

39054

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

39834

**WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ
DARBOUX FONKSİYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Füsun ÖZEN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1994

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Aynur Uysal

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkadir Özdeğer

: Prof. Dr. Afet Özok

DOKÜMANİSTON MÜHÜRÜ

HAZİRAN 1994

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde engin bilgisinden yararlandığım ve yakın desteğini gördüğüm saygıdeğer hocam Doç. Dr. Aynur UYSAL'a en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.

Füsun ÖZEN



WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ DARBOUX FONKSİYONU

Füsun ÖZEN

Anahtar Kelimeler:Komplemanter vektör, genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş kovaryant türev, tendans, normal eğrilik, Chebyshev şebekesi, geodezik eğrilik, geodezik burulma, kongrüans, genelleştirilmiş Darboux fonksiyonu.

Özet:Bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümlerinde vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevleri ve bir Weyl uzayına ait bir hiperyüzeyde Chebyshev şebekeleri ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde s_h bir Weyl uzayına ait bir dikgen sistemdeki bir c_h eğrisi boyunca yay uzunluğunu göstermek üzere $\int_h \frac{\delta D \tilde{\lambda}}{\delta s_h} \tilde{\lambda}$ ifadesi ele alınmış ve genelleştirilmiş Darboux fonksiyonu elde edilmiştir.

GENERALISED DARBOUX FUNCTION IN A WEYL HYPERSURFACE

Füsun ÖZEN

Keywords:Complementary vector, prolonged derivative, prolonged covariant derivative, tendency, normal curvature, Chebyshev net, geodesic curvature, geodesic torsion, congruence, generalised Darboux function.

Abstract:In this work, after having given the fundamental definitions related to the prolonged covariant derivatives of the vector fields and Cheyshev nets in a hypersurface of a Weyl space, some theorem concerning these concepts are proved. We next consider $\int_h \frac{\delta D \tilde{\lambda}}{\delta s_h} \tilde{\lambda}$ where s_h is the arc length along a curve c_h of the orthogonal ennuple in a Weyl space and we have obtained the generalised Darboux function.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. WEYL UZAYLARI	1
1.1 Giriş	1
1.2 Genelleştirilmiş Türev ve Genelleştirilmiş Kovaryant Türev	2
1.3 Weyl Uzayında Türev Formülleri	4
BÖLÜM 2. WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE DOĞRULTU FONKSİYONLARI.....	10
2.1 Weyl Hiperyüzeyleri	10
2.2 Weyl Hiperyüzeylerinde Bir Doğrultu Fonksiyonu	14
BÖLÜM 3. BİR WEYL HİPERYÜZEYİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ DARBOUX FONKSİYONU	18
3.1 Genelleştirilmiş Darboux Fonksiyonu	18
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	26

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde, Weyl uzayının metrik tensörüne ait uyduların genelleştirilmiş türevleri ve genelleştirilmiş kovaryant türevleri tanımlanarak, n li bir şebekeye ait vektör alanlarına ve bunların karşıtlarına ait türev formülleri verilmiştir.

İkinci bölümde, Weyl uzayının birinci ve ikinci cins Chebyshev şebekesi tanımları verilerek bu tür şebekelerin, kendilerine karşı gelen eğrilikler yardımıyla karakterizasyonları üzerinde durulmuştur. Bu bölümde ayrıca $-\delta_r \mathcal{K} + 2\zeta_{rs}^s \mathcal{K} + 2\frac{P}{r} \mathcal{K}$ ifadesinin bir doğrultu fonksiyonu olduğu ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde ise, W_n hiperyüzeyinin her noktasından bir eğrisi geçmek üzere W_{n+1} Weyl uzayının (λ) kongrüans eğrisine ait $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün kontravaryant bileşeninin C ve C' eğrileri doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevleri bulunmuş, ayrıca $\vec{\nabla}_j$ genelleştirilmiş kovaryant türev sembolü olmak üzere D operatörü tanımlanmıştır. Bu operatör yardımıyla W_{n+1} 'e ait bir (λ) kongrüansının $\vec{\lambda}$ teğet vektörü için $\vec{V}$ doğrultusuna göre $\vec{V}_h$ doğrultusundaki genelleştirilmiş Darboux fonksiyonunun ifadesi çıkarılmıştır. Bu ifadeden yararlanarak λ 'nın W_n 'e ait normaller kongrüansı olması halinde genelleştirilmiş Darboux fonksiyonunun özel hali elde edilmiştir.

SUMMARY

DARBOUX FUNCTION IN A WEYL HYPERSURFACE

An n -dimensional manifold W_n is said to be a Weyl space, if it has a conformal metric tensor g_{ij} and a symmetric connection satisfying the compatibility given by the equation $\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0$, where T_k denotes a covariant vector and $\nabla_k g_{ij}$ denotes usual covariant derivative. Under renormalization of the fundamental tensor of the form $\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ the complementary vector T_i is transformed by the law $\check{T}_i = T_i + \partial_i \ln \lambda$, where λ is a function of the point. In n -dimensional Weyl space W_n , the independent vector fields V^i_r ($r = 1, 2, \dots, n$) determine an n -dimensional net $(V_1, V_2, \dots, V_n)$

Let A be a satellite of g_{ij} with weight $\{k\}$. $\dot{\partial}_i A$ given by the equation

$$\dot{\partial}_i A = \partial_i A - k T_i A,$$

is said to be the prolonged derivative of A and $\dot{\nabla}_s A$, given by the equation

$$\dot{\nabla}_s A = \nabla_s A - k T_s A$$

is called the prolonged covariant derivative of A .

The prolonged covariant derivatives of the vector fields V^i_α and their reciprocals $\check{V}^\alpha_i$ are, respectively, given by

$$\dot{\nabla}_k V^i_\alpha = \check{T}^\sigma_{\alpha k} V^i_\sigma, \dot{\nabla}_k \check{V}^\alpha_i = \check{T}^\sigma_{k i} \check{V}^\alpha_\sigma \quad (i, k, \alpha, \sigma = 1, 2, \dots, n)$$

From these formulas, it follows that

$$\check{T}^\sigma_{\alpha k} \cos \varphi_\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2} R^i_{s k i} + n \nabla_{[s} T_{k]} = 0,$$

$$\nabla_{[s} \check{T}^\alpha_{k]} + \check{T}^\sigma_{\alpha [k} \check{T}^\alpha_{s]} = 0$$

where R_{ski}^i and φ_α are, respectively, the curvature tensor of W_n and the angle between the directions determined by V_σ and V_α .

Let $W_n(g_{ij}, T_k)$ be a hypersurface, with coordinates $u^i (i = 1, 2, \dots, n)$, of a Weyl space $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ with coordinates $x^a (a = 1, 2, \dots, n+1)$. Suppose that the metrics of W_n and W_{n+1} are elliptic and that they are given, respectively, by $g_{ij}du^i du^j$ and $g_{ab}dx^a dx^b$ which are connected by the relations

$$g_{ij} = g_{ab}x_i^a x_j^b \quad (a, b = 1, 2, \dots, n+1; i, j = 1, 2, \dots, n)$$

where x_i^a denotes the covariant derivative of x^a with respect to u^i . The prolonged covariant derivative of A , relative to W_n , and W_{n+1} , are related by

$$\dot{\nabla}_k A = x_k^c \dot{\nabla}_c A. \quad (k = 1, 2, \dots, n; c = 1, 2, \dots, n+1)$$

Let n^a be the contravariant components of the vector field in W_{n+1} normal to W_n , and let it be renormalized by the condition $g_{ab}n^a n^b = 1$. The moving frame $\{x_i^a, n_a\}$ on W_n , reciprocal to the moving frame $\{x_i^a, n^a\}$ is defined by the relations

$$n_a n^a = 1, \quad n_a x_i^a = 0, \quad n^a x_a^i = 0, \quad x_i^a x_a^j = \delta_i^j.$$

On the other hand, we have the covariant derivatives of x_i^a with respect to u^k

$$\nabla_k x_i^a = w_{ik} n^a.$$

We have the prolonged covariant derivatives of n^a with respect to u^k

$$\dot{\nabla}_k n^a = -g^{jl} w_{jk} x_l^a.$$

Let $C : u^j = u^j(s)$ be any curve in W_n passing through a point P and m^i, m^a , the contravariant components of the tangent vector to the curve C in W_n and W_{n+1} which are renormalized by the conditions $g_{ij}m^i m^j = 1$ and $g_{ab}m^a m^b = 1$, respectively.

Hence

$$\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m} = -K_n \cdot$$

is said to be the tendency of the $\vec{n}$ in the direction of the vector $\vec{m}$ in W_n , where K_n is the normal curvature of the curve C .

Let V^i and V^a ($r = 1, 2, \dots, n$) be the contravariant components of the n independent vector fields V of an orthogonal ennuple in W_n and W_{n+1} which satisfy the conditions $g_{ij} V^i_r V^j_r = 1$ and $g_{ab} V^a_r V^b_r = 1$, respectively.

If any one of the vector fields of the net $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ is parallelly translated along the lines determined by the remaining fields of the net, such a net is called a chebyshev net of the first kind.

A net is said to be a Chebyshev net of the second kind, if any of its $(n-1)$ -dimensional area elements determined by the fields of the net is parallelly translated along the lines determined by the remaining field of the net.

Coressponding to these two kinds of Chebyshev nets, the Chebyshev curvatures of the first and second kind are, respectively, defined by

$$\mathcal{T}_{ab}^c = \mathcal{T}_a^c \mathcal{T}_b^k V^k \quad (a, b, c, k = 1, 2, \dots, n; a \neq b)$$

and

$$\rho_b^a = \mathcal{T}_b^a \mathcal{T}_k^a V^k \quad (a, b, k = 1, 2, \dots, n; a \neq b).$$

In addition we have

$$\zeta_r^s = \mathcal{T}_k^s \mathcal{T}_r^k V^k$$

where ζ_r^s are the geodesic curvatures of the net considered.

Then we have

$$V_p^c \dot{\nabla}_c V_r^a = \mathcal{K}_{rp}^a + \mathcal{T}_{rp}^s \mathcal{T}_s^i V_i^a$$

and

$$V_r^h \dot{\nabla}_h V_r^b = \mathcal{K}_{rr}^b + \zeta_r^s \mathcal{T}_s^b V^b$$

where $\mathcal{K} = w_{ik} V_r^i V_p^k$ may be regarded as the invariants of the geodesic torsion of the curve of the congruence with tangent vector V_r^i and the functions $\mathcal{K} = w_{ij} V_r^i V_r^j$ is the normal curvature of W_n in the direction of the vector of components V_r^k .

It is shown that the expression

$$-\delta_r \mathcal{K} + 2 \zeta_{rs}^s \mathcal{K} + 2P \mathcal{K}$$

is a function of direction.

Let λ^c be the contravariant components in W_{n+1} of the tangent vector $\vec{\lambda}$ to a curve of the congruence (λ) such that one curve of the congruence passes through each point of W_n . Resolving $\vec{\lambda}$ tangentially and normally to W_n , we have

$$\lambda^c = t^m x_m^c + r n^c.$$

Let $q_j^m = \dot{\nabla}_j t^m - r g^{km} w_{jk}$ and $s_j = t^m w_{jm} + \dot{\nabla}_j r$. Hence,

$$\dot{\nabla}_j \lambda^c = q_j^m x_m^c + s_j n^c.$$

Let us define the operator D ,

$$D = x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j$$

where the operator $\dot{\nabla}_j$ is the symbol of the prolonged covariant differentiation.

We choose n congruences of an orthogonal ennuple of the vector field $V(1, 2, \dots, n)$ which are normalized by $g_{ij} V_r^i V_r^j = 1$, in the hypersurface $W_n(g_{ij}, T_k)$ of the Weyl space $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$.

Consider $\vec{V} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V}$ where s_h is the arc length along a curve c_h of the orthogonal ennuple in W_n .

In this work, the two following theorems are obtained:

We have obtained

$$Y_h^j Y_h^k Y_l^e (\nabla_k q_{ej} - s_j w_{ke}) = \vec{Y}_h \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{Y}_l + 2 Y_h^j Y_l^e P_{hj} q_{ej}$$

where $P_h = T_k Y_h^k$.

We shall call $Y_h^j Y_h^k Y_l^e (\nabla_k q_{ej} - s_j w_{ke})$ as the generalised Darboux function of the direction $\vec{Y}_h$ with respect to the direction $\vec{Y}_l$, $h \neq l$. We shall denote it by $\mathcal{D}_{\lambda|hh l}$.

When λ is normal to W_n , $r = 1$, $t = 0$ while $\dot{\nabla}_k q_{ej} = -\dot{\nabla}_k w_{ej}$. Hence,

$$\mathcal{D}_{hh l} = -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + \mathcal{K}_{ls} \zeta_h^s + \mathcal{K}_{hs} \mathcal{I}_h^s - 2 P_h \mathcal{K}_{hl}.$$

Similary, we obtained

$$\mathcal{D}_{h l h} = -Y_h^j Y_h^k Y_l^e \nabla_k w_{ej}$$

$$\mathcal{D}_{l h h} = -Y_h^j Y_h^k Y_l^e \nabla_k w_{je}.$$

When λ is normal to W_n , then $\mathcal{D}_{hh l} = \mathcal{D}_{l h h} \neq \mathcal{D}_{h l h}$. If space is a Euclidean space, hence $\mathcal{D}_{hh l} = \mathcal{D}_{h l h}$.

BÖLÜM 1

WEYL UZAYLARI

1.1 GİRİŞ

TANIM 1.1.1 Burulmasız bir konneksiyona sahip n -boyutlu bir W_n manifoldunda, g_{ij} konform metrik tensörü ile konneksiyon arasında

$$\nabla_k g_{ij} - 2g_{ij}T_k = 0 \quad (1.1.1)$$

uygunluk koşulu varsa, W_n manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ şeklinde gösterilir. Burada T_k bir kovaryant vektör olup Weyl uzayının komplemanter vektörü adını alır[1]. λ bir skaler fonksiyon olmak üzere $W_n(g_{ij}, T_k)$ uzayında, metrik tensörün

$$\tilde{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \quad (1.1.2)$$

şeklindeki bir dönüşümü altında, T_k kovaryant vektörü

$$\tilde{T}_k = T_k + \partial_k \ln \lambda \quad (1.1.3)$$

şeklinde değişmektedir. Riemann geometrisindekine benzer şekilde Weyl uzayının g_{ij} metrik tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj}\Gamma_{ik}^h - g_{ih}\Gamma_{jk}^h$$

dir. Burada Γ_{kl}^i ile gösterilen ($\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$) konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{kl}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} - g^{im} (g_{mk}T_l + g_{mi}T_k - g_{ki}T_m) \quad (1.1.4)$$

şeklinde dir. $\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}$, g_{ij} ye ve türevlerine göre hesaplanmış ikinci cins Christoffel sembolleridir.

TEOREM 1.1.1 (1.1.1) bağıntısını sağlayan bir simetrik konneksiyon için g_{ij} metrik tensörü ve T_k komplementar vektörü tek türlü belli değildir.

İSPAT : $\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ ve $\check{T}_k = T_k + \partial_k \ln \lambda$ şeklinde tanımlanan $\check{g}_{ij}$ tensörü ve $\check{T}_k$ kovaryant vektörü için

$$\begin{aligned} \nabla_k \check{g}_{ij} - 2\check{g}_{ij} \check{T}_k &= \nabla_k (\lambda^2 g_{ij}) - 2\lambda^2 g_{ij} (T_k + \partial_k \ln \lambda) \\ &= \lambda^2 \nabla_k g_{ij} + 2\lambda (\partial_k \lambda) g_{ij} - 2\lambda^2 g_{ij} T_k - 2\lambda^2 g_{ij} \frac{\partial_k \lambda}{\lambda} \\ &= \lambda^2 (\nabla_k g_{ij} - 2g_{ij} T_k) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre g_{ij} tensörü ve T_k kovaryant vektörü (1.1.1) koşulunu sağlarsa, $(\check{g}_{ij}, \check{T}_k)$ ikilisi de bu bağıntıyı sağlar.

SONUÇ Her Weyl uzayına, birbirlerine (1.1.2) ve (1.1.3) ile bağlı olan sonsuz sayıda (g_{ij}, T_k) , $(\check{g}_{ij}, \check{T}_k)$, tensör çifti karşı gelir.

TANIM 1.1.2 g_{ij} tensörünün $\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ şeklindeki bir normlanmasına karşılık bir A büyüklüğü

$$\check{A} = \lambda^k A \quad (1.1.5)$$

şeklinde değişiyorsa, A ya g_{ij} tensörünün $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu denir[2].

1.2 GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KOVARYANT TÜREV

TANIM 1.2.1 A , g_{ij} nin $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere,

$$\dot{\partial}_i A = \partial_i A - k T_i A \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\dot{\partial}_i A$ ifadesine A 'nın genelleştirilmiş türevi denir[3].

TANIM 1.2.2 A , g_{ij} nin $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere,

$$\dot{\nabla}_s A = \nabla_s A - k T_s A \quad (1.2.2)$$

şeklinde tanımlanan $\dot{\nabla}_s A$ büyüklüğüne, A 'nın genelleştirilmiş kovaryant türevi denir. Burada $\nabla_s A$ alışılmış kovaryant türevdir[2].

TEOREM 1.2.2 g_{is} metrik tensörü ile bunun g^{is} karşıt tensörünün genelleştirilmiş kovaryant türevi sıfırdır.

İSPAT : (1.1.2) yardımıyla g_{is} tensörünün ağırlığı $\{2\}$ dir. g_{is} 'nin genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır, (1.1.1) den

$$\dot{\nabla}_k g_{is} = \nabla_k g_{is} - 2T_k g_{is} = 0 \quad (1.2.3)$$

elde edilir. g_{is} tensörünün g^{is} ile gösterilen karşıt tensörü arasındaki bağıntı

$$g_{is} g^{js} = \delta_i^j \quad (1.2.4)$$

şeklinde tanımlandığından, bu bağıntının her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (1.2.3) gözönüne alınır,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (g_{is} g^{js}) &= \dot{\nabla}_k (\delta_i^j) = 0 \\ &= (\dot{\nabla}_k g_{is}) g^{js} + g_{is} (\dot{\nabla}_k g^{js}) \\ &= g_{is} (\dot{\nabla}_k g^{js}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı g^{il} ile çarpılır ve i indisi üzerine toplam alınır

$$\begin{aligned} g^{il} g_{is} (\dot{\nabla}_k g^{js}) &= \delta_s^l \dot{\nabla}_k g^{js} \\ &= \dot{\nabla}_k g^{jl} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

elde edilir.

1.3 WEYL UZAYINDA TÜREV FORMÜLLERİ

$W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayında lineer bağımsız $V_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ vektör alanlarının kontravaryant bileşenleri

$$g_{is} V_\alpha^i V_\alpha^s = 1 \quad (1.3.1)$$

koşulunu sağlasınlar. g_{is} tensörünün ağırlığı $\{2\}$, olduğu için V_α^i kontravaryant vektör alanlarının ağırlığı $\{-1\}$ dir.

$V_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ vektör alanları n-boyutlu $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ şebekesini belirler.

$$\bar{V}_s^\alpha V_\beta^s = \delta_\beta^\alpha, \quad \bar{V}_s^\alpha V_\alpha^k = \delta_s^k \quad (1.3.2)$$

bağıntıları yardımı ile V_α^i vektör alanlarının karşılıkları olan, $\{1\}$ ağırlıklı $\bar{V}_i^\alpha$ kovaryant vektör alanları tanımlanmış olur[4].

V_α^i ve V_β^s doğrultuları arasındaki açı $\varphi_{\alpha\beta}$ ile gösterildiğine göre

$$g_{is} V_\alpha^i V_\beta^s = \cos \varphi_{\alpha\beta}$$

dır.

V_α^i kontravaryant vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\dot{\nabla}_k V_\alpha^i = \bar{T}_{\alpha\sigma}^\sigma V_\alpha^i \quad (i, k, \alpha, \sigma = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3.3)$$

şeklinde yazılabilir. $\bar{V}_i^\alpha$ karşıt vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\dot{\nabla}_k \bar{V}_i^\alpha = -\bar{T}_\sigma^\alpha \bar{V}_i^\sigma \quad (1.3.4)$$

şeklindedir. Gerçekten, $\bar{V}_i^\sigma V_\sigma^i = \delta_\sigma^\sigma$ eşitliğinin her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (\bar{V}_i^\sigma V_\sigma^i) &= (\dot{\nabla}_k \bar{V}_i^\sigma) V_\sigma^i + \bar{V}_i^\sigma (\dot{\nabla}_k V_\sigma^i) \\ &= (\dot{\nabla}_k \delta_\sigma^\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha\right)_\sigma V^i + \tilde{T}_k^\sigma = 0$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanını $\tilde{V}_j^\sigma$ ile çarpılıp σ indisi üzerinden toplanırsa

$$\left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha\right)_\sigma V^i \tilde{V}_j^\sigma = -\tilde{T}_k^\sigma \tilde{V}_j^\sigma,$$

$$\left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha\right) \delta_j^i = -\tilde{T}_k^\sigma \tilde{V}_j^\sigma,$$

$$\dot{\nabla}_k \tilde{V}_j^\sigma = -\tilde{T}_k^\sigma \tilde{V}_j^\sigma$$

elde edilir.

TEOREM 1.3.1 Bir Weyl uzayında $\tilde{T}_k^\sigma \cos \varphi_{\alpha\beta} = 0$ bağıntısı mevcuttur.

İSPAT : (1.3.1) bağıntısının her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır, (1.3.3) yardımıyla

$$g_{is} \left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_\alpha^i\right)_\sigma V^s + g_{is} \tilde{V}_\alpha^i \left(\dot{\nabla}_k V^s\right)_\sigma = 0$$

$$g_{is} \tilde{T}_k^\sigma \tilde{V}_\alpha^i V^s + g_{is} \tilde{V}_\alpha^i \tilde{T}_k^\sigma V^s = 0$$

$$\tilde{T}_k^\sigma g_{is} \tilde{V}_\alpha^i V^s + \tilde{T}_k^\sigma g_{is} \tilde{V}_\alpha^i V^s = 0$$

$$\tilde{T}_k^\sigma \cos \varphi_{\alpha\beta} = 0$$

bulunur[2].

TEOREM 1.3.2 R_{ski}^i , W_n uzayının eğrilik tensörü olmak üzere:

$$(a) \frac{1}{2} R_{ski}^i + n \nabla_{[s} T_{k]} = 0$$

$$(b) \nabla_{[s} \tilde{T}_{k]}^\alpha + \tilde{T}_{[k}^\alpha \tilde{T}_{s]}^\alpha = 0$$

dır.

İSPAT: Norden'e göre[1]

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} V^i = V^k R_{rsk}^i,$$

(1.3.5)

$$R_{rsk}^i = \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{mr}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{ms}^i \Gamma_{rk}^m$$

olup, ikinci bağıntıda $k = i$ konulursa

$$R_{ski}^i = \partial_r \Gamma_{si}^i - \partial_s \Gamma_{ri}^i + \Gamma_{mr}^i \Gamma_{si}^m - \Gamma_{ms}^i \Gamma_{ri}^m \quad (1.3.6)$$

bulunur. (1.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \partial_r \Gamma_{si}^i &= \partial_r \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - (\delta_s^i T_i + \delta_i^s T_s - g_{is} T_i) \right), \\ &= \partial_r \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - (T_s + n T_s - T_s) \right), \\ &= \partial_r \left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - n \partial_r T_s \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\partial_s \Gamma_{ri}^i = \partial_s \left\{ \begin{matrix} i \\ ri \end{matrix} \right\} - n \partial_s T_r$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \Gamma_{mr}^i \Gamma_{si}^m &= \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} - (\delta_m^i T_r + \delta_r^i T_m - g_{mr} T^i) \right] \times \\ &\quad \left[\left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - (\delta_s^m T_i + \delta_i^m T_s - g_{is} T^m) \right] \\ &= \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} (\delta_s^m T_i + \delta_i^m T_s - g_{is} T^m) \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} (\delta_m^i T_r + \delta_r^i T_m - g_{mr} T^i) \\ &\quad + (\delta_m^i T_r + \delta_r^i T_m - g_{mr} T^i) (\delta_s^m T_i + \delta_i^m T_s - g_{is} T^m) \\ &= \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ sr \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} i \\ ir \end{matrix} \right\} T_s + \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} g_{is} T^m - T_r \left\{ \begin{matrix} m \\ sm \end{matrix} \right\} \\ &\quad - T_m \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} + g_{mr} T^i \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} + \delta_m^i T_r \delta_s^m T_i + \delta_m^i T_r \delta_i^m T_s \\ &\quad - T_r g_{sm} T^m + T_s T_r + T_r T_s - g_{sr} T_m T^m - g_{sr} T_i T^i - T_r T_s + T_s T_r \\ &= \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ sr \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} T_m + T_r T_s \end{aligned}$$

dir.

r ve s indislerini kendi aralarında deęiřtirerek

$$\Gamma_{ms}^i \Gamma_{ri}^m = \left\{ \begin{matrix} i \\ ms \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ri \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ rs \end{matrix} \right\} T_m + T_r T_s$$

bulunur. Bu ifadeler (1.3.5) de yerine konulursa

$$\begin{aligned} R_{rsi}^i &= \partial_r \left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - n \partial_r T_s - \partial_s \left\{ \begin{matrix} i \\ ri \end{matrix} \right\} + n \partial_s T_r \\ &+ \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ sr \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} T_m + T_r T_s \\ &- \left\{ \begin{matrix} i \\ ms \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ri \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ rs \end{matrix} \right\} T_m - T_r T_s \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} = \partial_s \log \sqrt{g}$$

olduğu hatırlanırsa

$$\partial_r \left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} = \partial_r \partial_s \log \sqrt{g} = \partial_s \partial_r \log \sqrt{g} = \partial_s \left\{ \begin{matrix} i \\ ri \end{matrix} \right\}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ ms \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ri \end{matrix} \right\}$$

dir. Bu deęerler R_{rsi}^i nin ifadesinde yerine konulursa

$$R_{rsi}^i = -n (\partial_r T_s - \partial_s T_r) \quad (1.3.7)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \nabla_r T_s - \nabla_s T_r &= (\partial_r T_s - T_k \Gamma_{rs}^k) - (\partial_s T_r - T_k \Gamma_{sr}^k) \\ &= (\partial_r T_s - \partial_s T_r) - T_k (\Gamma_{rs}^k - \Gamma_{sr}^k) \\ &= \partial_r T_s - \partial_s T_r \end{aligned}$$

olduğundan (1.3.7) ifadesi kullanılarak

$$R_{rsi}^i = -2n\nabla_{[r}T_{s]}$$

veya

$$\frac{1}{2}R_{rsi}^i + n\nabla_{[r}T_{s]} = 0$$

bulunur[2].

(b) V_{α}^i nın ağırlığı $\{-1\}$ olduğundan, (1.2.2) bağıntısına göre

$$\dot{\nabla}_k V_{\alpha}^i = \nabla_k V_{\alpha}^i + T_k V_{\alpha}^i$$

dir. $\dot{\nabla}_k V_{\alpha}^i$ yerine (1.3.3) deki değeri yazılırsa

$$\nabla_k V_{\alpha}^i = \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\alpha}^i - T_k V_{\alpha}^i \quad (1.3.8)$$

elde edilir. $\nabla_k V_{\alpha}^i$ nın kovaryant türevi alınır,sa,

$$\begin{aligned} \nabla_s \left(\nabla_k V_{\alpha}^i \right) &= \dot{\nabla}_s \left(\nabla_k V_{\alpha}^i \right) - T_s \left(\nabla_k V_{\alpha}^i \right) \\ &= \dot{\nabla}_s \left(\overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\alpha}^i - T_k V_{\alpha}^i \right) - T_s \left(\overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\alpha}^i - T_k V_{\alpha}^i \right) \\ &= \dot{\nabla}_s \left(\overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\alpha}^i \right) - \dot{\nabla}_s \left(T_k V_{\alpha}^i \right) - T_s \left(\overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\alpha}^i + T_s T_k V_{\alpha}^i \right) \\ &= V_{\sigma}^i \dot{\nabla}_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} + \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} \dot{\nabla}_s V_{\sigma}^i - V_{\alpha}^i \dot{\nabla}_s T_k \\ &\quad - T_k \dot{\nabla}_s V_{\alpha}^i - T_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\sigma}^i + T_s T_k V_{\alpha}^i \\ &= V_{\sigma}^i \nabla_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} + \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} \overset{\beta}{T}_{\sigma}^{\beta} V_{\beta}^i - V_{\alpha}^i \nabla_s T_k \\ &\quad - T_k \overset{\beta}{T}_{\alpha}^{\beta} V_{\beta}^i - T_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\sigma}^i + T_s T_k V_{\alpha}^i \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Buradan, k ve s indislerinin yerleri değiştirilerek

$$\begin{aligned} \nabla_k \left(\nabla_s V_{\alpha}^i \right) &= V_{\sigma}^i \nabla_k \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} + \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} \overset{\beta}{T}_{\sigma}^{\beta} V_{\beta}^i - V_{\alpha}^i \nabla_k T_s \\ &\quad - T_s \overset{\beta}{T}_{\alpha}^{\beta} V_{\beta}^i - T_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha}^{\sigma} V_{\sigma}^i + T_k T_s V_{\alpha}^i \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

bulunur. (1.3.9) ve (1.3.10) bağıntıları taraf tarafa çıkarılırsa,

$$V^i \nabla_{[\sigma} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\sigma} + V^i \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} \tilde{T}_{[\sigma}^{\beta} T_{\sigma]}_{\beta} + V_{\alpha}^i \nabla_{[k} T_{s]} - \nabla_{[s} \nabla_{k]} V_{\alpha}^i = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını $\tilde{V}_i^{\alpha}$ ile çarpılıp, i indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\alpha} + \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} \tilde{T}_{[\sigma}^{\alpha} T_{\sigma]}_{\beta} + n \nabla_{[k} T_{s]} - \tilde{V}_i^{\alpha} \nabla_{[k} \nabla_{s]} V_{\alpha}^i = 0 \quad (1.3.11)$$

bulunur. (1.3.5) de verilen $2 \nabla_{[s} \nabla_{k]} V^i = V^l R_{s k l}^i$ bağıntısı V_{α}^i için yazılırsa $2 \nabla_{[s} \nabla_{k]} V_{\alpha}^i = V_{\alpha}^l R_{s k l}^i$ elde edilir. Bu bağıntının her iki tarafı $\tilde{V}_i^{\alpha}$ ile çarpılır ve α indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\tilde{V}_i^{\alpha} \nabla_{[s} \nabla_{k]} V_{\alpha}^i = \frac{1}{2} \tilde{V}_i^{\alpha} V^l R_{s k l}^i = \frac{1}{2} R_{s k i}^i$$

bulunur. Son bağıntı kullanılırsa (1.3.11) bağıntısı

$$\nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\alpha} + \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} \tilde{T}_{[\sigma}^{\alpha} T_{\sigma]}_{\beta} + n \nabla_{[k} T_{s]} - \frac{1}{2} R_{s k i}^i = 0 \quad (1.3.12)$$

şekline girer. Teoremin (a) şıkkı gereğince (1.3.12) den

$$\nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\alpha} + \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} \tilde{T}_{[\sigma}^{\alpha} T_{\sigma]}_{\beta} = 0$$

elde edilir[2].

BÖLÜM 2

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE DOĞRULTU FONKSİYONLARI

2.1 WEYL HİPERYÜZEYLERİ

Koordinatları x^a ($a = 1, 2, \dots, n+1$) olan $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ Weyl uzayının, koordinatları u^i ($i = 1, 2, \dots, n$) olan $W_n(g_{ij}, T_k)$ hiperyüzeyini gözönüne alalım. W_n ve W_{n+1} 'in metriklerinin, sırasıyla, $g_{ij}du^i du^j$ ve $g_{ab}dx^a dx^b$ ($a, b = 1, 2, \dots, n+1; i, j = 1, 2, \dots, n$) ve eliptik olduklarını kabul edelim. g_{ij} ve g_{ab} arasında

$$g_{ij} = g_{ab}x_i^a x_j^b \quad (2.1.1)$$

bağıntıları mevcut olup, burada x_i^a ; x^a nın u^i ye göre kovaryant türevini göstermektedir.

Bir A uydusunun W_n ve W_{n+1} 'e göre genelleştirilmiş kovaryant türevleri arasında

$$\dot{\nabla}_k A = x_k^c \dot{\nabla}_c A \quad (k = 1, 2, \dots, n; c = 1, 2, \dots, n+1) \quad (2.1.2)$$

bağıntısı mevcuttur.

W_n nin T_k komplementar vektörü ile W_{n+1} 'in T_c komplementar vektörü birbirlerine

$$T_k = x_k^c T_c \quad (2.1.3)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

W_{n+1} 'e ait ve $g_{ab}n^a n^b = 1$ olacak şekilde normlanmış olan, normal vektörün kontravaryant bileşenleri n^a olsun. W_n 'de tanımlı $\{x_i^a, n^a\}$ hareketli çatısı ile $\{x_a^i, n_a\}$ karşıt hareketli çatısı arasında

$$n_a n^a = 1, \quad n_a x_i^a = 0, \quad n^a x_a^i = 0, \quad x_i^a x_a^j = \delta_i^j \quad (2.1.4)$$

bağıntıları tanımlanmıştır[1].

x_i^a nın ağırlığının $\{0\}$ olduğu gözönüne alınarak, $(2.1.4)_4$ ün her iki yanının u^i değişkenine göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k (x_i^a x_a^j) &= \dot{\nabla}_k (\delta_i^j) = 0 \\ \dot{\nabla}_k (x_i^a x_a^j) &= \dot{\nabla}_k x_i^a x_a^j + x_i^a \dot{\nabla}_k x_a^j \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

bulunur.

$$\nabla_k x_i^a = w_{ik} n^a \tag{2.1.6}$$

olduğu hatırlanırsa[1], $(2.1.5)$ ve $(2.1.4)_3$ bağıntılarından

$$w_{ik} n^a x_a^j + x_i^a \nabla_k x_a^j = x_i^a \nabla_k x_a^j = 0 \tag{2.1.7}$$

elde edilir. Buradan x^a koordinatlarının bir fonksiyonu olarak düşünülen ve W_{n+1} 'e ait olan $\nabla_k x_a^j$ nın W_n 'e dik bir vektör olduğu anlaşılır. Bu durumda

$$\nabla_k x_a^j = \Omega_k^j n_a \tag{2.1.8}$$

şeklinde ifade edilir[5].

TEOREM 2.1.1 W_{n+1} 'e ait, $g_{ab} n^a n^b = 1$ olacak şekilde normlanmış olan normal vektörün kontravaryant bileşenleri n^a olmak üzere,

$$\dot{\nabla}_k n^a = -g^{ij} w_{ik} x_j^a \tag{2.1.9}$$

dir.

İSPAT: $g_{ab} n^a n^b = 1$ ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş türevi alındığında ve Teorem 1.2.2 kullanıldığında

$$g_{ab} \dot{\nabla}_k n^a n^b + g_{ab} \dot{\nabla}_k n^b n^a = 0$$

bulunur. g_{ab} fonksiyonu simetrik olduğundan a ve b indislerinin yerleri değiştirilebilir. Bu takdirde,

$$g_{ab} \dot{\nabla}_k n^a n^b = 0$$

bulunur. Buradan $\dot{\nabla}_k n^a$ ile $g_{ab} n^b$ nin birbirlerine dik olduğu anlaşılır. $g_{ab} n^b$, W_{n+1} 'e ait normal vektörün kontravaryant bileşenleri olduğundan, $\dot{\nabla}_k n^a$, W_n hiper yüzeyine ait bir vektör olacaktır. Bu nedenle,

$$\dot{\nabla}_k n^a = x_j^a A_k^j \quad (2.1.10)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.4)₂ ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş türevi alınır ve Teorem 1.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (x_i^a n_a) &= \dot{\nabla}_k (g_{ab} x_i^a n^b) \\ &= g_{ab} \dot{\nabla}_k x_i^a n^b + g_{ab} \dot{\nabla}_k n^b x_i^a \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.6) ifadesi yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa ve $g_{ab} n^a n^b = 1$ olduğu hatırlanırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (x_i^a n_a) &= w_{ik} + g_{ab} \dot{\nabla}_k n^b x_i^a \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.10) ve (2.1.1) ifadesi son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (x_i^a n_a) &= w_{ik} + g_{ij} A_k^j \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafı g^{il} ile çarpılırsa

$$A_k^l = -g^{il} w_{ik} \quad (2.1.11)$$

elde edilir. Buradan (2.1.11), (2.1.10) da yerine yazıldığında,

$$\dot{\nabla}_k n^a = -g^{ij} w_{ik} x_j^a$$

olarak bulunur.

TANIM 2.1.1 $g_{ab} n^a n^b = 1$ olacak şekilde normalize edilmiş W_{n+1} 'e ait $\vec{n}$ normal vektörü ile aynı şekilde normalize edilmiş W_n 'e ait $\vec{m}$ vektörü için $\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m}$ ifadesine $\vec{n}$ normalinin $\vec{m}$ doğrultusundaki tendansı denir.

TEOREM 2.1.2 Normalin, yüzeye ait herhangi bir doğrultudaki tendansı, bu doğrultudaki normal eğriliğin negatifine eşittir. Yani $\vec{m}$, W_n 'e ait bir vektör olmak üzere,

$$\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m} = -K_n$$

dir.

İSPAT: Normalize edilmiş $\vec{m}$ teğet vektörünün W_{n+1} 'e ve W_n 'e göre kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, m^b ve m^k olsun. $m^b = x_k^b m^k$ olduğu gözü önüne alınır ve (2.1.9) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} m^b \dot{\nabla}_b n^a &= m^k \dot{\nabla}_k n^a \\ &= -g^{jl} w_{kj} x_l^a m^k \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $g_{ac} m^c$ ile çarpılıp a ve c indisleri üzerinde toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} (m^b \dot{\nabla}_b n^a) g_{ac} m^c &= -g^{jl} w_{kj} x_l^a m^k g_{ac} x_p^c m^p \\ &= -g^{jl} w_{kj} g_{lp} m^k m^p . \\ &= -\delta_p^j w_{kj} m^k m^p \\ &= -w_{kj} m^k m^j \\ &= -K_n \end{aligned}$$

bulunur. Burada, (1.2.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} (m^b \dot{\nabla}_b n^a) g_{ac} m^c &= m^b (\nabla_b n^a + T_k n^a) g_{ac} m^c \\ &= (m^b \nabla_b n^a) g_{ac} m^c \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. O halde

$$-K_n = (m^b \nabla_b n^a) g_{ac} m^c$$

dir.

2.2 WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE BİR DOĞRULTU FONKSİYONU

W_n uzayına ait lineer bağımsız $\vec{V}_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) vektör alanlarının, sırasıyla, W_{n+1} ve W_n 'e göre kontravaryant bileşenleri V^a ve V^i olsun ve W_n 'de $g_{ij}V^i_r V^j_r = 1$ ifadesi ile normalize edilsin. $\vec{V}_a$ ve $\vec{V}_i$ ise $\vec{V}_r$ vektör alanlarının karşıtlarının W_{n+1} ve W_n 'e göre kovaryant bileşenlerini gösterebilirler. Bu takdirde,

$$V^a_r = x^a_i V^i_r, \quad \vec{V}_a = x^i_a \vec{V}_i \quad (2.2.1)$$

ve

$$g_{ab}V^a_r V^b_s = \delta^r_s, \quad g_{ab}n^a_r V^b = 0 \quad (2.2.2)$$

dir. V^i vektör alanları için türev formülleri ise

$$\dot{\nabla}_k V^i_r = T^s_{rk} V^i_s \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2.3)$$

şeklindedir[4].

TANIM 2.2.1

$$\vec{T}^c_{ab} = T^c_{ab} V^k \quad (a, b, c, k = 1, 2, \dots, n; a \neq b) \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanan $\vec{T}^c_{ab}$ büyüklüklerine şebeke eğrilerinin birinci cins Chebyshev eğrilikleri denir[6].

TANIM 2.2.2

$$\vec{\rho}^a_b = T^a_{bk} V^k \quad (a, b, k = 1, 2, \dots, n; a \neq b) \quad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanan $\vec{\rho}^a_b$ büyüklüklerine şebeke eğrilerinin ikinci cins Chebyshev eğrilikleri denir.

(2.2.1)₁ in her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (2.1.6), (2.2.3) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k V^a_r &= \dot{\nabla}_k (x^a_i V^i_r) \\ &= \dot{\nabla}_k x^a_i V^i_r + x^a_i \dot{\nabla}_k V^i_r \\ &= w_{ik} n^a_r V^i + x^a_i T^s_{rk} V^i \end{aligned}$$

bulunur. Son ifadenin her iki tarafı V_p^k ($p = 1, 2, \dots, n$) ile çarpılır ve k üzerinden toplam alınır, (2.2.4) den

$$V_p^k \dot{\nabla}_k V_r^a = w_{ik} V_r^i V_p^k n^a + \mathcal{T}_{rp}^s V_s^i x_i^a \quad (2.2.6)$$

dir. Buradaki ifadede $\mathcal{T}_{rp}^s$, W_n 'e göre birinci cins Chebyshev eğrilikleridir. Diğer taraftan,

$$\mathcal{K}_{rp} = w_{ik} V_r^i V_p^k \quad (2.2.7)$$

fonksiyonları, teğet vektörü V^i olan kongrüans eğrisinin geodezik burulma sabitleri olmak üzere (2.2.6) ifadesi

$$V_p^k \dot{\nabla}_k V_r^a = \mathcal{K}_{rp} n^a + \mathcal{T}_{rp}^s V_s^i x_i^a \quad (2.2.8)$$

şekline dönüştürülebilir.

$g_{ab} n^a n^b = 1$ ifadesinin her iki tarafının u^k koordinatlarına göre kovaryant türevi alınır ve Teorem 1.2.2 göz önüne alınır, $\dot{\nabla}_k (g_{ab} n^a n^b) = 0$ dan,

$$g_{ab} \dot{\nabla}_k n^a n^b = 0 \quad (2.2.9)$$

bulunur. Dolayısıyla (2.2.9) ifadesinden

$$\dot{\nabla}_k n^a = \overset{p}{A}_k V_p^a$$

olduğu anlaşılır. Bu ifadenin her iki tarafı V_r^k ile çarpılıp k indisi üzerinden toplam alınır,

$$V_r^k \dot{\nabla}_k n^a = \overset{p}{B}_r V_p^a \quad (2.2.10)$$

bulunur. Burada $\overset{p}{B}_r = V_r^k \overset{p}{A}_k$ olarak alınmaktadır.

(2.2.2)₂ ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş türevi alınır ve V_p^k ile her iki tarafı çarpılarak k indisi üzerinden toplam alınır, (2.2.2)₁, (2.2.6) ve (2.2.10) yardımıyla $\overset{p}{B}_r = -\mathcal{K}_{rp}$ bulunur. Bu takdirde (2.2.10) ifadesi

$$V_r^k \dot{\nabla}_k n^a = -\sum_p \mathcal{K}_{rp} V_p^a \quad (2.2.11)$$

şekline dönüşür.

TANIM 2.2.3

$$\zeta^s = T_k^s V^k (s, r, k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2.12)$$

şeklinde tanımlanan ζ^s büyüklüklerine şebeke eğrilerinin geodezik eğrilikleri denir.

TEOREM 2.2.1 $-\delta_r \mathcal{K} + 2 \zeta_{rr}^s \mathcal{K} + 2 P_{rr} \mathcal{K}$ ifadesi Weyl hiperyüzeyinde bir doğrultu fonksiyonudur.

İSPAT: W_n 'e ait r-nci kongrüans eğrisi doğrultusundaki normal eğrilik $\mathcal{K}_{rr}$ dir. (2.2.11) nin her iki tarafı $g_{ab} V_r^b$ ile çarpılır, a üzerinden toplam alınır,

$$g_{ab} V_r^b \left(V^k \dot{\nabla}_k n^a \right) = -\sum_p \mathcal{K} \left(g_{ab} V_r^b V_p^a \right)$$

bulunur ve (2.2.2)₁ yardımıyla

$$\mathcal{K}_{rr} = w_{ij} V_r^i V_r^j \quad (2.2.13)$$

olmak üzere

$$g_{ab} V_r^b V_r^k \dot{\nabla}_k n^a = -\mathcal{K}_{rr} \quad (2.2.14)$$

elde edilir. (2.2.14) in V_r^h doğrultusunda türevi alınır ve $\mathcal{K}_{rr}$ nin invariant olduğu hatırlanarak $\dot{\nabla}_h \mathcal{K}_{rr} = \nabla_h \mathcal{K}_{rr}$ olduğu gözönüne alınır,

$$\begin{aligned} -V_r^h \nabla_h \mathcal{K}_{rr} &= g_{ab} \left(V_r^h \dot{\nabla}_h V_r^b \right) V_r^k \dot{\nabla}_k n^a \\ &+ g_{ab} V_r^b \left(V_r^h \dot{\nabla}_h V_r^k \right) \dot{\nabla}_k n^a \\ &+ g_{ab} V_r^b V_r^k \left(V_r^h \dot{\nabla}_h \dot{\nabla}_k n^a \right) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

elde edilir. (2.2.6) yardımıyla

$$V_r^h \dot{\nabla}_h V_r^b = \mathcal{K}_{rr} n^b + \zeta_s^s V_r^i x_i^b \quad (2.2.16)$$

bulunur. (2.2.3), (2.2.11) ve (2.2.16) yardımıyla (2.2.15) ifadesi için

$$\begin{aligned} -V_r^h \nabla_h \mathcal{K}_{rr} &= g_{ab} \left(\mathcal{K}_{rr} n^b + \zeta_s^s V_r^i x_i^b \right) \left(-\sum_p \mathcal{K} V_p^a \right) \\ &+ g_{ab} V_r^b \left(V_r^h \dot{\nabla}_h V_r^k \right) \dot{\nabla}_k n^a \\ &+ g_{ab} V_r^b V_r^k V_r^h \dot{\nabla}_h \dot{\nabla}_k n^a \end{aligned}$$

bulunur. Nihayet, (2.2.2) ve (2.2.11) ifadelerinden

$$-V_r^h \nabla_h \mathcal{K} = -2 \zeta_{rs}^s \mathcal{K} + g_{ab} V_r^b V_r^k V_r^h \dot{\nabla}_h \dot{\nabla}_k n^a$$

şeklinde elde edilir. $\delta_r \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ nin r-nci kongürans eğrisi doğrultusundaki türevi olmak üzere (2.1.2) ve (2.2.1)₁ den,

$$-\delta_r \mathcal{K} + 2 \zeta_{rs}^s \mathcal{K} = g_{ab} V_r^b V_r^c V_r^d \dot{\nabla}_d \dot{\nabla}_c n^a \quad (2.2.17)$$

yazılabilir. n^a nın ağırlığı $\{-1\}$ olduğundan (1.2.2) yardımıyla

$$\dot{\nabla}_c n^a = \nabla_c n^a + T_c n^a \quad (2.2.18)$$

dir. (2.2.18) ifadesinin her iki tarafı V_r^c ile çarpıldığında (2.2.11) yardımıyla

$$V_r^c \nabla_c n^a = -\sum_p \mathcal{K} V_r^a - T_c V_r^c n^a \quad (2.2.19)$$

bulunur. [7]'e göre

$$\dot{\nabla}_d \dot{\nabla}_c n^a = \nabla_d \nabla_c n^a + \nabla_d T_c n^a + T_c \nabla_d n^a + T_d \nabla_c n^a + T_d T_c n^a \quad (2.2.20)$$

dir. (2.2.20) ifadesi (2.2.17) de yerine yazılır ve (2.2.2), (2.2.19) ifadeleri kullanılırsa,

$$-\delta_r \mathcal{K} + 2 \zeta_{rs}^s \mathcal{K} + 2 P_r \mathcal{K} = g_{ab} V_r^b V_r^c V_r^d \nabla_d \nabla_c n^a \quad (2.2.21)$$

elde edilir. Bu ifadede

$$P_r = V_r^d T_d \quad (a, b, c, d = 1, 2, \dots, n+1) \quad (2.2.22)$$

dir. (2.2.21) ifadesinin sağ tarafı yalnızca V_r^d vektörlerinin doğrultusuna, yani n-li dikgen sistemin r-yinci kongrüansına bağlıdır.

W_n hiperyüzeyi Riemannien iken g_{ij} metrik tensörü normalleştirilebilir, öyle ki $T_k = 0$ dır ve (2.2.21) ifadesi [8] de elde edilmiş ifadeye indirgenir. c ile d nin yerdeğiştirmesinden (2.2.20) ifadesinde

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_d \dot{\nabla}_c n^a - \dot{\nabla}_c \dot{\nabla}_d n^a &= (\nabla_d \nabla_c n^a - \nabla_c \nabla_d n^a) + (\nabla_d T_c n^a - \nabla_c T_d n^a) \\ &= \nabla_{[d} \nabla_{c]} n^a + \nabla_{[d} T_{c]} n^a \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.2.17) ifadesinde c ve d yer değiştirdiğinde

$$g_{ab} V_r^b V_r^c V_r^d \dot{\nabla}_{[d} \dot{\nabla}_{c]} n^a = 0 \quad (2.2.24)$$

elde edilir. Bu takdirde $\dot{\nabla}_{[d} \dot{\nabla}_{c]} n^a$ ile $g_{ab} V_r^b$ birbirlerine diktir ve (2.2.23) den $\nabla_{[d} \nabla_{c]} n^a + \nabla_{[d} T_{c]} n^a$ nın W_n için normal doğrultusunda olduğu görülür.

BÖLÜM 3

BİR WEYL HİPERYÜZEYİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ DARBOUX FONKSİYONU

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ DARBOUX FONKSİYONU

W_{n+1} 'e ait, W_n 'nin her P noktasından bir eğrisi geçen bir (λ) kongrüansı gözönüne alalım, öyleki kongrüansın teğet vektörünün kontravaryant bileşenleri λ^c ($c = 1, 2, \dots, n+1$) olsun. W_n 'e göre $\tilde{\lambda}$ nın normal ve teğetsel bileşeni gözönüne alınırsa,

$$\lambda^c = t^m x_m^c + r n^c \quad (3.1.1)$$

yazılabilir.

$C : u^j = u^j(s)$ denklemi ile verilmiş ve $\dot{W}_n$ 'e ait bir P noktasından geçen herhangi bir eğri olsun. m^j ve m^c , C eğrisi için, sırasıyla, W_n ve W_{n+1} 'e göre normalize edilmiş birim teğet vektörün kontravaryant bileşenleri olsun.

$\tilde{\lambda}$ nın C eğrisine göre genelleştirilmiş kovaryant türevi (2.1.6), (2.1.9) ve (3.1.1) ifadeleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_j \lambda^c &= \dot{\nabla}_j (t^m x_m^c + r n^c) \\ &= \dot{\nabla}_j t^m x_m^c + t^m \dot{\nabla}_j x_m^c + \dot{\nabla}_j r n^c + r \dot{\nabla}_j n^c \\ &= \dot{\nabla}_j t^m x_m^c + w_{jm} n^c t^m + \dot{\nabla}_j r n^c - r g^{km} w_{jk} x_m^c \\ &= \left(\dot{\nabla}_j t^m - r g^{km} w_{jk} \right) x_m^c + \left(w_{jm} t^m + \dot{\nabla}_j r \right) n^c \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

olarak bulunur. Burada,

$$q_j^m = \dot{\nabla}_j t^m - r g^{km} w_{jk}, \quad s_j = t^m w_{jm} + \dot{\nabla}_j r \quad (3.1.3)$$

olarak alındığında (3.1.2) ifadesi,

$$\dot{\nabla}_j \lambda^c = q_j^m x_m^c + s_j n^c \quad (3.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi D operatörünü, $\dot{\nabla}_k$ genelleştirilmiş kovaryant türev olmak üzere

$$D = x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlayalım.

$W_n(g_{is}, T_k)$ Weyl uzayında lineer bağımsız V_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) vektör alanlarını ele alalım. Bu vektör alanları n -boyutlu $\left(V_1, V_2, \dots, V_n\right)$ şebekesini belirler. W_n deki n -li dikgen sisteme ait bir c_h ($h = 1, 2, \dots, n$) eğrisi boyunca yay uzunluğu s_h olmak üzere $\vec{V}_h \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V}_l$ ifadesini gözönüne alalım. (3.1.5) ifadesi yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} &= V_h^k \dot{\nabla}_k \left(x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c \right) \\ &= V_h^k \dot{\nabla}_k x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c + V_h^k x_i^a \dot{\nabla}_k g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c + V_h^k x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c \end{aligned}$$

elde edilir. (1.2.5) ve (2.1.6) dan,

$$\frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} = V_h^k w_{ik} n^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c + V_h^k x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c \quad (3.1.6)$$

bulunur. (3.1.4) ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (2.1.6) ve (2.1.9) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c &= \dot{\nabla}_k (q_j^m x_m^c + s_j n^c) \\ &= \dot{\nabla}_k q_j^m x_m^c + q_j^m \dot{\nabla}_k x_m^c + \dot{\nabla}_k s_j n^c + s_j \dot{\nabla}_k n^c \\ &= \left(\dot{\nabla}_k q_j^m - s_j g^{hm} w_{kh} \right) x_m^c + \left(q_j^m w_{km} + \dot{\nabla}_k s_j \right) n^c \quad (3.1.7) \end{aligned}$$

bulunur.

TEOREM 3.1.1 W_{n+1} 'e ait bir (λ) kongrüansının teğet vektörü $\vec{\lambda}$ olmak üzere, $\vec{V}$ doğrultusuna göre $\vec{V}_h$ doğrultusundaki genelleştirilmiş Darboux fonksiyonu

$$\mathcal{D}_{\lambda| hhl} = \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V}_l + 2 V_h^j V_l^e P_{qej}$$

şeklindedir.

İSPAT: (1.2.4), (2.1.4), (3.1.2), (3.1.6) ve (3.1.7) yardımıyla

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V}_l &= V_h^p g_{ab} x_p^b \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} V_l^e g_{cd} x_e^d \\
 &= V_h^p V_h^k V_l^e g_{ab} x_p^b w_{ik} n^a g^{ij} \left(\dot{\nabla}_j t^m - r g^{km} w_{jk} \right) x_m^c g_{cd} x_e^d \\
 &\quad + V_h^p V_h^k V_l^e g_{ab} x_p^b w_{ik} n^a g^{ij} \left(w_{jm} t^m + \dot{\nabla}_j r \right) n^c g_{cd} x_e^d \\
 &\quad + V_h^p V_h^k V_l^e g_{ab} x_p^b x_i^a g^{ij} \left(\dot{\nabla}_k q_j^m - s_j g^{hm} w_{kh} \right) x_m^c g_{cd} x_e^d \\
 &\quad + V_h^p V_h^k V_l^e g_{ab} x_p^b x_i^a g^{ij} \left(q_j^m w_{km} + \dot{\nabla}_k s_j \right) n^c g_{cd} x_e^d \\
 &= V_h^p V_h^k V_l^e g_{pi} g^{ij} g_{me} \left(\dot{\nabla}_k q_j^m - s_j g^{hm} w_{kh} \right) \\
 &= V_h^p V_h^k V_l^e \delta_p^j g_{me} \left(\dot{\nabla}_k q_j^m - s_j g^{hm} w_{kh} \right) \\
 &= V_h^j V_h^k V_l^e \left(\dot{\nabla}_k q_{ej} - s_j w_{ke} \right) \tag{3.1.8}
 \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci bir yoldan bu eşitliğin doğruluğunu ispatlayalım. (1.2.2) den,

$$\dot{\nabla}_k \lambda^c = \nabla_k \lambda^c + T_k \lambda^c \tag{3.1.9}$$

bulunur. (3.1.9) ifadesinin her iki tarafının u^j ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (1.2.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 \dot{\nabla}_j \dot{\nabla}_k \lambda^c &= \dot{\nabla}_j (\nabla_k \lambda^c + T_k \lambda^c) \\
 &= \nabla_j (\nabla_k \lambda^c + T_k \lambda^c) + T_j (\nabla_k \lambda^c + T_k \lambda^c) \\
 &= \nabla_j \nabla_k \lambda^c + \nabla_j T_k \lambda^c + T_k \nabla_j \lambda^c + T_j \nabla_k \lambda^c + T_j T_k \lambda^c \tag{3.1.10}
 \end{aligned}$$

bulunur. (3.1.9) ve (3.1.10), (3.1.6) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} &= V_h^k w_{ik} n^a g^{ij} (\nabla_j \lambda^c + T_j \lambda^c) \\
 &\quad + V_h^k x_i^a g^{ij} (\nabla_j \nabla_k \lambda^c + \nabla_j T_k \lambda^c \\
 &\quad + T_k \nabla_j \lambda^c + T_j \nabla_k \lambda^c + T_j T_k \lambda^c) \tag{3.1.11}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde $\vec{V} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V}$ ifadesini (2.1.1) ve (2.2.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} \vec{V} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V} &= V_h^k V_h^p V_l^e g_{ab} x_p^b w_{ik} n^a g^{ij} (\nabla_j \lambda^c + T_j \lambda^c) g_{cd} x_e^d \\ &\quad + V_h^k V_h^p V_l^e g_{ab} x_p^b x_i^a g^{ij} (\nabla_j \nabla_k \lambda^c + \nabla_j T_k \lambda^c + T_k \nabla_j \lambda^c \\ &\quad + T_j \nabla_k \lambda^c + T_j T_k \lambda^c) g_{cd} x_e^d \\ &= V_h^j V_h^k V_l^e (\nabla_j \nabla_k \lambda^c + 2T_k \nabla_j \lambda^c + \nabla_j T_k \lambda^c + T_j T_k \lambda^c) g_{cd} x_e^d \end{aligned}$$

şeklini alır. Son eşitlikte (1.2.2) ve (3.1.1) yerine yazılırsa (3.1.8) ifadesi elde edilir. (1.2.2) yardımıyla,

$$\dot{\nabla}_k q_{ej} = \nabla_k q_{ej} - 2T_k q_{ej} \quad (3.1.12)$$

elde edilir. (3.1.8) de (3.1.12) ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{V} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V} &= V_h^j V_h^k V_l^e (\nabla_k q_{ej} - 2T_k q_{ej} - s_j w_{ke}) \\ &= V_h^j V_h^k V_l^e (\nabla_k q_{ej} - s_j w_{ke}) - 2V_h^j V_h^k V_l^e T_k q_{ej} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

bulunur. (3.1.13) de $P_h = T_k V_h^k$ olduğu hatırlanırsa

$$\vec{V} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V} = V_h^j V_h^k V_l^e (\nabla_k q_{ej} - s_j w_{ke}) - 2V_h^j V_l^e P_h q_{ej} \quad (3.1.14)$$

elde edilir. Sağ taraftaki birinci ifadeyi $\vec{\lambda}$ için $\vec{V}$ doğrultusuna göre $\vec{V}_h$ doğrultusundaki genelleştirilmiş Darboux fonksiyonu olarak tanımlayalım.

Dolayısıyla

$$\mathcal{D}_{\lambda| hhl} = \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s_h} \vec{V}_h + 2V_h^j V_l^e P_h q_{ej} \quad (3.1.15)$$

bulunur.

TEOREM 3.1.2 Eğer λ , W_n 'e ait normaller kongrüansı ise,

$$\mathcal{D}_{hhl} = -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + \mathcal{K}_{ls} \zeta_h^s + \mathcal{K}_{hs} \tilde{T}_{lh}^s - 2P_h \mathcal{K}_{hl}$$

dır.

İSPAT: λ, W_n 'e ait normaller kongüransı ise $t = 0, r = 1$ dir. Dolayısıyla (3.1.3) den,

$$s_j = 0, \quad \dot{\nabla}_k q_{ej} = -\dot{\nabla}_k w_{je} \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Bu takdirde (3.1.8) ifadesi,

$$\vec{V}_h \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s_h} \vec{V}_l = -V_h^j V_h^k V_l^e \dot{\nabla}_k w_{je} \quad (3.1.17)$$

şekline dönüşür. w_{je} 'nin ağırlığının $\{2\}$ olduğu hatırlanırsa ve (1.2.2) ifadesi yardımıyla

$$\dot{\nabla}_k w_{je} = \nabla_k w_{je} - 2T_k w_{je} \quad (3.1.18)$$

elde edilir. (3.1.18), (3.1.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s_h} \vec{V}_l &= -V_h^j V_h^k V_l^e (\nabla_k w_{je} - 2T_k w_{je}) \\ &= -V_h^j V_h^k V_l^e \nabla_k w_{je} + 2T_k V_h^j V_h^k V_l^e w_{je} \end{aligned}$$

bulunur. (2.2.7) ve (2.2.22) den,

$$\vec{V}_h \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s_h} \vec{V}_l = -V_h^j V_h^k V_l^e \nabla_k w_{je} + 2P_h^k \mathcal{K}_{hl} \quad (3.1.19)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.1.17) ifadesi,

$$\begin{aligned} \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s_h} \vec{V}_l &= -V_h^k \left(\dot{\nabla}_k (w_{je} V_h^j V_l^e) - w_{je} \dot{\nabla}_k V_h^j V_l^e - w_{je} V_h^j \dot{\nabla}_k V_l^e \right) \\ &= -V_h^k \dot{\nabla}_k (w_{je} V_h^j V_l^e) + w_{je} V_h^k \dot{\nabla}_k V_h^j V_l^e \\ &\quad + w_{je} V_h^j V_h^k \dot{\nabla}_k V_l^e \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.2.7), (2.2.8) ve (2.2.16) ifadeler (3.1.20) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s_h} \vec{V}_l &= -V_h^k \dot{\nabla}_k \mathcal{K}_{hl} + w_{je} \left(\mathcal{K}_{hh}^j + \zeta_h^s V_s^j \right) V_l^e \\ &\quad + w_{je} V_h^j \left(\mathcal{K}_{lh}^e + \mathcal{T}_{lh}^s V_s^i x_i^e \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Son eşitlikte (2.2.1) ve (2.2.2) ifadeleri yerine yazılarak $\dot{\nabla}_k \mathcal{K} = \nabla_k \mathcal{K}$ olduğu hatırlanırsa,

$$\begin{aligned} \vec{V}_h \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s_h} \vec{V}_l &= -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + w_{je} \zeta_h^s V_l^j V^e + w_{je} V_h^j \vec{T}_{lh}^s V^i \\ &= -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + \mathcal{K} \zeta_h^s + \mathcal{K} \vec{T}_{hs}^s \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

bulunur. (3.1.21) ifadesi (3.1.19) de yerine yazılırsa,

$$-V_h^j V_h^k V_l^e \nabla_k w_{je} = -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + \mathcal{K} \zeta_h^s + \mathcal{K} \vec{T}_{hs}^s - 2 P_h \mathcal{K}_{hl} \quad (3.1.22)$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadeyi $\vec{V}$ doğrultusuna göre $\vec{V}_h$ doğrultusundaki genelleştirilmiş Darboux fonksiyonu olarak adlandıırırsak,

$$\mathcal{D}_{hhl} = -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + \mathcal{K} \zeta_h^s + \mathcal{K} \vec{T}_{hs}^s - 2 P_h \mathcal{K}_{hl} \quad (3.1.23)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathcal{D}_{lhh} = -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_h} + \mathcal{K} \zeta_h^s + \vec{T}_{lh}^s \mathcal{K} - 2 P_h \mathcal{K}_{hl} \quad (3.1.24)$$

$$\mathcal{D}_{hlh} = -\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta s_l} + 2 \vec{T}_{hl}^s \mathcal{K} - 2 P_l \mathcal{K}_{hh} \quad (3.1.25)$$

olarak elde edilir. (3.1.23), (3.1.24) ve (3.1.25) ifadelerinden

$$\mathcal{D}_{hhl} = \mathcal{D}_{lhh}, \quad \mathcal{D}_{hhl} \neq \mathcal{D}_{hlh}$$

olduğu kolayca görülür.

(3.1.22) ifadesi yardımıyla,

$$\mathcal{D}_{hlh} = -V_h^j V_h^e V_l^k \nabla_k w_{ej} \quad (3.1.26)$$

$$\mathcal{D}_{hhl} = -V_h^j V_h^k V_l^e \nabla_k w_{je} \quad (3.1.27)$$

bulunur. Dolayısıyla (3.1.26) ve (3.1.27) den

$$\mathcal{D}_{hhl} - \mathcal{D}_{hlh} = -V_h^j V_h^k V_l^e (\nabla_k w_{ej} - \nabla_e w_{kj}) \quad (3.1.28)$$

elde edilir. Bu durumda (3.1.22) ifadesi yardımıyla $\mathcal{D}_{hhl} \neq \mathcal{D}_{hlh}$ olacağı açıktır. Ancak Riemann uzayı gözönüne alınır, [9] dan

$$\mathcal{D}_{hhl} - \mathcal{D}_{hlh} = -e_{h|}^k e_{h|}^j e_{l|}^p (\Omega_{jp;k} - \Omega_{kj;p})$$

elde edilir. Eğer uzay, Euclid uzayı olarak seçilirse

$$\Omega_{jp;k} - \Omega_{kj;p} = 0$$

bulunur. Bu takdirde $\mathcal{D}_{hhl} = \mathcal{D}_{hlh}$ dır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, W_{n+1} 'e ait bir (λ) kongrüansına göre W_n hiperyüzeyinin $\vec{V}_h$ doğrultusunun $\vec{V}$ doğrultusuna göre genelleştirilmiş Darboux fonksiyonu olan $D_{\lambda|_{hh}}$ ifadesi elde edilmiş ve (λ) normaller kongrüansı olduğunda bu ifadenin yeni şekli bir teorem yardımıyla verilmiştir.

Burada elde edilen sonuçlar yardımıyla, genelleştirilmiş Darboux fonksiyonunun birinci ve ikinci cins Chebyshev şebekeleri veya geodeziklerden ibaret olma halleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] NORDEN, A.: Affinely Connected Spaces. GRFML Moscow, (1976).
- [2] ZLATANOV, G.Z. : Special networks in the n-dimensional space of Weyl. Tensor(N.S), V.48, (1989).
- [3] HLAVATY, V. : Les courbes de la variete W_n . Memor. Sci. Math. Paris, (1934).
- [4] ZLATANOV, G.Z. : Nets in the n-dimensional space of Weyl. C.R. Acad. Bulgare Sci. V.41, No:10, 29-32, (1988) (in Russian)
- [5] UYSAL, S.A. - ÖZDEĞER, A. : On the Chebyshev nets in a hypersurface of a Weyl space. Journal of Geometry, (1993) (baskıda)
- [6] TSAREVA, B. - ZLATANOV, G. : On the Geometry of the Nets in the n-dimensional space of Weyl. Journal of Geometry, V.38, 181-197, (1990)
- [7] ZLATANOV, G. - NORDEN, A. : Orthogonal trajectories of a geodesic field, Izv., Vuzov, Matem., No.7, 42-46 (1975), (in Russian)
- [8] ÖZDEĞER, A. : A function of direction associated with n congruences of an orthogonal ennuple in a Riemannian hypersurface, Journal of Geometry, Vol.17 , 1-6, (1981)
- [9] NIRMALA, K. : Differential invariants in Riemannian space, Tensor, 15, 282-291, (1964)

ÖZGEÇMİŞ

Fusun ÖZEN, 5.5.1968 de Malatya'da doğdu. Lise öğrenimini Beşiktaş Kız Lisesi'nde tamamladı. 1986-1987 öğretim yılında İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümüne girdi ve 1991 Haziran döneminde mezun oldu. Aynı yıl Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans çalışmalarına başladı. Yine aynı dönemde İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.

U.C. YÖREKÖRME
LORTIMANTASTON MERKEZİ