



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WİGNER DÖNÜŞÜMLÜ FONKSİYON UZAYLARI

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Arzu ÖMERBEYOĞLU

172110009

2020

GİRESUN

Yüksek Lisans Tezi

Ad Soyad : Arzu ÖMERBEYOĞLU

Yıl : 2020

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

WİGNER DÖNÜŞÜMLÜ FONKSİYON UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARZU ÖMERBEYOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : **Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik**

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Öznur KULAK**

Şubat 2020

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WIGNER DÖNÜŞÜMLÜ FONKSİYON UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARZU ÖMERBEYOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik

Bu tez 07/02/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.


Doç. Dr.
Bülent Nafi ÖRNEK
Jüri Başkanı


Doç. Dr.
Öznur KULAK
Üye


Doç. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye

Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Arzu ÖMERBEYOĞLU

07/02/2020

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanması ve yürütülmesi sürecinde bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, kıymetli fikirleri ile beni yönlendiren, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Öznur KULAK' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tüm hayatım boyunca hep yanımda olan canım aileme, bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan sevgili eşim Yusuf , çocuklarım Fatma, Elif ve Yunus' a çok teşekkür ediyorum.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM1.GİRİŞ	1
BÖLÜM2. KAYNAK ARAŞTIRILMASI	4
BÖLÜM3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	18
3.1. τ –Wigner Dönüşümü ve Özellikler	18
BÖLÜM4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	31
4.1. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzayı ve Özellikleri	31
4.2. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzayında Kapsama Bağlılıkları	58
4.3. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzayında Tıkız Gömülmeler.....	66
4.4. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzaylarının Duali ve Çarpanlar Uzayları	74
BÖLÜM5. TARTIŞMA VE SONUÇ	82
KAYNAKLAR	84
ÖZGEÇMİŞ	88

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$L^p(\mathbb{R})$	: Lebesgue Uzayı
$L^p_\omega(\mathbb{R})$	: Ağırlıklı Lebesgue Uzayı
T_x	: Öteleme Operatörü
M_ω	: Karakter Operatörü
D_s	: Açılma Operatörü
$S(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı , her mertebeden sürekli olarak türevlenebilen, sonsuzda sıfıra hızlı giden fonksiyonlar uzayı (Schwartz Uzayı)
$C_c(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sürekli, tıkHz destekli fonksiyonların uzayı
$f * g$	: f ve g fonksiyonlarının girişim işlemi
$\otimes$	: Tensör çarpımı

WIGNER DÖNÜŞÜMLÜ FONKSİYON UZAYLARI

ÖZET

Bu tez çalışmasında öncelikle Wigner ve τ -Wigner dönüşümünün bazı özellikleri araştırılmıştır. Bulgular bölümünde $1 \leq p, q, r, s < \infty$, $\tau \in (0,1)$ ve ω_i ($i= 1, 2, 3,4$) fonksiyonları birer ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \\ = \{(f, g) \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \mid (W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2) \times L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)\}$$

vektör uzayı tanımlandı. Bu uzay üzerine $(f, g) \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olmak üzere

$\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s}$ normu konularak bu uzayın (Banach olması, öteleme operatörü sürekliliği vb.) temel özellikleri incelendi. Yine $1 \leq p, q, r, s < \infty$, $\tau \in (0,1)$ ve ω_i ($i= 1, 2, 3, 4$) fonksiyonları birer ağırlık fonksiyonları olmak üzere sırasıyla $W_\tau(f, \cdot)$ τ -Wigner dönüşümü $L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ uzayında ve $W_\tau(\cdot, g)$ τ -Wigner dönüşümlü $L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ uzayında olan $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $g \in L_{\omega_2}^q$ fonksiyonlarının $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ vektör uzayları normla donatılıp bu uzayların temel özellikleri çalışıldı.

Bazı koşullar altında $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzaylarının esas Banach modülü olduğu gösterildi ve sınırlı yaklaşık birimleri araştırıldı. Ayrıca $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayları arasında ki kapsama, tıkHz gömülme bağıntıları incelendi. Daha sonra ise $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzaylarının relatif tamlamaları tanımlanıp çarpanlar uzayları bulundu. Tez çalışmasının son kısmında da $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzaylarının dual uzayları elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: τ -Wigner dönüşümü, esas Banach modül, yaklaşık birim, tıkHz gömülme, çarpanlar uzayı.

THE FUNCTION SPACES WITH WIGNER TRANSFORM

ABSTRACT

In this thesis work, some properties of Wigner and τ -Wigner transforms are investigated firstly. Let ω_i ($i= 1, 2, 3, 4$) be weight functions. In the findings section, the vector space

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) = \{(f, g) \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \mid (W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2) \times L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)\}$$

is defined for $1 \leq p, q, r, s < \infty$ and $\tau \in (0, 1)$. This space is endowed with a norm $\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|((W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s}$ and some of its basic properties (Banach space, continuity of translation operator etc.) are investigated. Also the spaces $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ and $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ to be the space of the functions $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ such that τ -Wigner transform of f in $L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ and the space of the functions $g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ such that τ -Wigner transform of g in $L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$, respectively are endowed with norms and some basic properties of these spaces are studied under some conditions. The spaces $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ and $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ are shown to be essential the Banach module, and its approximate identities are investigated. Also inclusion properties and compact embeddings are discussed between these spaces. Later the relative completions of the spaces $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ are defined and their multipliers spaces are found. In the last part of thesis work, dual spaces of the spaces $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ and $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ are obtained.

Keywords: τ -Wigner transform, essential the Banach module, approximate identity, compact embedding, multipliers space.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Zaman- frekans analizi, ilk olarak 1930 yılında Quantum mekaniğinin gelişimiyle H.Weyl, E. Wigner ve J. Von Neumann tarafından ortaya çıkarılmıştır. 1946 yılında da D. Gabor tarafından sinyal analizi ve bilişim teorisinin teorik altyapısında ele alınmıştır (Gröchening, 2001). Zaman frekans analizi, harmonik analizin modern bir bilim dalıdır. Bu modern bilim dalı; fonksiyon ve operatörlerin analizinde kullanılan zaman-frekans değişimleri (modülasyon) ve öteleme operatörlerinin yer aldığı matematik dalları ve bunların uygulamalarının tamamını içermektedir (Gröchening, 2001). Zaman-frekans analizi; zaman ve frekans bilgisini eş zamanlı olarak ele alan bir yerel Fourier analizi formudur (Gröchening, 2001). Sinyal analizinde, Fourier dönüşümü bir sinyalin sadece frekans bilgisini vermektedir. Zaman frekans analizi, verilen bir sinyalin herhangi bir x zamanında frekans bilgisini ölçmeyi amaçlamaktadır. Bu nedenle Gabor (kısa zamanlı Fourier dönüşümü) dönüşümünden faydalanılmıştır. Gabor dönüşümü verilen sinyalin hem zaman hem de frekans bilgisini eş zamanlı olarak veren bir zaman-frekans gösterimidir (Gröchening, 2001). Gabor dönüşümünden faydalanılarak quadratik zaman-frekans gösterimleri elde edilmiştir. Quadratik zaman-frekans gösterimleri ilk olarak Quantum mekaniğinde E. Wigner tarafından Wigner (1932) çalışmasında araştırılmıştır. Özellikle bir quadratik zaman-frekans gösterimi olan Wigner dönüşümü; sinyallerin zaman-frekans bilgisinin matematiksel tanımında oldukça idealdir. Bir quadratik zaman-frekans gösterimi olan Wigner dönüşümünün kullanılma sebepleri şu şekilde özetlenebilir: Wigner dönüşümü, verilen bir sinyalin herhangi bir frekans bandında ve herhangi bir zaman periyodunda enerjisinin ne kadar olduğunu ölçümünü yapar. Böylece sinyal analizinde, zaman-frekans düzlemindeki enerji yoğunluğunun bilgisi alınır. Ayrıca fizikte, konum ve momentum değişkenleri için bileşik olasılık dağılımını verir (Gröchening, 2001). 1983 yılında H. Feichtinger tarafından modülasyon uzayı olarak bilinen, Gabor dönüşümü karışık (mixed) normlu uzaylara ait olan fonksiyonların uzayları tanımlanmıştır. Bu uzay matematiksel özellikler bakımından zengin bir uzaydır. Besov uzayları ve onların atomik ayrışımalarına paralel olarak devam eden

modülasyon uzayları, daha sonra genel bir dalgacık teorisinin örneği olarak görüldü. Bu teori, soyut temsil teorisi ve değişmeli olmayan harmonik analizde kullanıldı (Gröchening, 2001). Modülasyon uzayları zaman-frekans analizinde ortaya çıkan problemlerin çözümüne yardımcı olmuştur. Bu problemlerden bazıları şunlardır: Birincisi, fonksiyonların (sinyallerin) hangi özellikleri, toplanabilme ve bunların Gabor katsayılarının sonsuzda sıfır olma özellikleri yardımıyla karakterize edilebilir? İkincisi ise, bir fonksiyonun (sinyalin) zaman-frekans konsantrasyonu onun Gabor katsayıları ile belirlenebilir mi? Böylece modülasyon uzayları zaman-frekans problemlerinin matematiksel analizi için doğru fonksiyon bir fonksiyon uzayı olmuştur (Gröchening, 2001). Tezdeki çalışmada; Wigner dönüşümü ağırlıklı Lebesgue uzaylarında olan fonksiyon uzayları tanımlanacaktır. Bu uzayın matematiksel özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenecektir. Modülasyon uzaylarında Gabor dönüşümü kullanılır iken bu çalışmada ise bir quadratik zaman-frekans gösterimi olan Wigner dönüşümü ve ağırlıklı Lebesgue uzayları kullanılarak farklı bir bakış açısı getirmek hedeflenmektedir. Tezde matematiksel özellikler açısından daha zengin bir fonksiyon uzayı elde etmek hedeflenmektedir. Elde edilen bu uzay ile zaman frekans analizinde, modülasyon uzaylarında olduğu gibi yukarıda bahsedilen problemlerin çözümüne yardımcı olabilir mi? modülasyon uzaylarına göre daha iyi sonuçlar elde edilebilir mi? sonraki çalışmalar da araştırılabilir. Ayrıca elde edilecek sonuçlar harmonik analiz, sinyal analizinde ve operatör teorisinde de kullanılmaya adaydır. Yine daha sonraki çalışmalarda modülasyon uzaylarında olduğu gibi (Feichtinger, 2006), (Galperin ve Samarah, 2004), bu uzayın diskret normlu uzayı tanımlanarak bu uzayın sampling özelliği irdelenebilir. Böylece zaman-frekans analizinde bir uygulaması elde edilecektir. Ayrıca Sandıkçı ve Gürkanlı (2013), Sandıkçı (2014) çalışmalarında modülasyon ve karışık(mixed) normlu uzaylarda wigner ve toeplitz operatörlerinin sınırlılığı, sürekliliği incelendiği gibi; bu projede tanımlanacak olan yeni uzayda da çeşitli operatörlerin (wigner, weyl, toeplitz, wavelet, Gabor vb...) süreklilik ve sınırlılık problemleri bundan sonraki çalışmalarda ele alınabilir. Böylece bu çalışmanın Operatör teorisinde de bir uygulaması elde edilmiş olacaktır.

Bu tezde öncelikle Wigner dönüşümünün temel özellikleri ve bununla ilgili teoremler ispatları ile birlikte ayrıntılı bir biçimde Gröchening (2001) ve Wong (1998) çalışmalarından incelenecektir. Daha sonra Wigner dönüşümü ağırlıklı Lebesgue uzaylarında olan fonksiyon uzayı tanımlanacaktır. İlk aşamada bu uzayın boştan farklı olduğu gösterilecektir. Sonrasında bu uzay bir norm ile donatılarak bu uzayın bir Banach uzayı olduğu ispatlanacaktır. Elde edilen bu uzayın ötelemeler altında değişmezliği ispatlandıktan sonra bu uzayda öteleme operatörünün sürekliliği incelenecektir. Böylece elde edilecek sonuçlarla Modül FaktORIZATION Teoremi (Wang, 1977) kullanılarak uzayın esas Banach modülü olduğu ispatlanacaktır. Uzayın esas Banach modül olması, uzayın matematiksel özellik bakımından kuvvetlendirecek olup bu uzayın çarpanlar uzayını, yaklaşık birimleri ve relatif tamlaması incelenecektir. Bu uzayın çarpanlar uzayı incelenirken önce duality teoremi (Liu ve Rooij, 1969) kullanılarak uzayın duali bulunacaktır. Böylece elde edilen sonuçlar ve Rieffel (1966) çalışması kullanılarak bu yeni uzayın çarpanlar uzayı elde edilecektir. Daha sonrasında da Gaudry (1969), Duyar ve Gürkanlı (2003) çalışmalarındaki ispat tekniği kullanılarak uzayın relatif tamlaması araştırılacaktır. Ayrıca tanımlanacak olan bu uzayın tanımında olan ağırlıklı fonksiyonun durumuna göre uzayın kapsama özellikleri, kapalı grafik teoremi (Rudin, 1966), (Royden, 1968) gibi önemli teoremler kullanılarak ayrıca ele alınacaktır.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tanım 2.1: p reel sayısı $1 \leq p < \infty$ koşulunu sağlamak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) oluşturduğu vektör uzayı $L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca $L^p(\mathbb{R})$ uzayı $f \in L^p(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Eğer $p = \infty$ ise $L^\infty(\mathbb{R})$ uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve hemen hemen her yerde sınırlı olan ölçülebilir f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) uzayıdır. Bu uzay $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ için

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

normuna göre Banach uzayıdır (Rudin, 1966)

Tanım 2.2: f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde birer Borel fonksiyonu olsunlar. Bu fonksiyonların girişimi $f * g$ ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy$$

biçiminde tanımlanır. Bu girişimin tanımlı olması için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y) g(x - y)| dy < \infty$$

olmalıdır (Rudin, 1966).

Tanım 2.3: ω , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli, ölçülebilir bir fonksiyonu olmak üzere eğer

i) her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) \geq 1$,

ii) her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\omega(x + y) \leq \omega(x)\omega(y)$,

iii) ω yerel sınırlı

ise ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Reither, 1968).

Tanım 2.4: ω_1, ω_2 $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu olsunlar. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega_2(x) \leq C\omega_1(x)$ olacak şekilde bir $C > 0$ reel sayısı varsa $\omega_2 \leq \omega_1$ ve $\omega_1 \leq \omega_2$ ise ω_1 ve ω_2 denktir denir ve bu $\omega_1 \approx \omega_2$ şeklinde gösterilir (Feichtinger ve Gürkanlı, 1990)

Tanım 2.5: $1 \leq p < \infty$ ve ω fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_\omega^p(\mathbb{R})$ uzayı

$$L_\omega^p(\mathbb{R}) = \{f \mid f\omega \in L^p(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu uzay ağırlıklı Lebesgue uzayı olarak bilinir (Reither, 1968).

Tanım 2.6 (Polinom tipli ağırlık fonksiyonu): $\alpha \geq 0$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı $\omega(x, s) = (1 + |x| + |s|)^\alpha$ şeklindeki fonksiyona polinom tipli ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 2.7 (Hölder eşitsizliği): $1 < p$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(\mathbb{R})$,

$g \in L_q(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ olur. Bunun dışında

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği vardır (Rudin, 1966).

Tanım 2.8: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, her mertebeden sürekli olarak türevlenebilen, sonsuzda hızlı sıfıra giden fonksiyonlar uzayına Schwartz uzayı denir ve bu uzay $S(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Kartznelson, 1968).

Tanım 2.9: f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve $\text{supp} f$ ile gösterilir. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli, sürekli, tıkız (kompakt) destekli fonksiyonların vektör uzayı $C_c(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Rudin, 1966).

Tanım 2.10: Her mertebeden türevlenebilir, tıkız destekli fonksiyonların vektör uzayı $C_c^\infty(\mathbb{R})$ uzayı ile gösterilir (Rudin, 1966).

Tanım 2.11: f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$T_x f(t) = f(t - x)$$

biçiminde tanımlanan operatöre öteleme operatörü denir. Zaman-frekans analizinde öteleme operatörü zaman değişimini verir (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.12: f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i t \omega} f(t)$$

biçiminde tanımlanan operatöre ise karakter (modülasyon) operatörü denir. Zaman-frekans analizinde karakter operatörü frekans değişimini verir (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.13: $s \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$ ve f , $\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$D_s f(t) = |s|^{\frac{-1}{2}} f\left(\frac{t}{s}\right)$$

biçiminde tanımlı D_s operatörüne f fonksiyonunun açılma operatörü (dilation) denir. Zaman-frekans analizinde açılma operatörü verilen sinyalin özelliklerini, bir mikroskop gibi davranarak çözümlemeye yardımcı olur (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.14: $T_x M_\omega$ ve $M_\omega T_x$ operatörlerine de zaman frekans değişimleri denir (Gröchenig, 2001).

Teorem 2.1: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere zaman- frekans değişim operatörleri $L^p(\mathbb{R})$ üzerinde birer Herhangi izometridirler (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.15: bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

biçiminde tanımlanır (Bracewell, 1965).

Teorem 2.2: $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve $x, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere T_x, M_ω ve $M_\omega T_x$ operatörlerinin Fourier dönüşümleri;

$$(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f},$$

$$(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f},$$

$$(T_x M_\omega f)^\wedge = e^{-2\pi i x \omega} T_\omega M_{-x} \hat{f} = M_{-x} T_\omega \hat{f}$$

$$(D_s f)^\wedge(\omega) = D_{\frac{1}{s}} \hat{f}(\omega)$$

biçimindedir (Gröchenig, 2001).

Teorem 2.3: $f \in L^2(\mathbb{R})$ ve $x, \omega \in \mathbb{R}$ olsun. Öteleme ve karakter operatörleri $\mathbb{R}$ den $L^2(\mathbb{R})$ ye düzgün süreklidir (Gröchenig, 2001).

Sonuç 2.1: Zaman – frekans değişimleri $\mathbb{R}$ den $L^2(\mathbb{R})$ uzayına süreklidir (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.16: $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$ pencere fonksiyon olsun. Herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kısa zamanlı fourier dönüşümü (gabor dönüşümü),

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i \omega t} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer g desteğinin merkezi başlangıç noktasında olan tıkız (kompakt) destekli bir f fonksiyon ise, fonksiyonunun Gabor dönüşümü x merkezli komşuluktaki f fonksiyonunun bir diliminin Fourier dönüşümüdür. Fizikte, $\mathbb{R}^2$ ye faz uzayı, işaret analizinde zaman- frekans düzlemi denir. Gabor dönüşümü f fonksiyonuna göre doğrusal, g fonksiyonuna göre ise eşlenik doğrusaldır. Diğer bir ifade ile her $f, g, h \in L^2(\mathbb{R})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$V_g(\alpha f + \beta h) = \alpha V_g f(x, \omega) + \beta V_g h(x, \omega)$$

olup,

$$V_{(\alpha f + \beta h)} f(x, \omega) = \bar{\alpha} V_h f(x, \omega) + \bar{\beta} V_g f(x, \omega)$$

eşitlikleri sağlanır (Gröchenig, 2001).

Teorem 2.4: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ise $V_g f$ dönüşümü, $\mathbb{R}^2$ üzerinde düzgün sürekli olup aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Gröchenig, 2001) :

$$a) V_g f(x, \omega) = (\hat{f} \cdot T_x \bar{g})^\wedge(\omega),$$

$$b) V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle,$$

$$c) V_g f(x, \omega) = \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle,$$

$$d) V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} (\hat{f}, T_\omega \bar{\hat{g}})^\wedge(-x),$$

$$e) V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x),$$

$$f) V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} (f * M_\omega g^*)(x),$$

$$g) V_g f(x, \omega) = (\widehat{f * M_{-x} \hat{g}^*})(\omega),$$

$$h) V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}} f(t + \frac{\pi}{2}) \bar{g}(t - \frac{\pi}{2}) e^{-2\pi i t \omega} dt$$

Yardımcı Teorem 2.1: Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})$ için

$$V_g f(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} \overline{V_f g(-x, \omega)} \quad (x, \omega \in \mathbb{R})$$

eşitliği vardır.

İspat: $f, g \in S(\mathbb{R})$ olsun. Eğer $t - x = u$ denirse

$$\begin{aligned}
V_g f(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x+u) \overline{g(u)} e^{-2\pi i (u+x) \omega} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{g(u) f(u+x)} e^{2\pi i u \omega} e^{2\pi i x \omega} du \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(u) f(u - (-x))} e^{2\pi i u \omega} du \\
&= e^{-2\pi i x \omega} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(u) f(u - (-x))} e^{-2\pi i u \omega} du \\
&= e^{-2\pi i x \omega} V_f g(-x, \omega)
\end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 2.2: Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})$ için $0 \neq s \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_s(f * g) = |s|^{\frac{-1}{2}} (D_s g * D_s f)$$

eşitliği vardır.

İspat: Herhangi $t \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $t - sy = u$ denirse

$$\begin{aligned}
D_s(f * g)(t) &= |s|^{\frac{-1}{2}} (f * g) \left(\frac{t}{s} \right) \\
&= |s|^{\frac{-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g \left(\frac{t}{s} - y \right) dy \\
&= |s|^{\frac{-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g \left(\frac{t - sy}{s} \right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |s|^{\frac{-1}{2}} \int_{t-s\mathbb{R}} f\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{u}{s}\right) \frac{du}{(-s)} \\
&= |s|^{\frac{-1}{2}} \int_{-s\mathbb{R}} f\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{u}{s}\right) \frac{du}{(-s)} \\
&= |s|^{\frac{-1}{2}} \int_{s\mathbb{R}} f\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{u}{s}\right) \frac{du}{s} \\
&= |s|^{\frac{-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t-u}{s}\right) g\left(\frac{u}{s}\right) \frac{du}{s} \\
&= |s|^{\frac{-1}{2}} (D_s g * D_s f)(t)
\end{aligned}$$

Teorem 2.5 (Diklik Bağıntısı): Her $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ ve $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R})$,

($j = 1, 2$), olup

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

eşitliği vardır (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.17: $\tau \in (0, 1)$ olmak üzere $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. Her $(x, \omega) \in \mathbb{R}^2$ için $\tau -$ Gabor dönüşümü

$$V_g^\tau f(x, \omega) = V_g f\left(\frac{1}{1-\tau}x, \frac{1}{\tau}\omega\right)$$

biçiminde tanımlanır (Sandıkçı, 2014).

Tanım 2.18: $f \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için bir Wf fonksiyonu;

$$Wf(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüme Wigner dağılım fonksiyonu denir (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.19: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$W(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanan $W(f, g)$ dönüşümüne f, g fonksiyonlarının çapraz-Wigner dönüşümü denir (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.20: Her $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için $Ig(x) = g(-x)$ olmak üzere

$$W(f, g)(x, \omega) = 2 e^{4\pi i \omega t} V_{Ig}f(2x, 2\omega)$$

eşitliği vardır (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.21: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere Wigner dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $W(f, g)$ dönüşümü $\mathbb{R}^2$ uzayında düzgün süreklidir. Ayrıca

$$\|W(f, g)\|_{\infty} \leq 2\|f\|_2\|g\|_2$$

eşitsizliği vardır.

b) $W(f, g) = \overline{W(g, f)}$ olup bunun dışında Wf dönüşümü reel değerlidir.

c) $u, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere Wf dönüşümü kovaryanttır. Başka bir deyişle her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$W(T_u M_{\mu} f)(x, \omega) = Wf(x - u, \omega - \mu)$$

eşitliği vardır.

d) Her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$W(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) = W(f, g)(-\omega, x)$$

olur.

e) $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R})^2} = \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğe Moyal eşitliği denir (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.22 (Belirsizlik Fonksiyonu): Bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun belirsizlik fonksiyonu

$$Af(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca belirsizlik fonksiyonu ile Gabor dönüşümü arasında

$$Af(x, \omega) = e^{\pi i \omega x} V_f f(x, \omega)$$

bağıntısı vardır (Gröchenig, 2001). Yine $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonlarının çapraz belirsizlik fonksiyonu

$$A(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde ifade edilir. Bu dönüşüm ile Gabor dönüşümü arasında;

$$A(f, g)(x, \omega) = e^{\pi i \omega x} V_g f(x, \omega)$$

biçiminde bağıntı vardır (Gröchenig, 2001).

Teorem 2.6: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ve $\mathcal{F}, \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{W}F(x, \omega) = \mathcal{F}(w, -x)$ olsun. O halde $W(f, g) = F \cup A(f, g)$ eşitliği vardır (Gröchenig, 2001).

Tanım 2.23: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow xy$ işlemi verilsin. Eğer

- i) Her $x, y, z \in V$ için $x(yz) = (xy)z$,
- ii) Her $x, y, z \in V$ için $x(y + z) = xy + xz$,
- iii) Her $x, y \in V$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$.

koşulları sağlanıyorsa V, K üzerinde bir cebirdir denir. Eğer her $x \in V$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in V$ varsa V cebirine birimli cebir, e elemanına da cebirin birimi denir. Ayrıca her $x, y \in V$ $xy = yx$ ise V cebirine değişmeli cebir denir. V, K cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve her $x, y \in V$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad (2.1)$$

oluyorsa V, K üzerinde bir Banach cebiridir (Larsen, 1971; Larsen, 1973).

Tanım 2.24: $(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach uzayı ve $(F, \|\cdot\|_F)$ de bir Banach cebiri olsun. Bir $\otimes$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa E, F üzerinde bir Banach modülü veya Banach F –modül denir (Wang, 1977).

i) Her $f, g \in F$ ve her $h, k \in E$ için

$$(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h,$$

$$f \otimes (h + k) = f \otimes h + f \otimes k$$

ii) Her $f, g \in F$ ve her $h \in E$ için $(f * g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h),$

($*$ işlemi F uzayındaki çarpma işlemidir).

iii) Her $f \in F$ ve her $h \in E$ için ve $\alpha \in K$ için $\alpha(f \otimes h) = (\alpha f) \otimes h = f \otimes (\alpha h),$

iv) Her $f \in F$ ve her $h \in E$ için $\|f \otimes h\|_E \leq \|f\|_F \|h\|_E.$

Tanım 2.25: E bir Banach cebiri ve F bir sol (sağ) Banach E – modül olmak üzere

$$EF = \{xy | x \in E, y \in F\} \quad (2.2)$$

kümesi tarafından üretilen F nin alt vektör uzayının kapanışına F modülünün esas kısmı denir ve F_e ile gösterilir. Burada $F = F_e$ ise esas sol(sağ) Banach E –modül denir (Doran ve Wichmann, 1979).

Tanım 2.26: $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı $(E, \|\cdot\|_E)$ normlu cebirinde olmak üzere eğer her $x \in E$ için

$$\lim_{\alpha \in I} e_{\alpha} x = x \quad (2.3)$$

sağlanıyorsa $(e_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ağı E normlu cebiri için sol yaklaşık birim denir. Benzer şekilde her $x \in E$ için

$$\lim_{\alpha \in I} x e_{\alpha} = x \quad (2.4)$$

oluyorsa $(e_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ağı E normlu cebiri için sağ yaklaşık birim denir. Eğer her iki özellik birlikte sağlanıyorsa $(e_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ağına E normlu cebirinin yaklaşık birimi denir. Ayrıca her $\alpha \in I$ için $\|e_{\alpha}\| \leq K$ olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı varsa $(e_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ağına E normlu cebirinin sınırlı yaklaşık birimi denir (Doran ve Wichmann, 1979).

Teorem 2.7: E bir Banach cebiri ve X bir sol Banach E –modül olsun. Eğer $(e_{\alpha})_{\alpha \in I}$ ağı E nin bir sınırlı sol yaklaşık birimi ise

$$X_e = \overline{EX} = \{x \in X \mid \lim e_{\alpha} x = x\} \quad (2.5)$$

olur (Doran ve Wichmann, 1979).

Sonuç 2.2: E bir Banach cebiri ve $(e_{\alpha})_{\alpha \in I}$ onun bir sınırlı yaklaşık birimi olmak üzere X Banach E –modülünün esas E –modül olması için gerek ve yeterli koşul her $x \in X$ için

$$\lim e_{\alpha} x = x \quad (2.6)$$

olmasıdır (Doran ve Wichmann, 1979).

Teorem 2.8 (Module Factorization Theorem): $(F, \|\cdot\|_F)$ uzayı sınırlı yaklaşık birime sahip olsun. $(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach F –modül olmak üzere FE, E uzayında yoğun ise $FE = E$ olur (Wang, 1977).

Tanım 2.27: $(E, \|\cdot\|_E)$ ve $(F, \|\cdot\|_F)$ iki Banach uzayı olmak üzere $E \subset F$ olsun. Eğer her $f \in E$ için

$$\|f\|_F \leq C \|f\|_E \quad (2.7)$$

olacak biçimde $C > 0$ sayısı varsa E uzayı F içine sürekli olarak gömülüyor denir (Gröchenig, 2001).

Teorem 2.9 (Kapalı Grafik Teoremi): E ve F iki Banach uzayı olmak üzere T, E uzayından F uzayına tanımlı doğrusal bir fonksiyon olsun. Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi E uzayında bir x elemanına yakınsak ve $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de F uzayında bir y elemanına yakınsak $y = Tx$ oluyorsa T dönüşümü süreklidir (Rudin, 1966; Royden, 1968).

Tanım 2.28: $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset \mathbb{R}$ tıkız (kompakt) alt kümesi için

$$\int_K |f(x)| dx < \infty \quad (2.8)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna yerel integrallenebilir fonksiyon denir. Bu fonksiyonların uzayı $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Rudin, 1973).

Tanım 2.29: $(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer her $f \in E$ ve $K \subset \mathbb{R}$ tıkız (kompakt) alt kümesi için

$$\int_K |f(x)| dx < C_K \|f\|_E \quad (2.9)$$

olacak biçimde $C_K > 0$ sabiti varsa $(E, \|\cdot\|_E)$ uzayına Banach fonksiyon uzayı veya kısaca BF –uzayı denir (Feichtinger ve Gröchenig, 1989).

Tanım 2.30: E ve F iki normlu uzay olmak üzere T de E uzayından F uzayına doğrusal bir fonksiyon olsun. Eğer E uzayındaki her sınırlı $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin F uzayında yakınsak bir alt dizisi varsa T fonksiyonuna kompakttır denir (Taylor, 1957).

Tanım 2.31: A bir Banach cebiri olmak üzere E ve F Banach A –modül olsunlar. E den F ye T sınırlı doğrusal fonksiyonunu alalım. Eğer T fonksiyonu her $a \in A, b \in E$ için

$$T(ab) = aT(b) \quad (2.10)$$

koşulunu sağlıyor ise buna E den F ye giden çarpan (multiplier) denir. Bu T fonksiyonlarının uzayı $M(E, F)$ veya $Hom_A(E, F)$ ile eğer $E = F$ ise $M(E)$ biçiminde gösterilir (Rieffel, 1967; Rieffel, 1969; Larsen, 1977; Gürkanlı, 2007).

Tanım 2.32: X ve Y Banach A -modül olsunlar. Bu uzayların projektif tensör çarpımı $X \otimes_Y Y$ olmak üzere her $a \in A$, $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$ax \otimes y - x \otimes ay \quad (2.11)$$

biçimindeki elemanlar tarafından üretilen $X \otimes_Y Y$ uzayının kapalı alt uzayı K olsun. Bu durumda $X \otimes_Y Y / K$ bölüm Banach uzayına A -modül tensör çarpımı denir ve $X \otimes_A Y$ simgesi ile gösterilir. Ayrıca her $t \in X \otimes_A Y$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$$

ve $x_i \in X, y_i \in Y$ olmak üzere

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i \quad (2.12)$$

olur (Rieffel, 1969).

Teorem 2.10: X ve Y Banach A -modül olsunlar. Bu durumda

$$Hom_A(X, Y^*) \cong (X \otimes_A Y)^* \quad (2.13)$$

olur (Rieffel, 1969).

$(E, \|\cdot\|_E)$ ve $(F, \|\cdot\|_F)$ aynı K cismi üzerinde normlu uzaylar olmak üzere $(x, y) \in E \times F$ üzerinde

$$\|(x, y)\|_{max} = \max(\|x\|, \|y\|) \quad (2.14)$$

$$\|(x, y)\|_{sum} = \|x\| + \|y\| \quad (2.15)$$

normlarını tanımlayalım. $H, E \times F$ uzayının (2.14) ve (2.15) ifadelerinde verilen normlardan birine göre kapalı (dolayısıyla her ikisine göre kapalıdır) bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $E \Delta_H F$ uzayı H , üzerindeki norm ise $\|\cdot\|_{max}$ normunun H ya kısıtlaması olsun. Yine $EV_H F$ de $(E \times F)/H$ ve üzerinde norm ise

$$\|u\| = \inf\{\|(x, y)\|_{sum} : (x, y) \in E \times F, u = (x, y) \bmod H\} \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlansın (Liu ve Rooij, 1969).

Teorem 2.11(Duality Teoremi): E ve F normlu uzaylar olmak üzere bunların dual uzayları sırasıyla E' ve F' olsun. $E \times F$ uzayının bir H kapalı alt uzayını alalım ve bir K kümesini

$$K = \{(\sigma, \tau) \in E' \times F' : \sigma x + \tau y = 0, (x, y) \in H\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $E' \Delta_K F' \cong (EV_H F)'$ ve $E' V_K F' \cong (E \Delta_H F)'$ olur (Liu ve Rooij, 1969).

Tanım 2.33 : $(A, \|\cdot\|_A), L_\omega^p(\mathbb{R})$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir normlu alt uzayı olsun.

i) $\|\cdot\|_{p,\omega} \leq \|\cdot\|_A$ eşitsizliği sağlansın ve $(A, \|\cdot\|_A)$ girişim işlemine göre Banach $L_\omega^1(\mathbb{R})$ -modül olsun.

ii) Her $f \in A$ için $\|f * e_\alpha - f\|_A \rightarrow 0$ ve $M > 0$ bir sabit olmak üzere her $\alpha \in I$ için $\|e_\alpha\|_{1,\omega} \leq M$ olacak şekilde $L_\omega^1(\mathbb{R})$ uzayının bir $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ yaklaşık birimi bulunsun. O halde bir A kümesini

$$A = \left\{ f \in L_\omega^p(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in I \text{ için } f * e_\alpha \in A \text{ ve } \sup_{\alpha \in I} \|f * e_\alpha\|_A < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu A uzayına A uzayının relatif tamlaması denir. A uzayı bir Banach uzayı olup, tanım 2.48deki koşulları sağlayan yaklaşık birimlerden bağımsızdır (Duyar ve Gürkanlı, 2003).

Teorem 2.12: A , tanım 2.48 deki koşulları sağlayan $L_\omega^p(\mathbb{R})$ uzayının bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda A uzayının A relatif tamlaması $Hom_{L_\omega^1(\mathbb{R})}(L_\omega^1(\mathbb{R}), A)$ uzayına izomorftur (Duyar ve Gürkanlı, 2003)

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. τ –Wigner Dönüşümü ve Özellikleri

Tezde öncelikle Wigner dönüşümünün temel özellikleri ve bununla ilgili teoremler ispatları ile birlikte ayrıntılı bir biçimde Gröchening (2001) ve Wong (1998) çalışmalarından incelenmiştir. Daha sonra Wigner dönüşümü ağırlıklı Lebesgue uzaylarında olan fonksiyon uzayları tanımlanmıştır. Bu uzaylar bir norm ile donatılarak bir Banach uzayı olduğu ispatlanmıştır. Elde, edilen bu uzayların ötelemeler altında değişmezliği ispatlandıktan sonra bu uzaylarda öteleme operatörünün sürekliliği incelenmiştir. Böylece elde, edilen sonuçlarla Modül Faktörization Teoremi (Wang, 1977) kullanılarak uzayların esas Banach modülü olduğu ispatlanmıştır. Uzayın esas Banach modül olması sayesinde bu uzayların çarpanlar uzayı, yaklaşık birimleri ve relatif tamlamaları incelenmiştir. Uzayların çarpanlar uzayı incelenirken önce duality teoremi kullanılarak dualleri bulunmuştur. Böylece elde, edilen sonuçlar ve Rieffel (1966) çalışması kullanılarak bu yeni uzayların çarpanlar uzayı elde edilmiştir. Daha sonrasında da Gaudry (1969), Duyar ve Gürkanlı (2003) çalışmalarındaki ispat tekniği kullanılarak uzayların relatif tamlaması araştırılmıştır. Ayrıca bu yeni uzayların tanımında olan ağırlıklı fonksiyonun durumuna göre uzayın kapsama özellikleri, kapalı grafik teoremi Rudin (1966), Royden (1968) gibi önemli teoremler kullanılarak ayrıca ele alınmıştır.

Tanım 3.1.1: $\tau \in [0,1]$ olmak üzere her $f, g \in S(\mathbb{R})$ için τ –Wigner dönüşümü

$$W_{\tau}(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{g(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f = g$ ise $W_{\tau}(f, f) = W_{\tau} f$ ile gösterilecektir. Eğer $\tau = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$W_{\frac{1}{2}}(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

olup çapraz- wigner dönüşümü elde edilir. Yine eğer $\tau=0$ ise

$$W_0(f, g)(x, \omega) = \mathcal{R}(f, g)(x, \omega) = e^{-2\pi i x \omega} \overline{f(x)} \hat{g}(\omega)$$

olup Rihaczek dönüşümü bulunur. Ayrıca $\tau=1$ ise de ;

$$W_1(f, g)(x, \omega) = \overline{R(g, f)}(x, \omega) = e^{2\pi i x \omega} \overline{g(x)} \hat{f}(\omega)$$

olur.

Tanım 3.1.2 : Herhangi $h \in S(\mathbb{R})$ için bir A_τ fonksiyonu, $\tilde{h}(t) = h(-t)$ olmak üzere

$$A_\tau h(t) = \tilde{h}\left(\frac{1-\tau}{\tau} t\right), \quad (\tau \in (0,1))$$

biçiminde tanımlanır. Böylece her $f, g \in S(\mathbb{R})$ için, τ -Wigner dönüşümü;

$$W_\tau(f, g)(x, \omega) = \frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{A_\tau g} f\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right) \quad (3.1)$$

biçiminde yeniden ifade edilir. Ayrıca $\tau \in (0,1)$ için;

$$W_\tau(f, g)(x, \omega) = \frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{A_\tau g} f\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right)$$

eşitliği elde edilir

(Boggiatto ve arkadaşları, 2007; Boggiatto ve arkadaşları, 2010; Sandıkçı, 2004).

Teorem 3.1.1 : $\tau \in (0,1)$ olmak üzere her $f, g \in S(\mathbb{R})$ için $W_\tau(f, g)$ dönüşümü f fonksiyonuna göre doğrusal ve g fonksiyonuna göre de eşlenik doğrusaldır.

İspat: Herhangi $f_1, f_2 \in S(\mathbb{R})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Sabit bir $g \in S(\mathbb{R})$ için $x, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W_\tau(\alpha f_1 + \beta f_2, g)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f_1 + \beta f_2)(x + \tau t) \overline{g(x - (1-\tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f_1(x + \tau t) \overline{g(x - (1-\tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}} \beta f_2(x + \tau t) \overline{g(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
& = \alpha W_{\tau}(f_1, g)(x, \omega) + \beta W_{\tau}(f_2, g)(x, \omega)
\end{aligned}$$

bulunur. Yine herhangi $g_1, g_2 \in S(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $f \in S(\mathbb{R})$ sabit bir fonksiyon olsun. O halde her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
W_{\tau}(f, \alpha g_1 + \beta g_2)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{(\alpha g_1 + \beta g_2)(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{\alpha g_1(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{\beta g_2(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \bar{\alpha} W_{\tau}(f, g_1)(x, \omega) + \bar{\beta} W_{\tau}(f, g_2)(x, \omega)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2: $\tau \in (0, 1)$ ve herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})$ için $W_{\tau}(f, g)$ dönüşümü kuadratik bir dönüşümdür.

İspat: Herhangi $f, h \in S(\mathbb{R})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ verilsin. $W_{\tau}(f, f) = W_{\tau}(f)$ olmak üzere her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
& W_{\tau}(\alpha f + \beta h)(x, \omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta h)(x + \tau t) \overline{(\alpha f + \beta h)(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta h)(x + \tau t) (\bar{\alpha} \bar{f} + \bar{\beta} \bar{h}) \overline{(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f)(x + \tau t) (\bar{\alpha} \bar{f}) \overline{(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} (\alpha f)(x + \tau t) (\bar{\beta} \bar{h}) \overline{(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} (\beta h)(x + \tau t) (\bar{\alpha} \bar{f}) \overline{(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} (\beta h)(x + \tau t) (\bar{\beta} \bar{h}) \overline{(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\alpha|^2 f(x + \tau t) \overline{f(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \alpha \bar{\beta} f(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \beta \bar{\alpha} h(x + \tau t) \overline{f(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} |\beta|^2 h(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= |\alpha|^2 W_{\tau}(f, f)(x, \omega) + \alpha \bar{\beta} W_{\tau}(f, h)(x, \omega) \\
&+ \beta \bar{\alpha} W_{\tau}(h, f)(x, \omega) + |\beta|^2 W_{\tau}(h, h)(x, \omega) \\
&= |\alpha|^2 W_{\tau}(f)(x, \omega) + \alpha \bar{\beta} W_{\tau}(f, h)(x, \omega) \\
&+ \beta \bar{\alpha} W_{\tau}(h, f)(x, \omega) + |\beta|^2 W_{\tau}(h)(x, \omega)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.3: Her $f, g \in S(\mathbb{R})$ için $\tau \in (0, 1)$ olmak üzere

$$W_{\tau}(f, g)(x, \omega) = e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^{\tau} f(x, \omega)$$

eşitliği vardır.

İspat: Eğer $u = x + \tau t$ dönüşümü yapılırsa $du = \tau dt$ ve $\tau t = u - x$ olup $t = \frac{u-x}{\tau}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} W_{\tau}(f, g)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{g(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g(u - t)} e^{-2\pi i \omega \left(\frac{u-x}{\tau}\right)} \frac{du}{\tau} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(u - \frac{u-x}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \omega \left(\frac{u-x}{\tau}\right)} \frac{du}{\tau} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(\frac{u\tau - u + x}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \omega \left(\frac{u-x}{\tau}\right)} \frac{du}{\tau} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(u \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) + \frac{x}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \left(\frac{u-x}{\tau}\right) \omega} \frac{du}{\tau} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(u \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) + \frac{x}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{du}{\tau} \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(u \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) + \frac{x}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} du \\ &= \frac{1}{\tau} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(u \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) + \frac{x}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega} du \\ &= \frac{1}{\tau} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g\left(\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)\left(u - \frac{x}{1-\tau}\right)\right)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tau} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} \overline{D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g \left(u - \frac{x}{1-\tau} \right)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega} du \\
&= \frac{1}{\tau} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g \left(u - \frac{x}{1-\tau} \right)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega} du \\
&= \frac{1}{\tau} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}} g \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}}^{\tau} g(x, \omega)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere Wigner dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $\tau \in (0,1)$ olmak üzere $W_{\tau}(f, g)$ dönüşümü $\mathbb{R}^2$ uzayında düzgün süreklidir. Ayrıca

$$\|W_{\tau}(f, g)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\tau \cdot (1-\tau)}} \|f\|_2 \|g\|_2$$

eşitsizliği vardır.

b) $u, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $W_{\tau} f$ dönüşümü kovaryanttır. Başka bir deyişle her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$W_{\tau}(T_u M_{\mu} f)(x, \omega) = W_{\tau} f(x - u, \mu - \omega)$$

eşitliği vardır.

c) Her $x, \omega \in \mathbb{R}$ için ve $\tau \in (0,1)$ olmak üzere $W_{\tau}(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) = W_{\tau}(f, g)(-\omega, x)$ olur,

d) $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle W_{\tau}(f_1, g_1), W_{\tau}(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik Moyal eşitliği olarak bilinir.

İspat:

a) Herhangi $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
 |W_\tau(f, g)(x, \omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{g(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x + \tau t)| |\overline{g(x - (1 - \tau)t)}| |e^{-2\pi i \omega t}| dt \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x + \tau t)| |g(x - (1 - \tau)t| dt
 \end{aligned}$$

olup Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|W_\tau(f, g)(x, \omega)| \leq \|f(x + \tau t)\|_2 \|g(x - (1 - \tau)t)\|_2 \quad (3.2)$$

elde edilir. Eğer bu son ifadede $x + \tau t = u$ değişken değişimi yapılsa; $\tau dt = du$ olup

$$\begin{aligned}
 \|f(x + \tau t)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x + \tau t)|^2 dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 \frac{du}{\tau} \\
 &= \frac{1}{\tau} \|f\|_2^2
 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|f(x + \tau t)\|_2 = \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \quad (3.3)$$

elde edilir. Aynı şekilde, eğer $x - (1 - \tau)t = u$ denirse $-(1-\tau) dt = du$ olup

$$\begin{aligned}\|g(x - (1 - \tau)t)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |g(x - (1 - \tau)t)|^2 dt \\ &= \int_{-\mathbb{R}} |g(u)|^2 \frac{-du}{(1 - \tau)} = \frac{1}{(1 - \tau)} \int_{\mathbb{R}} |g(u)|^2 du \\ &= \frac{1}{(1 - \tau)} \|g\|_2^2\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|g(x - (1 - \tau)t)\|_2 = \left(\frac{1}{(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_2 \quad (3.4)$$

bulunur. Buradan (3. 3) ve (3. 4) eşitsizlikleri (3. 2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}|W_\tau(f, g)(x, \omega)| &\leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \cdot \left(\frac{1}{(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_2 \\ &= \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \|g\|_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau(1 - \tau)}} \|f\|_2 \|g\|_2\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$|W_\tau(f, g)(x, \omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{\tau(1 - \tau)}} \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (3.5)$$

olup

$$\|W_\tau(f, g)\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x, \omega \in \mathbb{R}} |W_\tau(f, g)(x, \omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{\tau(1 - \tau)}} \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

elde edilir.

b) Herhangi $(x, \omega) \in \mathbb{R}^2$ alalım. O halde

$$W_\tau(T_u M_\mu f)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} (T_u M_\mu f)(x + \tau t) \overline{(T_u M_\mu f)(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} (M_{\mu}f)(x + \tau t - u) \overline{(M_{\mu}f)(x - (1 - \tau)t - u)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t - u) e^{2\pi i(x + \tau t - u)\mu} \overline{f(x - (1 - \tau)t - u) e^{2\pi i(x - (1 - \tau)t - u)\mu}} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t - u) e^{2\pi i(x + \tau t - u)\mu} \overline{f(x - (1 - \tau)t - u)} e^{-2\pi i(x - (1 - \tau)t - u)\mu} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t - u) \overline{f(x - (1 - \tau)t - u)} e^{2\pi i(x + \tau t - u - x + (1 - \tau)t + u)\mu} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t - u) \overline{f(x - (1 - \tau)t - u)} e^{2\pi i \mu t - 2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t - u) \overline{f(x - (1 - \tau)t - u)} e^{-2\pi i(\omega - \mu)t} dt \\
&= W_{\tau}f(x - u, \mu - \omega)
\end{aligned}$$

elde edilir.

c) Herhangi $(f, g) \in L^2(\mathbb{R})$ ve $(x, \omega) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. Eğer teorem 3.4 kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}}^{\tau} \hat{g} \hat{f}(x, \omega) \\
&= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}} \hat{g} \hat{f}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

yazılır. Öte yandan teorem 2.17 den

$$D_{\frac{\tau}{\tau-1}} \hat{g} = \widehat{D_{\frac{\tau-1}{\tau}} g}$$

olup

$$\begin{aligned}
V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} \hat{f}\left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau}\right) &= V_{D_{\frac{\tau-1}{\tau}}g} \hat{f}\left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau}\right) \\
&= e^{2\pi i \left(\frac{-\omega}{\tau}\right) \frac{x}{1-\tau}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right) \\
&= e^{-2\pi i \frac{\omega x}{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

yazılır. Eğer (3.7) eşitliği (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa ;

$$\begin{aligned}
W_{\tau}(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{\omega x}{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right) \\
&= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega (1-\frac{1}{1-\tau})} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x \omega}{1-\tau}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Bu son ifadede

$$\begin{aligned}
V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t) D_{\frac{\tau-1}{\tau}}g\left(t + \frac{\omega}{\tau}\right)} e^{-2\pi i \frac{xt}{1-\tau}} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t) \left|\frac{\tau-1}{\tau}\right|^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{\tau}{\tau-1}\left(t + \frac{\omega}{\tau}\right)\right)} e^{-2\pi i \frac{xt}{1-\tau}} dt \\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t) g\left(\frac{\tau t}{\tau-1} + \frac{\omega}{\tau-1}\right)} e^{-2\pi i \frac{xt}{1-\tau}} dt
\end{aligned}$$

olup $t = -\omega + (1-\tau)u$ denirse;

$$\begin{aligned}
V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}g} f\left(-\frac{\omega}{\tau}, \frac{x}{1-\tau}\right) &= \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau}} \int_{\mathbb{R}} f(-\omega + (1-\tau)u) g\left(\frac{\tau(-\omega + (1-\tau)u) + \omega}{\tau-1}\right) e^{-2\pi i \frac{x(-\omega + (1-\tau)u)}{1-\tau}} (1-\tau) du \\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-\tau}} (1-\tau) \int_{\mathbb{R}} f(-\omega + (1-\tau)u) g\left(\frac{-\omega(\tau-1) + \tau(1-\tau)u}{\tau-1}\right) e^{2\pi i \frac{x\omega}{1-\tau}} e^{-2\pi i x \frac{(1-\tau)u}{(1-\tau)}} du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\tau(1-\tau)} \int_{\mathbb{R}} f(-\omega + (1-\tau)u) \overline{g(-\omega - \tau u)} e^{2\pi i \frac{x\omega}{1-\tau}} e^{-2\pi i x u} du \\
&= \sqrt{\tau(1-\tau)} e^{2\pi i \frac{x\omega}{1-\tau}} \int_{\mathbb{R}} f(-\omega + (1-\tau)u) \overline{g(-\omega - \tau u)} e^{-2\pi i x u} du \\
&= \sqrt{\tau(1-\tau)} e^{2\pi i \frac{x\omega}{1-\tau}} W_{(1-\tau)}(f, g)(-\omega, x)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olur. Böylece (3.9) eşitliği (3.8) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
W_{\tau}(\hat{f}, \hat{g})(x, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x\omega}{1-\tau}} \sqrt{\tau(1-\tau)} e^{2\pi i \frac{x\omega}{1-\tau}} W_{(1-\tau)}(f, g)(-\omega, x) \\
&= W_{(1-\tau)}(f, g)(-\omega, x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

d) Herhangi $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ verilsin. O halde (3.1) eşitsizliği kullanılacak olursa;

$$W_{\tau}(f_1, g_1)(x, \omega) = \frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{A_{\tau} g_1} f_1\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right)$$

ve

$$W_{\tau}(f_2, g_2)(x, \omega) = \frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{A_{\tau} g_2} f_2\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right)$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle W_{\tau}(f_1, g_1), W_{\tau}(f_2, g_2) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\tau}(f_1, g_1)(x, \omega) \overline{W_{\tau}(f_2, g_2)(x, \omega)} dx d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{A_{\tau} g_1} f_1\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right) \overline{\frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i x \omega} V_{A_{\tau} g_2} f_2\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right)} dx d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\tau|} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} V_{A_{\tau} g_1} f_1\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right) \frac{1}{|\tau|} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \overline{V_{A_{\tau} g_2} f_2\left(\frac{1}{1-\tau} x, \frac{1}{\tau} \omega\right)} dx d\omega
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\tau|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} V_{A_\tau g_1} f_1 \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \overline{V_{A_\tau g_2} f_2 \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right)} dx d\omega$$

elde edilir. Eğer $\frac{x}{1-\tau} = u$, $\frac{\omega}{\tau} = v$ değişken değiştirmeleri yapılırsa $\frac{1}{1-\tau} dx = du$ ve

$\frac{1}{\tau} d\omega = dv$ olup $dx = (1-\tau) du$ ve $d\omega = \tau dv$ yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} \langle W_\tau(f_1, g_1), W_\tau(f_2, g_2) \rangle &= \frac{1}{|\tau|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} V_{A_\tau g_1} f_1(u, v) \cdot \overline{V_{A_\tau g_2} f_2(u, v)} (1-\tau) \tau du dv \\ &= \frac{(1-\tau) \cdot \tau}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} V_{A_{g_1}} f_1(u, v) \overline{V_{A_{g_2}} f_2(u, v)} du dv \\ &= \frac{(1-\tau)}{\tau} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} V_{A_\tau g_1} f_1(u, v) \overline{V_{A_\tau g_2} f_2(u, v)} du dv \\ &= \frac{(1-\tau)}{\tau} \langle V_{A_\tau g_1} f_1, V_{A_\tau g_2} f_2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Eğer bu ifadede de teorem 2.5 uygulanırsa;

$$\langle W_\tau(f_1, g_1), W_\tau(f_2, g_2) \rangle = \frac{(1-\tau)}{\tau} \langle f_1, f_2 \rangle \langle A_\tau g_1, A_\tau g_2 \rangle \quad (3.10)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle A_\tau g_1, A_\tau g_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} A_\tau g_1(x) \overline{A_\tau g_2(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}_1 \left(\frac{(1-\tau)}{\tau} x \right) \overline{\widetilde{g}_2 \left(\frac{(1-\tau)}{\tau} x \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_1 \left(-\frac{(1-\tau)}{\tau} x \right) \overline{g_2 \left(-\frac{(1-\tau)}{\tau} x \right)} dx \end{aligned}$$

olup $-\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)x = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa; $dx = -\frac{\tau}{1-\tau} du$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\langle A_\tau g_1, A_\tau g_2 \rangle &= \frac{\tau}{1-\tau} \int_{\mathbb{R}} g_1(u) \overline{g_2(u)} du \\ &= \frac{\tau}{1-\tau} \langle g_1, g_2 \rangle\end{aligned}$$

bulunur. Böylece bu son ifade (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\langle W_\tau(f_1, g_1), W_\tau(f_2, g_2) \rangle &= \left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \langle A_\tau g_1, A_\tau g_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle \\ &= \left(\frac{1-\tau}{\tau}\right) \frac{\tau}{1-\tau} \overline{\langle g_1, g_2 \rangle} \langle f_1, f_2 \rangle \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}\end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzayı ve Özellikleri

Tanım 4.1.1: $1 \leq p, q, r, s < \infty$, $\tau \in (0,1)$ ve ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde birer ağırlık fonksiyonları olsunlar. Bir $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) = \{(f, g) \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \mid W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)\} \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2) \times L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$$

biçiminde tanımlansın.

Teorem 4.1.1: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, K cismi üzerinde ($K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$) bir vektör uzayıdır.

İspat: Herhangi $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ alalım. Öte yandan

$f_1, f_2 \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$, $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ vektör uzayı olduklarından $f_1 + f_2 \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olur. Yine $g_1, g_2 \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$, $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ vektör uzayı olduklarından $g_1 + g_2 \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olup

$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R})$$

bulunur. Öte yandan herhangi $h \in S(\mathbb{R})$ alalım.

$$\begin{aligned} W_\tau(f_1 + f_2, h)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} (f_1 + f_2)(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i x \omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i x t} dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} f_2(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i x t} dt \\ &= W_\tau(f_1, h)(x, \omega) + W_\tau(f_2, h)(x, \omega) \end{aligned}$$

olur. O halde $W_\tau(f_1 + f_2, \cdot) = W_\tau(f_1, \cdot) + W_\tau(f_2, \cdot)$ yazılır. Benzer şekilde

$W_\tau(\cdot, g_1 + g_2) = W_\tau(\cdot, g_1) + W_\tau(\cdot, g_2)$ eşitliği de elde edilir. Ayrıca

$(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olduğundan

$$(W_\tau(f_1, \cdot), W_\tau(\cdot, g_1)) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2) \text{ ve } (W_\tau(f_2, \cdot), W_\tau(\cdot, g_2)) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$$

olup

$$W_\tau(f_1, \cdot), W_\tau(f_2, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2) \text{ ve } W_\tau(\cdot, g_1), W_\tau(\cdot, g_2) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$$

bulunur. Böylece $W_\tau(f_1 + f_2, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ ve $W_\tau(\cdot, g_1 + g_2) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ olup

$(W_\tau(f_1 + f_2, \cdot), W_\tau(\cdot, g_1 + g_2)) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ bulunur. Buna göre $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzay toplama işlemine göre kapalıdır. Şimdi herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve herhangi $\alpha \in K$ verilsin. Burada $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$, $g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ ve $W_\tau(f, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$, $W_\tau(\cdot, g) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ olup $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ birer vektör uzayı olduğundan $\alpha f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $\alpha g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. Böylece $\alpha(f, g) = (\alpha f, \alpha g) \in (L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ bulunur.

Öte yandan her $h \in S(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} W_\tau(\alpha f, h)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i x t} dt \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{h(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i x \omega t} dt \\ &= \alpha W_\tau(f, h)(x, \omega) \end{aligned}$$

yazılır. Benzer biçimde $W_\tau(\cdot, \alpha g) = \bar{\alpha} W_\tau(\cdot, g)$ bulunur. $L_{\omega_3}^r(\mathbb{R})$, $L_{\omega_4}^s(\mathbb{R})$ vektör uzayı olduklarından $\alpha W_\tau(f, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ ve $\bar{\alpha} W_\tau(\cdot, g) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ olup

$$(W_\tau(\alpha f, \cdot), W_\tau(\cdot, \alpha g)) = (\alpha W_\tau(f, \cdot), \bar{\alpha} W_\tau(\cdot, g)) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$$

olup skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır.

Teorem 4.1.2: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde tanımlı,

$$\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|((W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s}$$

fonksiyonu bir normdur.

İspat i) Herhangi bir $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olsun. $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzayları birer normlu uzay olduklarından

$$\|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} = \max \{\|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2}\} \geq 0$$

$$\|W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} = \max \{\|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \geq 0$$

olup $\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})} \geq 0$ olur.

ii) Herhangi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve herhangi $\alpha \in K$ verilsin. $(L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ bir normlu uzay olduğundan

$$\|(\alpha f, \alpha g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} = |\alpha| \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q}$$

eşitliği yazılır. Öte yandan

$$\begin{aligned} \|W_\tau(\alpha f, \cdot), W_\tau(\cdot, \alpha g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} &= \max \{\|W_\tau(\alpha f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, \alpha g)\|_{s, \omega_4}\} \\ &= \max \{\|\alpha W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|\bar{\alpha} W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \\ &= \max \{|\alpha| \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, |\bar{\alpha}| \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \\ &= \max \{|\alpha| \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, |\alpha| \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \\ &= |\alpha| \max \{\|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \\ &= |\alpha| \|W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \|\alpha(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})} &= \|(\alpha f, \alpha g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|W_\tau(\alpha f, \cdot), W_\tau(\cdot, \alpha g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= |\alpha| \cdot \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + |\alpha| \|W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \end{aligned}$$

$$=|\alpha| \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})}$$

iii) Herhangi $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ alalım. $(L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ ve $(L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ birer normlu uzay olduklarından

$$\begin{aligned} \|(f_1, g_1) + (f_2, g_2)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \|(f_1 + f_2, g_1 + g_2)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &= \|(f_1 + f_2, g_1 + g_2)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|W_{\tau}(f_1 + f_2, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_1 + g_2)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= \|(f_1, g_1) + (f_2, g_2)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_{\tau}(f_1, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_1)) + (W_{\tau}(f_2, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_2))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &\leq \|(f_1, g_1)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(f_2, g_2)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_{\tau}(f_1, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_1))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &\quad + \|(W_{\tau}(f_2, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_2))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= \|(f_1, g_1)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_{\tau}(f_1, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_1))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} + \|(f_2, g_2)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\ &\quad + \|(W_{\tau}(f_2, \cdot), W_{\tau}(\cdot, g_2))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= \|(f_1, g_1)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} + \|(f_2, g_2)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \end{aligned}$$

iv) Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ verilsin. Kabul edelim ki

$\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = 0$ olsun. Böylece $\|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} = 0$ ve $\|W(f_1, \cdot), W(\cdot, g_1)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} = 0$ yazılır. Bu çarpım vektör uzayları birer normlu uzay olduğundan $(f, g) = (0, 0)$ olur. Tersine $(f, g) = (0, 0)$ olsun. $\|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} = 0$ ve $\|W(f, \cdot), W(\cdot, g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} = 0$ olduğundan $\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = 0$ bulunur.

Teorem 4.1.3: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında bir $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi verilsin. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_1$ için

$$\|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}$$

$$\begin{aligned}
&= \|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\
&+ \|W_\tau(f_n - f_m, \cdot), (W_\tau(\cdot, g_n - g_m))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bunun sonucu her $m, n \geq n_1$ için

$$\|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} < \varepsilon$$

ve

$$\|W_\tau(f_n - f_m, \cdot), (W_\tau(\cdot, g_n - g_m))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} < \varepsilon$$

olup $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(W_\tau(f_n, \cdot), (W_\tau(\cdot, g_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla $(L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ ve $(L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olurlar. Öte yandan $(L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ ve $(L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ uzayları birer Banach uzayı olduklarından; $(f_n, g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ uzayında $f_n \xrightarrow{L_{\omega_1}^p} f$ ve

$g_n \xrightarrow{L_{\omega_2}^q} g$ olacak şekilde bir $(f, g) \in (L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ fonksiyonuna ve $(W_\tau(f_n, \cdot), (W_\tau(\cdot, g_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de

$(L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ uzayında $W_\tau(f_n, \cdot) \xrightarrow{L_{\omega_3}^r} h$ ve $W_\tau(\cdot, g_n) \xrightarrow{L_{\omega_4}^s} k$ olacak şekilde bir $(h, k) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ elemanına yakınsar. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_2$ için

$$\|g_n - g\|_{q, \omega_2} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|f_n - f\|_{p, \omega_1} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak şekilde } n_2 \in \mathbb{N} \text{ vardır. Yine}$$

her $n \geq n_3$ için

$$\|W_\tau(f_n, \cdot) - h\|_{r, \omega_3} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|W_\tau(\cdot, g_n) - k\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olacak şekilde bir } n_3 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

Öte yandan

$f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ ve $g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ olduğundan $(f, g) \in (L^p \times L^q)(\mathbb{R})$ bulunur. Şimdi $W_\tau(f, \cdot) = h$ ve $W_\tau(\cdot, g) = k$ olduğunu gösterelim:

$(W_\tau(f_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(W_\tau(\cdot, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla $L^r_{\omega_3}(\mathbb{R}^2)$ ve $L^s_{\omega_4}(\mathbb{R}^2)$ uzaylarında yine sırasıyla $h \in L^r_{\omega_3}(\mathbb{R}^2)$ ve $k \in L^s_{\omega_4}(\mathbb{R}^2)$ fonksiyonlarına yakınsadıklarından $L^r_{\omega_3}(\mathbb{R}^2) \subset L^r(\mathbb{R}^2)$ ve $L^s_{\omega_4}(\mathbb{R}^2) \subset L^s(\mathbb{R}^2)$ kapsamalarından bu diziler sırasıyla $L^r(\mathbb{R}^2)$ uzayında h fonksiyonuna ve $L^s(\mathbb{R}^2)$ uzayında da k fonksiyonuna yakınsar. O halde $(W_\tau(f_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(W_\tau(\cdot, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri h ve k fonksiyonlarına h.h.h. yerde yakınsayan birer $(W_\tau(f_{n_k}, \cdot))_{n_k \in \mathbb{N}}$ ve $(W_\tau(\cdot, g_{n_k}))_{n_k \in \mathbb{N}}$ alt dizileri vardır. Öte yandan $(W_\tau(f_{n_k}, \cdot))_{n_k \in \mathbb{N}}$ dizisi sıfır ölçümlü yani $\mu(K_1) = 0$ olan bir $K_1 \subset \mathbb{R}$ alt kümesi dışında noktasal olarak h fonksiyonuna yakınsar. Yine benzer şekilde $(W_\tau(\cdot, g_{n_k}))_{n_k \in \mathbb{N}}$ dizisi sıfır ölçümlü yani $\mu(K_2) = 0$ olan bir $K_2 \subset \mathbb{R}$ alt kümesi dışında noktasal olacak k fonksiyonuna yakınsar. Böylece her $(x, \omega) \notin K_1$ herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_4$ olduğunda $|W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - h(x, \omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $n_4 \in \mathbb{N}$ vardır. Yine her $(x, \omega) \notin K_2$ ve aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_5$ olduğundan $|W_\tau(\cdot, g_{n_k})(x, \omega) - k(x, \omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $n_5 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
 |W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) - h(x, \omega)| &= |W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) - h(x, \omega) + W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega)| \\
 &\leq |W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| + |W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - h(x, \omega)| \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi herhangi $u \in S(\mathbb{R})$ verilsin.

$$\begin{aligned}
 &|W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(x + \tau t) \overline{u(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt - \int_{\mathbb{R}} f(x + \tau t) \overline{u(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f_{n_k} - f)(x + \tau t) \overline{u(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |(f_{n_k} - f)(x + \tau t)| |\overline{u(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t}| dt
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede Hölder eşitsizliği uygulanırsa $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$|W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| \leq \|(f_{n_k} - f)(x + \tau t)\|_p \cdot \|u(x - (1 - \tau)t)\|_{p'}$$

elde edilir. Ayrıca teorem 3.1.4 deki (3.5) eşitliği kullanılır ise;

$$\begin{aligned} |W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| &\leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p}} \|(f_{n_k} - f)\|_p \cdot \left(\frac{1}{(1-\tau)}\right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{p'} \\ &\leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{(1-\tau)}\right)^{\frac{1}{p'}} \frac{\varepsilon}{2\|u\|_{p'} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{(1-\tau)}\right)^{\frac{1}{p'}}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Eğer (4.2) ifadesi (4.1) ifadesinde yerine yazılırsa ve her $n \geq \max\{n_2, n_4\}$ için

$$\begin{aligned} |W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - h(x, \omega)| &\leq |W_\tau(f_{n_k}, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| + |W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) - h(x, \omega)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) = h(x, \omega)$ (h.h.h.) olup $W_\tau f = h$ bulunur. Yine benzer şekilde $W_\tau(\cdot, g)(x, \omega) = k(x, \omega)$ (h.h.h.) olup $W_\tau g = k$ elde edilir. Aynı $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq \max\{n_2, n_3\}$ için

$$\begin{aligned} \|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \|(f_n - f, g_n - g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &= \|(f_n - f, g_n - g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|W_\tau(f_n - f, \cdot), W_\tau(\cdot, g_n - g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat biter.

Teorem 4.1.4: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ polinom tipli ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$(S \times S)(\mathbb{R})$ uzayı $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat: Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ verilsin. O halde ω_1 ve ω_2 polinom tipli olduğundan $(f, g) \in (L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ olup

$$\|(f, g) - (h, k)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $(h, k) \in (S \times S)(\mathbb{R})$ vardır. Yani

$$\|f - h\|_{p, \omega_1} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|g - k\|_{q, \omega_2} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olup } \|W_\tau(f - h, \cdot), W_\tau(\cdot, g - k)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s}$$

$$= \max\{\|W_\tau(f - h, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g - k)\|_{s, \omega_4}\} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ olur. O halde}$$

$$W_\tau(f, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2) \text{ ve } \overline{S(\mathbb{R}^2)} = L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2) \text{ ifadeleri kullanılarak}$$

$$\|W_\tau(f, \cdot) - H\|_{r, \omega_3} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $H \in S(\mathbb{R}^2)$ bulunur. Ayrıca $W_\tau(\cdot, g) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ ve $\overline{S(\mathbb{R}^2)} = L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ olduğundan

$\|W_\tau(\cdot, g) - K\|_{s, \omega_4} < \varepsilon$ olacak şekilde $K \in S(\mathbb{R}^2)$ vardır. Öte yandan herhangi $(x, \omega) \in \mathbb{R}^2$ için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$= |W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) - H(x, \omega)|$$

$$\leq |W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| + |W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) - H(x, \omega)| \quad (4.3)$$

yazılır. Öte yandan

$$|W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| = |W_\tau(h - f, \cdot)(x, \omega)|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (h - f)(x + \tau t) \overline{u(x - (1 - \tau)t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |(h - f)(x + \tau t) u(x - (1 - \tau)t) e^{-2\pi i \omega t}| dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |(h - f)(x + \tau t)| |u(x - (1 - \tau)t)| dt$$

olur. Bu son ifadede Hölder eşitsizliği uygulanırsa $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| &\leq \|(h - f)(x + \tau t)\|_r \|(h - f)(x - (1 - \tau)t)\|_{r'} \\
&\leq \|h - f\|_r \|u\|_{r'} \\
&\leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{r}} \|h - f\|_r \left(\frac{1}{(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{r'}} \|u\|_{r'} \\
&\leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{r'}} \frac{\varepsilon}{2 \|u\|_{r'} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{(1 - \tau)}\right)^{\frac{1}{r'}}} \|u\|_{r'} \quad (4.4) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\|W_\tau(f, \cdot) - H\|_r \leq \|W_\tau(f, \cdot) - H\|_{r, \omega_3} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olup her $(x, \omega) \notin K$ için $\mu(K) = 0$ olmak üzere

$$|W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) - H(x, \omega)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.5)$$

bulunur. Böylece (4.4) ve (4.5) ifadeleri (4.3) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) - H(x, \omega)| &< |W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) - W_\tau(f, \cdot)(x, \omega)| + |W_\tau(f, \cdot)(x, \omega) - H(x, \omega)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece h.h.h $x, \omega \in \mathbb{R}$ için

$W_\tau(h, \cdot)(x, \omega) = H(x, \omega)$ olup $W_\tau(h, \cdot) = H$ bulunur. Yine benzer biçimde $W_\tau(\cdot, k) = K$ olur. O halde her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için $\|(f, g) - (h, k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \varepsilon$ olacak şekilde $(h, k) \in (S \times S)(\mathbb{R})$ vardır. Buradan da

$\overline{(S \times S)(\mathbb{R})} = CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ elde edilir.

Tanım 4.1.2: $1 \leq p, r < \infty$, $\tau \in (0, 1)$, ω_1 ve ω_3 fonksiyonları birer ağırlık fonksiyonu olsunlar. Bir $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı

$$CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \mid w_\tau(f, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu uzay teorem 4.1.1 deki ispat tekniği ile $\|f\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})} = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}$

normuna göre normlu vektör uzayı olduğu kolayca görülür. Yine teorem 4.1.2 deki teknik ile bir Banach uzayı olduğu kolayca ispatlanır.

Tanım 4.1.3: $1 \leq q, s < \infty$, $\tau \in (0, 1)$, ω_2 ve ω_4 fonksiyonları birer ağırlık fonksiyonu olsun. Bir $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı

$CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) = \{g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \mid w_\tau(\cdot, g) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)\}$ biçiminde tanımlansın. Bu uzay teorem 4.1.1 ve 4.1.2 deki ispat tekniği ile

$$\|g\|_{CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})} = \|g\|_{q, \omega_2} + \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}$$

normuna göre normlu vektör uzayı olduğu kolayca görülür. Yine Teorem 4.1.3 deki teknik ile bir Banach uzayı olduğu kolayca ispatlanır.

Bir Φ fonksiyonu; $\Phi = CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow (CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \times CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}))$

$(f, g) \rightarrow \Phi(f, g) = (f, g)$ biçiminde tanımlansın. Φ doğrusaldır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})} &= \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= \max\{\|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2}\} + \max\{\|(W_\tau(f, \cdot))\|_{r, \omega_3}, \|(W_\tau(\cdot, g))\|_{s, \omega_4}\} \\ &\cong \|f\|_{p, \omega_1} + \|g\|_{q, \omega_2} + \|(W_\tau(f, \cdot))\|_{r, \omega_3} + \|(W_\tau(\cdot, g))\|_{s, \omega_4} \\ &= (\|f\|_{p, \omega_1} + \|(W_\tau(f, \cdot))\|_{r, \omega_3}) + (\|g\|_{q, \omega_2} + \|(W_\tau(\cdot, g))\|_{s, \omega_4}) \\ &= \|f\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}} + \|g\|_{CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}} \\ &= \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau} \times CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}} \end{aligned}$$

olup

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \cong CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau} \times CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau} \text{ elde edilir.}$$

Tanım 4.1.4: f ve g , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi iki fonksiyon olsun. Herhangi x , $t \in \mathbb{R}$ için $T_x(f, g)(t) = (T_x f(t), T_x g(t)) = (f(t - x), g(t - x))$ biçiminde tanımlı operatöre ikili öteleme operatörü denir.

Yardımcı Teorem 4.1.1: $\tau \in (0, 1)$ ve $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi $g \in S(\mathbb{R})$ için

$$D_{\frac{\tau}{\tau-1}} T_z g = T_{\frac{z\tau}{\tau-1}} D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g \text{ eşitliği vardır.}$$

İspat: Herhangi $g \in S(\mathbb{R})$ ve $z \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} D_{\frac{\tau}{\tau-1}} T_z g(t) &= \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{-1}{2}} T_z g\left(\frac{t}{\frac{\tau}{\tau-1}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} T_z g\left(\frac{t(\tau-1)}{\tau}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} g\left(\frac{t(\tau-1)}{\tau} - z\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} g\left(\frac{t(\tau-1) - \tau z}{\tau}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} g\left(\frac{(\tau-1)\left(t - \frac{z\tau}{\tau-1}\right)}{\tau}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} g\left(\frac{\left(t - \frac{z\tau}{\tau-1}\right)}{\frac{\tau}{\tau-1}}\right) \\ &= T_{\frac{z\tau}{\tau-1}} D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g(t) \end{aligned}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.1.2: Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})$ için

$$V_{T_z g} f(x, \omega) = e^{-2\pi z i \omega} V_g T_{-z} f(x, \omega), (x, \omega) \in \mathbb{R}^2 \text{ eşitliği vardır.}$$

İspat: Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
V_{T_z g} f(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{T_z g(t-x)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-x-z)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g((t-z)-x)} e^{-2\pi i \omega t} dt
\end{aligned}$$

Eğer $t-z = u$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} f(u+z) \overline{g(u-x)} e^{-2\pi i \omega (u+z)} du \\
&= e^{-2\pi i z \omega} \int_{\mathbb{R}} (T_{-z} f)(u) \overline{g(u-x)} e^{-2\pi i \omega u} du \\
&= e^{-2\pi i z \omega} V_g T_{-z} f(x, \omega)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.3: Herhangi $h, k \in S(\mathbb{R})$ verilsin. Bu takdirde her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve $z \in \mathbb{R}$ için

$$W_\tau(T_z f, h)(x, \omega) = e^{-2\pi i \omega z} T_{(z(1-\tau), 0)} W_\tau(f, h)(x, \omega)$$

ve

$$W_\tau(k, T_z g)(x, \omega) = e^{2\pi i \frac{\omega z}{1-\tau}} T_{(z\tau, 0)} W_\tau(k, g)(x, \omega)$$

eşitlikleri vardır.

İspat: Herhangi $h, k \in S(\mathbb{R})$ verilsin. Bu takdirde her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve $z \in \mathbb{R}$ için, eğer teorem 3.1.3 kullanılırsa

$$W_\tau(T_z f, h)(x, \omega) = e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau h(T_z f)(x, \omega)$$

yazılır. Öte yandan $V_g T_z(x, \omega) = e^{-2\pi i \omega z} T_{(z,0)} V_g f(x, \omega)$

$$\begin{aligned} W_\tau(T_z f, h)(x, \omega) &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau h(T_z f) \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} \omega z} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau h f \left(\frac{x}{1-\tau} - z, \frac{\omega}{\tau} \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} \omega (x-z)} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau h f \left(\frac{x-z(1-\tau)}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} \omega (x-z)} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau h f(x - z(1-\tau), \omega) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} \omega (x-z)} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \omega z} e^{-2\pi i \omega z} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau h f(x - z(1-\tau), \omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} \omega (x-z+z\tau)} e^{-2\pi i \omega z} V_{D \frac{\tau}{1-\tau}}^\tau h f(x - z(1-\tau), \omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \omega z} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} \omega (x-z(1-\tau))} V_{D \frac{\tau}{1-\tau}}^\tau h f(x - z(1-\tau), \omega) \\ &= e^{-2\pi i \omega z} W_\tau(f, h)(x - z(1-\tau), \omega) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} W_\tau(T_z f, h)(x, \omega) &= e^{-2\pi i \omega z} W_\tau(f, h)(x - z(1-\tau), \omega) \\ &= e^{-2\pi i \omega z} T_{(z(1-\tau), 0)} W_\tau(f, h)(x, \omega) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Yine teorem 3.1.5, yardımcı teorem 4.1.2 ve yardımcı teorem 4.1.3 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} W_\tau(k, T_z g)(x, \omega) &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau T_z g k(x, \omega) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau T_z g k \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{T \frac{z\tau}{\tau-1} D \frac{\tau}{\tau-1}}^\tau g k \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1} g} T_{\frac{-z\tau}{\tau-1}} k \left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \\
&= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D \frac{\tau}{\tau-1} g}^{\tau} T_{\frac{-z\tau}{\tau-1}} k(x, \omega) \\
&= W_{\tau} \left(T_{\frac{-z\tau}{\tau-1}} k, g \right) (x, \omega)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece (4.6) eşitliğinden

$$W_{\tau}(k, T_z g)(x, \omega) = W_{\tau} \left(T_{\frac{-z\tau}{\tau-1}} k, g \right) (x, \omega)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-2\pi i \omega \left(\frac{-z\tau}{\tau-1} \right)} T_{\left(\frac{-z\tau}{\tau-1} (1-\tau), 0 \right)} W_{\tau}(k, g)(x, \omega) \\
&= e^{2\pi i \omega \left(\frac{z\tau}{\tau-1} \right)} T_{\left(\frac{-z\tau}{\tau-1} (1-\tau), 0 \right)} W_{\tau}(k, g)(x, \omega)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.1.5: Her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için $T_z(f, g)$ öteleme operatörü doğrusaldır.

İspat: Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $(h, k) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve

$$Z \in \mathbb{R} \text{ için } T_z((f, g) + (h, k)) = T_z((f + h, g + k))$$

$$= (T_z(f + h), T_z(g + k))$$

$$= (T_z f + T_z h, T_z g + T_z k)$$

$$= (T_z f, T_z g) + (T_z h, T_z k)$$

$$= T_z(f, g) + T_z(h, k)$$

$$\text{Yine } \alpha \in \mathbb{C} \text{ için } T_z(\alpha(f, g)) = T_z(\alpha f, \alpha g)$$

$$= (T_z \alpha f, T_z \alpha g)$$

$$= (\alpha T_z f, \alpha T_z g)$$

$$=\alpha(T_z f, T_z g)$$

$$=\alpha T_z(f, g)$$

olup

Teorem 4.1.6: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında değişmezdir.

İspat: Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ verilsin. Bu durumda $(f, g) \in (L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ ve $(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ olur. Ayrıca $\|T_z f\|_{p, \omega_1} \leq \omega_1(z) \|f\|_{p, \omega_1}$ olup her $z \in \mathbb{R}$ için $T_z f \in (L_{\omega_1}^p)(\mathbb{R})$ olduğu biliniyor (Fischer; R. H. Gürkanlı; A. T. Liu, T. S. 1996). Bu durumda $u = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|T_z(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} &= \|(T_z f, T_z g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\ &= \max\{\|T_z f\|_{p, \omega_1}, \|T_z g\|_{q, \omega_2}\} \\ &\leq \max\{\omega_1(z) \|f\|_{p, \omega_1}, \omega_2(z) \|g\|_{q, \omega_2}\} \\ &\leq u(z) \max\{\|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2}\} \\ &= u(z) \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Yine eğer $v = \max\{\omega_3, \omega_4\}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \|(W_\tau(T_z f, \cdot), W_\tau(\cdot, T_z g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} &= \max\{\|W_\tau(T_z f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, T_z g)\|_{s, \omega_4}\} \\ &= \max\left\{\|e^{-2\pi i \omega z T_{(z(1-\tau), 0)}} W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|e^{2\pi i \omega \frac{z\tau}{1-\tau} T_{(z\tau, 0)}} W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\right\} \\ &= \max\left\{\|T_{(z(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|T_{(z\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\right\} \\ &\leq \max\{\omega_3(z(1-\tau), 0) \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \omega_4(z\tau, 0) \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \end{aligned}$$

olup ağırlık fonksiyon tanımından

$$\omega_3(z(1-\tau), 0) = \omega_3(z - z\tau, 0)$$

$$=\omega_3((z, 0) + (z\tau, 0))$$

$$\leq \omega_3(z, 0)\omega_3(z\tau, 0)$$

ve $\omega_4(z\tau, 0) \leq \omega_4(z, 0)\omega_4(z\tau, 0)$ olması kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & \| (W_\tau(T_z f, \cdot), W_\tau(\cdot, T_z g)) \|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ & \leq \max\{\omega_3(z, 0)\omega_3(z\tau, 0) \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \omega_4(z, 0)\omega_4(z\tau, 0) \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \\ & \leq v(z, 0)v(z\tau, 0) \max\{\|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \\ & = v(z, 0)v(z\tau, 0) \|W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. O halde (4.7) ve (4.8) ifadeleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \|(T_z f, T_z g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &= \|(T_z f, T_z g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(T_z f, \cdot), W_\tau(\cdot, T_z g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &\leq u(z) \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + v(z, 0)v(z\tau, 0) \|W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &\leq u(z) \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} + v(z, 0)v(z\tau, 0) \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &= (u(z) + v(z, 0)v(z\tau, 0)) \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece $T_z(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olup, $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında değişmez kalır.

Tanım 4.1.5: f, g, h, k fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde Borel fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonların ikili girişimi $(f, g) * (h, k)$ ile gösterilir ve ‘ $*$ ’ alışımlı girişim işlemi olmak üzere $(f, g) * (h, k) = (f * h, g * k)$ biçiminde tanımlanır. Bu girişimin tanımlı olması için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)h(x - y)| dy < \infty$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} |g(y)k(x-y)| dy < \infty$$

olmalıdır.

Teorem 4.1.7: Her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve her sabit $z \in \mathbb{R}$ için $(f, g) \rightarrow T_z(f, g)$ ikili öteleme operatörü $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında kendi üzerine süreklidir.

İspat: Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ verilsin. $(f, g) \rightarrow T_z(f, g)$ fonksiyonunun doğrusal olduğunun ispatını $(f_0, g_0) = (0, 0)$ fonksiyonu için yapmak yeterlidir. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısı $\delta = \frac{\varepsilon}{u(z) + v(z, 0)v(-z\tau, 0)}$ olsun.

O halde $\|(f, g) - (f_0, g_0)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \delta$ olduğunda

eğer (4.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &\leq (u(z) + v(z, 0)v(-z\tau, 0)) \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &\leq \{u(z) + v(z, 0)v(-z\tau, 0)\} \delta \\ &< \{u(z) + v(z, 0)v(-z\tau, 0)\} \frac{\varepsilon}{u(z) + v(z, 0)v(-z\tau, 0)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.8: Her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için $z \rightarrow T_z(f, g)$ öteleme operatörü $\mathbb{R}$ uzayından $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayına süreklidir.

İspat: Öteleme fonksiyonu $\mathbb{R}$ uzayından $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzayına sürekli olduğundan (Fisher ve arkadaşları, 1966) herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $z, u \in \mathbb{R}$ için $|z - u| < \delta_1$ olduğundan

$$\|T_z(f, g) - T_u(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} = \|(T_z f, T_z g) - (T_u f, T_u g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q}$$

$$\begin{aligned}
&= \|(T_z f - T_u f, T_z g - T_u g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\
&= \max \{ \|T_z f - T_u f\|_{p, \omega_1}, \|T_z g - T_u g\|_{q, \omega_2} \} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

olacak biçimde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. Yine benzer şekilde modülasyon operatörü $\mathbb{R}$ uzayından $L_{\omega_3}^r$ ve $L_{\omega_4}^s$ uzaylarına sürekli olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $z, u \in \mathbb{R}$ için $|z - u| < \delta_2$ olduğunda

$$\begin{aligned}
&\|(W_\tau(T_z f - T_u f, \cdot), (\cdot, T_z g - T_u g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&= \|(W_\tau(T_z f, \cdot) - W_\tau(T_u f, \cdot), W_\tau(\cdot, T_z g) - W_\tau(\cdot, T_u g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&= \left\| \left(e^{-2\pi i \omega z} T_{(z(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot) - e^{-2\pi i \omega u} T_{(u(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot), e^{2\pi i \omega \frac{z\tau}{1-\tau}} T_{(z\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g) - e^{2\pi i \omega \frac{u\tau}{1-\tau}} T_{(u\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g) \right) \right\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&= \left\| M_{(0, -z)} T_{(z(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot) - M_{(0, -u)} T_{(u(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot), M_{(0, \frac{-z\tau}{1-\tau})} T_{(z\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g) - M_{(0, \frac{-u\tau}{1-\tau})} T_{(u\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g) \right\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&= \max \left\{ \left\| M_{(0, -z)} T_{(z(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot) - M_{(0, -u)} T_{(u(1-\tau), 0)} W_\tau(f, \cdot) \right\|_{r, \omega_3}, \left\| M_{(0, \frac{-z\tau}{1-\tau})} T_{(z\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g) - M_{(0, \frac{-u\tau}{1-\tau})} T_{(u\tau, 0)} W_\tau(\cdot, g) \right\|_{s, \omega_4} \right\} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

olacak biçimde $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. Eğer $\min\{\delta_1, \delta_2\}$ denirse

$$\begin{aligned}
&\|T_z(f, g) - T_u(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|T_z f - T_u f, T_z g - T_u g\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\
&= \|(T_z f - T_u f, T_z g - T_u g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(T_z f - T_u f, \cdot), (\cdot, T_z g - T_u g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$< \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunur.

Sonuç 4.1.1 a) Her $f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ için $z \rightarrow T_z f$ öteleme operatörü $\mathbb{R}$ uzayından $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında sürekli.

b) Her $g \in CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ için $z \rightarrow T_z g$ öteleme operatörü $\mathbb{R}$ uzayından $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayına sürekli.

Teorem 4.1.9: ω_3, ω_4 ağırlık fonksiyonları sabite denk olsun. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ uzayı üzerine esas Banach modülüdür.

İspat: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı teorem 4.1.3'den bir Banach uzayı olduğu biliniyor. Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve $(h, k) \in (L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilsin. $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ üzerinde, $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzayı da $L_{\omega_2}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde girişim işlemine göre Banach modülü olduğundan;

$\|f * h\|_{p, \omega_1} \leq \|f\|_{p, \omega_1} \|h\|_{1, \omega_1}$ ve $\|g * k\|_{q, \omega_2} \leq \|g\|_{q, \omega_2} \|k\|_{1, \omega_1}$ yazılır. Öte yandan herhangi $f_1, g_1 \in S(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W_\tau(f * h, f_1)(x, \omega) &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}} f_1}^\tau(f * h)(x, \omega) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}} f_1}(f * h)\left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau}\right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left((f * h) * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} f_1 \right)^* \right) \left(\frac{x}{1-\tau} \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(h * \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} f_1 \right)^* \right) \right) \left(\frac{x}{1-\tau} \right) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\|W_\tau(f * h, f_1)\|_{r, \omega_2} &= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(h * \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1 \right)^* \right) \right) \left(\frac{x}{1-\tau} \right) \right\|_{r, \omega_3} \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} T_u \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1 \right)^* \right) \left(\frac{x}{1-\tau} \right) du \right\|_{r, \omega_3} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |h(u)| \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} T_u \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1 \right)^* \right) \left(\frac{x}{1-\tau} \right) \right\|_{r, \omega_3} du \quad (4.10)
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\frac{x}{1-\tau} - u = \frac{a}{1-\tau}$ denirse;

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} (a+u(1-\tau)) \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau} + u \right) \frac{\omega}{\tau}} \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1 \right)^* \right) \left(\frac{a}{1-\tau} \right) \right\|_{r, \omega_3} \\
&= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u(1-\tau) \omega} e^{-2\pi i \frac{u}{\tau} \omega} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{a \omega}{\tau(1-\tau)}} \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1 \right)^* \right) \left(\frac{a}{1-\tau} \right) \right\|_{r, \omega_3} \\
&= \left\| e^{-2\pi i u \tau} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1} f \left(\frac{a}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \right\|_{r, \omega_3} \\
&= \left\| e^{-2\pi i u \tau} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1}^\tau f(a, \omega) \right\|_{r, \omega_3} \\
&= \|e^{-2\pi i u \tau} W_\tau(f, f_1)(a, \omega)\|_{r, \omega_3} = \|W_\tau(f, f_1)(a, \omega)\|_{r, \omega_3} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.10) ifadesi (4.11) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\|W_\tau(f * h, f_1)\|_{r, \omega_3} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |h(u)| \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} T_u \left(f * M_{\frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{1-\tau}} f_1 \right)^* \right) \left(\frac{x}{1-\tau} \right) \right\|_{r, \omega_3} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} |h(u)| \|W_\tau(f, f_1)\|_{r, \omega_3} du \\
&= \|W_\tau(f, f_1)\|_{r, \omega_3} \cdot \|h\|_1
\end{aligned}$$

$$\leq \|W_\tau(f, f_1)\|_{r, \omega_3} \cdot \|h\|_{1, \omega_3}$$

olup

$$\begin{aligned} \|W_\tau(f * h, f_1)\|_{r, \omega_3} &\leq \|W_\tau(f, f_1)\|_{r, \omega_3} \|h\|_1 \\ &\leq \|W_\tau(f, f_1)\|_{r, \omega_3} \|h\|_{1, \omega_1} \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur.

Herhangi $f_2 \in S(\mathbb{R})$ olsun. Eğer yardımcı teorem 2.1 ve yardımcı teorem 2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} W_\tau(f_2, g * k)(x, \omega) &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}(g * k)}^\tau f_2(x, \omega) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}(g * k)} f_2\left(\frac{x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau}\right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} V_{f_2} D_{\frac{\tau}{\tau-1}}(g * k)\left(\frac{-x}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau}\right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}}(g * k) * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(\left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k \right) * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(\left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k \right) * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right) \\ &= e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k * \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\|W_\tau(f_2, g * k)(x, \omega)\|_{S, \omega_4} &= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k * \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right) \right\|_{S, \omega_4} \\
&= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left(e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k(u) T_u \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) du \right\|_{S, \omega_4} \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}} D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k(u) e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} T_u \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4}, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left| D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k(u) \right| \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{4\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} T_u \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g \right. \right. \\
&\quad \left. \left. * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4} du
\end{aligned} \tag{4.12}$$

yazılır. Bu son eşitsizlikte $\frac{-x}{1-\tau} - u = \frac{-a}{1-\tau}$ denirse;

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} x \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{4\pi i \frac{x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} e^{-2\pi i \frac{-x}{1-\tau} \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} T_u \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-x}{1-\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4} \\
&= \left\| e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} (a-u(1-\tau)) \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{4\pi i \left(\frac{a}{1-\tau} - u \right) \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-a}{1-\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4} \\
&= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega (1-\tau)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{4\pi i \left(\frac{a}{1-\tau} \right) \frac{\omega}{\tau}} e^{-4\pi i \frac{u \omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-a}{1-\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4} \\
&= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega (1-\tau)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{-2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau} \right) \frac{\omega}{\tau}} e^{-4\pi i \frac{u \omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau} \right) \frac{\omega}{\tau}} \left(D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g * \right. \right. \\
&\quad \left. \left. M_{\frac{\omega}{\tau}} f_2^* \right) \left(\frac{-a}{1-\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4} \\
&= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega (1-\tau)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau} \right) \frac{\omega}{\tau}} e^{-4\pi i \frac{u \omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{1-\tau} \right|^{-\frac{1}{2}} V_{f_2} D_{\frac{\tau}{\tau-1}} g \left(\frac{-a}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4}
\end{aligned}$$

$$= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega (1-\tau)} e^{-2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau}\right) \frac{\omega}{\tau}} e^{-4\pi i \frac{u\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \left(\frac{-a}{1-\tau}\right) \frac{\omega}{\tau}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}}^{\tau} f_2 \left(\frac{a}{1-\tau}, \frac{\omega}{\tau} \right) \right\|_{S, \omega_4}$$

$$= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega (1-\tau)} e^{-4\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} e^{2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau}\right) \frac{\omega}{\tau}} e^{-4\pi i \frac{u\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \left(\frac{-a}{1-\tau}\right) \frac{\omega}{\tau}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}}^{\tau} f_2(a, \omega) \right\|_{S, \omega_4}$$

$$= \left\| e^{2\pi i \frac{1}{\tau} u \omega (1-\tau)} e^{2\pi i \left(\frac{a}{1-\tau}\right) \frac{\omega}{\tau}} e^{-4\pi i \frac{u\omega}{\tau}} e^{-2\pi i \left(\frac{-a}{1-\tau}\right) \frac{\omega}{\tau}} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \frac{1}{\tau} a \omega} \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} V_{D_{\frac{\tau}{\tau-1}}}^{\tau} f_2(a, \omega) \right\|_{S, \omega_4}$$

$$= \left\| \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} W_{\tau}(f_2, g) \right\|_{S, \omega_4}$$

$$= \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \cdot \|W_{\tau}(f_2, g)\|_{S, \omega_4} \quad (4.13)$$

bulunur. Eğer (4.13) ifadesi (4.12) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|W_{\tau}(f_2, g * k)\|_{S, \omega_4} \leq \|W_{\tau}(f_2, g)\|_{S, \omega_4} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \left\| D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k \right\|_1 \quad (4.14)$$

yazılır. Öte yandan $\frac{u(\tau-1)}{\tau} = a$ denirse;

$$\begin{aligned} \left\| D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k \right\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| D_{\frac{\tau}{\tau-1}} k(u) \right| du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \left| k \left(\frac{u}{\frac{\tau}{\tau-1}} \right) \right| du \\ &= \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left| k \left(\frac{u}{\frac{\tau}{\tau-1}} \right) \right| du \\ &= \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |k(a)| \frac{\tau}{\tau-1} da \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} \|k\|_1 \quad (4.15)$$

olup (4.15) ifadesi (4.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \|W_\tau(f_2, g * k)\|_{s, \omega_4} &\leq \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \|W_\tau(f_2, g)\|_{s, \omega_4} \left| \frac{\tau}{\tau-1} \right|^{\frac{1}{2}} \|k\|_1 \\ &= \|W_\tau(f_2, g)\|_{s, \omega_4} \|k\|_1 \\ &\leq \|W_\tau(f_2, g)\|_{s, \omega_4} \|k\|_{1, \omega_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|(f, g) * (h, k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \|(f * h, g * k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &= \|(f * h, g * k)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|W_\tau(f * h, \cdot), W_\tau(\cdot, g * k)\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= \max\{\|f * h\|_{p, \omega_1}, \|g * k\|_{q, \omega_2}\} + \max\{\|W_\tau(f * h, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g * k)\|_{s, \omega_4}\} \\ &\leq \max\{\|f\|_{p, \omega_1} \|h\|_{1, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2} \|k\|_{1, \omega_2}\} \\ &\quad + \max\{\|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3} \|h\|_{1, \omega_1}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4} \|k\|_{1, \omega_2}\} \\ &\leq \max\{\|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2}\} \cdot \max\{\|h\|_{1, \omega_1}, \|k\|_{1, \omega_2}\} \\ &\quad + \max\{\|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\} \cdot \max\{\|h\|_{1, \omega_1}, \|k\|_{1, \omega_2}\} \\ &= [\max\{\|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2}\} + \{\|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}\}] \cdot \max\{\|h\|_{1, \omega_1}, \|k\|_{1, \omega_2}\} \\ &= \left(\|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \right) \cdot \|(h, k)\|_{L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1} \\ &= \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \cdot \|(h, k)\|_{L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının esas Banach modülü olduğunu gösterelim. Bunun için $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R}) * CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) = CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olduğunu gösterelim. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ üzerinde Banach modülü olduğundan $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R}) * CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$

kapsaması vardır. Şimdi $(L^1_{\omega_1} \times L^1_{\omega_2})(\mathbb{R}) * CW^{p, q, r, s, \tau}_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}(\mathbb{R})$ uzayının $CW^{p, q, r, s, \tau}_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğun olduğunu gösterelim. $L^1_{\omega_1}(\mathbb{R})$ ve $L^1_{\omega_2}(\mathbb{R})$ uzaylarının $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $(e_\beta)_{\beta \in I}$ sınırlı yaklaşık birimlerinin varlığı bilinir. O halde bir $0 \in \mathbb{R}$ nin bir u ve v komşuluğu olmak üzere $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $(e_\beta)_{\beta \in I}$ yaklaşık birimleri her $\alpha, \beta \in I$ nin $\sup e_\alpha \subset u$, $\sup e_\beta \subset v$, $\|e_\alpha\|_1=1$, $\|e_\beta\|_1=1$ olacak biçimde sırasıyla $L^1_{\omega_1}$ ve $L^1_{\omega_2}$ de pozitif sınırlı olsunlar. Şimdi $\alpha_o, \beta_o \in I$ sabitleyelim. Herhangi $(h, k) \in CW^{p, q, r, s, \tau}_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}(\mathbb{R})$ verilsin.

$$\begin{aligned}
\|(e_{\alpha_o}, e_{\beta_o}) * (h, k) - (h, k)\|_{CW^{p, q, r, s, \tau}_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}} &= \|(e_{\alpha_o} * h, e_{\beta_o} * k) - (h, k)\|_{CW^{p, q, r, s, \tau}_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}} \\
&= \|(e_{\alpha_o} * h - h, e_{\beta_o} * k - k)\|_{CW^{p, q, r, s, \tau}_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}} \\
&\cong \|(e_{\alpha_o} * h - h, e_{\beta_o} * k - k)\|_{CW^{p, r, \tau}_{\omega_1, \omega_3} \times CW^{q, s, \tau}_{\omega_2, \omega_4}} \\
&= \|e_{\alpha_o} * h - h\|_{CW^{p, r, \tau}_{\omega_1, \omega_3}} + \|e_{\beta_o} * k - k\|_{CW^{q, s, \tau}_{\omega_2, \omega_4}}
\end{aligned}$$

Öte yandan sonuç 4.1.1 gereğince öteleme fonksiyonu sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$

sayısı için $\|T_z h - h\|_{CW^{p, r, \tau}_{\omega_1, \omega_3}} < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
\|e_{\alpha_o} * h - h\|_{CW^{p, r, \tau}_{\omega_1, \omega_3}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} e_{\alpha_o}(z)(T_z h(y) - h(y)) dz \right\|_{CW^{p, r, \tau}_{\omega_1, \omega_3}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e_{\alpha_o}(z) \|T_z h - h\|_{CW^{p, r, \tau}_{\omega_1, \omega_3}} dz \\
&< \int_{\mathbb{R}} e_{\alpha_o}(z) \frac{\varepsilon}{2} dz \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \|e_{\alpha_o}\|_1
\end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

olup benzer şekilde $\|e_{\beta_o} * k - k\|_{CW_{\omega_2, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Buradan

$\|(e_{\alpha_o} * h - h, e_{\beta_o} * k - k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ bulunur. Böylece istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.2 i) $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach modüldür.

ii) $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_2}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach modüldür.

Sonuç 4.1.3: ω_3, ω_4 ağırlık fonksiyonları sabite denk olsun. Her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\alpha, \beta} (e_\alpha, e_\beta) * (f, g) = (f, g)$$

olacak biçimde $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ uzayının $((e_\alpha, e_\beta))_{\alpha, \beta}$ sınırlı yaklaşık birimi vardır.

İspat: $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_2}^1(\mathbb{R})$ uzaylarının en az bir, sırasıyla $(e_\alpha)_{\alpha \in I}, (e_\beta)_{\beta \in I}$ sınırlı yaklaşık birimleri vardır, (Gaudry, 1969). Dolayısıyla $((e_\alpha, e_\beta))_{\alpha, \beta \in I} (L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ uzayının bir sınırlı yaklaşık birimidir. Öte yandan $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach modülü olduğu Teorem 4.1.9 den biliniyor. Böylece her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\alpha, \beta} (e_\alpha, e_\beta) * (f, g) = (f, g)$$

elde edilir (Doran ve Wichmann, 1979).

Sonuç 4.1.4: ω_4 ağırlık fonksiyonları sabite denk olsun.

i) Her $f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\alpha} e_\alpha * f = f$$

olacak biçimde $L^1_{\omega_1}(\mathbb{R})$ nin $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ sınırlı yaklaşık birimi vardır.

ii) Her $g \in CW^{q, s, \tau}_{\omega_2, \omega_4}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{\beta} e_\beta * g = g$$

olacak biçimde $L^1_{\omega_2}(\mathbb{R})$ nin $(e_\beta)_{\beta \in I}$ sınırlı yaklaşık birimi vardır.



4.2. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzayında Kapsama Bağıntıları

Teorem 4.2.1: $u = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ ve $v = \max\{\omega_3, \omega_4\}$ olmak üzere her $(0,0) \neq (f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}$ için

$$C(f). \omega_1(z) \leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq (u(z) + v(z, 0)v(z\tau, .))$$

ve

$$C(g). \omega_2(z) \leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq (u(z) + v(z, 0)v(z\tau, .))$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat: $(0,0) \neq (f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}$ olduğundan $0 \neq f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olup

$$\begin{aligned} C(f). \omega_1(z) &\leq \|T_z f\|_{p, \omega_1} \\ &\leq \omega_1(z) \\ &\leq \|f\|_{p, \omega_1} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlayan $C(f) > 0$ sayısı vardır (Fisher ve arkadaşları, 1966). Yine $0 \neq g \in L_{\omega_2}^q$ olduğundan

$$\begin{aligned} C(g). \omega_2(z) &\leq \|T_z g\|_{q, \omega_2} \\ &\leq \omega_2(z) \\ &\leq \|g\|_{q, \omega_2} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlayan $C(g) > 0$ sayısı vardır (Fisher ve arkadaşları, 1966). Böylece

$$\begin{aligned} C(f, g). \omega_1(z) &\leq \|T_z(f, g)\|_{p, \omega_1} \\ &\leq \max \{ \|T_z f\|_{p, \omega_1}, \|T_z g\|_{q, \omega_2} \} \\ &= \|(T_z f, T_z g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|T_z(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\
&\leq \|T_z(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(T_z f, \cdot), W_\tau(\cdot, T_z g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\
&= \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
C(f) \cdot \omega_1(z) &\leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\
&\leq (u(z) + v(z, 0)v(z\tau, \cdot)) \cdot \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
C(g) \cdot \omega_2(z) &\leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\
&\leq (u(z) + v(z, 0)v(z\tau, \cdot)) \cdot \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 4.2.1: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ise

$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı

$\|(f, g)\|_{CW} = \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} + \|(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında Cauchy dizisi olsun. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n, m > n_1$ için

$$\begin{aligned}
\|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)\|_{CW} &= \|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{CW} \\
&= \|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} + \|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n, m > n_1$ için

$$\|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)\|_{CW} < \varepsilon$$

ve

$$\|(f_n - f_m, g_n - g_m)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \|(f_n, g_n) - (f_m, g_m)\|_{CW} < \varepsilon$$

olup $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzaylarında sırasıyla $\|\cdot\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}$ ve $\|\cdot\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}}$ normlarına göre Cauchy dizisi olur. Öte yandan bu uzaylar üzerinde bahsedilen normlara göre birer Banach uzayı olduklarından $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında bir $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ fonksiyonuna, $CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında da bir $(h, k) \in CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ elemanına yakınsar. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \geq n_2$ için

$$\|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı ve her $n \geq n_3$ için

$$\|(f_n, g_n) - (h, k)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_3 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_2$ için

$$\begin{aligned} \|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{L^p \times L^q} &\leq \|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\ &\leq \|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ve her $n \geq n_3$ için

$$\begin{aligned} \|(f_n, g_n) - (h, k)\|_{L^p \times L^q} &\leq \|(f_n, g_n) - (h, k)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\ &\leq \|(f_n, g_n) - (h, k)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $n_4 = \max \{n_2, n_3\}$ olsun. Buradan aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $n \geq n_4$ için

$$\begin{aligned}
\|(f, g) - (h, k)\|_{L^p \times L^q} &= \|(f, g) - (f_n, g_n) + (f_n, g_n) - (h, k)\|_{L^p \times L^q} \\
&\leq \|(f, g) - (f_n, g_n)\|_{L^p \times L^q} + \|(f_n, g_n) - (h, k)\|_{L^p \times L^q} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olup h.h.h. $(f, g) = (h, k)$ bulunur. Yine aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $n \geq n_4$ için

$$\begin{aligned}
\|(f, g) - (f_n, g_n)\|_{CW} &= \|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} + \|(f_n, g_n) - (f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $n_4 \in \mathbb{N}$ vardır.

Teorem 4.2.2: ω_i, v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ağırlık fonksiyonları olmak üzere eğer $v_i < \omega_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ise her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \text{ kapsaması vardır.}$$

İspat: $v_i < \omega_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) olsun. O halde her $z \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2$ için $v_i(z) \leq C_i \omega_i(z)$ ve $i=1,2$ için $v_i(z, u) \leq C_i \omega_i(z, u)$ olacak şekilde $C_i > 0$

($i = 1, 2, 3, 4$) sayıları vardır. Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ alalım. Bu durumda $(f, g) \in (L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R})$ olup

$$\begin{aligned}
\|(f, g)\|_{L_{v_1}^p \times L_{v_2}^q} &= \max \{\|f\|_{p, v_1}, \|g\|_{q, v_2}\} \\
&\leq \max \{C_1 \|f\|_{p, \omega_1}, C_2 \|g\|_{q, \omega_2}\}
\end{aligned}$$

olup $C_0 = \max\{C_1, C_2\}$ denirse;

$$\|(f, g)\|_{L_{v_1}^p \times L_{v_2}^q} \leq C_0 \max\{\|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2}\}$$

$$=C_0 \| (f, g) \|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q}$$

$$< \infty$$

olur. Böylece $(f, g) \in (L_{v_1}^p \times L_{v_2}^q)(\mathbb{R})$ bulunur. Öte yandan $(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)) \in (L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ olduğundan $W_\tau(f, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ ve $W_\tau(\cdot, g) \in L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ yazılır. Herhangi $h, k \in S(\mathbb{R})$ için

$$\|W_\tau(f, h)\|_{r, v_3} \leq C_3 \|W_\tau(f, h)\|_{r, \omega_3} < \infty$$

ve

$$\|W_\tau(k, g)\|_{s, v_4} \leq C_4 \|W_\tau(k, g)\|_{s, \omega_4} < \infty$$

olduğundan $W_\tau(f, \cdot) \in L_{v_3}^r(\mathbb{R}^2)$ ve $W_\tau(\cdot, g) \in L_{v_4}^s(\mathbb{R}^2)$ olup $(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g)) \in (L_{v_3}^r \times L_{v_4}^s)(\mathbb{R}^2)$ bulunur. O halde $(f, g) \in CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olur. Buradan $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ kapsamı elde edilir.

Teorem 4.2.3: ω_i, v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ağırlık fonksiyonları olmak üzere eğer $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ise her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\|(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq C \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır.

İspat: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı üzerine $\|\cdot\|_{CW} = \|\cdot\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} + \|\cdot\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}}$

normunu koyalım. Diğer yandan yardımcı teorem 4.2.1 den $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}$ uzayı

$\|\cdot\|_{CW}$ normuna göre Banach uzayı olup kapalı grafik teoreminden her $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq C \|(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır.

Teorem 4.2.4: ω_i, v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) birer ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$\mu_i = maks \{ \omega_i, v_i \} (i = 1, 2, 3, 4)$ olsun. Bu durumda

$$CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) = CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \cap CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \text{ eşitliği vardır.}$$

İspat: Herhangi bir $(f, g) \in CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ verilsin. O halde

$$\begin{aligned} \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \|(f, g)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \\ &= maks \{ \|f\|_{p, \omega_1}, \|g\|_{q, \omega_2} \} + maks \{ \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4} \} \\ &\leq maks \{ \|f\|_{p, \mu_1}, \|g\|_{q, \mu_2} \} + maks \{ \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \mu_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \mu_4} \} \\ &= \|(f, g)\|_{CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olup $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ bulunur. Benzer biçimde

$$(f, g) \in CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \text{ olur ve}$$

$$CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \cap CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \quad (4.18)$$

elde edilir. Şimdi de herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \cap CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ alalım. O halde

$$\|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \infty \text{ ve } \|(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \infty$$

$$\begin{aligned} \text{olup } \|f\|_{p, \omega_1} < \infty, \|f\|_{p, v_1} < \infty, \|g\|_{q, \omega_2} < \infty, \|g\|_{q, v_2} < \infty, \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3} < \infty, \\ \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, v_3} < \infty, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4} < \infty, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, v_4} < \infty \text{ olur.} \quad \text{Böylece} \\ \|f\|_{p, \mu_1} < \infty, \|g\|_{q, \mu_2} < \infty, \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \mu_3} < \infty, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \mu_4} < \infty \text{ olup} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(f, g)\|_{CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \|(f, g)\|_{L_{\mu_1}^p \times L_{\mu_2}^q} + \|(W_\tau(f, \cdot), W_\tau(\cdot, g))\|_{L_{\mu_3}^r \times L_{\mu_4}^s} \\ &= maks \{ \|f\|_{p, \mu_1}, \|g\|_{q, \mu_2} \} + maks \{ \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \mu_3}, \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \mu_4} \} < \infty \end{aligned}$$

olur. O halde $(f, g) \in CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olup

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \cap CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \quad (4.19)$$

elde edilir. Böylece (4.18) ve (4.19) kapsamalarından $CW_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) = CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \cap CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ bulunur.

Teorem 4.2.5: ω_i, v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) birer ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$u_1 = \max\{\omega_1, \omega_2\}$, $\mu_1 = \max\{\omega_3, \omega_4\}$, $u_2 = \max\{v_1, v_2\}$, $\mu_2 = \max\{v_3, v_4\}$ olsun.

Eğer $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ ise

$D_{-\tau}^1 \mu_1(z, 0) = \tau^{\frac{1}{2}} \mu_1(-\tau z, 0)$ olmak üzere

$$v_1 \times \left(u_1 + \tau^{-\frac{1}{2}} \mu_1(\cdot, 0) D_{-\tau}^1 \mu_1(\cdot, 0) \right) < \infty$$

$$\text{ve } v_2 \times \left(u_2 + \tau^{-\frac{1}{2}} \mu_2(\cdot, 0) D_{-\tau}^1 \mu_2(\cdot, 0) \right) < \infty$$

olur.

İspat: Herhangi bir $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ alalım. Kabülden $(f, g) \in CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olup Teorem 4.1.8 den;

$$C_1 \omega_1(z) \leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq (u_1(z) + \mu_1(z, 0) \mu_1(-\tau z, 0)) \quad (4.20)$$

$$C_2 v_1(z) \leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq (u_2(z) + \mu_2(z, 0) \mu_2(-\tau z, 0)) \quad (4.21)$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sayıları vardır. Yardımcı teorem 4.2.1 den $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $\|\cdot\|_{CW}$ normuna göre Banach uzayı olup Kapalı Grafik

Teoreminden $\|(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq C_3 \|(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}$ olacak şekilde

$C_3 > 0$ sayısı vardır. Öte yandan $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında

değişmez olduğundan $T_z(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olup

$$\|T_z(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}} \leq C_3 \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \quad (4.22)$$

bulunur. Eğer (4.20), (4.21), (4.22) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$C_2 v_1(z) \leq \|T_z(f, g)\|_{CW_{v_1, v_2, v_3, v_4}^{p, q, r, s, \tau}}$$

$$\leq C_3 \|T_z(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}$$

$$\leq C_3(u_1(z) + \mu_1(z, 0)\mu_1(\tau z, 0))$$

olup $v_1(z) \leq \frac{C_3}{C_2}(u_1(z) + \mu_1(z, 0)\mu_1(-\tau z, 0))$ yazılır. Burada

$$k = \frac{C_3}{C_2} \text{ denirse;}$$

$$v_1(z) \leq k(u_1(z) + \mu_1(z, 0)\mu_1(-\tau z, 0))$$

olur. O halde $v_1 < (u_1(z) + \mu_1(z, 0)\mu_1(-\tau z, 0))$ bulunur. Diğer bir ifadeyle ile

$v_1 < \left(u_1 + \tau^{-\frac{1}{2}}\mu_1(., 0)D_{-\tau}^1\mu_1(., 0)\right)$ benzer ispat tekniği ile $v_2 < \left(u_2 + \tau^{-\frac{1}{2}}\mu_2(., 0)D_{-\tau^{-1}}^1\mu_2(., 0)\right)$ eşitsizliği de bulunur.

4.3. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ Uzayında Tıkız (Kompakt) Gömülmeler

Yardımcı Teorem 4.3.1: $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında bir dizi olsun. Eğer $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında sıfıra yakınsak ise $k \in C_c(\mathbb{R})$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) k(x) dx \rightarrow 0 \text{ ve } \int_{\mathbb{R}} g_n(x) k(x) dx \rightarrow 0$$

olur.

İspat: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1$ olmak üzere herhangi $k \in C_c(\mathbb{R})$ verilsin. Öte yandan $k \in C_c(\mathbb{R}) \subset L^{p_1}(\mathbb{R})$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ olup eğer Hölder eşitsizliği kullanılırsa ;

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) k(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| |k(x)| dx \\ &\leq \|f_n\|_p \|k\|_{p_1} \\ &\leq \|f_n\|_{p, \omega_1} \|k\|_{p_1} \\ &\leq \max\{\|f_n\|_{p, \omega_1}, \|g_n\|_{q, \omega_2}\} \cdot \|k\|_{p_1} \\ &= \|(f_n, g_n)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \cdot \|k\|_{p_1} \\ &\leq \|(f_n, g_n)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \cdot \|k\|_{p_1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. Öte yandan $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında sıfıra yakınsak olduğundan herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için

$$\|(f_n, g_n)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \frac{\varepsilon}{\|k\|_{p_1}}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde (4.22) eşitsizliği kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) k(x) dx \right| &\leq \| (f_n, g_n) \|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \cdot \| k \|_{p_1} \\
&< \frac{\varepsilon}{\| k \|_{p_1}} \cdot \| k \|_{p_1} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = 1$ olmak üzere $k \in C_c(\mathbb{R}) \subset L^{p_1}(\mathbb{R})$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L^q(\mathbb{R})$ olup Hölder eşitsizliği kullanılırsa benzer yöntem ile;

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x) k(x) dx \rightarrow 0$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1: ω_1, ω_2 fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde, ω_3, ω_4 fonksiyonları da $\mathbb{R}^2$ üzerinde polinom tipli ağırlık fonksiyonları olsunlar. u ve v fonksiyonları da $\mathbb{R}$ üzerinde herhangi iki ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer $u < \omega_1$, $v < \omega_2$ ve $x \rightarrow \infty$ için

$$\frac{u(x)}{u_1(x) + v_1(x, 0)v_1(x\tau, 0)} \nrightarrow 0 \text{ veya } \frac{v(x)}{u_1(x) + v_1(x, 0)v_1(x\tau, 0)} \nrightarrow 0 \text{ ise } CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \text{ uzayı } (L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R}) \text{ uzayına tıkmaz gömülmez.}$$

İspat: $u < \omega_1$, $v < \omega_2$ olsun. O halde $u(x) \leq c_1 \omega_1(x)$, $v(x) \leq c_2 \omega_2(x)$ olacak biçimde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ sayıları vardır. Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$(f, g) \in (L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q)(\mathbb{R}) \text{ olup}$$

$$\begin{aligned}
\| f \|_{p, u} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p u(x)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} c_1^p |f(x)|^p \omega_1(x)^p \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega_1(x)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= c_1 \|f\|_{p, \omega_1} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|g\|_{q, v} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q v(x)^q \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} c_2^q |g(x)|^q \omega_2(x)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= c_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q \omega_2(x)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= c_2 \|g\|_{q, \omega_2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(f, g) \in (L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ olup $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset (L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ bulunur. Şimdi $i: CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow (L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ birim dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir δ sayısını $\delta = \frac{\varepsilon}{c_0}$ seçelim. O halde her $(f, g), (h, k) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\|(f, g) - (h, k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = \|(f - h, g - k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \delta \text{ olsun.}$$

$$\|i(f, g) - i(h, k)\|_{L_u^p \times L_v^q} = \|(f, g) - (h, k)\|_{L_u^p \times L_v^q}$$

$$= \|(f - h, g - k)\|_{L_u^p \times L_v^q}$$

$$= \max \{ \|f - h\|_{p, u}, \|g - k\|_{q, v} \}$$

$$\leq \max\{c_1\|(f-h)\|_{p,\omega_1}, c_2\|(g-k)\|_{q,\omega_2}\}$$

olup $c_0 = \max\{c_1, c_2\}$ denirse;

$$\begin{aligned} \|i(f, g) - i(h, k)\|_{L_u^p \times L_v^q} &\leq c_0 \max\{\|(f-h)\|_{p,\omega_1}, \|(g-k)\|_{q,\omega_2}\} \\ &= c_0 \|(f-h, g-k)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} \\ &\leq c_0 \left\{ \|(f-h)\|_{L_{\omega_1}^p \times L_{\omega_2}^q} + \|(W_\tau(f-h, \cdot), W_\tau(\cdot, g-k))\|_{L_{\omega_3}^r \times L_{\omega_4}^s} \right\} \\ &= c_0 \|(f-h, g-k)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &< c_0 \delta \\ &= c_0 \frac{\varepsilon}{c_0} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Öte yandan $u_1 = \max\{\omega_1, \omega_2\}$, $v_1 = \max\{\omega_3, \omega_4\}$ olsun ve her $n \rightarrow \infty$ için $t_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Herhangi $(f, g) \in CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ alıp sabitleyelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(f_n, g_n) = (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n \tau, 0))^{-1} T_{t_n}(f, g)$$

olmak üzere $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini alalım. $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında sınırlıdır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \|(f_n, g_n)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} &= \left\| (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n \tau, 0))^{-1} T_{t_n}(f, g) \right\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\ &= (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n \tau, 0))^{-1} \|T_{t_n}(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \end{aligned}$$

olup (4.9) eşitsizliği kullanılırsa;

$$\|(f_n, g_n)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} = (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n \tau, 0))^{-1} \|T_{t_n}(f, g)\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(-t_n\tau, 0)\right)^{-1} \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right) \cdot \|f\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}} \\
&= \|f\|_{CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi ise $(\|(f_n, g_n)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $(L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ uzayında yakınsak bir alt diziye sahip olmadığını gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(f_n, g_n) &= \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} T_{t_n}(f, g) \\
&= \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} \left(T_{t_n}f, \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} T_{t_n}g\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
f_n &= \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} T_{t_n}f \\
g_n &= \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} T_{t_n}g
\end{aligned}$$

olur. Herhangi $k \in C_c(\mathbb{R})$ verilsin.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) k(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| |k(x)| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} |T_{t_n}f(x)| |k(x)| dx$$

$$= \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |T_{t_n}f(x)| |k(x)| dx$$

olup $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| |k(x)| dx$$

$$\leq \left(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0)\right)^{-1} \|T_{t_n}f\|_p \|k\|_{p_1}$$

$$=(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0))^{-1}\|f\|_p\|k\|_{p_1}$$

bulunur. Öte yandan $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ birer polinom tipli ağırlık fonksiyonu olduklarından u_1 ve v_1 fonksiyonları da polinom tipli olup $n \rightarrow \infty$ için $t_n \rightarrow \infty$ olduğundan

$$(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(-t_n\tau, 0)) \rightarrow \infty \text{ olur. Böylece}$$

$$(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(-t_n\tau, 0))^{-1} \rightarrow 0 \text{ olup buradan}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| |k(x)| dx \rightarrow 0 \text{ olur. Yine benzer şekilde } \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)| |k(x)| dx \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu durumda yardımcı teorem 4.3.1 den $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ uzayında yakınsak ise limiti sıfır olmalıdır. Feichtinger ve Gürkanlı(1990) çalışmasındaki yardımcı teorem 2.2 e göre $\|T_{t_n}f\|_{p,u} \approx u(t_n)$ ve

$$\|T_{t_n}g\|_{q,v} \approx v(t_n) \text{ olduğundan;}$$

$$c_1 u(t_n) \leq \|T_{t_n}f\|_{p,u} \leq c_2 u(t_n)$$

ve

$$c_3 v(t_n) \leq \|T_{t_n}g\|_{q,v} \leq c_4 v(t_n)$$

olacak şekilde $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ sayıları vardır. O halde

$$\begin{aligned} \|(f_n, g_n)\|_{L_u^p \times L_v^q} &= \|(u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0))^{-1} T_{t_n}(f, g)\|_{L_u^p \times L_v^q} \\ &= (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0))^{-1} \|T_{t_n}(f, g)\|_{L_u^p \times L_v^q} \\ &= (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0))^{-1} \max\{\|T_{t_n}f\|_{p,u}, \|T_{t_n}g\|_{q,v}\} \\ &\geq c_1 (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0))^{-1} u(t_n) \end{aligned}$$

veya

$$\|(f_n, g_n)\|_{L_u^p \times L_v^q} \geq c_3 (u_1(t_n) + v_1(t_n, 0)v_1(t_n\tau, 0))^{-1} v(t_n)$$

bulunur. Yine $\frac{u(t_n)}{u_1(t_n)+v_1(t_n,0)v_1(t_n\tau,0)} \geq \delta_1 > 0$ ve $\frac{v(t_n)}{u_1(t_n)+v_1(t_n,0)v_1(-t_n\tau,0)} \geq \delta_2 > 0$ olup $\|(f_n, g_n)\|_{L_u^p \times L_v^q} \geq c_1\delta_1 > 0$ veya $\|(f_n, g_n)\|_{L_u^p \times L_v^q} \geq c_2\delta_2 > 0$ yazılır.

Bu ise $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ uzayında yakınsak bir alt dizisi olmadığını gösterir. O halde $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $(L_u^p \times L_v^q)(\mathbb{R})$ uzayına tıkHz gömülmez.

Sonuç 4.3.1: ω_1, ω_2 fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde, ω_3, ω_4 fonksiyonları da $\mathbb{R}^2$ üzerinde polinom tipli ağırlık fonksiyonları olsunlar. r_1 ve r_2 fonksiyonları da $\mathbb{R}$ üzerinde, r_3, r_4 fonksiyonları da $\mathbb{R}^2$ üzerinde herhangi iki ağırlık fonksiyonları olsunlar. Eğer $r_i < \omega_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ve $x \rightarrow \infty$ için $\frac{r_1(x)}{u_1(x)+v_1(x,0)v_1(x\tau,0)} \nrightarrow 0$ veya $\frac{r_2(x)}{u_1(x)+v_1(x,0)v_1(x\tau,0)} \nrightarrow 0$ ise $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayına tıkHz gömülmez.

İspat: $r_i < \omega_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) olduğunda Teorem 4.2.2 den $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \subset CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ olur. Ayrıca $i: CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ birim dönüşümü Teorem 4.2.3 den süreklidir. Bu dönüşümün tıkHz olduğunu kabul edelim. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı dizisi verilsin. Eğer $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayında yakınsak bir alt dizisi varsa bu alt dizi $(L_{r_1}^p \times L_{r_2}^q)(\mathbb{R})$ uzayında da yakınsak olur. Gerçekten $((h_n, k_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $((f_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}$ uzayında (h_0, k_0) elemanına yakınsayan alt dizisi ise verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen her $n \geq n_0$ için

$$\|(h_n, k_n) - (h_0, k_0)\|_{CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \geq n_0$ için $CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının normu tanımından

$$\|(h_n, k_n) - (h_0, k_0)\|_{L_{r_1}^p \times L_{r_2}^q} \leq \|(h_n, k_n) - (h_0, k_0)\|_{CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}} < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının $(L_{r_1}^p \times L_{r_2}^q)(\mathbb{R})$ uzayına tıkız gömülmesi anlamına gelir. Halbuki $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $L_{r_1}^p \times L_{r_2}^q$ uzayına Teorem 4.3.1 den tıkız gömülmez. Bu ise çelişkidir. O halde i: $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow CW_{r_1, r_2, r_3, r_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ gömülmesi tıkız değildir.



4.4. $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$, $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$

Uzaylarının Duali ve Çarpanlar Uzayları

$CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı üzerine, $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ vektör uzayı üzerindeki $|||(f, W_\tau(f, \cdot))||| = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3}$ normu koyalım. Bir Φ fonksiyonunu

$\Phi = CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$, $\Phi(f) = (f, W_\tau(f, \cdot))$ biçiminde tanımlansın. Φ doğrusal izometridir. Gerçekten de ;

herhangi $f, h \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta h) &= (\alpha f + \beta h, W_\tau(\alpha f + \beta h, \cdot)) \\ &= (\alpha f + \beta h, W_\tau(\alpha f, \cdot)) + (\alpha f + \beta h, W_\tau(\beta h, \cdot)) \\ &= (\alpha f, W_\tau(\alpha f, \cdot)) + (\beta h, W_\tau(\beta h, \cdot)) \\ &= (\alpha f, \alpha W_\tau(f, \cdot)) + (\beta h, \beta W_\tau(h, \cdot)) \\ &= (\alpha(f, W_\tau(f, \cdot))) + (\beta(h, W_\tau(h, \cdot))) \\ &= \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(h) \end{aligned}$$

olur. Yine $|||\Phi(f)||| = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_\tau(f, \cdot)\|_{r, \omega_3} = \|f\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}}$ olup Φ fonksiyonu izometridir.

Bir H kümesi $H = \Phi(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})) = \{(f, W_\tau(f, \cdot)) | f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})\}$

biçiminde tanımlayalım.

$\Phi: (CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})) \rightarrow \Phi(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})) = H$ fonksiyonu örten izometri olduğundan $(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}))$ ve $\Phi(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}))$ uzayları topolojik olup izomorftur. Bunun sonucunda $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ Banach uzayı olduğundan

$\Phi \left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)$ uzayı da Banach uzayı olup her Banach uzayı kapalı olduğundan $H = \Phi \left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)$ uzayı da kapalı olur. Şimdi bir K kümesi de;

$$K = \left\{ (\varphi, \Psi) \in L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3-1}^{r'}(\mathbb{R}^2) \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y) dy + \int_{\mathbb{R}^2} W_{\tau}(f, \cdot)(s, t) \Psi(s, t) ds dt = 0, \right. \right. \\ \left. \left. \forall (f, W_{\tau}(f, \cdot)) \in H \right. \right\}$$

biçiminde tanımlansın.

Teorem 4.4.1: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ olmak üzere $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının duali

$$\left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \cong L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3-1}^{r'}(\mathbb{R}^2) / K$$

olur.

İspat: H uzayı kapalı olup Duality teoreminden $H^* \cong L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3-1}^{r'}(\mathbb{R}^2) / K$ yazılır. Φ fonksiyonu izometri olduğundan

$CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \cong \Phi \left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)$ olur. Buradan $H = \Phi \left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)$ olduğundan $\left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \cong H^*$ olup $\left(CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \cong L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3-1}^{r'}(\mathbb{R}^2) / K$ bulunur.

Benzer şekilde $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı üzerine $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2)$ uzayı üzerindeki

$|||(g, W_{\tau}(\cdot, g))||| = \|g\|_{q, \omega_2} + \|W_{\tau}(\cdot, g)\|_{s, \omega_4}$ normunu koyalım. Bir Ψ fonksiyonu da;

$\Psi: CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4}^s(\mathbb{R}^2), \quad \Psi(g) = (g, \overline{W_{\tau}(\cdot, g)})$ biçiminde tanımlansın. Ψ doğrusal izometridir.

Gerçekten de herhangi $h, k \in CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha h + \beta k) &= (\alpha h + \beta k, \overline{W_{\tau}(\cdot, \alpha h + \beta k)}) \\ &= (\alpha h + \beta k, \overline{W_{\tau}(\cdot, \alpha h) + W_{\tau}(\cdot, \beta k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha h + \beta k, \overline{\alpha W_\tau(\cdot, h) + \beta W_\tau(\cdot, k)}) \\
&= (\alpha h + \beta k, \overline{\alpha W_\tau(\cdot, h)} + \overline{\beta W_\tau(\cdot, k)}) \\
&= (\alpha h, \overline{\alpha W_\tau(\cdot, h)} + \overline{\beta W_\tau(\cdot, k)}) + (\beta k, \overline{\alpha W_\tau(\cdot, h)} + \overline{\beta W_\tau(\cdot, k)}) \\
&= \alpha(h, \overline{W_\tau(\cdot, h)}) + \beta(k, \overline{W_\tau(\cdot, k)}) \\
&= \alpha\Psi(h) + \beta\Psi(k)
\end{aligned}$$

Olur. Ayrıca her $g \in CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
\|\Psi(g)\|_{L_{\omega_2}^q \times L_{\omega_4}^s} &= \|(g, \overline{W_\tau(\cdot, g)})\|_{L_{\omega_2}^q \times L_{\omega_4}^s} \\
&= \|g\|_{q, \omega_2} \|(\overline{W_\tau(\cdot, g)})\|_{s, \omega_4} \\
&= \|g\|_{q, \omega_2} \|W_\tau(\cdot, g)\|_{s, \omega_4} \\
&= \|g\|_{CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}}
\end{aligned}$$

olup Ψ izometridir.

Şimdi bir L kümesi

$L = \Psi \left(CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \right) = \{(g, \overline{W_\tau(\cdot, g)}) \mid g \in CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})\}$ biçiminde tanımlansın. $\Psi: CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \rightarrow \Psi \left(CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \right) = L$ fonksiyonu örten izometridir. Yine benzer şekilde $L = \Psi \left(CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \right)$ uzayının kapalı olduğu elde edilir. Bir M kümesi de;

$$M = \left\{ (\zeta, \varphi) \in L_{\omega_2-1}^{q'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4-1}^{s'}(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}} g(y) \zeta(y) dy + \int_{\mathbb{R}^2} \overline{W_\tau(\cdot, g)}(s, t) \varphi(s, t) ds dt = 0, \right. \\ \left. \forall (g, \overline{W_\tau(\cdot, g)}) \in L \right\}$$

biçiminde tanımlasın.

Teorem 4.4.2: $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ olmak üzere $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının duali

$$\left(CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \cong L_{\omega_2-1}^{q'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4-1}^{s'}(\mathbb{R}^2) / M \text{ olur.}$$

İspat: Teorem 4.4.1 in ispatındaki teknik ile kolayca ispatlanır.

Şimdi $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzaylarının relatif tamlamalarını tanımlayalım; $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının tanımından $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \subset L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olduğu biliniyor. Herhangi $f, g \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ alalım. O halde $W_\tau(f, \cdot), W_\tau(g, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ olup $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ birer vektör uzayı olduğundan $f + g \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$, $W_\tau(f + g, \cdot) = W_\tau(f, \cdot) + W_\tau(g, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ olup $f + g \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ bulunur. Ayrıca her $f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$, $W_\tau(\lambda f, \cdot) = \lambda W_\tau(f, \cdot) \in L_{\omega_3}^r(\mathbb{R}^2)$ olduğundan $\lambda f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ bulunur. Böylece $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ nin alt vektör uzayı olur. Ayrıca $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ üzerinde bir Banach modülü olduğu Sonuç 4.1.19 dan biliniyor. Ayrıca her $f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ için $\|f\|_{p, \omega_1} \leq \|f\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}}$ olduğu uzayın normunun tanımından açıktır. Gaudry (1963) çalışmasında $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayının $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ sınırlı yaklaşık birimi varlığı biliniyor. Öte yandan Sonuç 4.1.4 den her $f \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ için $\|f * e_\alpha - f\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}} \rightarrow 0$ bulunur. Benzer şekilde $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı içinde aynı sonuçlar elde edilir. O halde $CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzaylarının sırasıyla $\widetilde{CW}_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ ve $\widetilde{CW}_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ relatif tamlamaları;

$$\widetilde{CW}_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in I \text{ için } f * e_\alpha \in CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}) \text{ ve } \sup_{\alpha \in I} \|f * e_\alpha\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}} < \infty \right\}$$

$$\widetilde{CW}_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in I \text{ için } f * e_\alpha \in CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}) \text{ ve } \sup_{\alpha \in I} \|f * e_\alpha\|_{CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}} < \infty \right\}$$

biçiminde olur. Bu uzaylar sırasıyla

$$\|f\|_{\widetilde{CW}_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}} = \sup_{\alpha \in I} \|f * e_\alpha\|_{CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}}$$

ve

$$\|f\|_{\widetilde{CW}_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}} = \sup_{\alpha \in I} \|f * e_\alpha\|_{CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}}$$

normlarına göre Banach uzayıdır ve yaklaşık birimden bağımsızdırlar (Duyar ve Gürkanlı, 2003).

Teorem 4.4.3: ω_3 ve ω_4 ağırlık fonksiyonları sabite denk olmak üzere

i) $M(L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}), CW_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R}))$ ve $\widetilde{CW}_{\omega_1, \omega_3}^{p, r, \tau}(\mathbb{R})$ uzayları cebirsel olarak izomorf ve homeomorftur.

ii) $M(L_{\omega_2}^p(\mathbb{R}), CW_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R}))$ ve $\widetilde{CW}_{\omega_2, \omega_4}^{q, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayları cebirsel olarak izomorf ve homeomorftur.

İspat: Duyar ve Gürkanlı (2003) çalışmasındaki 2.6 Teoreminden ispat açıktır.

Yardımcı Teorem 4.4.1: X ve Y Banach uzayı olmak üzere $(X \times Y)^* \cong X^* \times Y^*$ olur.

İspat: Bir $J: X^* \times Y^* \cong (X \times Y)^*$ fonksiyonu $[J(f, g)](x, y) = f(x) + g(y) (x \in X, y \in Y)$ biçiminde tanımlayalım. J birebir ve örtendir; Gerçekten de $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in X^* \times Y^*$ olmak üzere $(f_1, g_1) \neq (f_2, g_2)$ olsun. Bu durumda $f_1 \neq f_2$ veya $g_1 \neq g_2$ durumlarının en az biri sağlanmalıdır.

i) $f_1 \neq f_2, g_1 = g_2$ ise;

$f_1(x) + g_1(y) \neq f_2(x) + g_2(x)$ olup $J(f_1, g_1) \neq J(f_2, g_2)$ olur.

ii) $f_1 \neq f_2, g_1 \neq g_2$ ise;

$f_1(x) + g_1(y) \neq f_2(x) + g_2(y)$ olup $J(f_1, g_1) \neq J(f_2, g_2)$ olur.

iii) $f_1 = f_2, g_1 \neq g_2$ ise;

$f_1(x) + g_1(y) \neq f_2(x) + g_2(y)$ olup $J(f_1, g_1) \neq J(f_2, g_2)$ olur.

Böylece J birebirdir. Herhangi $F \in (X \times Y)^*$ alalım. Bu durumda

$J(F(., 0), F(0, .)) = F(., 0), F(0, .) = F((., 0) + (0, .)) = F(., .)$ olacak biçimde $f_1 = F(., 0) \in X^*$ ve $g_1 = F(0, .) \in Y^*$ verildiğinden J örtendir.

J doğrusaldır;

Herhangi $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in X^* \times Y^*$ alalım.

$$\begin{aligned}
J((f_1, g_1) + (f_2, g_2))(x, y) &= J(f_1 + f_2, g_1 + g_2)(x, y) \\
&= (f_1 + f_2)(x) + (g_1 + g_2)(y) \\
&= (f_1)(x) + (f_2)(x) + (g_1)(y) + (g_2)(y) \\
&= (f_1)(x) + (g_1)(y) + (f_2)(x) + (g_2)(y) \\
&= J(f_1, g_1)(x, y) + J(f_2, g_2)(x, y)
\end{aligned}$$

Şimdi de J dönüşümünün izometri olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in X, y \in Y$ alalım.

$$\begin{aligned}
|f(x) + g(y)| &\leq |f(x)| + |g(y)| \\
&\leq \|f\| \|x\| + \|g\| \|y\| \\
&\leq \|f\| (\|x\| + \|y\|) + \|g\| (\|x\| + \|y\|) \\
&= (\|f\| + \|g\|) (\|x\| + \|y\|) \\
&= \|(f, g)\| \|(x, y)\|
\end{aligned}$$

yazılıp; buradan

$$\|J(f, g)\| \leq \|(f, g)\| \quad (4.24)$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\|(f_1, g_1)\| = \max \{\|f_1\|, \|g_1\|\} = \|f_1\|$ olsun.

O halde $|f_1(x)| \geq (1 - \varepsilon) \|f_1\| \|x\|$ olacak biçimde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ ve $(x, 0) \in X \times Y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|J(f_1, g_1)\| &\geq \frac{|J(f_1, g_1)(x, 0)|}{\|(x, 0)\|} \\
&= \frac{|f_1(x) + f_2(0)|}{\|(x, 0)\|} \\
&= \frac{f_1(x)}{\|x\|} \\
&\geq \frac{(1 - \varepsilon) \|f_1\| \|x\|}{\|x\|} \\
&= (1 - \varepsilon) \|f_1\|
\end{aligned}$$

$$=(1 - \varepsilon)\|(f_1, g_1)\|$$

olup

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ için } \|J(f_1, g_1)\| \geq \|(f_1, g_1)\| \quad (4.25)$$

bulunur. Böylece (4.24) ve (4.25) eşitsizliklerinden $\|J(f_1, g_1)\| = \|(f_1, g_1)\|$ olup J bir izometri bulunur. O halde J bir izometri olup $(X \times Y)^* \cong X^* \times Y^*$ elde edilir.

Sonuç 4.4.1: : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ olmak üzere

$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayının duali

$$\left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \cong \left(L_{\omega_1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3}^{r'}(\mathbb{R}^2) / K \right) \times \left(L_{\omega_2}^{q'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4}^{s'}(\mathbb{R}^2) / M \right)$$

olur.

İspat: İspat Teorem 4.4.1, Teorem 4.4.2 ve Yardımcı Teorem 4.4.1 den açıktır.

Teorem 4.4.7: ω_3 ve ω_4 ağırlık fonksiyonları sabite denk olsun.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ olmak üzere

$Hom_{L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1} \left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}), \left(L_{\omega_1}^\infty \times L_{\omega_2}^\infty \right)(\mathbb{R}) \right)$ çarpanlar uzayı

$$\left(L_{\omega_1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3}^{r'}(\mathbb{R}^2) / K \right) \times \left(L_{\omega_2}^{q'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4}^{s'}(\mathbb{R}^2) / M \right)$$

uzayına cebirsel olarak izomorf ve homeomorf olur.

İspat : Teorem 4.1.9 dan $CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R})$ uzayı $(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R})$ üzerinde esas Banach modülü olduğundan

$$CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) = (L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1)(\mathbb{R}) * CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \text{ eşitliği biliniyor.}$$

Ayrıca Sonuç 4.4.1 den

$$\left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \cong \left(L_{\omega_1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3}^{r'}(\mathbb{R}^2) / K \right) \times \left(L_{\omega_2}^{q'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4}^{s'}(\mathbb{R}^2) / M \right)$$

olup Rieffel (1969) çalışmasındaki Teorem 1.4 den

$$Hom_{L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1} \left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}), L_{\omega_1}^\infty \times L_{\omega_2}^\infty \right)$$

$$\begin{aligned}
&= Hom_{L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1} \left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}), \left(L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}) \right)^* \times \left(L_{\omega_2}^1(\mathbb{R}) \right)^* \right) \\
&\cong Hom_{L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1} \left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}), \left(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1 \right)^*(\mathbb{R}) \right) \\
&\cong \left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}), \left(L_{\omega_1}^1 \times L_{\omega_2}^1 \right)(\mathbb{R}) \right)^* \\
&= \left(CW_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}^{p, q, r, s, \tau}(\mathbb{R}) \right)^* \\
&\cong \left(L_{\omega_1}^{p'-1}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_3}^{r'-1}(\mathbb{R}^2) / K \right) \times \left(L_{\omega_2}^{q'-1}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_4}^{s'-1}(\mathbb{R}^2) / M \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.



BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde τ –Wigner dönüşümü ağırlıklı Lebesgue uzaylarında olan fonksiyon uzayları tanımlanmıştır. Bu uzayın Banach modülü olma, kapsama bağıntıları, tıkHz gömülmeleri, duali, yaklaşık birimleri gibi özellikleri incelenmiştir. Zaman-frekans analizi için matematiksel olarak zengin özelliklere sahip olan yeni fonksiyon uzayları elde edilmiştir. Bu uzayın matematiksel özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Modülasyon uzaylarında Gabor dönüşümü kullanılır iken bu çalışmada ise bir quadratik zaman-frekans gösterimi olan τ –Wigner dönüşümü ve ağırlıklı Lebesgue uzayları kullanılarak farklı bir bakış açısı getirilmiştir. Bu tez çalışmasında literatürde ki uzaylara göre matematiksel özellikler açısından daha zengin fonksiyon uzayları elde edilmiştir. Elde edilen bu uzaylar ile zaman frekans analizinde, modülasyon uzaylarında olduğu gibi bahsedilen problemlerin çözümüne yardımcı olabilir mi? modülasyon uzaylarına göre daha iyi sonuçlar elde edilebilir mi? sonraki çalışmalar da araştırılabilir. Ayrıca elde edilen sonuçlar harmonik analiz, sinyal analizinde ve operatör teorisinde de kullanılmaya adaydır. Yine daha sonraki çalışmalarda modülasyon uzaylarında olduğu gibi (Feichtinger, 2006), (Galperin ve Samarah, 2004), bu uzayın diskret normlu uzayı tanımlanarak bu uzayın sampling özelliği irdelenebilir. Böylece zaman-frekans analizinde bir uygulaması elde edilecektir. Wigner dönüşümünün çeşitli uzaylarda sınırlılık, kompaktlık, sürekliliği ve bir takım özellikleri incelenmiştir (Wong, 2004), (Dörfler ve Gröchenig, 2011), (Sandıkçı, 2014), (Soltani, 2015), (Mejjaoli ve Trimèche, 2018). Ayrıca Sandıkçı ve Gürkanlı (2013), Sandıkçı (2014) çalışmalarında modülasyon ve mixed normlu uzaylarda wigner ve toeplitz operatörlerinin sınırlılığı, sürekliliği incelendiği gibi; bu projede tanımlanan yeni uzaylarda da çeşitli operatörlerin (wigner, weyl, toeplitz, wavelet, Gabor vb...) süreklilik ve sınırlılık problemleri bundan sonraki çalışmalarda ele alınabilir. Böylece Operatör teorisinde de bir uygulaması elde edilmiş olacaktır. Matematiksel olarak zengin olan Wigner dönüşümünün zaman-frekans analizi, sinyal analizi, quantum mekaniğinde de önemli uygulamaları vardır (Ville, 1948), (Schutte, 1999), (Debnath, 2002), (Case, 2008), (Gomes ve Silva, 2008), (Gosson, 2017). Projede quadratik bir zaman-frekans dönüşümü olan wigner dönüşümüyle elde edilen uzayların daha sonraki çalışmalarda zaman-frekans, sinyal analizi, quantum

mekaniği, operatör teorisi ve harmonik analiz de uygulamaları yapılarak daha önceki uzaylarda elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak farklı bir bakış açısı elde edilebilir.



KAYNAKLAR

Benedetto J.J. Ferreira, P.J.S.G. 2001. Modern Sampling Theory. Boston: Birkhauser.

Boggiatto, P. De Donno, G. Oliaro, A. 2007. "A class of quadratic time- frequency representations based on the short- time Fourier transform", Oper Theory, 172, 235-249.

Boggiatto, P. De Donno, G. Oliaro, A. 2010. "Time- frequency representations of Wigner type and pseudo- differential operators", Trans Amer Math Soc, 362, 4955-4981.

Bracewell,R., 1965. The Fourier Tansform and It's Applications. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 381s

Case, W.B. 2008. "Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians", American Association of Physics Teachers.

Debnath, L. 2002. "Recent developments in the Wigner-Wille distribution and time-frequency signal analysis", Pinsa, 68, A(1): 35-56.

Doran, R. S. Wichmann, J. 1979. "Approximate identity and factorization in Banach modules", Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 768.

Dörfler, M., Gröchenig, K. 2011. "Time-frequency partitions and characterizations of modulation spaces with localization operators", Journal of Functional Analysis, 260, 1903–1924.

Duyar, C. Gürkanlı, A. T. 2003. "Multipliers and relative completion in weighted lorentz space", Acta Mathematica Scientia, 23B-4,467-476.

Feichtinger, H.G. 2006. "Modulation Spaces: Looking Back and Ahead, Sampling Theory in Signal and Image Processing", 5(2), 109-140.

Feichtinger, H. G.,Gröchenig, K.H. 1989. "Banach Spaces Related to Integrable Group Representations and Their Atomic Decompositions I", Journal of Functional Analysis, 86(2), 307-340.

- Feichtinger, H. Gürkanlı, A. T. 1990. “On a family of weighted convolution algebras”. *Internat. J. Math. Sci.*, 13(3), 517-526.
- Fischer, R. H. Gürkanlı, A. T. Liu, T. S. 1996. “On a family of weighted spaces”, *Mathematica Slovaca*, 46(1), 71-82.
- Folland G.B. 1989. *Harmonic Analysis in Phase Space*. New Jersey: Prenceton University Pres.
- Galperin, Y.V. Samarah, S. 2004. “Time-frequency analysis on modulation spaces $M^{p,q}_m$, $0 < p, q \leq \infty$ ”, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 16, 1–18.
- Gaudry, G. I. 1969. “Multipliers of weighted Lebesgue and measure spaces”, *Proc.Lon.Math.Soc.*, 19(3), 327-340.
- Gomes, D.A., Silva, J.D. 2008. “On the Wigner transform of solutions to the Schrödinger equation”, *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 2(1):85–97.
- Gosson, M. 2017. *The Wigner Transform*. World Scientific Publishing Company.
- Gröchenig, K. 2001. *Foundations of Time – Frequency Analysis*. Boston: Birkhauser.
- Gürkanlı, A.T. 2006. “Time frequency analysis and multipliers of the space $M(p, q)(\mathbb{R}^d)$, $S(p, q)(\mathbb{R}^d)$ ”, *J. Math. Kyoto Univ.*, 46(3): 595-616.
- Gürkanlı, A. T. 2007. “Tensor product factorization and multipliers of some Banach modules”. *International Journal of Applied Mathematics*, 20(5), 661-670.
- Hewitt, E. Stromberg, K. 1965. *Real and Abstract Analysis*. New York.
- Katznelson, Y. 1968. *An Introduction to Harmonic Analysis*. New York: Dover Publications.
- Kulak, Ö. Gürkanlı, A.T. 2011. “On Function Spaces with Wavelet Transform in $L^p_w \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(2), 163-177.
- Kulak, Ö. 2017. “Bilinear multipliers of function spaces with wavelet transform in $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ ”, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 20(1), 81 – 94.
- Larsen, R. 1971. *Introduction to the Theory of Multipliers*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlay.
- Larsen, R. 1973. *Banach Algebras an Introduction*. New York: Marcel Dekker Inc.

- Liu, T. S. Rooij, A. V. 1969. "Sums and intersections of normed linear spaces", *Mathematische Nachrichten*, 42, 29-42.
- Mejjaoli, H., Trimèche, K. 2018. "Boundedness and compactness of localization operators associated with the Dunkl–Wigner transform", *Integral Transforms and Special Functions*, 29(4), 310–334.
- Reither, H. 1968. *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Group*. Oxford : Oxford University Pres.
- Rieffel, M. A. 1967. "Induced Banach representation of Banach algebras and locally compact groups", *J.Funct.Anal.*, 1, 443-491.
- Rieffel, M. A. 1969. "Multipliers and tensor products of L^p –spaces of locally compact group"s, *Studia Math.*, 33, 71-82.
- Royden, H. L. 1968. *Real Analysis*. New York: Mac Millan Publishing Co.Inc.
- Rudin, W. 1960. *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers. New York.
- Rudin, W. 1966. *Real and Complex Analysis*. Newyork: Mc Graw-Hill.
- Rudin, W.1973. *Functional Analysis*. Mc Graw –Hill, Inc.
- Sandıkçı, A. Gürkanlı, A. T. 2006. "The space $\Omega_m^p(\mathbb{R}^d)$ and some properties", *Ukranian Mathematical Journal*, 58(1), 139-145.
- Sandıkçı, A. Gürkanlı, A.T. 2013. "Generalized Sobolev-Shubin spaces, boundedness and Schatten class properties of Toeplitz operators", *Turk J Math*, 37, 676 – 692.
- Sandıkçı, A., Gürkanlı, A.T. 2011. "Gabor analysis of the spaces $M(p, q, w)(\mathbb{R}^d)$ and $S(p, q, r, w, \omega)(\mathbb{R}^d)$ ", *Acta Math. Sci.*, 1, 31B, 141–158.
- Sandıkçı, A. 2014. "Continuity of Wigner-type operators on Lorentz spaces and Lorentz mixed normed modulation spaces", *Turkish Journal of Mathematics*, 38, 728 – 745.
- Schutte, C. 1999. "Partial Wigner transforms and the quantum-classical Liouville equation", *Konrad Zuse Zentrum Berlin*, Preprint SC 99-10.
- Schwartz, L., 1966. *Matematics for the Physical Science*. Addison–Wesley Publishing Company.

Soltani, F. 2015. "Inversion formula for the Dunkl-Wigner transform and compactness property for the Dunkl-Weyl transforms", *Journal of Mathematical Research with Applications*, 35(4), 425–434.

Taylor, A. E. 1957. *Introduction to Functional Analysis*. New York: John Wiley&Sons , Inc.

Ville, J. 1948. "Teorie et applications de la Notion de signal analytique", *Cables et Transmision*, 2A, 61-74.

Wang, H. C. 1977. *Homogeneous Banach algebras*. New York: Marcel Dekker Inc.

Wigner, E.P. 1932. "On the quantum correction for thermo-dynamic equilibrium", *Phys. Rev. Letters*, 40, 749-759.

Wong N.W. 1998. *Weyl Transforms*. Newyork: Springer-Verlag.

Wong, N.M., 2004. "Symmetry-breaking for Wigner transforms and L_p -boundedness of Weyl transforms", *Advances in Pseudo-Differential Operators*, Birkhäuser Verlag, 107-116

ÖZGEÇMİŞ

Arzu ÖMERBEYOĞLU 1979 yılında Tirebolu’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Tirebolu’da tamamladı.1997 yılında Trabzon Beşikdüzü’nde Anadolu Öğretmen Lisesi’nden mezun oldu. 1997 yılında başladığı Erzurum Atatürk Üniversitesi ,Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nü 2001 yılında bitirdi. 2017 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde tezli yüksekisans eğitime başladı. Halen Giresun Hurşit Bozbağ Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi’nde matematik öğretmenliği görevine devam etmektedir.

