8$  ve  $\omega = 1$  için belirli bir fonksiyonun  $\text{NFD}_t$  ifadesini  $f(t) = \sin \omega t$  olarak düşünelim.

$$D_t^{(0.66)} \sin \omega t = \frac{M(0.66)}{0.33} \int_{\alpha}^t \cos \tau \exp -2(t - \tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Bu türevin simülasyonu aşağıdaki grafikleri üretir;



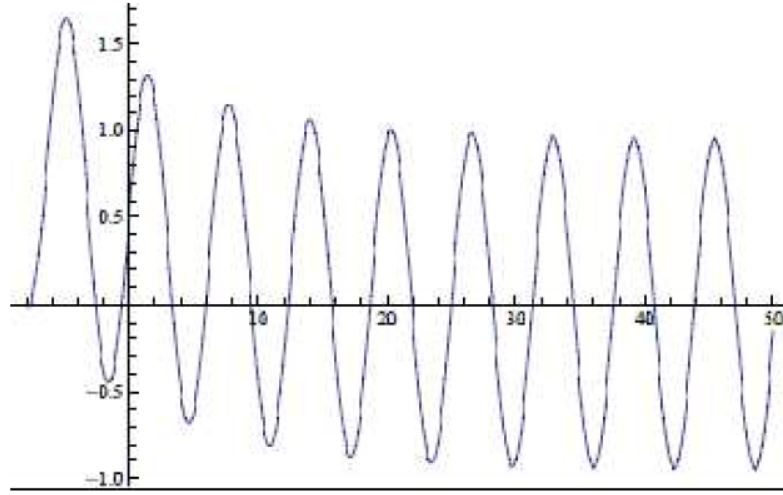
**Şekil 3.1.**  $\alpha = 0.66$  olmak üzere  $[-8, 25]$  zaman aralığında  $\text{NFD}_t$  (3.7) nin simülasyonu



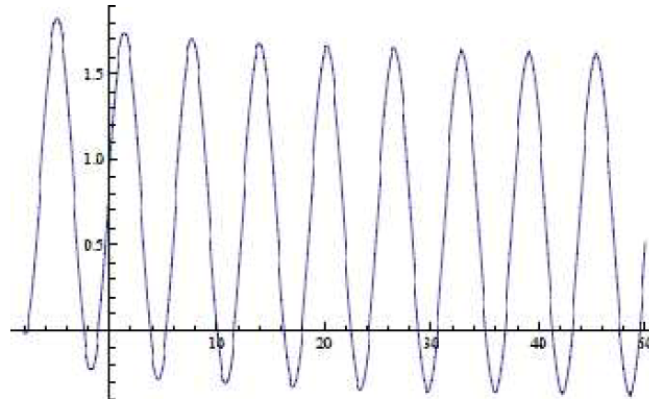
**Şekil 3.2.**  $\alpha = 0.66$  olmak üzere  $[-8, 25]$  zaman aralığında  $\text{UFD}_t$  (3.1) nin simülasyonu

$\alpha = 0.66$  olan bu iki simülasyondan, klasik  $\text{NFD}_t$ 'nin  $\text{UFD}_t$ 'ye çok benzediği görülmektedir.

Aksi takdirde,  $\alpha$ 'nın 0'a yakın olan değerlerini incelediğimizde, farklı bir durum elde edilir.



**Şekil 3.3.**  $\alpha = 0.1$  olmak üzere  $[-8, 50]$  zaman aralığında  $NFD_t$  (3.7) nin simülasyonu



**Şekil 3.4.**  $\alpha = 0.1$  olmak üzere  $[-8, 50]$  zaman aralığında  $UFD_t$  (3.1) nin simülasyonu

Böylece, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te  $\alpha = 0.1$  için  $NFD_t$  ve  $UFD_t$  simülasyonları arasında farklı durumlar gözlemliyoruz. Özellikle klasik  $UFD_t$ , hızlı bir stabilizasyon gösteren  $NFD_t$ 'ye kıyasla öncekinden daha fazla etkilenir. Eğer  $n \geq 1$  ve  $\alpha \in [0, 1]$  ise  $(n + \alpha)$ . dereceden kesirli zaman türevi  $D_t^{(\alpha+n)} f(t)$  şu şekilde tanımlanır:

$$D_t^{(\alpha+n)} f(t) := D_t^{(\alpha)} (D_t^{(n)} f(t)). \quad (3.8)$$

**Teorem 3.1**  $NFD_t$  için,  $f(t)$  fonksiyonu  $f^{(s)}(\alpha) = 0$   $s = 1, 2, \dots, n$  şeklinde ise;

$$D_t^{(n)} (D_t^{(\alpha)} f(t)) = D_t^{(\alpha)} (D_t^{(n)} f(t)) \quad (3.9)$$

eşitliği yazılır.

**İspat**  $n = 1$  olduğu durumu,  $D_t^{(\alpha+1)} f(t)$  'nin tanımından ve (3.8), ifadelerinden ;

$$D_t^{(\alpha)} \left( D_t^{(1)} f(t) \right) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^t f''(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} \right] d\tau \quad (3.10)$$

Dolayısıyla, parçalara göre gerekli düzenlemeler yapılırsa ve  $f'(\alpha) = 0$  olduğunu varsayarak,

$$\begin{aligned} D_t^{(\alpha)} \left( D_t^{(1)} f(t) \right) &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^t \left( \frac{d}{d\tau} f'(\tau) \right) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} \right] d\tau \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \left[ \int_{\alpha}^t \frac{d}{d\tau} f'(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} \right] d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^t f'(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} \right] d\tau \right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \left[ f'(t) - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^t f'(\tau) \left[ \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} \right] d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} D_t^{(1)} \left( D_t^{(\alpha)} f(t) \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^t f'(\tau) \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} d\tau \right) \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \left[ f'(t) - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^t f'(\tau) \exp^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)}} d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

bulunur. Herhangi bir  $n > 1$  için ispatı genelleleyebiliriz. Aşağıda,  $M(\alpha) = 1$  fonksiyonunu varsayalım.

### 3.2. $NFD_t$ 'nin Laplace dönüşümü

$NFD_t$ 'nin özelliklerini incelemek için denklem (3.3)'de  $\alpha = 0$  ile tanımlanan,  $p$  değişkeniyle verilen Laplace dönüşümünün (LT) hesaplanması;

$$LT \left[ D_t^{(\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \exp -pt \int_0^t f'(\tau) \exp -\frac{\alpha(t-\tau)}{(1-\alpha)} d\tau dt.$$

Laplace dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} LT\left[D_t^{(\alpha)} f(t)\right] &= \frac{1}{(1-\alpha)} LT(f'(t)) LT\left(\exp - \frac{\alpha t}{(1-\alpha)}\right) \\ &= \frac{p LT(f(t) - f(0))}{p + \alpha(1-p)} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} LT\left[D_t^{(\alpha+1)} f(t)\right] &= \frac{1}{(1-\alpha)} LT(f''(t)) LT\left(\exp - \frac{\alpha t}{(1-\alpha)}\right) \\ &= \frac{(p^2 LT(f(t)) - pf(0) - f'(0))}{p + \alpha(1-p)} \end{aligned}$$

yazılır ve son olarak,

$$\begin{aligned} LT\left[D_t^{(\alpha+n)} f(t)\right] &= \frac{1}{(1-\alpha)} LT(f^{(n+1)}(t)) LT\left(\exp - \frac{\alpha t}{(1-\alpha)}\right) \\ &= \frac{(p^{(n+1)} LT(f(t)) - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) \cdots - f^n(0))}{p + \alpha(1-p)} \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

### 3.3. Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde bazı basit ama kullanışlı olan kesirli diferansiyel denklemler incelenecektir.

**Teorem 3.2**  $0 < \alpha < 1$  aralığında ve  $f$  fonksiyonu sabit bir fonksiyon olmak üzere  $f$  fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümü olsun.

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.13)$$

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s) ds + f(0), \quad t \geq 0,$$

denkleminin ispatından (3.13) denkleminin çözümünün tüm  $t \geq 0$  için  $f(t) = f(0)$ 'ı sağlaması gerektiğini elde ederiz. Dolayısıyla bu da demektir ki  $f$  fonksiyonu bir sabit fonksiyondur.

**Önerme 3.1**  $0 < \alpha < 1$  aralığı için aşağıdaki başlangıç değer probleminin benzersiz çözümü;

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = \sigma(t), \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

$$f(0) = f_0 \in \mathfrak{R}; \quad (3.15)$$

şeklinde verilir.

$$f(t) = f_0 + a_\alpha(\sigma(t) - \sigma(0)) + b_\alpha I^1 \sigma(t), \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

burada  $I^1 \sigma(t)$ ,  $\sigma$  nın  $a$  ve  $b$  ilkeli;

$$a_\alpha = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}, \quad b_\alpha = \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}. \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanır.

**İspat** (3.14) ve (3.15) başlangıç değer probleminin  $f_1$  ve  $f_2$  olmak üzere iki çözümünün olduğunu varsayalım. Bu durumda ;

$${}^{CF}D^\alpha f_1(t) - {}^{CF}D^\alpha f_2(t) = \left[ {}^{CF}D^\alpha f_1 - f_2 \right](t) = 0$$

ve  $(f_1 - f_2)(0) = 0$  olur.

Bu da demektir ki önerme (3.1) 'e göre  $f_1 - f_2 = 0$  olup buradan tüm  $t \geq 0$  için  $f_1(t) = f_2(t)$  dir. O halde buradan ;

$$f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}u(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t u(s)ds + f(0), \quad t \geq 0,$$

ve

$$f(t) = f_0 + a_\alpha(\sigma(t) - \sigma(0)) + b_\alpha I^1 \sigma(t), \quad t \geq 0$$

ile tanımlanan fonksiyonların

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = \sigma(t), \quad t \geq 0.$$

ile tanımlanan kesirli diferansiyel denklemin bir çözümü olduğu açıktır. Ayrıca (3.16) denkleminde  $t$  parametresini "0" (sıfır) olarak kabul edersek  $f_0$  değerini elde ederiz. Dolayısıyla (3.14) ve (3.15) ile tanımlanan başlangıç değer probleminin çözümü (3.16) denklemdir. Burada yine  $\alpha = 1$  için (3.14) denkleminin çözümünün  $\sigma$ 'nın olağan ilkeli olduğu görülür. Şimdi aşağıdaki doğrusal kesirli diferansiyel denklemini ele alalım;

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = \lambda f(t) + u(t), \quad t \geq 0, \quad (3.18)$$

burada  $\lambda \in \mathfrak{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  olarak alalım. Önerme (3.1) 'den (3.18) denkleminin çözümünün bir  $f$  fonksiyonu olduğunu ve bu fonksiyonun;

$$f(t) = f_0 + a_\alpha \left[ (\lambda(f(t) - f_0)) + u(t) - u(0) \right] + b_\alpha \int_0^t [\lambda f + u](s) d_s, \quad t \geq 0,$$

olduğunu kabul edelim. Burada  $a_\alpha$  ve  $b_\alpha$  ifadelerini (3.17) de tanımlandığı şekilde tanımlayalım. Benzer olarak,

$$(1 - \lambda a_\alpha) f(t) - \lambda b_\alpha I^1 f(t) = (1 - \lambda a_\alpha) f_0 + s_\alpha(u(t) - u(0)) + b_\alpha I^1 u(t), \quad t \geq 0,$$

ifadesi elde edilir. Eğer  $\lambda a_\alpha = 1$  olarak alırsak,

$$f(t) = -\frac{a_\alpha}{\lambda b_\alpha} u'(t) - \frac{b_\alpha}{\lambda} u(t), \quad t \geq 0,$$

diğer yandan  $\lambda a_\alpha \neq 1$  olaması durumunda,

$$f(t) - \frac{\lambda b_\alpha}{1 - \lambda a_\alpha} I^1 f(t) = \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0, \quad (3.19)$$

olup buradan,

$$\tilde{\sigma}(t) = f_0 + \frac{a_\alpha}{1 - \lambda a_\alpha} (u(t) - u(0)) + \frac{b_\alpha}{1 - \lambda a_\alpha} I^1 u(t), \quad t \neq 0,$$

elde edilir. Burada  $\lambda = 0$  durumu etkilemezken  $f = \tilde{\sigma}$  bulunur. Eğer  $\lambda = 0$  ise (3.19) denklemi şu şekilde yazılır:

$$f(t) - \tilde{\lambda} I^1 f(t) = \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0,$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse,

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda b_\alpha}{1 - \lambda b_\alpha}$$

bulunur. Böylelikle,

$$f'(t) = \tilde{\lambda} f(t) + \tilde{\sigma}(t), \quad t \geq 0$$

elde edilir.

Böylece bir başlangıç koşulu olarak düşünecek olursak benzersiz bir çözümü olan sıradan bir diferansiyel denklem elde etmiş oluruz.

**Önerme 3.2**  $0 < \alpha < 1$  aralığında bir başlangıç değer problemi olan ;

$${}^{CF}D^\alpha f(t) = \lambda f(t) + u(t), \quad t \geq 0.$$

$$f(0) = f_0 \in \mathfrak{R},$$

herhangi bir  $\lambda \in \mathfrak{R}$  için benzersiz bir çözüme sahip olduğunu kanıtlamış olduk.

### 3.4. Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi ile İki Aşamalı Adams-Bashford Şeması

Aşağıdaki genel kesirli diferansiyel denklemi göz önünde bulunduracağız. Yani, Caputo-Fabrizio kesirli türevi;

$${}_0^{CF}D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (3.20)$$

veya

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t y'(\tau) \exp \left[ -\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau) \right] d\tau = f(t, y(t)). \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemler için analizin temel teoremi kullanılarak,

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.22)$$

denklemi yazılır. Böylece,

$$y(t_{n+1}) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (3.23)$$

ve

$$y(t_n) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_n} f(t, y(t)) dt \quad (3.24)$$

(3.23) ve (3.24) denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak;

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} dt \\ &= \frac{3h}{2} f(t_n, y_n) - \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Böylece;

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{3h\alpha}{2M(\alpha)} f(t_n, y_n) - \frac{h\alpha}{2M(\alpha)} f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

denklemini elde edilir ki bunun anlamı;

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \left\{ \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} + \frac{3h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} - \frac{h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}).$$

Dolayısıyla

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \left\{ \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} + \frac{3h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} - \frac{h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}). \quad (3.27)$$

denklemini Caputo-Fabrizio kesirli türevi için karşılık gelen iki aşamalı Adams-Bashforth yöntemi. Aşağıdaki teoremler yakınsama ve kararlılık sonuçlarını verir.

**Teorem 3.3**  $y(t)$  fonksiyonu,

$${}_0^{CF} D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (3.28)$$

denkleminin bir çözümü olsun. Burada  $f$ , sınırlı sürekli bir fonksiyon ve Caputo-Fabrizio kesirli türevini

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \left\{ \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} + \frac{3h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} - \frac{h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \mathfrak{R}_\alpha^n,$$

burada  $||\mathfrak{R}_\alpha^n|| \leq M$  şeklinde tanımlanır.

**İspat** Caputo-Fabrizio türevinin tanımına göre,

$$y(t) - y(0) = \frac{1 - \alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.29)$$

denklemini ele alındığında  $t_{n+1}$  noktasında ;

$$y(t_{n+1}) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_n, y(t_n)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Ayrıca, sahip olduğumuz noktada;

$$y(t_n) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^{t_n} f(t, y(t)) dt.$$

Böylece,

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \\ &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left\{ \frac{f(t_n, y_n)}{h} (t - t_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (t - t_n) + \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1)^i} f(t_i, y_i) \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

buradan

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \left\{ \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} + \frac{3h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_n, y_n) - \left\{ \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} - \frac{h\alpha}{2M(\alpha)} \right\} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ &\quad + \underbrace{\frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1)^i} f(t_i, y_i) dt}_{\text{hata terimi}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Yukarıdaki hata terimini şu şekilde gösteririz:

$$R_n^\alpha = \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t - t_i)}{h(-1)^i} f(t_i, y_i) dt.$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
\|R_n^\alpha\|_\infty &= \left\| \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t-t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) dt \right\|_\infty \\
&\leq \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{(t-t_i)}{h(-1^i)} f(t_i, y_i) \right\|_\infty dt \\
&\leq \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \left| \frac{(t-t_i)}{h(-1^i)} \right| \|f(t_i, y_i)\|_\infty dt \\
&< \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=2}^n \prod_{i=2}^n \frac{|(t-t_i)|}{h(-1^i)} \sup_{i \in I} \left\{ \max_{i \in I} |f(t_i, y_i)| \right\} dt \\
&< \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{(n+1)! h^{n+1}}{4} M,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Bu nedenle,

$$\|R_n^\alpha\|_\infty < \frac{\alpha}{M(\alpha)} (n+1)! h^{n+1} M,$$

ifadesi elde edilir.

**Teorem 3.4**  $y(t)$  fonksiyonu,

$${}_0^{CF} D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

denkleminin bir çözümü olsun.  $h, n \in \mathbb{N}$  için;

$$\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty < \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\alpha h^{n+1} (n+1)!}{4M(\alpha)}.$$

Öyle ki,

$$n \rightarrow \infty \rightarrow \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty \rightarrow 0,$$

dır. Benzer şekilde,

$$n \rightarrow \infty \rightarrow \|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty \rightarrow 0,$$

olur.

## İspat

$$\begin{aligned}
\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty &= \left\| \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \{f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\} + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t \right\|_\infty \\
&\leq \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) d_t \right\|_\infty \\
&\leq \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \sum_{i=0}^n \prod_{i=0}^n \frac{(t-t_i)}{h(-1)} \right|_\infty d_t \\
&< \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty + \frac{\alpha h^{n+1} (n+1)!}{4M(\alpha)}.
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

O halde  $n \rightarrow \infty$  ise  $\|f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\|_\infty \rightarrow 0$  dır ve son olarak  $n \rightarrow \infty$  iken  $\|y(t_{n+1}) - y(t_n)\|_\infty \rightarrow 0$  olur. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. West Nile Virus Modeli

Aşağıda verilecek olan (4.1) denklem sisteminde ;

$N_M(t)$ ,  $t$  zamanında toplam sivrisinek popülasyonunu belirtir.

$N_B(t)$ ,  $t$  zamanında toplam kuş popülasyonunu belirtir.

$N_H(t)$ ,  $t$  zamanında toplam insan popülasyonunu belirtir.

Ayrıca duyarlı  $M_s(t)$  ve enfekte  $M_i(t)$  sivrisinek popülasyonuna ayrılmıştır. Benzer şekilde duyarlı  $B_s(t)$  ve enfekte  $B_i(t)$  kuş popülasyonuna ayrılmıştır. Son olarak duyarlı  $S(t)$ , enfekte  $E(t)$ , bulaşıcı  $I(t)$ , hastahane tedavisi gören  $H(t)$  ve iyileşen  $R(t)$  insan popülasyonuna ait kişileri temsil eder.

$$\begin{aligned}\frac{dM_S(t)}{dt} &= \Lambda_M - \frac{b_1\zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_S(t), \\ \frac{dM_i(t)}{dt} &= \frac{b_1\zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_i(t), \\ \frac{dB_S(t)}{dt} &= \Lambda_B - \frac{b_1\zeta_2 M_i(t) B_s(t)}{N_B(t)} - (\phi_B + \eta_B) B_S(t), \\ \frac{dB_i(t)}{dt} &= \frac{b_1\zeta_2 M_i(t) B_s(t)}{N_B(t)} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_i(t), \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda_H - \frac{b_2\zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - \eta_H S(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{b_2\zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - (\gamma + \eta_H) E(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \gamma E(t) - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I(t), \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \alpha I(t) - (\nu_H + \mu + \eta_H) H(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \mu H(t) + r I(t) - \eta_H R(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Bundan sonraki bölümlerde sırasıyla (4.1) denklem sistemiyle verilen West Nile virüs modeli olarak anılan matematiksel modelin varlık ve teklik çözümleri yapılacaktır. Daha

sonra Adam-Basford metodunun kesirli türev operatörlerine uyarlanmış halini kullanarak genişletilmiş matematiksel model için nümerik çözümler hesaplanacaktır. Son olarak Mathematica programı kullanılarak simülasyonlar elde edilecek ve elde edilen sonuçlar detaylı bir şekilde analiz edilecektir.

#### 4.1.1. West Nile Virüs Modeli için Çözümün Varlığı

Bu bölümde genişletilmiş West Nile virüs modelinin sabit nokta teoremi yardımıyla bir çözümünün var olduğu gösterilecektir. kesirli West Nile Virus Modeli matematiksel modeli sabit nokta tekniği kullanılarak elde edilecektir. (4.1) denklem sistemi Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörüne genişletildiğinde (4.2) denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{cases} {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho M_S(t) &= \Lambda_M - \frac{b_1 \zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_S(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho M_i(t) &= \frac{b_1 \zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_i(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho B_S(t) &= \Lambda_B - \frac{b_1 \zeta_2 M_i(t) B_S(t)}{N_B(t)} - (\phi_B + \eta_B) B_S(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho B_i(t) &= \frac{b_1 \zeta_2 M_i(t) B_S(t)}{N_B(t)} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_i(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho S(t) &= \Lambda_H - \frac{b_2 \zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - \eta_H S(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho E(t) &= \frac{b_2 \zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - (\gamma + \eta_H) E(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho I(t) &= \gamma E(t) - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho H(t) &= \alpha I(t) - (\nu_H + \mu + \eta_H) H(t), \\ {}^{CF}\mathfrak{D}_0^\rho R(t) &= \mu H(t) + r I(t) - \eta_H R(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Yukarıdaki denklem sisteminin başlangıç değerleri aşağıdaki gibidir.

$$M_{S_0}(0) = M_S(0), M_{i_0}(0) = M_i(0), B_{S_0}(0) = B_S(0), B_{i_0}(0) = B_i(0), S_0(0) = S(0), E_0(0) = E(0) \\ I_0(0) = I(0), H_0(0) = H(0), R_0(0) = R(0).$$

Matematiksel modelin çözümünün varlığını göstermek için başlangıç değerleri ile Caputo-Fabrizio integral operatörü kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
M_{S_0}(0) = M_S(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \Lambda_M - \frac{b_1 \zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_S(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \Lambda_M - \frac{b_1 \zeta_1 M_S(y) B_i(y)}{N_B(y)} - \eta_M M_S(y) \right) dy, \\
M_{i_0}(0) = M_i(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \frac{b_1 \zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_i(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \frac{b_1 \zeta_1 M_S(y) B_i(y)}{N_B(y)} - \eta_M M_i(y) \right) dy, \\
B_{S_0}(0) = B_S(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \Lambda_B - \frac{b_1 \zeta_2 M_i(t) B_s(t)}{N_B(t)} - (\phi_B + \eta_B) B_S(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \Lambda_B - \frac{b_1 \zeta_2 M_i(y) B_s(y)}{N_B(y)} - (\phi_B + \eta_B) B_S(y) \right) dy, \\
B_{i_0}(0) = B_i(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \frac{b_1 \zeta_2 M_i(t) B_s(t)}{N_B(t)} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_i(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \frac{b_1 \zeta_2 M_i(y) B_s(y)}{N_B(y)} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_i(y) \right) dy, \\
S_0(0) = S(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \Lambda_H - \frac{b_2 \zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - \eta_H S(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \Lambda_H - \frac{b_2 \zeta_3 M_i(y) S(y)}{N_H(y)} - \eta_H S(y) \right) dy, \\
E_0(0) = E(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \frac{b_2 \zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - (\gamma + \eta_H) E(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \frac{b_2 \zeta_3 M_i(y) S(y)}{N_H(y)} - (\gamma + \eta_H) E(y) \right) dy, \\
I_0(0) = I(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \gamma E(t) - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \gamma E(y) - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I(y) \right) dy, \\
H_0(0) = H(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \alpha I(t) - (\nu_H + \mu + \eta_H) H(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \alpha I(y) - (\nu_H + \mu + \eta_H) H(y) \right) dy, \\
R_0(0) = R(0) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \left( \mu H(t) + r I(t) - \eta_H R(t) \right) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \left( \mu H(y) + r I(y) - \eta_H R(y) \right) dy,
\end{aligned}$$

Basitleştirmek için, çekirdekler aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1(t, M_S) &= \Lambda_M - \frac{b_1 \zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_S(t), \\
\mathfrak{S}_2(t, M_i) &= \frac{b_1 \zeta_1 M_S(t) B_i(t)}{N_B(t)} - \eta_M M_i(t), \\
\mathfrak{S}_3(t, B_S) &= \Lambda_B - \frac{b_1 \zeta_2 M_i(t) B_s(t)}{N_B(t)} - (\phi_B + \eta_B) B_S(t), \\
\mathfrak{S}_4(t, B_i) &= \frac{b_1 \zeta_2 M_i(t) B_s(t)}{N_B(t)} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_i(t), \\
\mathfrak{S}_5(t, S) &= \Lambda_H - \frac{b_2 \zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - \eta_H S(t), \\
\mathfrak{S}_6(t, E) &= \frac{b_2 \zeta_3 M_i(t) S(t)}{N_H(t)} - (\gamma + \eta_H) E(t), \\
\mathfrak{S}_7(t, I) &= \gamma E(t) - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I(t), \\
\mathfrak{S}_8(t, H) &= \alpha I(t) - (\nu_H + \mu + \eta_H) H(t), \\
\mathfrak{S}_9(t, R) &= \mu H(t) + r I(t) - \eta_H R(t).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= b_1 \zeta_1 - \eta_M \\
\Psi_2 &= -\eta_M \\
\Psi_3 &= -b_1 \zeta_2 - \phi_B - \eta_B \\
\Psi_4 &= -(\nu_B + \phi_B + \eta_B) \\
\Psi_5 &= -(b_2 \zeta_3 - \eta_H) \\
\Psi_6 &= -(\gamma + \eta_H) \\
\Psi_7 &= -(\alpha + \nu_I - r + \eta_H) \\
\Psi_8 &= -(\nu_H + \mu + \eta_H) \\
\Psi_9 &= -\eta_H
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. O halde ,  $\|M_S(t)\| \leq \mathfrak{L}_1, \|M_i(t)\| \leq \mathfrak{L}_2, \|B_S(t)\| \leq \mathfrak{L}_3, \|B_i(t)\| \leq \mathfrak{L}_4, \|S(t)\| \leq \mathfrak{L}_5, \|E(t)\| \leq \mathfrak{L}_6, \|I(t)\| \leq \mathfrak{L}_7, \|H(t)\| \leq \mathfrak{L}_8, \|R(t)\| \leq \mathfrak{L}_9$  yazılabilir.

Ayrıca,

$$N_B(t) = B_S(t) + B_i(t) \leq \mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_{10}$$

$$N_M(t) = M_S(t) + M_i(t) \leq \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_{11}$$

$$N_H(t) = S(t) + E(t) + I(t) + H(t) + R(t) \leq \mathfrak{L}_5 + \mathfrak{L}_6 + \mathfrak{L}_7 + \mathfrak{L}_8 + \mathfrak{L}_9 = \mathfrak{L}_{12}$$

dir.

**Teorem 4.1** Bu çekirdekler  $\mathfrak{S}_i, i = 1, \dots, 9$  Lipschitz koşulunu sağlıyor ise  $H$  asimtotu için  $\Psi_i < 1$  koşulu sağlanır. ( $\forall i = 1 \dots 9$ )

**İspat** Öncelikle  $\mathfrak{S}_1(t, M_S)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığının ispatı ile başlayacağız.  $M_s(t)$  ve  $M_{S_1}(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_1(t, M_S) - \mathfrak{S}_1(t, M_{S_1})\| &= \left\| \left( \Lambda_M - \frac{b_1 \zeta_1 M_S B_i}{N_B} - \eta_M M_S \right) - \left( \Lambda_M - \frac{b_1 \zeta_1 M_{S_1} B_i}{N_B} - \eta_M M_{S_1} \right) \right\| \\ &\leq (b_1 \zeta_1 - \eta_M) \|M_S - M_{S_1}\| \frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{L}_{10}} \\ &= \Psi_1 \|M_S - M_{S_1}\| \frac{\mathfrak{L}_4}{\mathfrak{L}_{10}}. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_2(t, M_i)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $M_i(t)$  ve  $M_{i_1}(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_2(t, M_i) - \mathfrak{S}_2(t, M_{i_1})\| &= \left\| \left( \frac{b_1 \zeta_1 M_S B_i}{N_B} - \eta_M M_i \right) - \left( \frac{b_1 \zeta_1 M_S B_i}{N_B} - \eta_M M_{i_1} \right) \right\| \\ &\leq (-\eta_M) \|M_i - M_{i_1}\| \\ &= \Psi_2 \|M_i - M_{i_1}\|. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_3(t, B_S)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $B_S(t)$  ve  $B_{S_1}(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_3(t, B_S) - \mathfrak{S}_3(t, B_{S_1})\| &= \left\| \left( \Lambda_B - \frac{b_1 \zeta_2 M_i B_S}{N_B} - (\phi_B + \eta_B) B_S \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \Lambda_B - \frac{b_1 \zeta_2 M_i B_{S_1}}{N_B} - (\phi_B + \eta_B) B_{S_1} \right) \right\| \\ &\leq (-b_1 \zeta_2 - \phi_B - \eta_B) \|B_S - B_{S_1}\| \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_{10}} \\ &= \Psi_3 \|B_S - B_{S_1}\| \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_{10}}. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_4(t, B_i)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $B_i(t)$  ve  $B_{i_1}(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_4(t, B_i) - \mathfrak{S}_4(t, B_{i_1})\| &= \left\| \left( \frac{b_1 \zeta_2 M_i B_S}{N_B} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{b_1 \zeta_2 M_i B_S}{N_B} - (\nu_B + \phi_B + \eta_B) B_{i_1} \right) \right\| \\ &\leq (-(\nu_B + \phi_B + \eta_B)) \|B_i - B_{i_1}\| \\ &= \Psi_4 \|B_i - B_{i_1}\|. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_5(t, S)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $S(t)$  ve  $S_1(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_5(t, S) - \mathfrak{S}_5(t, S_1)\| &= \left\| \left( \Lambda_H - \frac{b_2 \zeta_3 M_i S}{N_H} - \eta_H S \right) - \left( \Lambda_H - \frac{b_2 \zeta_3 M_i S_1}{N_H} - \eta_H S_1 \right) \right\| \\ &\leq (-b_2 \zeta_3 + \eta_H) \|S - S_1\| \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_{12}} \\ &= \Psi_5 \|S - S_1\| \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_{12}}. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_6(t, E)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $E(t)$  ve  $E_1(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_6(t, E) - \mathfrak{S}_6(t, E_1)\| &= \left\| \left( \frac{b_2 \zeta_3 M_i S}{N_H} - (\gamma + \eta_H) E \right) - \left( \frac{b_2 \zeta_3 M_i S}{N_H} - (\gamma + \eta_H) E_1 \right) \right\| \\ &\leq (-\gamma - \eta_H) \|E - E_1\| \\ &= \Psi_6 \|E - E_1\|. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_7(t, I)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $I(t)$  ve  $I_1(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_7(t, I) - \mathfrak{S}_7(t, I_1)\| &= \|(\gamma E - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I) \\ &\quad - (\gamma E - (\alpha + \nu_I - r + \eta_H) I_1)\| \\ &\leq (-\alpha - \nu_I + r - \eta_H) \|I - I_1\| \\ &= \Psi_7 \|I - I_1\|. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_8(t, H)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $H(t)$  ve  $H_1(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_8(t, H) - \mathfrak{S}_8(t, H_1)\| &= \|(\alpha I - (\nu_H + \mu + \eta_H)H) - (\alpha I - (\nu_H + \mu + \eta_H)H_1)\| \\ &\leq (-\nu_H - \mu - \eta_H)\|H - H_1\| \\ &= \Psi_8\|H - H_1\|. \end{aligned}$$

Daha sonra  $\mathfrak{S}_9(t, R)$  nin Lipschitz koşulunu sağladığını göstereceğiz.  $R(t)$  ve  $R_1(t)$  iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_9(t, R) - \mathfrak{S}_9(t, R_1)\| &= \|(\mu H + rI - \eta_H R) - (\mu H + rI - \eta_H R_1)\| \\ &\leq (-\eta_H)\|R - R_1\| \\ &= \Psi_9\|R - R_1\|. \end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_i, i = 1 \dots 9$  çekirdekleri  $\Psi_i < 1, i \in 1 \dots 9$  özelliğine sahip kontraksiyon (daralma) olma koşulunu sağlar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Burada tüm başlangıç değerlerini sıfır olarak alıp (4.1) denklem sistemi tekrar yazılacak olursa;

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_1(t, M_S(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_1(y, M_S(y)) dy, \\ M_i(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_2(t, M_i(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_2(y, M_i(y)) dy, \\ B_S(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_3(t, B_S(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_3(y, B_S(y)) dy, \\ B_i(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_4(t, B_i(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_4(y, B_i(y)) dy, \\ S(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_5(t, S(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_5(y, S(y)) dy, \\ E(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_6(t, E(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_6(y, E(y)) dy, \\ I(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_7(t, I(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_7(y, I(y)) dy, \\ H(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_8(t, H(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_8(y, H(y)) dy, \\ R(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_9(t, R(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_9(y, R(y)) dy. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Daha sonra aşağıdaki denklem sistemi, özyinelemeli bir formül yardımıyla tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
M_{S_n}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_1(t, M_{S_{n-1}}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_1(y, M_{S_{n-1}}(y)) dy, \\
M_{i_n}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_2(t, M_{i_{n-1}}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_2(y, M_{i_{n-1}}(y)) dy, \\
B_{S_n}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_3(t, B_{S_{n-1}}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_3(y, B_{S_{n-1}}(y)) dy, \\
B_{i_n}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_4(t, B_{i_{n-1}}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_4(y, B_{i_{n-1}}(y)) dy, \\
S_n(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_5(t, S_{n-1}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_5(y, S_{n-1}(y)) dy, \\
E_n(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_6(t, E_{n-1}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_6(y, E_{n-1}(y)) dy, \\
I_n(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_7(t, I_{n-1}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_7(y, I_{n-1}(y)) dy, \\
H_n(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_8(t, H_{n-1}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_8(y, H_{n-1}(y)) dy, \\
R_n(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_9(t, R_{n-1}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_9(y, R_{n-1}(y)) dy.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ayrıca, her bir denklemin farklılıkları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
(M_{S_{n+1}} - M_{S_n})(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_1(t, M_{S_n}(t)) - \mathfrak{S}_1(t, M_{S_{n-1}}(t))) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_1(y, M_{S_n}(y)) - \mathfrak{S}_1(y, M_{S_{n-1}}(y))) dy, \\
(M_{i_{n+1}} - M_{i_n})(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_2(t, M_{i_n}(t)) - \mathfrak{S}_2(t, M_{i_{n-1}}(t))) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_2(y, M_{i_n}(y)) - \mathfrak{S}_2(y, M_{i_{n-1}}(y))) dy, \\
(B_{S_{n+1}} - B_{S_n})(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_3(t, B_{S_n}(t)) - \mathfrak{S}_3(t, B_{S_{n-1}}(t))) \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_3(y, B_{S_n}(y)) - \mathfrak{S}_3(y, B_{S_{n-1}}(y))) dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B_{i_{n+1}} - B_{i_n})(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_4(t, B_{i_n}(t)) - \mathfrak{S}_4(t, B_{i_{n-1}}(t))) \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_4(y, B_{i_n}(y)) - \mathfrak{S}_4(y, B_{i_{n-1}}(y))) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S_{n+1} - S_n)(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_5(t, S_n(t)) - \mathfrak{S}_5(t, S_{n-1}(t))) \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_5(t, S_n(y)) - \mathfrak{S}_5(t, S_{n-1}(y))) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_{n+1} - E_n)(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_6(t, E_n(t)) - \mathfrak{S}_6(t, E_{n-1}(t))) \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_6(y, E_n(y)) - \mathfrak{S}_6(y, E_{n-1}(y))) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I_{n+1} - I_n)(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_7(t, I_n(t)) - \mathfrak{S}_7(t, I_{n-1}(t))) \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_7(t, I_n(y)) - \mathfrak{S}_7(t, I_{n-1}(y))) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(H_{n+1} - H_n)(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_8(t, H_n(t)) - \mathfrak{S}_8(t, H_{n-1}(t))) \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_8(t, H_n(y)) - \mathfrak{S}_8(t, H_{n-1}(y))) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(R_{n+1} - R_n)(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} (\mathfrak{S}_9(t, R_n(t)) - \mathfrak{S}_9(t, R_{n-1}(t))) \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t (\mathfrak{S}_9(t, R_n(y)) - \mathfrak{S}_9(t, R_{n-1}(y))) dy.\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemlerin her iki tarafının normunu aldığımızda,

$$\begin{aligned}\|(M_{S_{n+1}} - M_{S_n})(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_1(t, M_{S_n}(t)) - \mathfrak{S}_1(t, M_{S_{n-1}}(t)))\| \\ &+ \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_1(y, M_{S_n}(y)) - \mathfrak{S}_1(y, M_{S_{n-1}}(y)))\| dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(M_{i_{n+1}} - M_{i_n})(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_2(t, M_{i_n}(t)) - \mathfrak{S}_2(t, M_{i_{n-1}}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_2(t, M_{i_n}(y)) - \mathfrak{S}_2(t, M_{i_{n-1}}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(B_{S_{n+1}} - B_{S_n})(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_3(t, B_{S_n}(t)) - \mathfrak{S}_3(t, B_{S_{n-1}}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_3(t, B_{S_n}(y)) - \mathfrak{S}_3(t, B_{S_{n-1}}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(B_{i_{n+1}} - B_{i_n})(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_4(t, B_{i_n}(t)) - \mathfrak{S}_4(t, B_{i_{n-1}}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_4(t, B_{i_n}(y)) - \mathfrak{S}_4(t, B_{i_{n-1}}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(S_{n+1} - S_n)(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_5(t, S_n(t)) - \mathfrak{S}_5(t, S_{n-1}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_5(t, S_n(y)) - \mathfrak{S}_5(t, S_{n-1}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(E_{n+1} - E_n)(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_6(t, E_n(t)) - \mathfrak{S}_6(t, E_{n-1}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_6(t, E_n(y)) - \mathfrak{S}_6(t, E_{n-1}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(I_{n+1} - I_n)(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_7(t, I_n(t)) - \mathfrak{S}_7(t, I_{n-1}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_7(t, I_n(y)) - \mathfrak{S}_7(t, I_{n-1}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(H_{n+1} - H_n)(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_8(t, H_n(t)) - \mathfrak{S}_8(t, H_{n-1}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_8(t, H_n(y)) - \mathfrak{S}_8(t, H_{n-1}(y)))\| dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(R_{n+1} - R_n)(t)\| &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|(\mathfrak{S}_9(t, R_n(t)) - \mathfrak{S}_9(t, R_{n-1}(t)))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|(\mathfrak{S}_9(t, R_n(y)) - \mathfrak{S}_9(t, R_{n-1}(y)))\| dy. \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

**Teorem 4.2** *West Nile virüs modelinde, aşağıdaki eşitsizlik sağlandığında bir çözümü vardır:*

$$\Upsilon = \max\{\Psi_i\} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, 9. \quad (4.6)$$

**İspat** Teoremin ispatını göstermek için öncelikle aşağıdaki denklemler ele alınsın.

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{1n}(t) &= M_{S_{n+1}}(t) - M_{S_n}(t), & \mathfrak{K}_{2n}(t) &= M_{i_{n+1}}(t) - M_{i_n}(t), \\ \mathfrak{K}_{3n}(t) &= B_{S_{n+1}}(t) - B_{S_n}(t), & \mathfrak{K}_{4n}(t) &= B_{i_{n+1}}(t) - B_{i_n}(t), \\ \mathfrak{K}_{5n}(t) &= S_{n+1}(t) - S_n(t), & \mathfrak{K}_{6n}(t) &= E_{n+1}(t) - E_n(t), \\ \mathfrak{K}_{7n}(t) &= I_{n+1}(t) - I_n(t), & \mathfrak{K}_{8n}(t) &= H_{n+1}(t) - H_n(t), \\ \mathfrak{K}_{9n}(t) &= R_{n+1}(t) - R_n(t). \end{aligned}$$

İlk olarak,  $\mathfrak{K}_{1n}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{K}_{1n}(t)\| &\leq \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|\mathfrak{S}_1(t, M_{S_n}(t)) - \mathfrak{S}_1(t, M_S(t))\| \\ &\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|\mathfrak{S}_1(y, M_{S_n}(y)) - \mathfrak{S}_1(y, M_S(y))\| dy \\ &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right) \Psi_1 \|M_{S_n} - M_S\| \\ &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|M_S - M_{S_1}\|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{K}_{2n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|M_i - M_{i_1}\|, \\ \|\mathfrak{K}_{3n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|B_S - B_{S_1}\|, \\ \|\mathfrak{K}_{4n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|B_i - B_{i_1}\|, \\ \|\mathfrak{K}_{5n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|S - S_1\|, \\ \|\mathfrak{K}_{6n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|E - E_1\|, \\ \|\mathfrak{K}_{7n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|I - I_1\|, \\ \|\mathfrak{K}_{8n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|H - H_1\|, \\ \|\mathfrak{K}_{9n}(t)\| &\leq \left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right)^n \Upsilon^n \|R - R_1\|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Böylece,  $\mathfrak{R}_{\text{in}}(t) \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, 9$ , için  $n \rightarrow \infty$  bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

#### 4.1.2. West Nile Virüs Modeli için Çözümünün Tekliği

Bu bölümde West Nile virüs (WNV) matematiksel modelinin benzersiz çözümü gösterilecektir.

**Teorem 4.3** (4.2) *Denklemler sisteminde gösterilen West Nile virüs (WNV) matematiksel modeli, aşağıdaki eşitsizlik sağlandığında benzersiz bir çözüme sahip olacaktır:*

$$\left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \right) \Psi_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 11.$$

**İspat** Diyelim ki (4.2) sisteminin çözümleri  $M_S(t), M_i(t), B_S(t), B_i(t), S(t), E(t), I(t), H(t), R(t)$  bununla birlikte,  $\tilde{M}_S(t), \tilde{M}_i(t), \tilde{B}_S(t), \tilde{B}_i(t), \tilde{S}(t), \tilde{E}(t), \tilde{I}(t), \tilde{H}(t), \tilde{R}(t)$  şeklinde olsun. Böylece, aşağıdaki sistem yazılabilir.

$$\begin{aligned} \tilde{M}_S(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_1(t, \tilde{M}_S(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_1(y, \tilde{M}_S(y)) dy, \\ \tilde{M}_i(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_2(t, \tilde{M}_i(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_2(y, \tilde{M}_i(y)) dy, \\ \tilde{B}_S(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_3(t, \tilde{B}_S(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_3(y, \tilde{B}_S(y)) dy, \\ \tilde{B}_i(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_4(t, \tilde{B}_i(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_4(y, \tilde{B}_i(y)) dy, \\ \tilde{S}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_5(t, \tilde{S}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_5(y, \tilde{S}(y)) dy, \\ \tilde{E}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_6(t, \tilde{E}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_6(y, \tilde{E}(y)) dy, \\ \tilde{I}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_7(t, \tilde{I}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_7(y, \tilde{I}(y)) dy, \\ \tilde{H}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_8(t, \tilde{H}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_8(y, \tilde{H}(y)) dy, \\ \tilde{R}(t) &= \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \mathfrak{S}_9(t, \tilde{R}(t)) + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \mathfrak{S}_9(y, \tilde{R}(y)) dy. \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem sisteminin her iki tarafında normu alınırsa;

$$\begin{aligned}
\|M_S(t) - \tilde{M}_S(t)\| &\leq \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|\mathfrak{S}_1(t, M_S(t)) - \mathfrak{S}_1(t, \tilde{M}_S(t))\| \\
&\quad + \frac{2\rho}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \int_0^t \|\mathfrak{S}_1(y, M_S(y)) - \mathfrak{S}_1(y, \tilde{M}_S(y))\| dy \\
&\leq \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \Psi_1 \|M_S - \tilde{M}_S\| + \frac{2\rho\Psi_1}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \|M_S - \tilde{M}_S\|.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir,

$$\left( \frac{2(1-\rho)}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} \Psi_1 + \frac{2\rho\Psi_1}{2M(\rho) - \rho M(\rho)} - 1 \right) \|M_S - \tilde{M}_S\| \geq 0.$$

Böylece  $\|M_S - \tilde{M}_S\| = 0$ , ise  $M_S(t) = \tilde{M}_S(t)$  olduğu açıktır. Aynı yöntem uygulandığında  $M_i(t) = \tilde{M}_i(t)$ ,  $B_S(t) = \tilde{B}_S(t)$ ,  $B_i(t) = \tilde{B}_i(t)$ ,  $S(t) = \tilde{S}(t)$ ,  $E(t) = \tilde{E}(t)$ ,  $I(t) = \tilde{I}(t)$  ve  $H(t) = \tilde{H}(t)$ ,  $R(t) = \tilde{R}(t)$  olarak yazılır. Bu sonuçlara göre, modelin benzersiz bir çözümü vardır.

#### 4.1.3. West Nile Virus Modelinin Nümerik Çözümü

Caputo-Fabrizio kesirli türevi için genişletilmiş West Nile Virüs modeli sistem (4.2)'de tanımlanmıştır. Sistem (4.2) temel analiz teoremi ile yeniden düzenlenmiş ve (4.10) denklem

sistemi  $G_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  çekirdekleri için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_S(t) - M_S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_1(t, M_s(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_1(\tau, M_s(\tau)), \\ M_i(t) - M_i(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_2(t, M_t(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_2(\tau, M_t(\tau)), \\ B_S(t) - B_S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_3(t, B_s(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_3(\tau, B_s(\tau)), \\ B_i(t) - B_i(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_4(t, B_t(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_4(\tau, B_t(\tau)), \\ S(t) - S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_5(t, S(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_5(\tau, S(\tau)), \\ E(t) - E(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_6(t, E(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_6(\tau, E(\tau)), \\ I(t) - I(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_7(t, I(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_7(\tau, I(\tau)), \\ H(t) - H(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_8(t, H(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_8(\tau, H(\tau)), \\ R(t) - R(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_9(t, R(t)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^t G_9(\tau, R(\tau)). \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Böylece ,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_{n+1}} - M_S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_1(t_n, M_s(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_1(\tau, M_s(\tau)), \\ M_{i_{n+1}} - M_i(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_2(t_n, M_t(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_2(\tau, M_t(\tau)), \\ B_{S_{n+1}} - B_S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_3(t_n, B_s(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_3(\tau, B_s(\tau)), \\ B_{i_{n+1}} - B_i(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_4(t_n, B_t(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_4(\tau, B_t(\tau)), \\ S_{n+1}(t) - S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_5(t_n, S(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_5(\tau, S(\tau)), \\ E_{n+1}(t) - E(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_6(t_n, E(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_6(\tau, E(\tau)), \\ I_{n+1}(t) - I(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_7(t_n, I(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_7(\tau, I(\tau)), \\ H_{n+1}(t) - H(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_8(t_n, H(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_8(\tau, H(\tau)), \\ R_{n+1}(t) - R(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_9(t_n, R(t_n)) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_{n+1}} G_9(\tau, R(\tau)). \end{array} \right. \quad (4.11)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_n} - M_S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_1(t_{n-1}, M_s(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_1(\tau, M_s(\tau)), \\ M_{i_n} - M_i(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_2(t_{n-1}, M_t(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_2(\tau, M_t(\tau)), \\ B_{S_n} - B_S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_3(t_{n-1}, B_s(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_3(\tau, B_s(\tau)), \\ B_{i_n} - B_i(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_4(t_{n-1}, B_t(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_4(\tau, B_t(\tau)), \\ S_n - S(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_5(t_{n-1}, S(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_5(\tau, S(\tau)), \\ E_n - E(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_6(t_{n-1}, E(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_6(\tau, E(\tau)), \\ I_n - I(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_7(t_{n-1}, I(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_7(\tau, I(\tau)), \\ H_n - H(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_8(t_{n-1}, H(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_8(\tau, H(\tau)), \\ R_n - R(0) = \frac{1-\rho}{M(\rho)} G_9(t_{n-1}, R(t_{n-1})) + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_0^{t_n} G_9(\tau, R(\tau)). \end{array} \right. \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada (4.11) denklem sisteminden (4.12) denklem sistemi çıkarılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir. Buradan,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_{n+1}} - M_{S_n} = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_1(t_n, M_s(t_n)) - G_1(t_{n-1}, M_s(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_1(t, M_s(t)), \\ M_{i_{n+1}} - M_{i_n} = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_2(t_n, M_t(t_n)) - G_2(t_{n-1}, M_t(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_2(t, M_t(t)), \\ B_{S_{n+1}} - B_{S_n} = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_3(t_n, B_s(t_n)) - G_3(t_{n-1}, B_s(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_3(t, B_s(t)), \\ B_{i_{n+1}} - B_{i_n} = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_4(t_n, B_t(t_n)) - G_4(t_{n-1}, B_t(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_4(t, B_t(t)), \\ S_{n+1} - S_n = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_5(t_n, S(t_n)) - G_5(t_{n-1}, S(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_5(t, S(t)), \\ E_{n+1} - E_n = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_6(t_n, E(t_n)) - G_6(t_{n-1}, E(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_6(t, E(t)), \\ I_{n+1} - I_n = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_7(t_n, I(t_n)) - G_7(t_{n-1}, I(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_7(t, I(t)), \\ H_{n+1} - H_n = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_8(t_n, H(t_n)) - G_8(t_{n-1}, H(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_8(t, H(t)), \\ R_{n+1} - R_n = \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_9(t_n, R(t_n)) - G_9(t_{n-1}, R(t_{n-1}))\} + \frac{\rho}{M(\rho)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_9(t, R(t)). \end{array} \right.$$

yazılabilir. (4.12) ve (4.11) denklem sistemlerinden,

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_1(t, M_s(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_1(t_n, M_{S_n})}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_1(t_{n-1}, M_{S_{n-1}})}{h} (t - t_n) \right\} \\
& = \frac{3h}{2} G_1(t_n, M_{S_n}) - \frac{h}{2} G_1(t_{n-1}, M_{S_{n-1}}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_2(t, M_t(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_2(t_n, M_{t_n})}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_2(t_{n-1}, M_{t_{n-1}})}{h} (t - t_n) \right\} \\
& = \frac{3h}{2} G_2(t_n, M_{t_n}) - \frac{h}{2} G_2(t_{n-1}, M_{t_{n-1}}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_3(t, B_s(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_3(t_n, B_{s_n})}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_3(t_{n-1}, B_{s_{n-1}})}{h} (t - t_n) \right\} \\
& = \frac{3h}{2} G_3(t_n, B_{s_n}) - \frac{h}{2} G_3(t_{n-1}, B_{s_{n-1}}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_4(t, B_t(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_4(t_n, B_{t_n})}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_4(t_{n-1}, B_{t_{n-1}})}{h} (t - t_n) \right\} \\
& = \frac{3h}{2} G_4(t_n, B_{t_n}) - \frac{h}{2} G_4(t_{n-1}, B_{t_{n-1}}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_5(t, S(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_5(t_n, S_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_5(t_{n-1}, S_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
& = \frac{3h}{2} G_5(t_n, S_n) - \frac{h}{2} G_5(t_{n-1}, S_{n-1}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_6(t, E(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_6(t_n, E_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_6(t_{n-1}, E_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\} \\
& = \frac{3h}{2} G_6(t_n, E_n) - \frac{h}{2} G_6(t_{n-1}, E_{n-1}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_7(t, I(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_7(t_n, I_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_7(t_{n-1}, I_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\}, \\
& = \frac{3h}{2} G_7(t_n, I_n) - \frac{h}{2} G_7(t_{n-1}, I_{n-1}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_8(t, H(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_8(t_n, H_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_8(t_{n-1}, H_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\}, \\
& = \frac{3h}{2} G_8(t_n, H_n) - \frac{h}{2} G_8(t_{n-1}, H_{n-1}), \\
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} G_9(t, R(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{G_9(t_n, R_n)}{h} (t - t_{n-1}) - \frac{G_9(t_{n-1}, R_{n-1})}{h} (t - t_n) \right\}, \\
& = \frac{3h}{2} G_9(t_n, R_n) - \frac{h}{2} G_9(t_{n-1}, R_{n-1}).
\end{aligned} \right.$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left\{ \begin{aligned}
M_{S_{n+1}} - M_{S_n} &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_1(t_n, M_{S_n}) - G_1(t_{n-1}, M_{S_{n-1}})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_1(t_n, M_{S_n}) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_1(t_{n-1}, M_{S_{n-1}}) \\
M_{t_{n+1}} - M_{t_n} &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_2(t_n, M_{t_n}) - G_2(t_{n-1}, M_{t_{n-1}})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_2(t_n, M_{t_n}) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_2(t_{n-1}, M_{t_{n-1}}) \\
B_{S_{n+1}} - M_{S_n} &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_3(t_n, B_{S_n}) - G_3(t_{n-1}, B_{S_{n-1}})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_3(t_n, B_{S_n}) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_3(t_{n-1}, B_{S_{n-1}}) \\
B_{t_{n+1}} - B_{t_n} &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_4(t_n, B_{t_n}) - G_4(t_{n-1}, M_t(t_{n-1}))\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_4(t_n, B_{t_n}) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_4(t_{n-1}, B_{t_{n-1}}) \\
S_{n+1} - S_n &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_5(t_n, S_n) - G_5(t_{n-1}, S_{n-1})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_5(t_n, S_n) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_5(t_{n-1}, S_{n-1}) \\
E_{n+1} - E_n &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_6(t_n, E_n) - G_6(t_{n-1}, E_{n-1})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_6(t_n, E_n) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_6(t_{n-1}, E_{n-1}) \\
I_{n+1} - I_n &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_7(t_n, I_n) - G_7(t_{n-1}, I_{n-1})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_7(t_n, I_n) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_7(t_{n-1}, I_{n-1}) \\
H_{n+1} - H_n &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_8(t_n, H_n) - G_8(t_{n-1}, H_{n-1})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_8(t_n, H_n) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_8(t_{n-1}, H_{n-1}) \\
R_{n+1} - R_n &= \frac{1-\rho}{M(\rho)} \{G_9(t_n, R_n) - G_9(t_{n-1}, R_{n-1})\} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} G_9(t_n, R_n) \\
&\quad - \frac{\rho h}{2M(\rho)} G_9(t_{n-1}, R_{n-1})
\end{aligned} \right.$$

bulunabilir. Sonuç olarak aşağıdaki sistem elde edilebilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_{n+1}} = M_{S_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_1(t_n, M_{S_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_1(t_{n-1}, M_{S_{n-1}}), \\ M_{t_{n+1}} = M_{t_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_2(t_n, M_{t_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_2(t_{n-1}, M_{t_{n-1}}), \\ B_{S_{n+1}} = B_{S_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_3(t_n, B_{S_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_3(t_{n-1}, B_{S_{n-1}}), \\ B_{i_{n+1}} = B_{i_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_4(t_n, B_{t_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_4(t_{n-1}, B_{t_{n-1}}), \\ S_{n+1} = S_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_5(t_n, S_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_5(t_{n-1}, S_{n-1}), \\ E_{n+1} = E_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_6(t_n, E_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_6(t_{n-1}, E_{n-1}), \\ I_{n+1} = I_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_7(t_n, I_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_7(t_{n-1}, I_{n-1}), \\ H_{n+1} = H_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_8(t_n, H_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_8(t_{n-1}, H_{n-1}), \\ R_{n+1} = R_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_9(t_n, R_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_9(t_{n-1}, R_{n-1}), \end{array} \right.$$

Yukarıdaki denklem sistemi Teorem (3.3)' e göre düzenlenirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_{n+1}} = M_{S_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_1(t_n, M_{S_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_1(t_{n-1}, M_{S_{n-1}}) + {}^1 R_\rho^n, \\ M_{i_{n+1}} = M_{i_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_2(t_n, M_{t_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_2(t_{n-1}, M_{t_{n-1}}) + {}^2 R_\rho^n, \\ B_{S_{n+1}} = B_{S_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_3(t_n, B_{S_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_3(t_{n-1}, B_{S_{n-1}}) + {}^3 R_\rho^n, \\ B_{i_{n+1}} = B_{i_n} + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_4(t_n, B_{t_n}) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_4(t_{n-1}, B_{t_{n-1}}) + {}^4 R_\rho^n, \\ S_{n+1} = S_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_5(t_n, S_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_5(t_{n-1}, S_{n-1}) + {}^5 R_\rho^n, \\ E_{n+1} = E_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_6(t_n, E_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_6(t_{n-1}, E_{n-1}) + {}^6 R_\rho^n, \\ I_{n+1} = I_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_7(t_n, I_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_7(t_{n-1}, I_{n-1}) + {}^7 R_\rho^n, \\ H_{n+1} = H_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_8(t_n, H_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_8(t_{n-1}, H_{n-1}) + {}^8 R_\rho^n, \\ R_{n+1} = R_n + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{3\rho h}{2M(\rho)} \right) G_9(t_n, R_n) + \left( \frac{(1-\rho)}{M(\rho)} + \frac{\rho h}{2M(\rho)} \right) G_9(t_{n-1}, R_{n-1}) + {}^9 R_\rho^n, \end{array} \right.$$

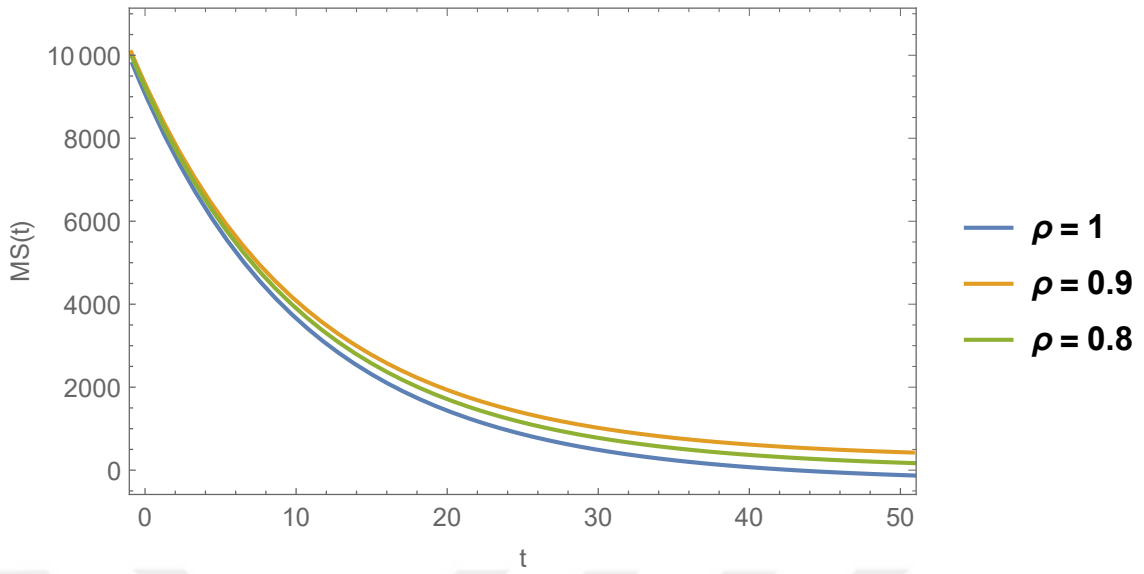
bulunur. Buradan,

$$\| {}^i R_\rho^n \|_\infty < \frac{\rho}{M(\rho)} (+1)! h^{n+1} M, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

elde edilir.

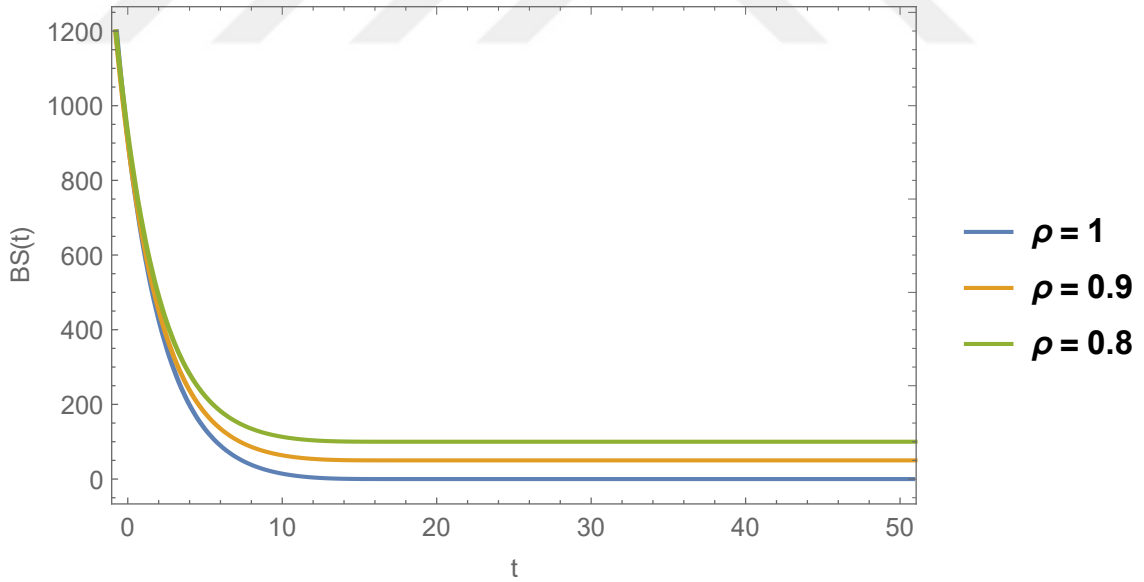
(4.2) West Nile Virüs matematiksel modelinin simülasyonları aşağıda ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Simülasyonlardaki başlangıç koşulları ve sabit değerler Blayneh ve

dig. (2010) çalışmasında alınmıştır.



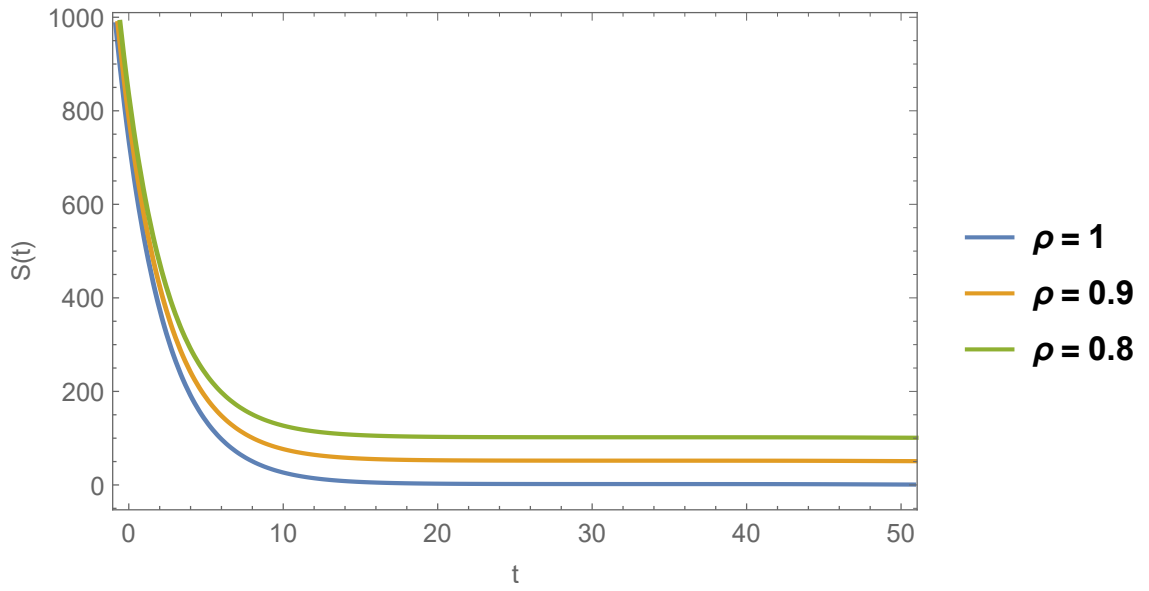
Şekil 4.1.  $M_S$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.1) her  $\rho$  değeri için  $M_S$  bulaşma olasılığı olan enfekte olmamış sivrisineğin azaldığı görülür.



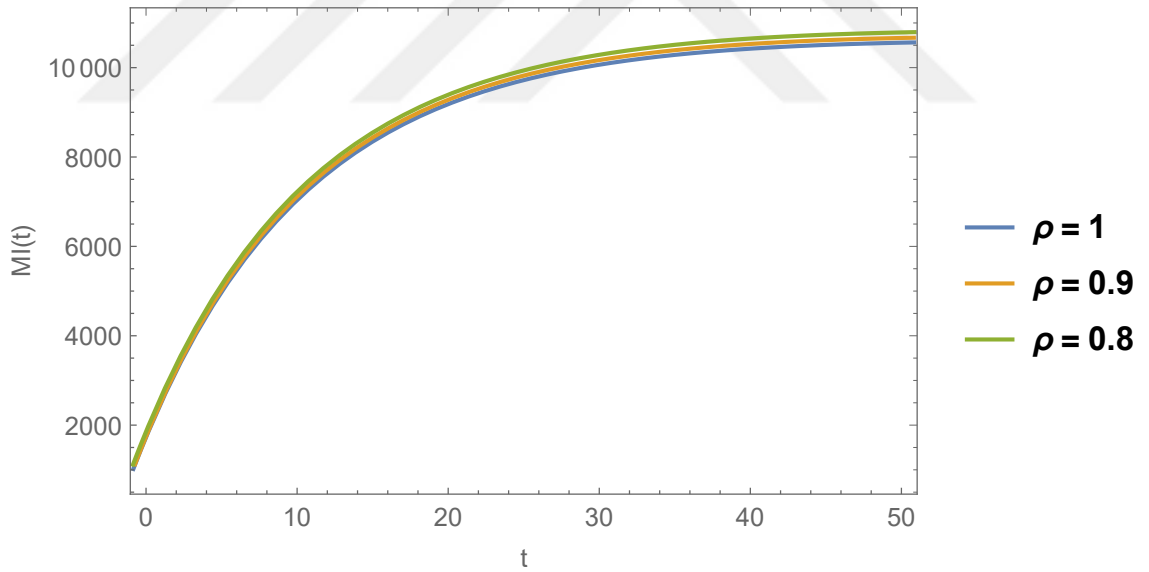
Şekil 4.2.  $B_S$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.2) her  $\rho$  değeri için  $B_S$  bulaşma olasılığı olan enfekte olmamış kuşların azaldığı görülür.



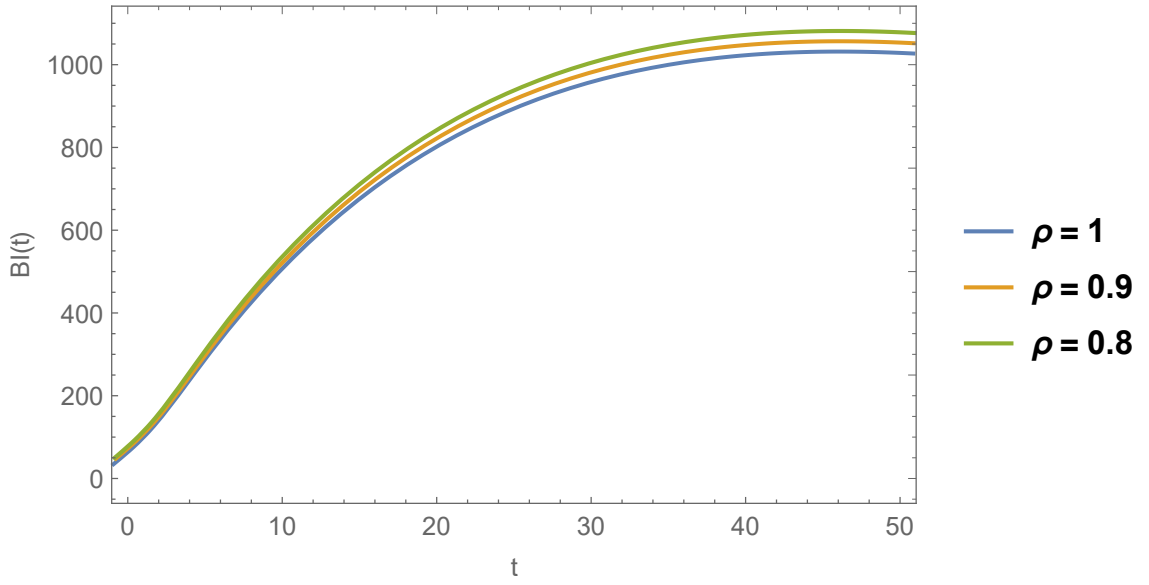
**Şekil 4.3.  $S$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları**

Şekil (4.3) her  $\rho$  değeri için  $S$  bulaşma olasılığı olan enfekte olmamış insanların azaldığı görülür.



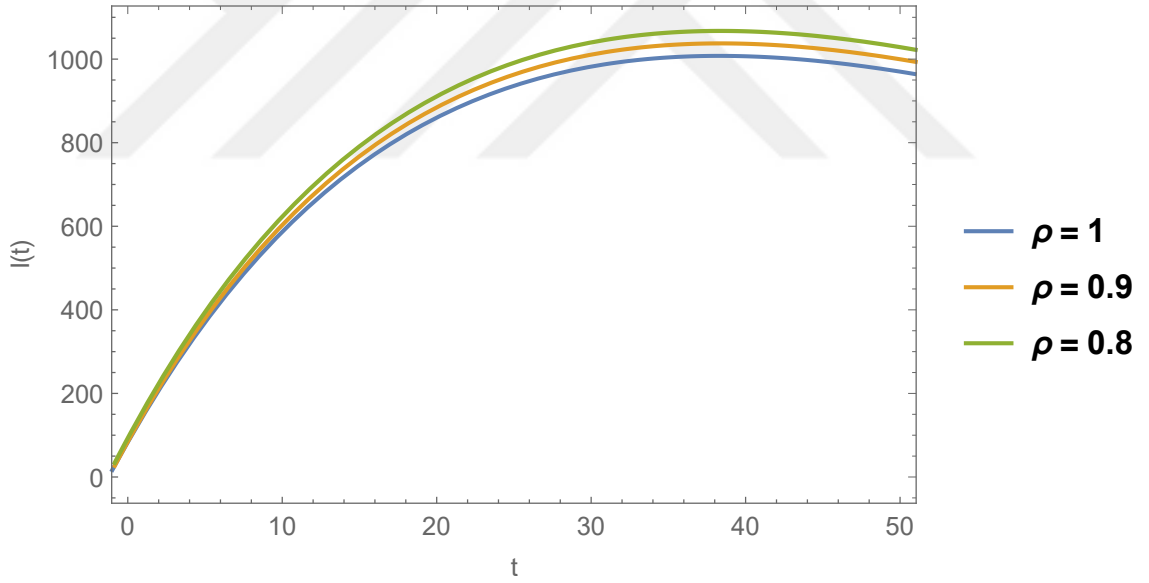
**Şekil 4.4.  $M_I$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları**

Şekil (4.4) her  $\rho$  değeri için  $M_I$  enfekte olmuş sivrisineğin arttığı görülür.



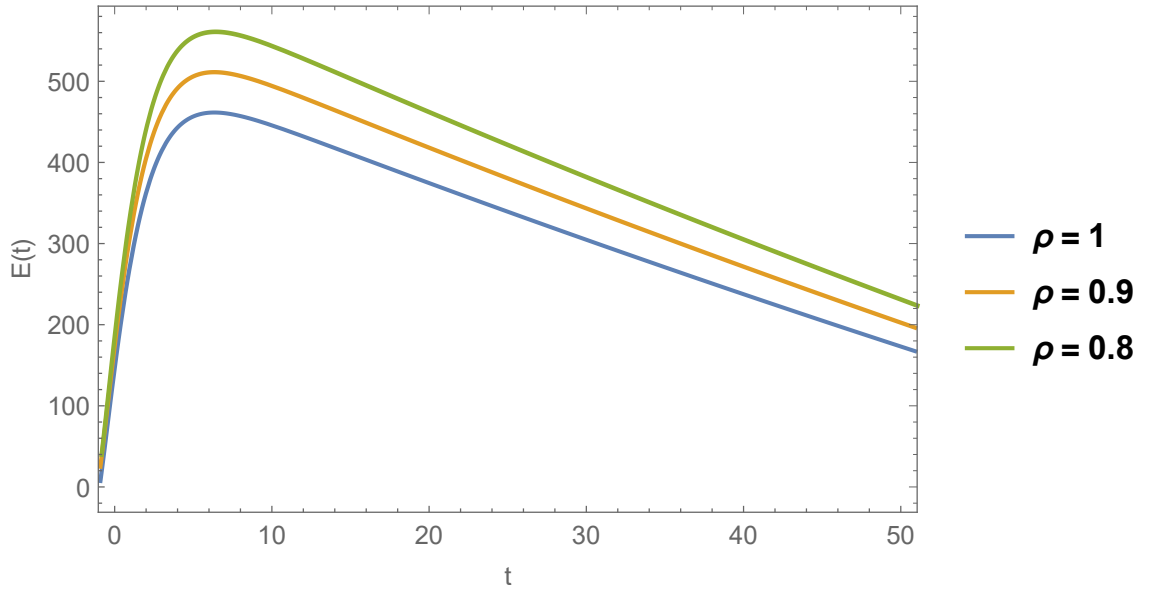
**Şekil 4.5.**  $B_I$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.5) her  $\rho$  değeri için  $B_I$  enfekte olmuş kuşların arttığı görülür.



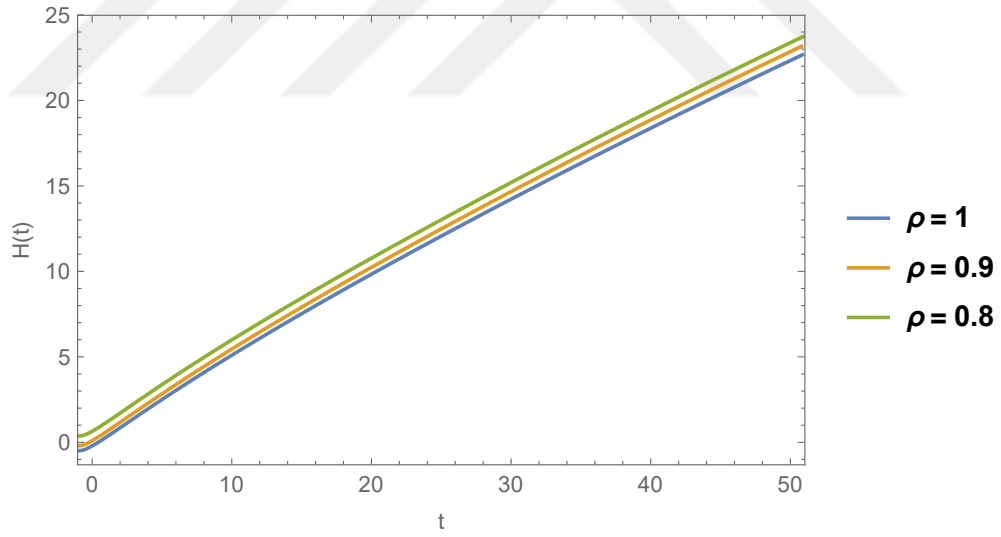
**Şekil 4.6.**  $I$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.6) her  $\rho$  değeri için  $I$  bulaşıcı olarak adlandırılan insanların sayısının arttığı görülür.



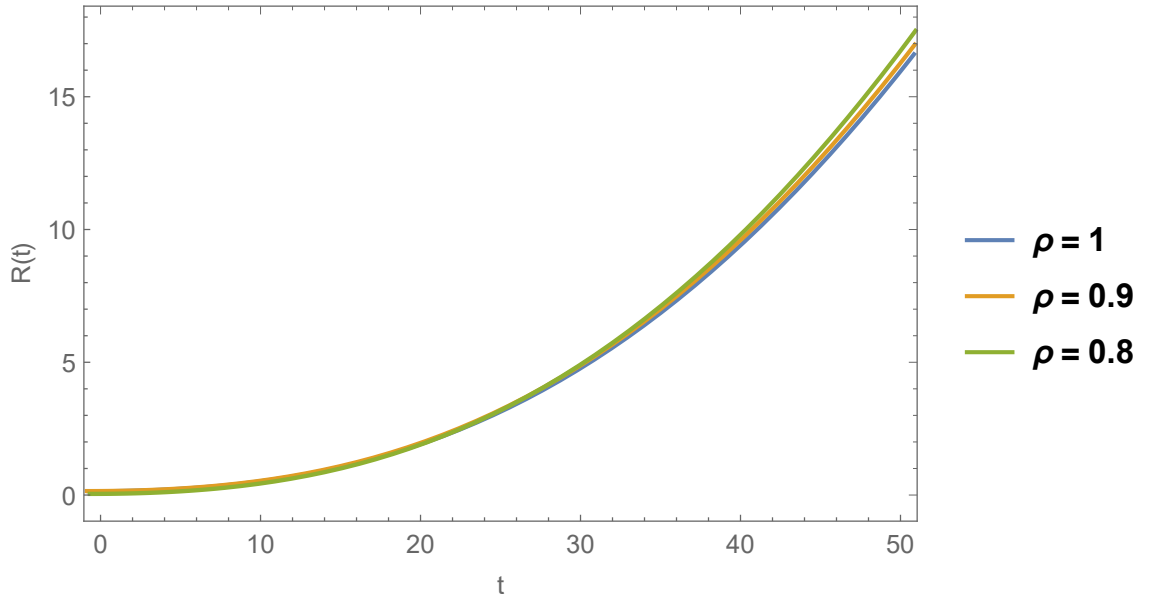
Şekil 4.7.  $E$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.7) her  $\rho$  değeri için  $E$  virüs ile enfekte olmuş insan sayısının öncelikle artıp belli bir  $t$  degerinden sonra azaldığı görülür.



Şekil 4.8.  $H$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.8) her  $\rho$  değeri için  $H$  enfekte olup hastahane tedavisi gören insan sayısının arttığı görülür.



**Şekil 4.9.**  $R$  fonksiyonunun farklı  $\rho$  değerleri için simülasyonları

Şekil (4.9) her  $\rho$  değeri için  $R$  virüse yakalanıp hastalık neticesinde iyileşen insan sayısının arttığı görülür.

## 5. SONUÇ

Bu tezde West Nile Virüs matematiksel modelinin analizi yapılmıştır. İlk olarak tam sayılı mertebeden matematiksel model kesirli mertebeden Caputo-Fabrizio operatörüne genişletilmiştir. Genişletilen modelin sabit nokta teoremleri yardımıyla varlık ve teklik çözümleri incelenmiştir. Daha sonra model Adam-Basford yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür. Son olarak farklı kesirli mertebeden türev değerleri için simülasyonları gösterilmiştir. Sonuç olarak insanlar ve evcil hayvanlar arasında ara konakçı olarak kuşlar ile yayılan bu virüsün matematiksel modellemesi ile analizi yapılarak önemli bilgiler elde edilmiştir. İlk olarak enfekte olmamış sivrisinek, kuş ve insan popülasyonları azalırken enfekte olmuş sivrisinek, kuş ve insan popülasyonlarında önemli bir artış gözlemlenmiştir. alınan öncemler ve yapılan tedavi uygulamaları sonucunda belli bir zamandan sonra enfekte olan insan popülasyonunda azalma olduğu saptanmıştır. Bu durumla paralel olarak enfekte olan sivrisinek ve kuş popülasyonlarında da gözle görülür bir azalma olmuştur. Son olarak iyileşen insan popülasyonu hızla artarak devam etmiştir. Bu sonuçlar bir matematiksel modelin kesirli türev operatörleri ile analizinin yapılmasının süreç hakkında daha kolay ve güvenilir yorum yapılmasını sağlamıştır. Bu tezi okuyan genç araştırmacıların West Nile Virüs modelini farklı kesirli türev ve integral operatörlerine uygulayarak burada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmasının önemli bir çalışma olabileceği kanaatindeyiz.

## KAYNAKLAR

- Bagley, R. L. ve Torvik, P. J. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30(1):133–155.
- Blayneh, K. W., Gumel, A. B., Lenhart, S., ve Clayton, T. (2010). Backward bifurcation and optimal control in transmission dynamics of west nile virus. *Bulletin of mathematical biology*, 72(4):1006–1028.
- Caputo, M. (1966). Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent. *Annals of Geophysics*, 19(4):383–393.
- Caputo, M. ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1(2):1–13.
- Caputo, M. ve Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91(1):134–147.
- Guillemin, V. ve dig. (1980). Im gel fand and ge shilov, generalized functions. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 3(1, Part 1):758–762.
- Hewitt, E. ve Stromberg, K. (2013). *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag.
- Hilfer, R. ve others (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific Singapore.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). North-holland mathematics studies 204. *Theory and applications of fractional differential equations*.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.