

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

WINKLER ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN YER
DEĞİŞTİRME TÜRÜ VE KARIŞIK SONLU ELEMANLAR İLE STATİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Akın Gürkan ÇEZİK

HAZİRAN - 2022

T.C.
KIRKLARELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

WINKLER ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN YER
DEĞİŞTİRME TÜRÜ VE KARIŞIK SONLU ELEMANLAR İLE STATİK
ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Akın Gürkan ÇEZİK

Tez Danışmanı: Dr. Öğretim Üyesi Merve ERMİŞ

Haziran – 2022

ETİK BEYAN

Kırkırelı Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez ve Proje Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum bilgileri, verileri ve dokümanları, değişik sonuç verebilecek şekilde araştırma araç gereçleri kullanmadan, işlem veya kayıt sonuçlarını değiştirmeden akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza
Akın Gürkan ÇEZİK
...../...../.....

ÖZET

WINKLER ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN YER DEĞİŞTİRME TÜRÜ VE KARIŞIK SONLU ELEMANLAR İLE STATİK ANALİZİ

Akın Gürkan ÇEZİK

Yüksek Lisans Tezi

Kırklareli Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Merve ERMİŞ

Haziran 2022, 47 sayfa

Bu tezin amacı, elastik zemine oturan dairesel düzlem kirişlerin statik analiz davranışını hem yer değiştirme türü hem de karışık sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemektir. Timoshenko çubuk kuramına bağlı iki düğüm noktasına sahip olan eğrisel sonlu eleman, her düğüm noktasında 12 adet değişken içermektedir. Bunlardan üçü yer değiştirmeleri, üçü kesit dönmelerini, üçü kuvvetleri, ikisi eğilme momentini ve biri ise burulma momentini göstermektedir. Yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine ait sonuçlar doğrusal sonlu eleman kullanılarak SAP2000 programı üzerinden elde edilmiştir. Düşeyde düzgün yayılı yük etkisinde ve elastik zemine oturan dairesel kirişin statik analiz sonuçları (yer değiştirmeler, kesit dönmeleri ve mesnet tepkileri) üzerinden hem karışık tipte-eğrisel eleman hem de yer değiştirme türü-doğrusal elemanın yakınsama performansları tartışılmıştır. Yakınsama analizi farklı sınır koşulları ve merkez açı değerleri için detaylı olarak irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: dairesel kiriş, elastik zemin, sonlu eleman yöntemi, eğrisel sonlu eleman, doğrusal sonlu eleman

ABSTRACT

STATIC ANALYSIS OF CIRCULAR BEAM RESTING ON WINKLER FOUNDATION VIA DISPLACEMENT-TYPE AND MIXED FINITE ELEMENT

Akın Gürkan ÇEZİK

MSc Thesis

Kirklareli University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Merve ERMİŞ

June 2022, 47 pages

The objective of this thesis is to investigate the behaviour of the static analysis of circular planar beams resting on elastic foundation using both displacement-type and mixed finite element method. A two-noded curved mixed finite element, based on Timoshenko beam theory, has 12 field variables at each node. These variables denote three displacements, three cross-sectional rotations, three forces, two bending moments and a torque, respectively. The results of displacement-type finite element method are obtained using straight finite element of SAP2000 program. The convergence performances of both displacement-type straight element and mixed type curved element are discussed over the static analysis (the displacement, cross-sectional rotations, and support reactions) of circular beams resting on elastic foundation. The convergence analysis is examined for different boundary conditions and central angles in detail.

Keywords: circular beam, elastic foundation, finite element method, curved finite element, straight finite element

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam sırasında bilgi ve deneyimleriyle bana yardımcı olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Merve ERMİŞ'e ve beni her zaman destekleyen değerli aileme saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca, tez çalışması boyunca benim yanımda olan ve benim için çok değerli olan minik kedim, sarı papatyam Zarife'ye manevi desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2022

Akın Gürkan ÇEZİK
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. ÇUBUK/KİRİŞ-ZEMİN ETKİLEŞİMİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR BİLGİSİ....	3
2.1. Doğru eksenli çubuklar/kirişler	3
2.2. Eğri eksenli düzlem çubuklar/kirişler	5
3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL KİRİŞ İÇİN FONKSİYONEL VE SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	7
3.1. Dairesel Çubuk Geometrisi.....	7
3.2. Elastik Zemin Modeli	8
3.3. Alan Denklemleri.....	8
3.4. Fonksiyonel.....	10
3.5. Karışık sonlu eleman formülasyonu	10
3.6. Yer değiştirme türü sonlu eleman formülasyonu.....	11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	13
4.1. Doğrulama ve Literatür Kıyaslama Örnekleri	13
4.1.1. Örnek 1:	13
4.1.2. Örnek 2:	17
4.1.3. Örnek 3:	19
4.1.4. Örnek 4:	21
4.2. Elastik Zemine Oturan Dairesel Kiriş Problemi Üzerinden Yer Değiştirme Türü ve Karışık Sonlu Eleman Yöntemlerinin Performanslarının Kıyaslaması	23
4.2.1. Kartezyen Koordinat Takımı (x, y, z)	24
4.2.2. Doğal Koordinat Takımı (t, n)	32
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	47

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge 4.1 Örnek 1 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (x, y, z)	15
Çizelge 4.2 Örnek 1 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z)	15
Çizelge 4.3 Örnek 1 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z)	16
Çizelge 4.4 Örnek 1'e ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.....	16
Çizelge 4.5 Örnek 2 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z) . $u[mm]$	18
Çizelge 4.6 Örnek 2 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z) . $u[mm]$	18
Çizelge 4.7 Örnek 2'ye ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.....	19
Çizelge 4.8 Örnek 3 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z) . $u[mm]$	20
Çizelge 4.9 Örnek 3 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z) . $u[mm]$	20
Çizelge 4.10 Örnek 3'e ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.....	21
Çizelge 4.11 Örnek 4 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z) . $u[mm]$	22
Çizelge 4.12 Örnek 4 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z) . $u[mm]$	22
Çizelge 4.13 Örnek 4'e ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.....	23

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 3.1 Dairesel çubuk geometrisi	7
Şekil 3.2 Winkler zemin modeli	8
Şekil 3.3 İki ucu tutulu ve Winkler zemine oturan izotrop homojen dairesel kiriş örneği	10
Şekil 3.4 Üç boyutlu bir uzay eğrisinin doğru eksenli ve eğri eksenli sonlu eleman gösterimi (ilgili şekil Ermis ve Omurtag 2017'den [59] alınarak düzenlenmiştir.)	11
Şekil 4.1 Dairesel kiriş (Örnek 2)	17
Şekil 4.2 Dairesel kiriş (Örnek 3 ve 4)	19
Şekil 4.3 Dairesel kirişin en büyük yer değiştirmesine ($u_z^{\max}$) ait yakınsama analizi. ...	27
Şekil 4.4 Dairesel kirişin x eksenli etrafında en büyük kesit dönmesi ($\Omega_x^{\max}$) ait yakınsama analizi.	28
Şekil 4.5 Dairesel kirişin y eksenli etrafında en büyük kesit dönmesi ($\Omega_y^{\max}$) ait yakınsama analizi.	29
Şekil 4.6 Dairesel kirişin A mesnet kuvvetine (T_z^A) ait yakınsama analizi.	30
Şekil 4.7 Dairesel kirişin A mesnet momenti (M_x^A) ait yakınsama analizi.	31
Şekil 4.8 Dairesel kirişin A mesnet momenti (M_y^A) ait yakınsama analizi.	32
Şekil 4.9 Dairesel kirişin A mesneti burulma momentine (M_t^A) ait yakınsama analizi.	34
Şekil 4.10 Dairesel kirişin A mesneti eğilme momentine (M_n^A) ait yakınsama analizi.	35

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\mathbf{r}(\theta)$	Konum vektörü
$\kappa(\theta)$	Eğrilik
s	Yay boyu
S	Toplam yay boyu
$c(\theta)$	Yay boyunun gradyenti
$R(\theta)$	Merkez yarıçapı
θ	Yatay açı
u	Yer değiştirme
Ω	Kesit dönmesi
T	Kuvvet
M	Moment
n_e	Sonlu eleman sayısı
x, y, z	Kartezyen koordinat takımı
t, n, b	Frenet koordinat takımı
k_w	Winkler zemin yatak katsayısı
ε	Geometrik sınır koşulu
σ	Dinamik sınır koşulu
E	Elastisite modülü
ν	Poisson oranı
G	Kayma modülü
ρ	Malzeme yoğunluğu
k'	Kayma düzeltme katsayısı
q	Yayılı kuvvet
m	Yayılı moment
ξ	Boyutsuz koordinat
ϕ	Şekil fonksiyonu

Kısaltmalar

Açıklamalar

KSEY	Karışık sonlu eleman yöntemi
YTSEY	Yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi

1. GİRİŞ

Kiriş-zemin etkileşimi problemleri inşaat, makine ve uzay mühendisliği gibi çeşitli mühendislik alanlarında önemli bir alana sahiptir [1-3]. Eğri eksenli kirişler, kemerler ve köprüler gibi inşaat mühendisliği uygulama alanının yanı sıra; C-kelepçeler, vinç kancaları, perçinleme makineleri vb. farklı endüstrilerde de yaygın kullanım alanlarına sahiptir [4].

Mühendislik uygulamalarında ele alınan problemlerin sınır koşulları, yükleme durumları ve problemin geometrisi gibi durumlar için problemin zorluk derecesi artmaktadır. Bu yüzden, zorluk derecesi yüksek olan bu gibi problemlerin kesin sonucu hesaplanabilenlerin sayısı da oldukça azdır. O nedenle, genel mühendislik problemlerini çözmek için çeşitli yaklaşık çözüm yöntemleri (sonlu elemanlar, sonlu farklar, seri çözümleri gibi) kullanılmaktadır. Özellikle sonlu elemanlar yöntemi en yaygın kullanım alanına sahip çok güçlü bir yöntemdir [5]. Ele alınan fizik problemin yapısına ve geometrisine bağlı olarak bir (çubuklar), iki (plaklar ve kabuklar) veya üç boyutlu sonlu elemanlar ile alt bölgelere ayrılır. Fizik problemdeki serbestlikler, sadece, sonlu eleman üstünde yerleştirilmiş ve düğüm noktası adı verilen yerlerde tanımlanır. Böylece fizik problemdeki sonsuz serbestlik derecesi sonlu elemanlar yöntemi ile sonlu sayıda bilinmeyen üzerinden ve aynı zamanda gerçeğe olabildiğince yakın kalacak biçimde bilgisayar ortamında çözülür [5]. Problemin yapısına uygun olarak seçilecek sonlu eleman boyutu ve yöntemi problemin daha hızlı bir şekilde sonuçlara yakınsaması, daha az bilinmeyen ile bilgisayardaki çözüm süresinin kısaltılması gibi parametreleri etkilemektedir.

Bu tezin amacı, elastik zemine oturan dairesel düzlem kirişlerin statik analiz davranışını hem yer değiştirme türü hem de karışık sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemek ve her iki sonlu eleman yönteminin yakınsama performanslarını birbirleri ile kıyaslamaktır. Karışık sonlu eleman yöntemi, Timoshenko çubuk kuramına bağlı iki düğüm noktalı eğrisel bir sonlu sonlu eleman üzerinden geliştirilmiştir. Eğrisel eleman, her düğüm noktasında on iki adet serbestliğe sahiptir. Bunlardan üçü yer değiştirmeleri, üçü kesit

dönmelerini, üçü kuvvetleri, ikisi eğilme momentini ve biri ise burulma momentini göstermektedir. Yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine ait sonuçlar ise SAP2000 programının doğru eksenli sonlu elemanı üzerinden elde edilmiştir [6] ve elemanın her düğüm noktasında altı adet serbestliği bulunmaktadır. Bunlardan üçü yer değiştirmeleri ve diğer üçü ise kesit dönmelerini göstermektedir. Düşeyde düzgün yayılı yük etkisinde ve elastik zemine oturan dairesel kirişin statik analiz sonuçları (yer değiştirmeler, kesit dönmeleri ve mesnet tepkileri) üzerinden hem karışık tipte-eğrisel eleman hem de yer değiştirme türü-doğrusal elemanın yakınsama performansları tartışılmıştır. Bu tez kapsamında, yakınsama analizi farklı sınır koşulları ve merkez açısı değerleri için detaylı olarak irdelenmiştir.



2. ÇUBUK/KİRİŞ-ZEMİN ETKİLEŞİMİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR BİLGİSİ

2.1. Doğru eksenli çubuklar/kirişler

Literatür incelendiğinde, elastik zemine oturan doğru eksenli izotrop kirişler ile ilgili oldukça fazla sayıda çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları [7-22] olarak sıralanabilir. Son on yıl içerisinde doğru eksenli izotrop kiriş/çubuk-zemin etkileşimi ile ilgili literatürde ele alınan çalışmalardan bazıları detaylı olarak aşağıda sunulmuştur.

İki parametrelili Pasternak ya da Reissner zeminine oturan Euler-Bernoulli kirişinin gerilimsiz temas probleminin sınır koşullarının enerjisini en aza indirgeyecek Hamilton varyasyonel formülasyonunu Nobili (2012)[23] tarafından sunulmuştur.

İki parametrelili Winkler ya da Pasternak elastik zemine oturan doğrusal olmayan gerilimsiz temas problemi için Green fonksiyon tabanlı bir yaklaşım ile Nobili (2013)[24] tarafından çözüm sunulmuştur.

Knops ve Villaggio (2012)[25] tarafından, Winkler elastik zemine eğik bir şekilde çarpan rijit bir çubuğun dinamik davranışı basitleştirilmiş bir model üzerinden incelenmiştir. Çalışmada hareket düzlemsel kabul edilip, yer çekimi ve sürtünme etkisi ihmal edilmiştir. Çarpma sırasındaki hareketin özellikleri, Hölder and Young eşitsizliği ve Schwarz eşitsizliği gibi çeşitli eşitsizlikler üzerinden tariflenmiştir. Bu çalışmada, elde edilen sonuçlara göre çarpma süresi ve etki derinliğinin zeminin elastik yay katsayısı ile ters orantılı değiştiğini gösterilmiştir.

Winkler zemine oturan enine izotrop kirişin rafine teorisi, trigonometrik fonksiyon ve Lure yöntemi kullanılarak herhangi bir özel varsayım yapılmadan sistematik ve doğrudan elastisite kuramı üzerinden Cao ve Zhang 2013 [26] tarafından elde edilmiştir. Kirişe ait yer değiştirme ve gerilmeler yer değiştirme türü fonksiyonlar üzerinden tanımlanmıştır.

Li vd. (2014)[27] tarafından, Winkler zemine oturan Euler ve Timoshenko kirişlerinin statik analiz davranışını incelemek için yer değiştirme türü şekil fonksiyonları oluşturulmuştur. Kiriş eksenine doğrultusundaki yer değiştirmeler için Langrange

interpolasyon fonksiyonu kullanılırken, eğilmeden oluşan yer değiştirmeler için Hermite interpolasyon fonksiyonu kullanılmıştır. Euler ve Timoshenko kirişlerinin rijitlik matrisi ve yük vektörü minimum potansiyel enerji, enerji integrali ve varyasyon ilkeleri kullanılarak iki düğüm noktalı yer değiştirme türü elemanlar üzerinden elde edilmiştir. İnterpolasyon fonksiyon ve teorik analiz sonucu elde edilen kiriş yer değiştirmeleri birbirleriyle kıyaslanmıştır. Hem teorik hem de interpolasyon fonksiyon yaklaşımı ile elde edilen sonuçlar arasındaki yüzde farkın küçük olduğu gözlemlenmiştir. Eleman ağının sıklaştırılmasıyla interpolasyon fonksiyonundan elde edilen sonuçların teorik sonuçlara yeteri doğrulukta yakınsadığı gözlemlenmiştir.

Hareketli bir yük etkisindeki Winkler zemine oturan Euler-Bernoulli kirişe ait kritik hız ve dinamik büyütme değerlerinde sürtünme sönümlemesinin etkisi, Corrêa vd. (2017)[28] tarafından detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla, elastik zemine oturan ve kiriş eksenini boyunca eşit dağılan sonlu sayıda sürtünmeli sönümleme cihazı ile ele alınan problemi tarifleyen bir sonlu eleman formülasyonu MATLAB programı üzerinden geliştirilmiştir.

Eksenel yük altındaki gerilimsiz Winkler zemin üzerinde oturan sonsuz uzunluktaki kiriş problemi Zhang ve Liu (2019)[29] tarafından ele alınmıştır. Eksenel yükün beş farklı durumu için kapalı formda analitik çözümler türetilmiştir. Kiriş eksenine dik ve/veya paralel doğrultulardaki çeşitli tekil kuvvet durumları için kirişin yer değiştirmeleri sistematik olarak incelenmiştir. Kiriş zemin etkileşimi probleminde gerilimsiz temas bölgesinin başlangıçta bilinmemesi, gerilimsiz zemin yapı etkileşimi problemlerinin çözümünde önemli bir matematiksel zorluğa neden olabilmektedir. Zhang ve Liu (2019)[29]. Son zamanlarda yapılan araştırmalarda, gerilimsiz temas problemlerinin çözümünde en büyük çaba gerektiren kısım temas olmayan bölgelerin belirlenmesinde geliştirilen algoritmalar olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca, etkili olan bu algoritmaların karmaşık yapıya sahip olduğunun vurgusu da yapılmıştır. Bu yüzden, Zhang ve Liu (2019)[29] tarafından geliştirilen basit yapıdaki beş farklı kapalı formdaki çözümlerin, daha karmaşık yükleme durumlarının da ele alınması hususunda sonraki araştırmalara öncülük edebilecek bir çalışma olduğu belirtilmiştir.

Erbaş vd. (2021)[30] tarafından, Winkler zemine oturan ince bir elastik şerit problemi düzlem gerilme kapsamında iki boyutlu olarak modellenmiştir. Geliştirilen bu yaklaşımın daha genel yapıda problemi çözümlemede genişletilebileceğine vurgu

yapılmıştır. Örneğin, bu yaklaşım ile dikdörtgen kesitli üç boyutlu bir kiriş problemi veya daha genel bir yapıda zemin etkileşimi bulunan kirişin lineer olmayan davranış probleminin ele alınabileceği belirtilmiştir.

Liv d. (2022)[31] tarafından, Winkler-Pasternak zemine oturan mikro/nano boyuttaki Timoshenko çubukların eksenel doğrultuda harmonik yük etkisindeki zorlanmış titreşim problemi yerel olmayan şekil değiştirme gradyanı teorisi kullanılarak analitik olarak çözülmüştür.

2.2. Eğri eksenli düzlem çubuklar/kirişler

Literatür incelendiğinde, elastik zemine oturan eğri eksenli izotrop kirişler ile ilgili oldukça fazla sayıda çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları [32-43] olarak sıralanabilir. Son yıllarda, eğri eksenli izotrop çubukların zemin/yay etkileşimi ile ilgili davranışlarını ele alan literatürdeki bazı çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Çalım ve Akkurt (2011) [44] tarafından, elastik zemine oturan Timoshenko çubuk kuramına dayalı doğru eksenli ve dairesel kirişin statik ve serbest titreşim analizini tamamlayıcı fonksiyon yöntemini kullanarak incelenmiştir.

Çalım (2012) [45] tarafından, elastik zemine oturan Timoshenko çubuk kuramına dayalı eğri eksenli kirişin impulsif yük etkisindeki dinamik davranışı tamamlayıcı fonksiyon yöntemi kullanarak incelenmiştir.

Arici vd. (2013) [46] tarafından, genelleştirilmiş iki parametrelili elastik zemin etkileşimi olan veya olmayan eğri eksenli Timoshenko kirişlerin statik ve dinamik analiz davranışı Hamilton yapısal analiz metodu kullanılarak incelenmiştir. Aynı yöntem, elastik zemine oturan ince cidarlı doğru ve eğri eksenli çubukların statik ve dinamik analizi için Arici ve Granata (2016) [47] tarafından da kullanılmıştır.

Lee (2016) [48] tarafından, Pasternak zemine oturan ve kiriş eksenli boyunca değişken eğriliğe sahip düzlem eğrisel çubukların serbest titreşimi davranışı incelemiştir. Ele alınan çalışmada, Timoshenko çubuk kuramı üzerinden tariflenen diferansiyel formdaki bünye bağıntıları, Runge-Kutta yöntemi ve Regula-Falsi yöntemi ile birleştirilmiş determinant araştırma metoduyla çözülmüştür.

Ahmet Dinç (2016) [49] tarafından, elastik zemine oturan izotrop ve homojen doğru/daire eksenli çubukların statik analizini tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile çözülerek parametrik bir çalışma yapılmıştır.

Vatan (2019) [50] ve Vatan Can vd. (2022) [51] tarafından, asılı kütle ve yay sistemi ile etkileşimi bulunan eğrisel düzlem bir çubuğun düzgün yayılı ve periyodik olarak etkiyen kuvvet etkisindeki dinamik kararlılığını sonlu eleman yöntemi ile incelenmiştir.

Foyouzat vd. (2022) [52] tarafından, hareketli kütle etkisinde ve viskoelastik zemine oturan düzlem eğrisel kirişlerin düzlem içi davranışını yarı analitik yöntem üzerinden incelenmiştir.

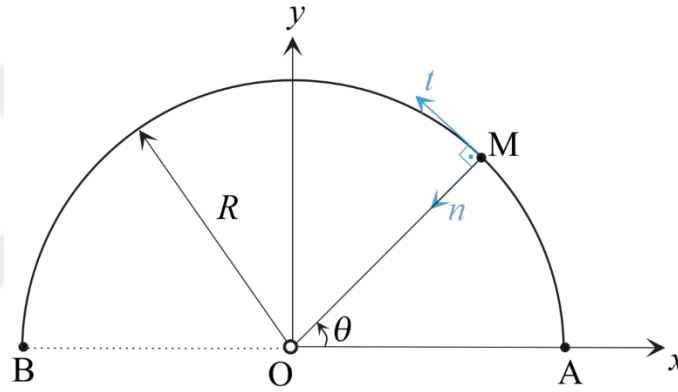
Bu tez kapsamında, düşeyde düzgün yayılı yük etkisinde ve elastik zemine oturan dairesel kirişin statik analiz sonuçları (yer değiştirmeler, kesit dönmeleri ve mesnet tepkileri) üzerinden hem karışık tipte-eğrisel eleman hem de yer değiştirme türü-doğrusal elemanın yakınsama performansları detaylı olarak ele alınmıştır. Yakınsama analizi farklı sınır koşulları ve merkez açı değerleri için detaylı olarak irdelenerek özgün örnekler literatüre sunulmuştur.

3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL KİRİŞ İÇİN FONKSİYONEL VE SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU

3.1. Dairesel Çubuk Geometrisi

Kartezyen koordinat takımında, x ekseninden itibaren ölçülen θ açısı parametre olarak seçilerek x - y düzleminde bulunan düzlem eğrisel kirişe ait konum vektörü ifadesi yazılırsa:

$$\mathbf{r}(\theta) = \{x(\theta), y(\theta)\} \quad (1)$$



Şekil 3.1 Dairesel çubuk geometrisi

Dairesel kirişin (Şekil 3.1) x - y düzlemindeki bileşenleri,

$$x(\theta) = R \cos \theta, \quad y(\theta) = R \sin \theta \quad (2)$$

olmak üzere, burada $R > 0$ daireSEL kirişin yarıçap değerini göstermektedir. Dairesel kirişin eğriliği $\kappa(\theta)$ ve yay boyu s 'nin gradyenti olan $c(\theta)$ fonksiyonları (1) deki konum vektörü cinsinden tanımlanırsa,

$$\kappa(\theta) = \|\mathbf{r}_{,ss}\|, \quad c(\theta) = \|\mathbf{r}_{,\theta}\|, \quad ds = c(\theta) d\theta \quad (3)$$

dir. Burada, virgülden sonraki alt indis ifadeleri sırasıyla s ve θ parametresine göre türevleri göstermektedir. Kirişin toplam yay boyu uzunluğu S , (3) de verilen yay boyu

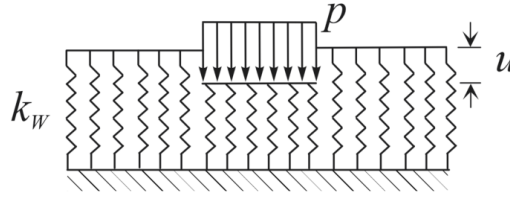
gradyenti $c(\theta)$ yardımıyla $S = \int_0^{\theta_B} c(\theta) d\theta$ formülü ile bulunur. θ_B ise dairesel kirişin merkez açısını göstermektedir (Şekil 3.1).

3.2. Elastik Zemin Modeli

Bu tez kapsamında, zemin modellemesi için Winkler zemini (1867) [53] seçilmiştir. Bu zemin modeli yan yana ve ayrıık bir şekilde duran yaylar şeklinde tarif edilmiştir. Zeminde meydana gelen u çökmesinden kaynaklı oluşan p basıncı arasında doğrusal (linear) bir ilişki bulunmaktadır (Şekil 3.2) (Kutlu, 2007) [54],

$$p(x, y) = k_w u(x, y) \quad (4)$$

Burada, k_w yataklanma katsayısı olarak adlandırılmaktadır ve zemin tipine göre değişkenlik göstermektedir.



Şekil 3.2 Winkler zemin modeli

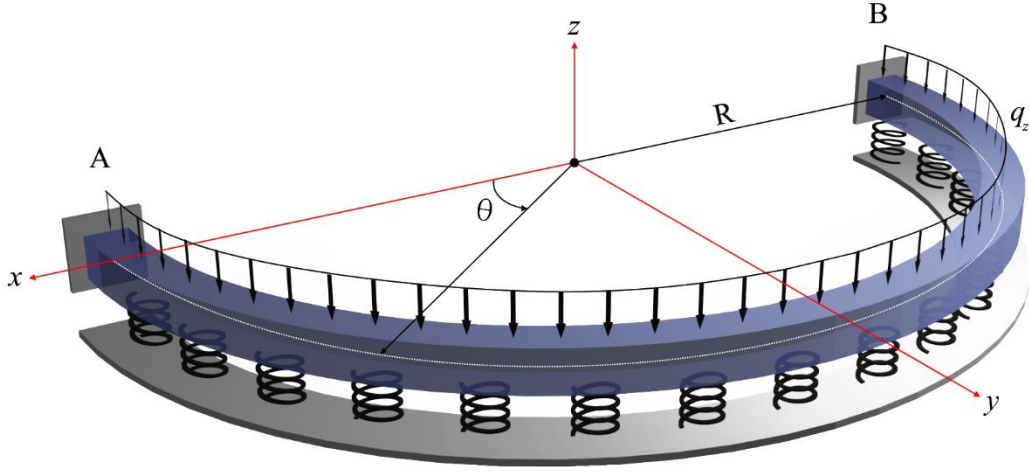
3.3. Alan Denklemleri

Frenet koordinat takımında (t, n, b) izotrop homojen çubuklar için sunulan alan denklemleri (Omurtag and Aköz 1992) [55] mevcuttur. Elastik Pasternak zemine oturan kirişlere ait formülasyon (Ermis vd. 2017) [56] de mevcuttur. Winkler zemine oturan düzlem eğrisel kirişlere (Şekil 3.3) ait alan denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\left. \begin{aligned}
-\frac{dT_t}{ds} + \kappa T_n + \rho A \ddot{u}_t - q_t &= 0 \\
-\frac{dT_n}{ds} - \kappa T_t + \rho A \ddot{u}_n - q_n &= 0 \\
-\frac{dT_b}{ds} + k_{rw} u_b + \rho A \ddot{u}_b - q_b &= 0 \\
-\frac{dM_t}{ds} + \kappa M_n + \rho I_t \ddot{\Omega}_t - m_t &= 0 \\
-\frac{dM_n}{ds} - \kappa M_t + T_b + \rho I_n \ddot{\Omega}_n - m_n &= 0 \\
-\frac{dM_b}{ds} - T_n + \rho I_b \ddot{\Omega}_b - m_b &= 0
\end{aligned} \right\} \text{ hareket denklemleri} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{du_t}{ds} - \kappa u_n - \frac{T_t}{EA} &= 0 \\
\frac{du_n}{ds} + \kappa u_t - \Omega_b - \frac{k'_n T_n}{GA} &= 0 \\
\frac{du_b}{ds} + \Omega_n - \frac{k'_b T_b}{GA} &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{ds} - \kappa \Omega_n - \frac{M_t}{GI_t} &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{ds} + \kappa \Omega_t - \frac{M_n}{EI_n} &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{EI_b} &= 0
\end{aligned} \right\} \text{ bünye bağıntıları} \quad (6)$$

Burada u , Ω , T ve M sırasıyla yer değişirimi, kesit dönmelerini, kuvvet ve momenti ifade etmektedir. $\ddot{u}$ ve $\ddot{\Omega}$ sırasıyla yer değiştirme ve kesit dönmelerine ait ivmeleri göstermektedir. A kesit alanını, I eylemsizlik momentini, ρ malzeme yoğunluğunu, E elastisite modülünü, G kayma modülünü göstermektedir. Kayma düzeltme katsayısı ($k' = k'_n = k'_b$), dikdörtgen kesit için 6/5 olarak seçilmiştir. Üç boyutlu uzayda x - y düzleminde tanımlanan eğrisel çubuk için, Frenet koordinat takımındaki binormal doğrultu b ile Kartezyen koordinat takımındaki z eksenini çakışmaktadır (Şekil 3.3). Kiriş ekseninin binormal doğrultusu boyunca etkiyen bileşke Winkler zemin parametresi k_{rw} 'dir. Bu katsayı $k_{rw} = k_w w$ eşitliği ile elde edilir, burada $w(n//)$ ise dikdörtgen kesitin genişliğidir (Şekil 3.1). q ve m ise sırasıyla, yayılı kuvvet ve momenti ifade etmektedir.



Şekil 3.3 İki ucu tutulu ve Winkler zemine oturan izotrop homojen dairesel kiriş örneği

3.4. Fonksiyonel

Denklem (5) ve (6)'de tariflenen alan denklemlerinde statik analiz için ivme terimleri $\ddot{u} = \ddot{\Omega} = 0$ 'dır. Gâteaux türevi ve potansiyel operatör konsepti (Oden ve Reddy 1976) [57] uygulanarak, Winkler zemine oturan düzlem çubuğun statik analize ait fonksiyonel aşağıdaki yapıda elde edilir.

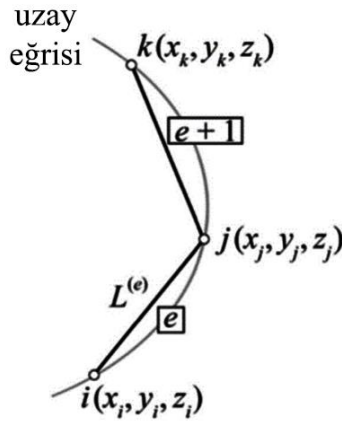
$$\begin{aligned}
 I(y) = & -[T_{t,s}, u_t] - [T_{n,s}, u_n] - [T_{b,s}, u_b] + [\kappa T_n, u_t] - [\kappa T_t, u_n] - [M_{t,s}, \Omega_t] \\
 & - [M_{n,s}, \Omega_n] - [M_{b,s}, \Omega_b] + [\kappa M_n, \Omega_t] - [\kappa M_t, \Omega_n] - [\Omega_b, T_n] \\
 & + [\Omega_n, T_b] - \frac{1}{2GI_t} [M_t, M_t] - \frac{1}{2EI_n} [M_n, M_n] - \frac{1}{2EI_b} [M_b, M_b] - \frac{1}{2EA} [T_t, T_t] \\
 & - \frac{k'_n}{GA} [T_n, T_n] - \frac{k'_b}{GA} [T_b, T_b] - [q_t, u_t] - [q_n, u_n] - [q_b, u_b] - [m_t, \Omega_t] \\
 & - [m_n, \Omega_n] - [m_b, \Omega_b] + \frac{1}{2} k_{rw} [u_b, u_b] + \left\langle \left((T_t - \hat{T}_t), u_t \right) + \left((T_n - \hat{T}_n), u_n \right) \right. \\
 & + \left. \left((T_b - \hat{T}_b), u_b \right) + \left((M_t - \hat{M}_t), \Omega_t \right) + \left((M_n - \hat{M}_n), \Omega_n \right) + \left((M_b - \hat{M}_b), \Omega_b \right) \right\rangle_{\sigma} \\
 & + \left\langle (T_t, \hat{u}_t) + (T_n, \hat{u}_n) + (T_b, \hat{u}_b) + (M_t, \hat{\Omega}_t) + (M_n, \hat{\Omega}_n) + (M_b, \hat{\Omega}_b) \right\rangle_{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Denklem (7)'daki köşeli parantezler iç çarpımları, şapkalı terimler sınırlardaki bilinen değerleri göstermektedir. ε ve σ ise, sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını ifade etmektedir.

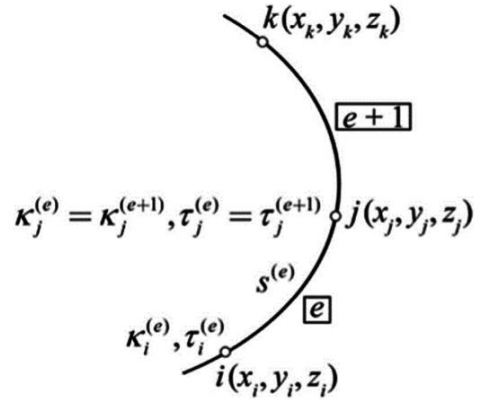
3.5. Karışık sonlu eleman formülasyonu

Timoshenko çubuk kuramına bağlı iki düğüm noktalı eğrisel eleman (Şekil 4b) üzerinden elde edilmiştir. Sonlu eleman formülasyonu boyutsuz koordinat(ξ)

üzerinden türetilmiştir. Lineer şekil fonksiyonları $\phi_i = 1 - \xi$ ve $\phi_j = \xi$ olmak üzere burada $\xi = (\theta - \theta_i) / \Delta\theta$, $0 < \xi < 1$ ve $\Delta\theta = (\theta_j - \theta_i)$ 'dir. Alt indisler elemana ait düğüm noktalarını göstermektedir $\theta_j > \theta_i$. Eğrisel elemanın her bir düğüm noktasında üç adet yer değiştirme, üç adet dönme, bir aksenal kuvvet, iki kesme kuvveti, bir burulma moment ve iki eğilme momenti bilinmeyen olarak atanmıştır (Şekil 3.4b). Toplam serbestlik derecesi 24 adettir. Karışık sonlu eleman formülasyonu ile ilgili detaylı bilgi Omurtag ve Aköz (1992) [55], Eratlı vd. 2016' da [58] mevcuttur.



(a) Doğrusal elemanlar “e” ve “e+1”



(b) Eğrisel elemanlar

$$\kappa_j^{(e)} = \Sigma \kappa_n^{(e)} \phi_n, \tau_j^{(e)} = \Sigma \tau_n^{(e)} \phi_n$$

ϕ_i, ϕ_j : şekil fonksiyonları

Şekil 3.4 Üç boyutlu bir uzay eğrisinin doğru eksenli ve eğri eksenli sonlu eleman gösterimi (ilgili şekil Ermis ve Omurtag 2017'den [59] alınarak düzenlenmiştir.)

3.6. Yer değiştirme türü sonlu eleman formülasyonu

Bu tez kapsamında, düzgün yayılı yük etkisinde elastik zemine oturan dairesel kirişin yer değiştirme türü-doğrusal sonlu eleman ile statik çözümü bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan SAP2000 programı [6] kullanılarak elde edilmiştir. Doğru eksenli sonlu elemanın her bir düğüm noktasında 6 adet serbestlik derecesi bulunur (Şekil 3.4a). Bunlardan üçü x , y ve z doğrultularında ötelenmeler olup, diğer üçü ise x , y ve z eksenleri etrafında kesit dönmeleridir. Winkler zemin katsayısı ise sonlu elemanın düğüm noktalarında ötelenme türü yaylar üzerinden tanımlanmıştır.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Doğrulama ve Literatür Kıyaslama Örnekleri

Bu bölümde, karışık sonlu eleman yöntemi (KSEY) kullanılarak zemin etkileşimi bulunmayan veya elastik zemine oturan dairesel kirişlere ait statik analiz sonuçları hem yer değiştirme türü sonlu elemanlar yöntemi (YTSEY) üzerinden elde edilen sonuçlar üzerinden detaylı olarak kıyaslanmış olup hem de literatürdeki çalışmalara ait sonuçlar üzerinden kıyaslanarak tartışılmıştır. Bu bölümde sunulan analiz sonuçları için aksi belirtilmedikçe yer değiştirme, kuvvet ve momentler için kullanılan birimler sırasıyla, [m], [ton] ve [ton·m]'dir. Ayrıca, yine aksi belirtilmedikçe çizelgelerde sunulan yüzde farklar %fark¹ ve %fark² sırasıyla, her bir sonlu elemana ait yeteri yakınsaklığın sağlandığı eleman sayısı ve iki farklı sonlu eleman yöntemin (KSEY ve YTSEY) birbirleri ile kıyaslanmasında kullanılacaktır. Yüzde farklar için,

$$\%fark^1 = \left(1 - \Theta_{n_e=i}^m / \Theta_{n_e=j}^m\right) \quad (8)$$

için burada i ve j ardışık sonlu eleman sayılarını göstermektedir. m ise KSEY ve YTSEY'dir.

$$\%fark^2 = \left(1 - \Theta_{n_e=i}^{KSEY} / \Theta_{n_e=j}^{YTSEY}\right) \quad (9)$$

için burada i ve j sırasıyla KSEY'ne ve YTSEY'ne ait yeteri yakınsaklığın sağlandığı sonlu eleman sayılarını göstermektedir.

4.1.1. Örnek 1

Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki iki ucundan tutulu yarım dairesel kirişin (Şekil 3.3 ve $k_{rw} = 0$) statik analiz davranışı ele alınmıştır. Ele alınan bu problem literatürde farklı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalar, Dasgupta ve Sangupta (1988)[34], Haktanır ve Kiral (1993) [38], Kadıoğlu (1994) [40] ve Kadıoğlu ve Aköz (1996) [41]'dir. Ele alınan probleme ait parametreler aşağıda verilmiştir.

Yayılı yükün şiddeti	: $q_z = 1 \text{ ton/m}$
Kirişin kesit alanı	: $A = 0,7854 \text{ m}^2$
Dairesel kirişin yarıçapı	: $R = 10 \text{ m}$
Dikdörtgen kesit için sayısal çarpan	: $\beta = 1,2$
Poisson oranı	: $\nu = 0,3$
Eğilme Rijitliği	: $EI = 0,98 \times 10^5 \text{ ton/m}^2$
Burulma Rijitliği	: $GJ = 0,82 \times 10^5 \text{ ton/m}^2$
İndirgenmiş Kayma Rijitliği	: $GA/\beta = 0,6 \times 10^6 \text{ ton}$

Karışık sonlu eleman yöntemi (KSEY) ve yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine (YTSEY) için yakınsama analizi sonuçları (en büyük yer değiştirme, kuvvet ve moment) Çizelge 4.1–4.4 arasında sunulmuştur. A mesnet noktası olup M ise daireysel kirişin orta noktasını göstermektedir. Elde edilen sonuçlara göre:

- Kartezyen koordinat takımı (x, y, z) : Çizelge 4.1’de sunulan karışık tipte-eğrisel sonlu elemanlar ile yer değiştirme türü-doğrusal sonlu elemanlar için yüzde farklar (%fark¹) denklem (8)’de verilen eşitlikte $i = 40$ ve $j = 60$ yazılmasıyla elde edilmiştir. Yüzde farklar (%fark¹) incelendiğinde her iki sonlu eleman yönteminin aynı sayıda ($n_e = 60$) sonlu eleman için yeteri yakınsaklığı sağladıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca, her iki sonlu eleman yöntemi birbirleri ile kıyaslandığında yüzde farkların %fark² (Denklemler (9) ve $i = j = 60$) birbirleri ile oldukça uyumlu oldukları gözlemlenmiştir.
- Doğal Koordinat takımı (t, n) : Çizelge 4.2’de yer değiştirme türü-doğrusal sonlu elemanlar üzerinden elde edilen sonuçlar üzerinden yakınsama analizi sunulmuştur. Burulma momenti (M_t^A, M_t^B) sonuçlarının yakınsaması için gereken sonlu eleman sayısı, en büyük yer değiştirme u_z^{maks} ve kesme kuvveti T_z^A ve eğilme momenti (M_n^A, M_n^M) sonuçlarının yakınsaması için gereken sonlu eleman sayısından daha fazladır (Çizelge 4.2.).

- Karışık tipte-eğrisel sonlu elemanlara ait hem Kartezyen koordinat takımında (Çizelge 4.1) hem de doğal koordinat takımındaki sonuçlar (Çizelge 4.3) için yeteri yakınsaklığın sağlandığı eleman sayısı $n_e = 60$ 'tır. Doğal koordinat takımında sunulan yer değiştirme türü-doğrusal sonlu elemanlar üzerinden elde edilen sonuçların (Çizelge 4.2) tamamı göz önüne alındığında yeteri yakınsaklığın sağlandığı sonlu eleman sayısı ise $n_e = 720$ 'dir. Her iki sonlu eleman yöntemi birbirleri ile kıyaslandığında yüzde farkların %fark² (Denklem (9) ve $i = 60$, $j = 720$) birbirleri ile oldukça uyumlu oldukları gözlemlenmiştir. Doğal koordinatlardaki sonuçlarda, özellikle burulma momenti sonuçlarının yakınsamasında eğrisel sonlu elemanlar, doğrusal sonlu elemanlara göre oldukça daha hızlıdır.

Çizelge 4.1 Örnek 1 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (x, y, z).

	Karışık SEY (KSEY)				Yer değiştirme türü SEY (YTSEY)				
	eleman sayısı (n_e)				eleman sayısı (n_e)				
	20	40	60	%fark ¹	20	40	60	%fark ¹	%fark ²
u_z^{maks}	-41,100	-40,786	-40,728	-0,141	-40,509	-40,638	-40,662	0,059	-0,162
T_z^A	-15,708	-15,708	-15,708	0,000	-15,692	-15,704	-15,706	0,014	-0,011
M_x^A	-100,117	-100,03	-100,013	-0,016	-99,692	-99,923	-99,966	0,043	-0,047
M_y^A	-29,427	-29,673	-29,719	0,154	-30,017	-29,821	-29,785	-0,122	0,221

Çizelge 4.2 Örnek 1 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z).

	eleman sayısı (n_e)								% fark
	40	80	120	160	240	360	540	720	
u_z^{maks}	-40,638	-40,671	-40,677	-40,679	-40,681	-40,681	-40,682	-40,682	0,000
T_z^A	-15,704	-15,707	-15,708	-15,708	-15,708	-15,708	-15,708	-15,708	0,000
M_t^A	-25,875	-27,803	-28,452	-28,777	-29,102	-29,320	-29,465	-29,538	0,246
M_n^A	101,017	100,546	100,372	100,283	100,190	100,128	100,086	100,064	-0,021
T_z^M	0	0	0	0	0	0	0	0	-
M_t^M	-1,072	-0,536	-0,358	-0,268	-0,179	-0,119	-0,079	-0,060	-
M_n^M	-27,274	-27,312	-27,318	-27,321	-27,323	-27,323	-27,324	-27,324	0,000

Çizelge 4.3 Örnek 1 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z).

	KSEY				YTSEY	
	eleman sayısı (n_e)				(n_e)	
	20	40	60	% fark ¹	720	%fark ²
u_z^{maks}	-41,100	-40,786	-40,728	-0,141	-40,682	-0,115
T_z^A	-15,708	-15,708	-15,708	0,000	-15,708	0,000
M_t^A	-29,427	-29,673	-29,719	0,154	-29,538	-0,614
M_n^A	100,117	100,03	100,013	-0,016	100,064	0,051
T_z^M	0	0	0	-	0	-
M_t^M	0	0	0	-	-0,06	-
M_n^M	-27,451	-27,355	-27,338	-0,064	-27,324	-0,051

Çizelge 4.4 Örnek 1'e ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.

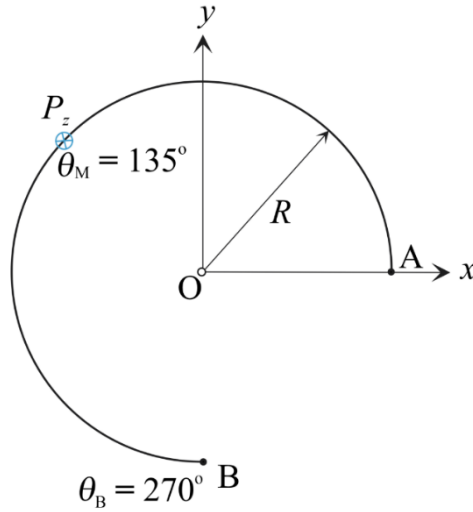
	A noktası			M noktası			
	$ T_z^A $	$ M_t^A $	$ M_n^A $	$ T_z^M $	$ M_t^M $	$ M_n^M $	$ u_z^M $
Dasgupta ve Sangupta [34]	15,707	29,489	99,981	0	0	27,585	0,0404
Haktanır ve Kiral [38]	15,708	29,756	100	0	0	27,324	0,0403
Kadıoğlu [40]	15,707	29,738	99,96	0	0	27,494	0,0406
Aköz ve Kadıoğlu [41]	15,708	29,757	100,099	0	0	*22,373	0,0409
Analitik [34]	15,707	29,756	100	0	0	27,324	0,0403
KSEY ($n_e = 60$)	15,708	29,719	100,013	0	0	27,338	0,0407
%fark ^[34]	0,006	0,774	0,032	-	-	-0,904	0,737
%fark ^[38]	0,000	-0,124	0,013	-	-	0,051	0,983
%fark ^[50]	0,006	-0,064	0,053	-	-	-0,571	0,246
%fark ^[41]	0,000	-0,128	-0,086	-	-	*18,162	-0,491
%fark ^[34] (Analitik)	0,006	-0,124	0,013	-	-	0,051	0,983

Çizelge 4.4'te bu tez kapsamında ele alınan karışık SEY sonuçları literatürdeki çalışmalar üzerinden kıyaslanmıştır. Literatürde ve tez kapsamındaki eğrisel koordinatların doğrultuları aynı fakat yönleri farklı olduğu için hem karışık SEY sonuçları hem de literatürdeki sonuçlar mutlak değerler üzerinden tartışılmıştır. Literatür ve analitik yöntem sonuçları bu tezdeki karışık SEY sonuçları ile kıyaslanmıştır. Yüzde farklar $\%fark^{[m]} = (1 - \Theta^{[m]} / \Theta^{\text{KSEY}})$ burada $\Theta = |T_z^A|$, $|M_t^A|$, $|M_n^A|$, $|T_z^M|$, $|M_t^M|$, $|M_n^M|$ ve $|u_z^M|$ olup m sayısı ise ilgili literatürün kaynakça numarasını ifade etmektedir. Karışık sonlu eleman yöntemi sonuçlarının literatür ile oldukça uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Literatür çalışmaları incelendiği sırada, Aköz

ve Kadioğlu (1996)'da sunulan değerlerden kiriş orta noktasındaki eğilme momenti $|M_n^M|$ 'i değerinin yazımında hata olduğu fark edilmiştir. Kadioğlu 1994'te verilen bu değer ($|M_n^M|$) hem literatür ([34] ve [38]) ve hem bu tez kapsamında elde edilen sonuçlar ile uyumludur.

4.1.2. Örnek 2

Şekil 4.1'de yükleme durumu verilen tekil kuvvet etkisinde iki ucundan tutulu dairesel kirişin statik analiz davranışı ele alınmıştır. Ele alınan bu problem literatürde Dinç 2016'da [49] sunulan sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Ele alınan probleme ait parametreler aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1 Dairesel kiriş (Örnek 2)

Tekil yük şiddeti	: $P_z = 50 \text{ ton}$
Dikdörtgen kesit boyutları	: $w = h = 1,5 \text{ m}$
Dairesel kirişin yarıçapı	: $R = 8 \text{ m}$
Kirişin merkez açısı	: $\theta_B = 270^\circ$
Elastisite modülü	: $E = 2,7 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$
Poisson oranı	: $\nu = 0.3$

Karışık sonlu eleman yöntemi (KSEY) ve yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine (YTSEY) için yakınsama analizi sonuçları (en büyük yer değiştirme, kuvvet ve moment) Çizelge 4.5 ve 4.6’da sunulmuştur.

Çizelge 4.5 Örnek 2 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z) . u [mm].

	eleman sayısı (n_e)						% fark
	40	80	160	240	360	400	
T_z^A	-25	-25	-25	-25	-25	-25	0,000
M_t^A	-213,478	-221,124	-224,908	-226,164	-226,999	-227,166	0,073
M_n^A	267,045	260,761	257,506	256,405	255,666	255,518	-0,058
T_z^B	25	25	25	25	25	25	0,000
M_t^B	213,478	221,124	224,908	226,164	226,999	227,166	0,073
M_n^B	267,045	260,761	257,506	256,405	255,666	255,518	-0,058
u_z^{maks}	-26,257	-26,286	-26,2933	-26,2947	-26,2953	-26,2954	0,000

Çizelge 4.6 Örnek 2 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z) . u [mm].

	KSEY						YTSEY	
	eleman sayısı (n_e)						$n_e = 400$	% fark ²
	40	60	80	100	120	% fark ¹		
T_z^A	-25,211	-25,057	-25,004	-24,98	-24,967	-0,051	-25	0,131
M_t^A	-228,485	-228,518	-228,53	-228,536	-228,539	0,002	-227,166	-0,604
M_n^A	252,307	253,275	253,605	253,754	253,833	0,031	255,518	0,659
T_z^B	25,274	25,12	25,067	25,043	25,03	-0,051	25	-0,121
M_t^B	228,666	228,695	228,706	228,711	228,714	0,001	227,166	-0,681
M_n^B	252,823	253,805	254,143	254,296	254,378	0,032	255,518	0,446
u_z^{maks}	-26,3067	-26,3063	-26,306	-26,3058	-26,3056	-0,001	-26,2954	-0,039

Çizelge 4.5 ve 4.6 incelendiğinde, burulma (M_t^A, M_t^B) ve eğilme momentlerine (M_n^A, M_n^B) ait sonuçlarda KSEY yeteri yakınsaklığı YTSEY’e göre daha az sayıda sonlu eleman ile elde etmektedir.

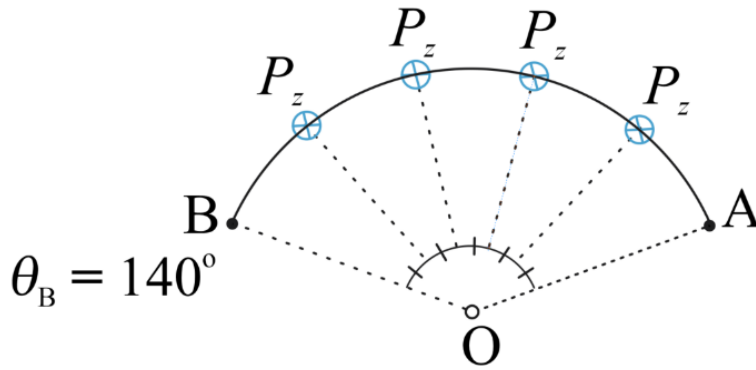
Çizelge 4.7 Örnek 2'ye ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.

	A noktası			B noktası		
	$ T_z^A $	$ M_t^A $	$ M_n^A $	$ T_z^B $	$ M_t^B $	$ M_n^B $
Dinç 2016 [49]	25,07	233,2	251	25,07	232,62	251
KSEY ($n_e = 120$)	24,97	228,54	253,83	25,03	228,71	254,38
%fark	-0,400	-2,039	1,115	-0,160	-1,710	1,329

Çizelge 4.7'de, karışık SEY sonuçları Dinç 2016 [49] ile kıyaslanmıştır. Dinç 2016'daki sonuçlar karışık SEY'ne ait sonuçlar üzerinden normalize edilerek yüzde fark (%fark) Çizelge 4.7'de sunulmuştur. Karışık SEY kullanılarak elde edilen burulma ve eğilme momenti sonuçlarının Dinç 2016'daki sonuçlar ile kıyaslandığında, karışık SEY sonuçları yer değiştirme türü SEY sonuçlarına daha yakın (Çizelge 4.6, % fark²) olduğu görülmüştür.

4.1.3. Örnek 3

Şekil 4.2'de yükleme durumu verilen ve 4 adet tekil kuvvet etkisinde iki ucundan tutulu dairesel kirişin statik analiz davranışı ele alınmıştır. Kiriş beş eşit parçaya bölünerek eşit açı aralıklarıyla 4 adet tekil kuvvet kiriş düzlemine dik doğrultuda uygulanmıştır. Ele alınan bu problemin sonuçları, Zubaroğlu 1994'de sunulan kesin çözüm (Yöntem 1) ve taşıma matrisi çözümü (Yöntem 2) ile elde edilmiştir. Ele alınan örneğe ait parametreler aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2 Dairesel kiriş (Örnek 3 ve 4)

Tekil yük şiddeti	:	$P_z = 100 \text{ ton}$
Dikdörtgen kesitin boyutları	:	$w = 1,2 \text{ m} , h = 0,6 \text{ m}$
Dairesel kirişin yarıçapı	:	$R = 12 \text{ m}$
Kirişin merkez açısı	:	$\theta_B = 140^\circ$
Elastisite modülü	:	$E = 2,7 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$
Poisson oranı	:	$\nu = 0.3$

Çizelge 4.8 Örnek 3 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z) . $u[\text{mm}]$.

	eleman sayısı (n_e)							% fark
	35	70	140	280	350	560	700	
T_z^A	-200	-200	-200	-200	-200	-200	-200	0,000
M_t^A	-188,96	-213,254	-225,441	-231,545	-232,767	-234,599	-235,21	0,260
M_n^A	1408,637	1405,025	1403,086	1402,083	1401,88	1401,573	1401,47	-0,007
T_z^B	200	200	200	200	200	200	200	0,000
M_t^B	188,96	213,254	225,441	231,545	232,767	234,599	235,21	0,260
M_n^B	1408,637	1405,025	1403,086	1402,083	1401,88	1401,573	1401,47	-0,007
u_z^{maks}	-769,3045	-770,5976	-770,5954	-770,5949	-770,5948	-770,5948	-770,5947	0,000

Çizelge 4.9 Örnek 3 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z) . $u[\text{mm}]$.

	KSEY				YTSEY	
	eleman sayısı (n_e)				$n_e = 700$	% fark ²
	35	70	140	% fark ¹		
T_z^A	-202,706	-199,673	-199,681	0,004	-200	0,159
M_t^A	-236,672	-237,494	-237,607	0,047	-235,21	-1,019
M_n^A	1386,587	1400,511	1400,109	-0,029	1401,47	0,097
T_z^B	203,33	200,327	200,319	-0,004	200	-0,159
M_t^B	236,696	237,521	237,634	0,047	235,21	-1,030
M_n^B	1388,593	1401,971	1401,65	-0,023	1401,47	-0,013
u_z^{maks}	-770,1248	-770,8555	-770,6558	-0,026	-770,5947	-0,008

Çizelge 4.8 ve 4.9 incelendiğinde, burulma (M_t^A, M_t^B) ve eğilme momentlerine (M_n^A, M_n^B) ait sonuçlarda KSEY yeteri yakınsaklığı YTSEY'ne göre daha az sayıda sonlu eleman ile elde etmektedir. Doğal koordinat takımında sunulan yer değiştirme türü-doğrusal sonlu elemanlar üzerinden elde edilen sonuçların (Çizelge 4.8) tamamı göz önüne alındığında yeteri yakınsaklığın sağlandığı sonlu eleman sayısı ise $n_e = 700$ 'dür.

Çizelge 4.10 Örnek 3'e ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.

	A noktası			B noktası		
	$ T_z^A $	$ M_t^A $	$ M_n^A $	$ T_z^B $	$ M_t^B $	$ M_n^B $
Zubaroğlu (1994) [39]	200	201,232	1387,8	200	201,232	1387,8
Yöntem 1						
Zubaroğlu (1994) [39]	200	201,232	1387,8	200	201,232	1387,8
Yöntem 2						
KSEY ($n_e = 140$)	199,681	237,607	1400,109	200,319	237,634	1401,65
%fark (Yöntem 1, [39])	-0,160	15,309	0,879	0,159	15,319	0,988
%fark (Yöntem 2, [39])	-0,160	15,309	0,879	0,159	15,319	0,988

Çizelge 4.7'de, karışık SEY sonuçları Zubaroğlu 1994'de [39] verilen yöntem 1 ve yöntem 2 sonuçları ile kıyaslanmıştır. Zubaroğlu 1994'deki her bir yönteme göre elde edilen sonuçlar karışık SEY'ine ait sonuçlar üzerinden normalize edilerek yüzde fark (%fark) Çizelge 4.10'da sunulmuştur. Özellikle, karışık SEY'i kullanılarak elde edilen burulma momenti sonuçlarının ($|M_t^A|, |M_t^B|$) Zubaroğlu 1994 [39]'deki sonuçlar ile kıyaslandığında, Çizelge 4.10'da verilen %fark değerlerinin oldukça yüksek olduğu görülmüştür. Zubaroğlu 1994'deki her iki yöntem ile elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerinin karışık SEY sonuçlarına yakın olduğu görülmüştür.

4.1.4. Örnek 4

Şekil 4.2'de yükleme durumu verilen ve 4 adet tekil kuvvet etkisinde iki ucundan tutulu elastik zemine oturan dairesel kirişin statik analiz davranışı ele alınmıştır. Kiriş beş eşit parçaya bölünerek eşit açı aralıklarıyla 4 adet tekil kuvvet kiriş düzlemine dik doğrultuda uygulanmıştır. Ele alınan bu problem literatürde farklı araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalar, Zubaroğlu 1994'de sunulan taşıma matrisi çözümü (Yöntem 2) ve sonlu eleman çözümü (Yöntem 3) olup ve Dinç 2016'dır. Ele alınan probleme ait parametreler aşağıda verilmiştir.

Tekil yük şiddeti	:	$P = 50 \text{ ton}$
Dikdörtgen kesitin boyutları	:	$w = h = 1,5 \text{ m}$
Dairesel kirişin yarıçapı	:	$R = 8 \text{ m}$
Kirişin merkez açısı	:	$\theta_B = 140^\circ$
Elastisite modülü	:	$E = 2,7 \times 10^7 \text{ ton/m}^2$
Poisson oranı	:	$\nu = 0.3$
Zemin yatak katsayısı	:	$k_{rW} = 10 \text{ ton/m}^2$

Çizelge 4.11 Örnek 4 için yer değiştirme türü SEY sonuçları üzerinden yakınsama analizi (t, n, z) . $u [\text{mm}]$.

	eleman sayısı (n_e)							% fark
	35	70	140	280	350	560	700	
T_b^A	-99,676	-99,676	-99,676	-99,676	-99,676	-99,676	-99,676	0,000
M_t^A	-68,053	-76,078	-80,123	-82,153	-82,56	-83,171	-83,375	0,244
M_n^A	470,039	468,715	468,017	467,659	467,587	467,478	467,441	-0,008
T_b^B	99,676	99,676	99,676	99,676	99,676	99,676	99,676	0,000
M_t^B	68,053	76,078	80,123	82,153	82,56	83,171	83,375	0,244
M_n^B	470,039	468,715	468,017	467,659	467,587	467,478	467,441	-0,008
u_z^{maks}	-6,2579	-6,2682	-6,2682	-6,2682	-6,2682	-6,2682	-6,2682	0,000

Çizelge 4.12 Örnek 4 için karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY sonuçların kıyaslanması (t, n, z) . $u [\text{mm}]$.

	KSEY				YTSEY	
	eleman sayısı (n_e)				$n_e = 700$	% fark ²
	35	70	140	% fark ¹		
T_b^A	-100,784	-99,514	-99,518	0,003	-99,676	0,159
M_t^A	-83,71	-84,138	-84,185	0,056	-83,375	-0,972
M_n^A	463,26	467,145	466,99	-0,033	467,441	0,096
T_b^B	101,095	99,839	99,835	-0,004	99,676	-0,159
M_t^B	83,715	84,143	84,191	0,057	83,375	-0,979
M_n^B	463,928	467,637	467,505	-0,028	467,441	-0,014
u_z^{maks}	-6,2651	-6,271	-6,2691	-0,030	-6,2682	-0,015

Çizelge 4.11 ve 4.12 incelendiğinde, burulma (M_t^A, M_t^B) ve eğilme momentlerine (M_n^A, M_n^B) ait sonuçlarda KSEY yeteri yakınsaklığı YTSEY'ne göre daha az sayıda sonlu eleman ile elde etmektedir. Doğal koordinat takımında sunulan yer değiştirme türü-doğrusal sonlu elemanlar üzerinden elde edilen sonuçların (Çizelge 4.8) tamamı göz önüne alındığında yeteri yakınsaklığın sağlandığı sonlu eleman sayısı ise $n_e = 700$ 'dür.

Çizelge 4.13 Örnek 4'e ait karışık sonlu eleman yöntemi ve literatür sonuçlarının kıyaslanması.

	A noktası			B noktası		
	$ T_z^A $	$ M_t^A $	$ M_n^A $	$ T_z^B $	$ M_t^B $	$ M_n^B $
Zubaroğlu (1994) [39] Yöntem 3	99,688	75,217	464,669	99,688	75,217	464,669
Zubaroğlu (1994) [39] Yöntem 2	99,707	75,316	464,208	99,707	75,316	464,208
Dinç 2016 [49]	99,92	82,42	467,7	99,92	82,42	467,7
KSEY ($n_e = 140$)	99,518	84,185	466,99	99,835	84,191	467,505
%fark ^[39] (Yöntem 3, [39])	-0,171	10,653	0,497	0,147	10,659	0,607
%fark ^[39] (Yöntem 2, [39])	-0,190	10,535	0,596	0,128	10,542	0,705
%fark ^[49]	-0,404	2,097	-0,152	-0,085	2,104	-0,042

Dinç 2016'daki tüm sonuçların hem karışık SEY hem de yer değiştirme türü SEY sonuçları ile yakın olduğu görülmüştür (Çizelge 4.13). Zubaroğlu 1994'deki her iki yöntem ile elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerinin karışık SEY sonuçlarına yakın olduğu görülürken, burulma momentine ait yüzde farkların oldukça yüksek olduğu görülmüştür.

4.2. Elastik Zemine Oturan Dairesel Kiriş Problemi Üzerinden Yer Değiştirme

Türü ve Karışık Sonlu Eleman Yöntemlerinin Performanslarının Kıyaslaması

Bölüm 4.1'de ele alınan literatür doğrulama örneklerindeki karışık tipteki-eğrisel sonlu eleman ile yer değiştirme türü-doğrusal sonlu eleman kullanılarak yeteri yakınsaklığın sağlandığı sonuçlar ele alınan koordinat takımına göre (Kartezyen koordinat ve eğrisel koordinat) takımına göre farklılıklar göstermektedir. Bu bölümde, karışık SEY ve yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemlerinin performansları düzgün yayılı yük etkisindeki elastik zemine oturan dairesel kirişlerin statik analiz sonuçları (u, Ω, T ve M) üzerinden detaylı olarak irdelenmiştir. Sayısal örneklerde, farklı merkez açı değerleri ($\theta_B = 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ve 270°) ve farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre,

ankastre-sabit, ankastre-serbest) etkisi incelenmiştir. Tüm örneklerde, dikdörtgen kesitin genişliği ve yüksekliği sırasıyla, $w=0,6\text{m}$ ve $h=0,4\text{m}$ seçilmiştir. Kirişin yarıçap değeri $R=12\text{m}$ olup düzgün yayılı yükün şiddeti ise $q_z=10\text{N/m}$ 'dir. Birimsiz zemin yatak katsayısı ise $\tilde{k}_w = (w k_w D^4)/(EI_n) = 50$, burada $E = 200\text{GPa}$ olup D ise dairesel kirişin çapını göstermektedir. Poisson oranı ise $\nu = 0,3$ 'tür.

Kartezyen koordinat takımında incelenen bileşenler en büyük yer değiştirme $u_z^{\max}$ ve kesit dönmeleri $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ ile A noktasındaki mesnet tepki kuvveti T_z^A ve mesnet momentleri M_x^A ve M_y^A momentleridir. Doğal koordinat takımında ise mesnet tepki momentleri M_t^A ve M_n^A üzerinden yapılmıştır. Yer değiştirme türü SEY'ne ait sonuçlar yapısal analiz programı SAP2000 ile elde edilmiştir. Yer değiştirme türü sonlu eleman analizinde eğrisel kiriş geometrisi, doğru eksenli çubuk eleman üzerinden ayrıştırılmıştır. Karışık ve yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar üzerinden yapılan yakınsama ve kıyaslama analizi sonuçları ($u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A , M_y^A , M_t^A ve M_n^A) her bir sonuç için ayrıntılı olarak aşağıdaki gibi incelenmiştir. Üç boyutlu uzayda $x-y$ düzleminde tanımlanan eğrisel çubuk için, Frenet koordinat takımındaki binormal doğrultu b ile Kartezyen koordinat takımındaki z eksenini çakışmaktadır.

4.2.1. Kartezyen Koordinat Takımı (x, y, z)

Karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY'ine ait Kartezyen koordinat takımındaki analiz sonuçları $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A için sırasıyla, Şekil 4.3-4.8 arasında sunulmuştur. Sonlu eleman sayısı 10 ile 80 eleman arasında seçilmiştir.

Kartezyen koordinat takımındaki 60 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen her bir sonuç 80 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen sonuca göre normalize edilerek hem karışık sonlu elemanlar yöntemi hem de yer değiştirme türü (SAP2000) sonlu eleman yönteminden elde edilen sonuçlar için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Ele alınan tüm merkez açısı ($\theta_B = 45^\circ; 90^\circ; 180^\circ$ ve 270°) değerlerine ait mutlak değerce en büyük yüzde farklar, her bir sınır koşulu için aşağıdaki gibi verilmiştir.

- *Ankastre- ankastre sınır koşulu:* Karışık SEY'ne ait sonuçlar $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A için elde edilen yüzde farklar, sırasıyla %-0,062; %-0,134; %-0,175; %-0,034; %0,045 ve %0,104'tür. Yer değiştirme türü SEY'ne ait sonuçlar $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A , M_y^A için yüzde farklar ise, sırasıyla %0,028; %0,084; %0,084; %-0,019; %0,014; %-0,576'dır.
- *Ankastre-sabit sınır koşulu:* Karışık SEY'ne ait sonuçlar $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A için elde edilen yüzde farklar, sırasıyla %-0,026; %-0,075; %-0,073; %-0,056; %0,095 ve %0,386'dır. Yer değiştirme türü SEY'ne ait sonuçlar $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar ise, sırasıyla %0,036; %0,093; %0,072; %-0,021; %0,010 ve %0,569'dur.
- *Ankastre-serbest sınır koşulu:* Karışık SEY'ne ait sonuçlar $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A için elde edilen yüzde farklar, sırasıyla %-0,030; %-0,231; %-0,192; %-0,036; %0,056; %0,060'tır. Yer değiştirme türü SEY'ne ait sonuçlar $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar ise, sırasıyla %0,028; %0,042; %0,051; %-0,022; %0,013 ve %-0,135'tir.

Yukarıda sunulan yüzde farklara göre hem karışık SEY hem de yer değiştirme türü SEY için 80 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen Kartezyen koordinat takımındaki sonuçlar için yeteri yakınsaklığın sağlandığı gözlemlenmiştir. Daha sonra, karışık SEY hem de yer değiştirme türü SEY sonuçları birbirleri ile kıyaslanmıştır. Her iki sonlu eleman yönteminde yeteri yakınsaklığın sağlandığı 80 adet sonlu eleman ağı üzerinden elde edilen sonuçlara göre karışık SEY'ne ait sonuçlar, yer değiştirme türü SEY'ne ait sonuçlar üzerinden normalize edilerek yüzde farklar hesaplanmıştır. Ele alınan tüm merkez açısı ($\theta_B = 45^\circ; 90^\circ; 180^\circ$ ve 270°) değerlerine ait mutlak değerce en büyük yüzde farklar, her bir sınır koşulu için aşağıdaki gibi sunulmuştur.

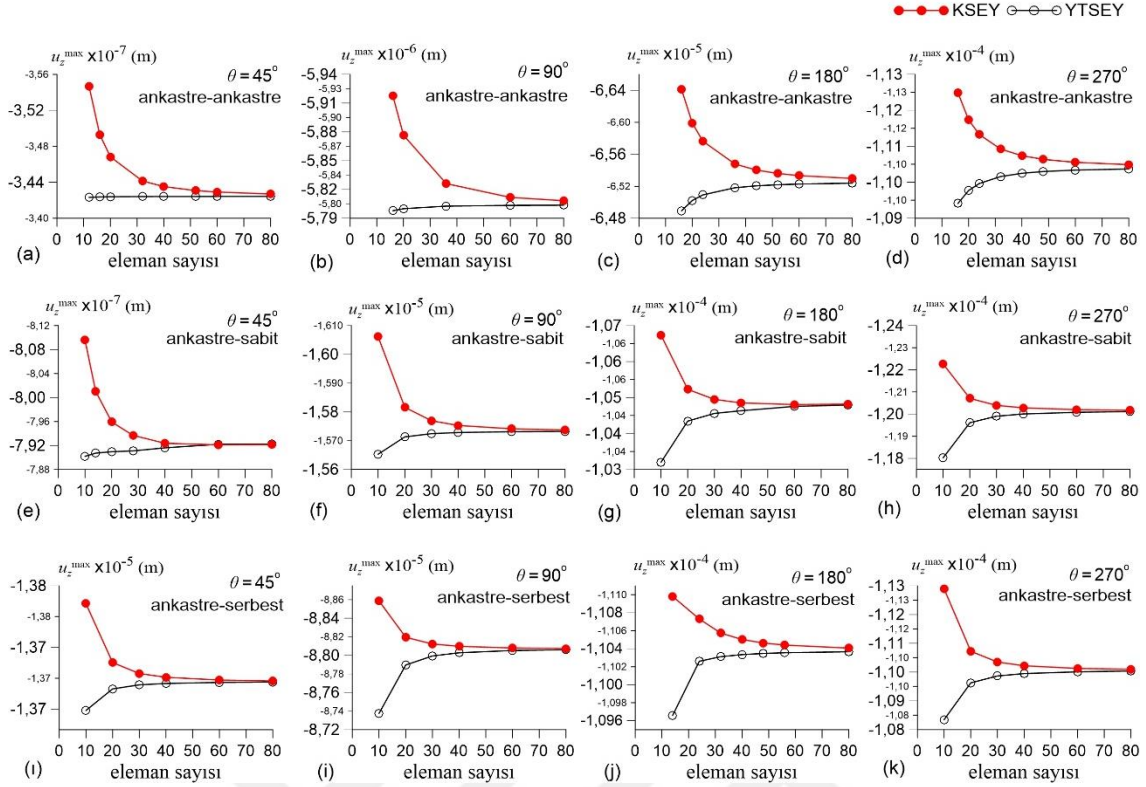
- *Ankastre-ankastre sınır koşulu:* $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A sonuçlarına ait yüzde farklar, sırasıyla %-0,109; %-0,255; %-0,255; %-0,022; %0,056 ve %0,806'dır.

- *Ankastre-sabit sınır koşulu:* $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A sonuçlarına ait yüzde farklar, sırasıyla %-0,048; %-0,254; %-0,155; %-0,070; %0,107 ve %-0,662'dir.
- *Ankastre-serbest sınır koşulu:* $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A sonuçlarına ait yüzde farklar, sırasıyla %-0,053; %-0,221; %-0,156; %-0,023; %0,054 ve %0,238'dir.

Ele alınan her bir sınır koşulu (ankastre-ankastre, ankastre-sabit ve ankastre-serbest) ve merkez açı değeri ($\theta_B = 45^\circ; 90^\circ; 180^\circ$ ve 270°) için Karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY'inin yakınsama performansları Kartezyen koordinat takımındaki analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^A , M_x^A , M_y^A) detaylı olarak aşağıdaki gibi sunulmuştur.

En büyük yer değiştirme ($u_z^{\max}$):

- Ankastre-ankastre (Şekil 4.3 a-d) ve ankastre-serbest sınır koşulu (Şekil 4.3 ı-k): Ele alınan tüm merkezi açı θ değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi, karışık sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeteri yakınsaklığı sağladığı gözlemlenmiştir.
- Ankastre-sabit sınır koşulu (Şekil 4.3 e-h): Ele alınan $\theta = 45^\circ$ ve 90° merkez açı değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi karışık sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeteri yakınsaklığı sağladığı gözlemlenmiştir. $\theta = 180^\circ$ ve 270° merkez açı değerleri için ise her iki sonlu eleman yöntemi de hemen hemen aynı sayıdaki sonlu eleman sayısı için yeterli yakınsaklığı sağladıkları görülmüştür.

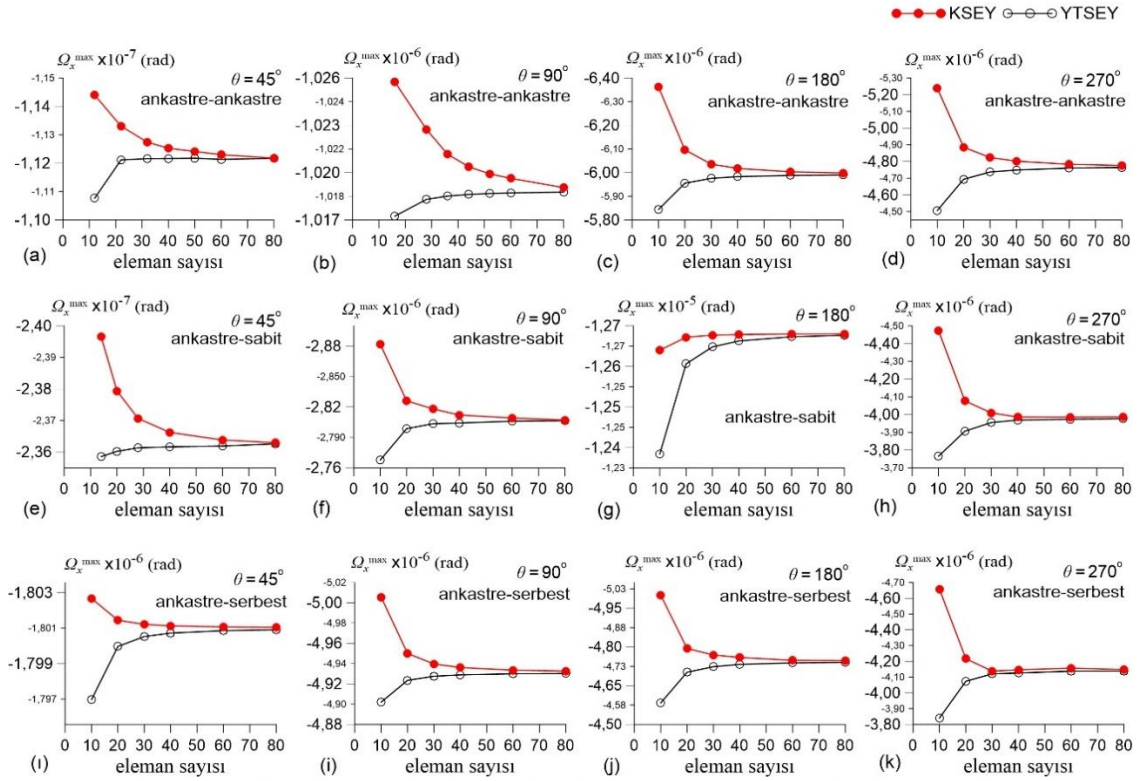


Şekil 4.3 Dairesel kirişin en büyük yer değiştirmesine ($u_z^{\max}$) ait yakınsama analizi.

En büyük kesit dönmesi ($\Omega_x^{\max}$):

- Ankastre-ankastre sınır koşulu (Şekil 4.4 a-d): Ele alınan merkez açısı $\theta = 45^\circ$; 180° ve 270° değerlerine ait $n_e > 30$ sonlu eleman sayıları için hem yer değiştirme türü hem de karışık sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirlerine oldukça yakındır. Merkez açısı $\theta = 90^\circ$ olan dairesel kiriş için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi, karışık sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeteri yakınsaklığı sağladığı gözlemlenmiştir.
- Ankastre-sabit sınır koşulu (Şekil 4.4 e-h): Ele alınan merkez açısı $\theta = 90^\circ$ ve 270° değerleri için değerlerine ait $n_e > 20$ sonlu eleman sayıları için her iki sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirlerine oldukça yakındır. Merkez açısı $\theta = 45^\circ$ yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi, karışık sonlu eleman yöntemine göre daha hızlı yakınsarken, merkez açısı $\theta = 180^\circ$ için ise karışık sonlu eleman yöntemin yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine göre daha hızlı yakınsamaktadır.

- Ankastre-serbest sınır koşulu (Şekil 4.4 ı-k): Ele alınan tüm merkez açı değerlerine ait $n_e \geq 20$ sonlu eleman sayıları için her iki sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirlerine oldukça yakındır.

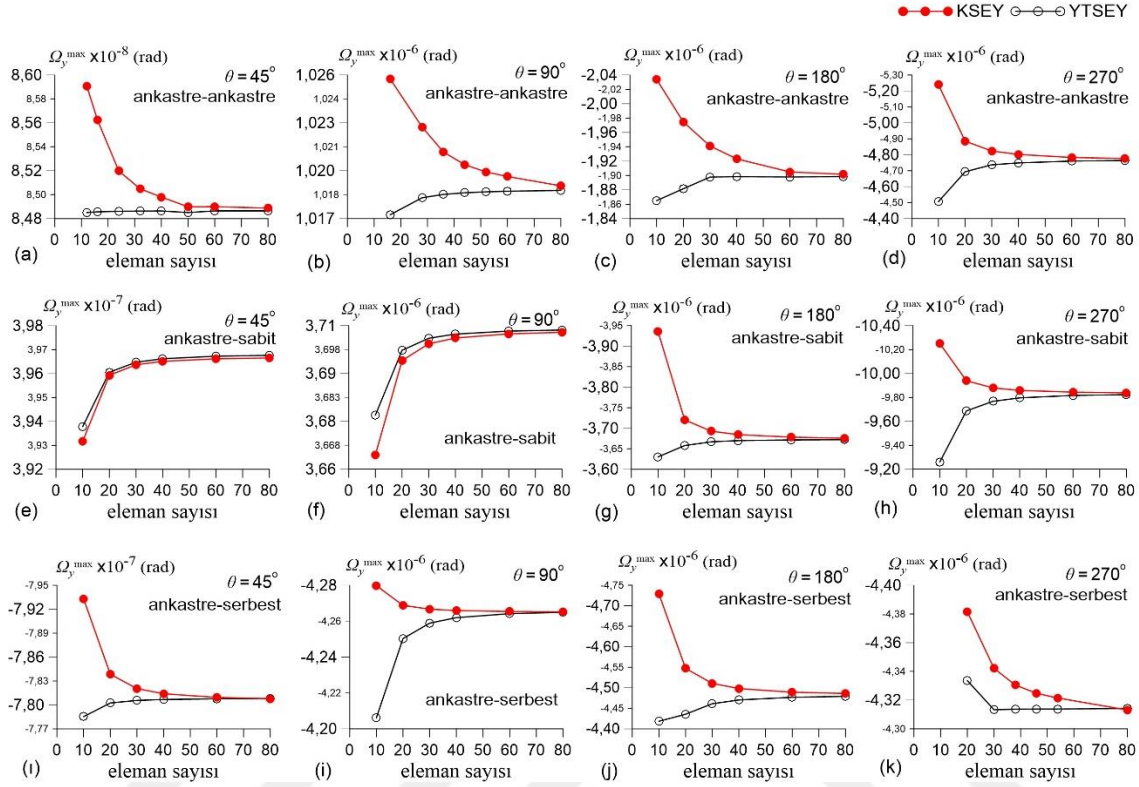


Şekil 4.4 Dairesel kirişin x eksenini etrafında en büyük kesit dönmeleri ($\Omega_x^{\max}$) ait yakınsama analizi.

En büyük kesit dönmeleri ($\Omega_y^{\max}$):

- Ankastre-ankastre sınır koşulu (Şekil 4.5 a-d): Merkez açı $\theta = 45^\circ$; 90° ve 180° değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi karışık sonlu eleman yöntemi göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağlamıştır. Merkez açı değeri $\theta = 270^\circ$ için her iki sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirine oldukça yakındır.
- Ankastre-sabit sınır koşulu (Şekil 4.5 e-h): Ele alınan tüm merkez açı değerleri için $n_e > 20$ sonlu eleman sayıları için hem yer değiştirme türü hem de karışık sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirlerine oldukça yakındır.
- Ankastre-serbest sınır koşulu (Şekil 4.5 ı-k): Merkez açı $\theta = 45^\circ$; 90° ve 180° değerleri için ait $n_e > 20$ sonlu eleman sayıları için hem yer değiştirme türü hem de

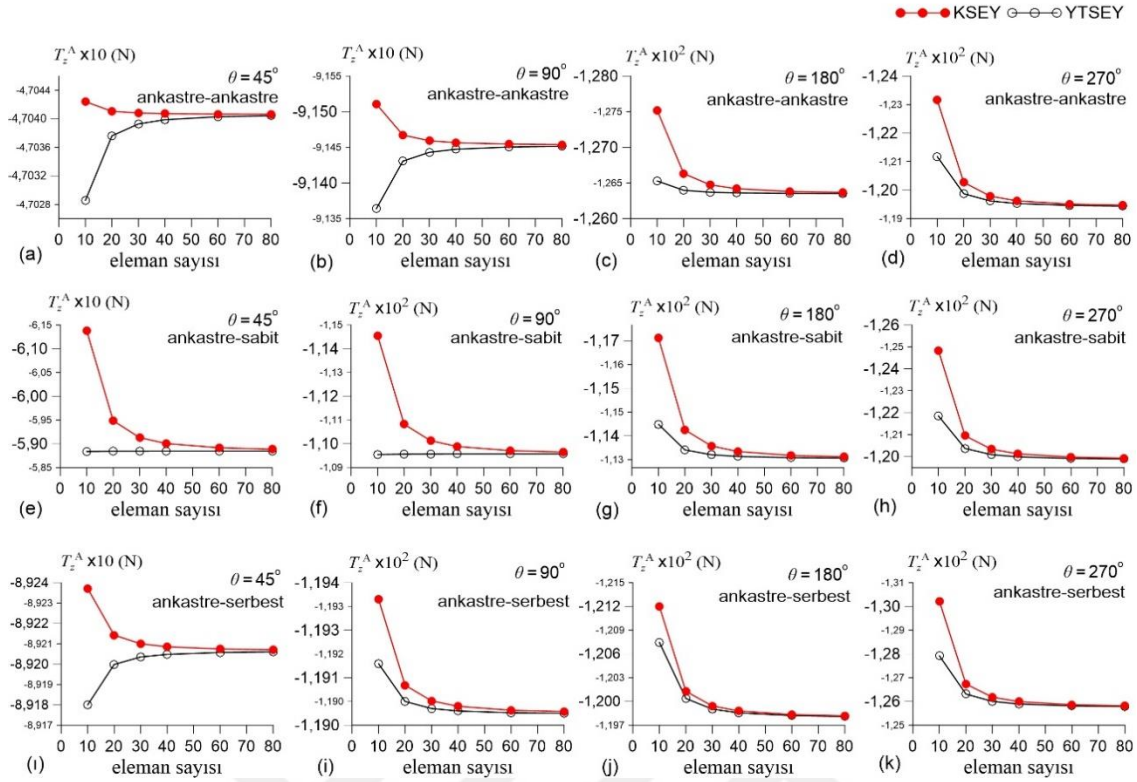
karışık sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirlerine oldukça yakındır. Merkez açı değeri $\theta = 270^\circ$ için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi, karışık sonlu eleman yöntemine göre daha hızlı yakınsamaktadır.



Şekil 4.5 Dairesel kirişin y eksenı etrafında en büyük kesit dönmesi ($\Omega_y^{\max}$) ait yakınsama analizi.

A noktasındaki kesme kuvveti (T_z^A):

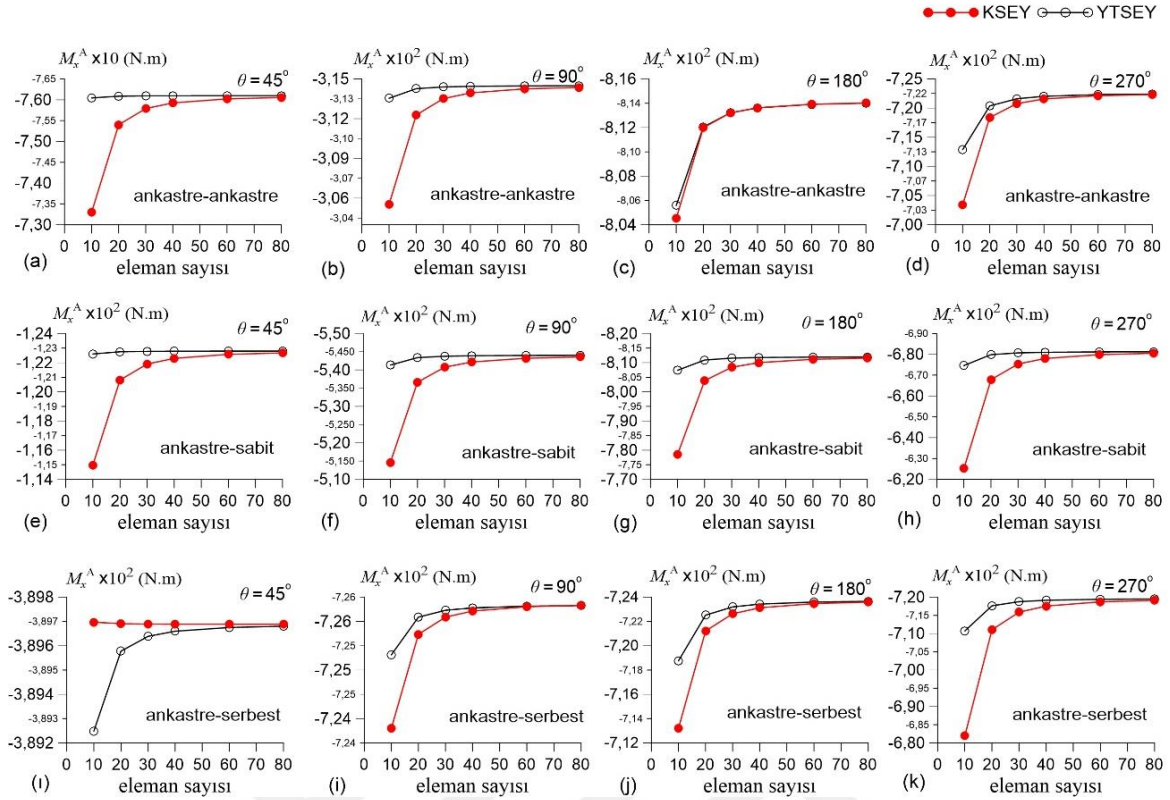
- Ankastre-ankastre (Şekil 4.6 a-d) ve ankastre-serbest (Şekil 4.3 ı-k) sınır koşulu: Ele alınan tüm merkez açı değerlerine ait $n_e > 20$ sonlu eleman sayıları için hem yer değiştirme türü hem de karışık sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları hemen hemen birbirlerine yakındır.
- Ankastre-sabit sınır koşulu (Şekil 4.6 e-h): Merkezi açı $\theta = 45^\circ$ ve $\theta = 90^\circ$ için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi karışık sonlu eleman yöntemi göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağlamıştır. Merkezi açı $\theta = 180^\circ$ ve $\theta = 270^\circ$ için her iki sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları nispeten aynıdır.



Şekil 4.6 Dairesel kirişin A mesnet kuvvetine (T_z^A) ait yakınsama analizi.

A noktasındaki Mesnet Momenti (M_x^A):

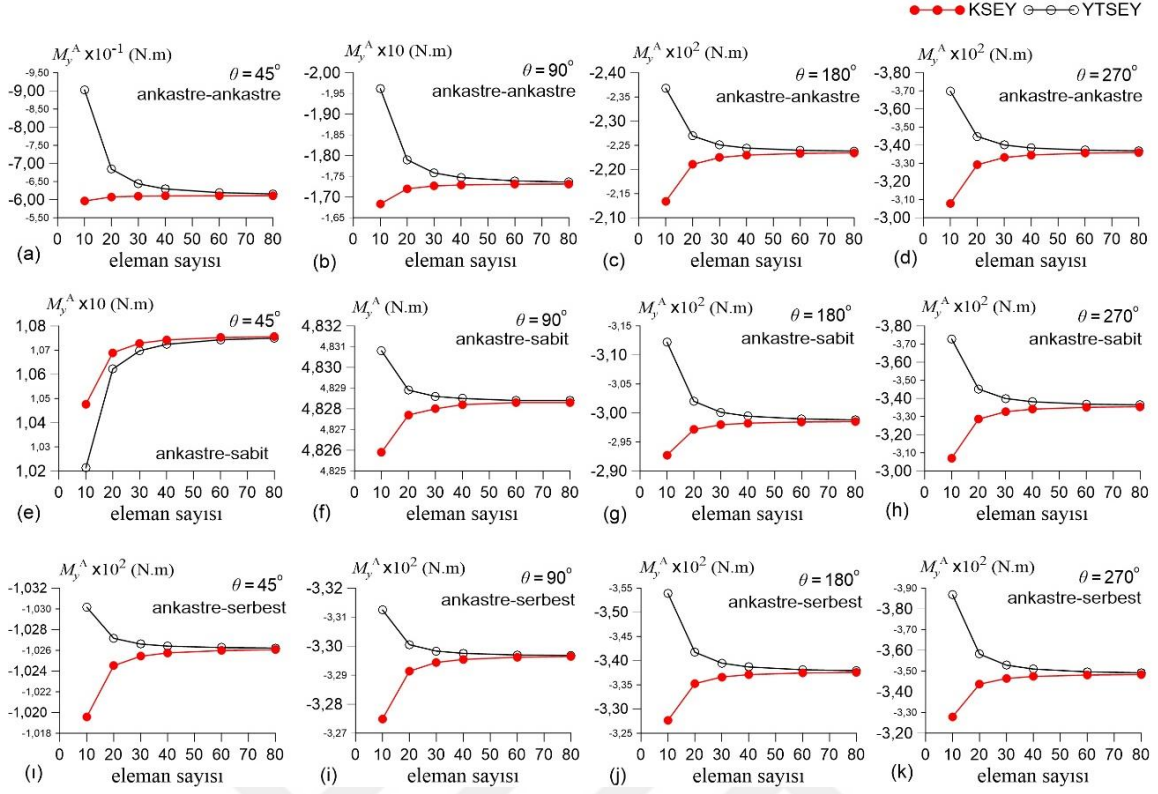
- Ankastre-ankastre sınır koşulu (Şekil 4.7 a-d): Merkez açısı $\theta = 45^\circ$; 90° ve 270° değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi karışık sonlu eleman yöntemi göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağlamıştır. Merkezi açısı $\theta = 180^\circ$ değeri için karışık sonlu elemanlar yöntemi ile yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemin yakınsama hızlarının $n_e \geq 20$ aynı olduğu gözlemlenmiştir.
- Ankastre-sabit sınır koşulu (Şekil 4.7 e-h): ele alınan tüm merkezi açısı θ değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi karışık sonlu eleman yöntemi göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağladığı gözlemlenmiştir.
- Ankastre-serbest sınır koşulu (Şekil 4.7 ı-k): Merkez açısı $\theta = 45^\circ$ için, karışık sonlu eleman yöntemi yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağladığı gözlemlenmiştir. Merkez açısı $\theta = 90^\circ$; 180° ve 270° değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi karışık sonlu eleman yöntemi göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağlamıştır.



Şekil 4.7 Dairesel kirişin A mesnet momenti (M_x^A) ait yakınsama analizi.

A noktasındaki Mesnet Momenti (M_y^A):

- Ankastre-ankastre sınır koşulu (Şekil 4.8 a-d): Merkezi açı $\theta = 45^\circ$ ve $\theta = 90^\circ$ için karışık sonlu eleman yöntemi yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeterli yakınsaklığı sağlamıştır. Merkezi açı $\theta = 180^\circ$ ve $\theta = 270^\circ$ değerlerine ait $n_e \geq 20$ sonlu eleman sayılarına ait yakınsama hızları hemen hemen aynıdır.
- Ankastre-sabit (Şekil 4.8 e-h) ve ankastre-serbest (Şekil 4.8 ı-k) sınır koşulu: Ele alınan tüm merkez açı değerlerine ait $n_e \geq 20$ sonlu eleman sayıları için her iki sonlu eleman yönteminin yakınsama hızları birbirlerine yakındır.



Şekil 4.8 Dairesel kirişin A mesnet momenti (M_y^A) ait yakınsama analizi.

4.2.2. Doğal Koordinat Takımı (t, n)

Karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY'ne ait doğal koordinat takımındaki analiz sonuçları M_t^A ve M_n^A için sırasıyla, Şekil 4.9 ve 4.10'da sunulmuştur. Ele alınan tüm sınır koşulları ve merkez açı değerleri dikkate alındığında yakınsama analizi 10 adet sonlu eleman ile başlayarak göz önüne alınan analiz sonucun ihtiyaç duyduğu eleman sayısına kadar artırılmıştır. Şöyle ki;

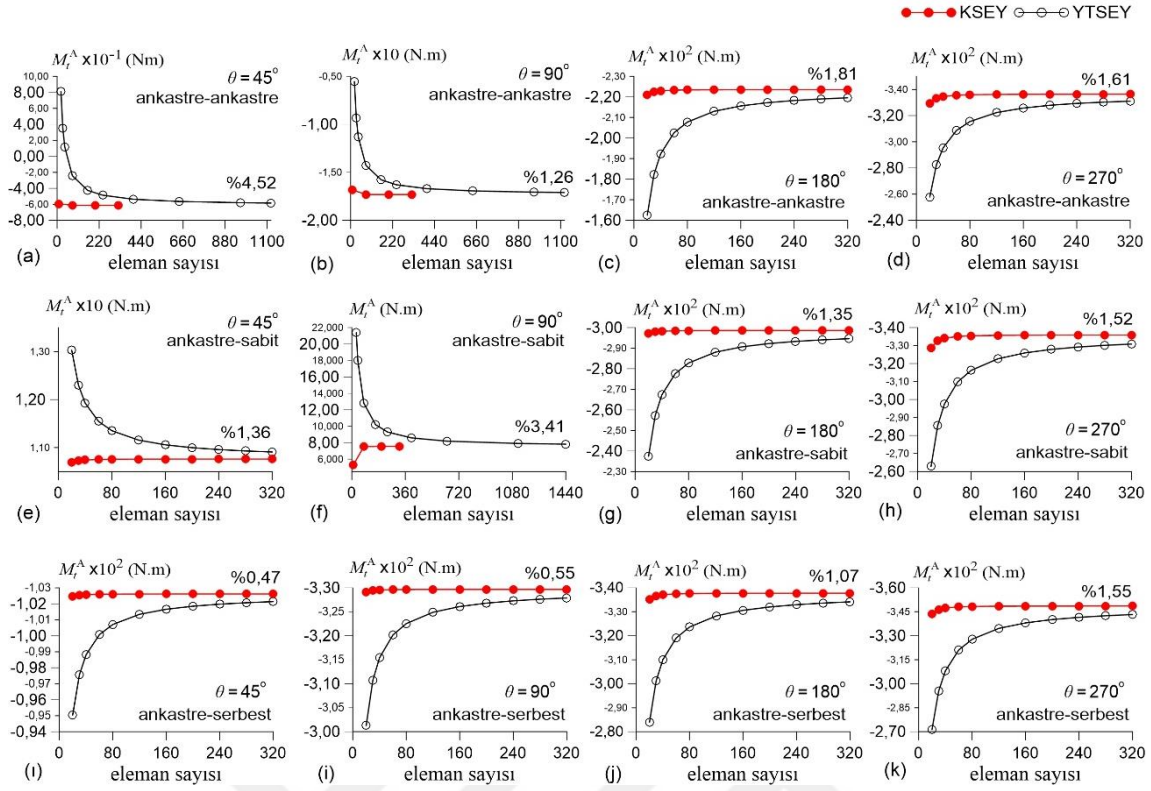
- Eğrisel sonlu eleman ile elde edilen sonuçlar incelendiğinde ele alınan parametrelere göre hem burulma momenti (M_t^A) hem de eğilme momentinin (M_n^A) yakınsamasında 160 adet sonlu elemanın yeterli olduğu görülmüştür (Şekil 4.9 ve 4.10).
- Doğrusal sonlu eleman ile elde edilen sonuçlar incelendiğinde ele alınan parametrelere göre eğilme momentinin (M_n^A) yakınsamasında en fazla 320 adet sonlu elemanın yeterli olduğu görülürken, burulma momentinin (M_t^A) yakınsamasında ise en fazla 1440 adet sonlu eleman kullanılmıştır. Burulma

momenti (M_t^A)'indeki sonlu eleman sayısında artıma ihtiyaç duyulan durumların M_n^A/M_t^A değerinin yüksek olduğu durumlarda olduğu gözlemlenmiştir. Yani burulma momenti ya sıfır değerine oldukça yakın ya da mertebe olarak eğilme momentinden düşüktür. Bundan dolayı, her iki sonlu elman yöntemi için tüm durumlara ait bileşke moment $M^A = \sqrt{(M_t^A)^2 + (M_n^A)^2}$ üzerinden de yakınsama davranışı incelenmiştir. 280 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen her bir sonuç 320 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen sonuca göre normalize edilerek hem karışık sonlu elemanlar yöntemi hem de yer değiştirme türü sonlu eleman yönteminden elde edilen sonuçlar için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Ele alınan tüm sınır koşulları (ankastre-ankastre, ankastre-sabit, ankastre-serbest) ve merkez açı değerleri ($\theta_B = 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ve 270°) için her iki yönteme ait mutlak değerce en büyük yüzde fark %0,02 çıkmıştır.

- Her iki sonlu eleman yöntemi, elde edilen (M_t^A ve M_n^A) sonuçları üzerinden birbirleriyle kıyaslanmıştır. Karışık SEY ait sonuçlar yer değiştirme türü SEY'ne ait sonuçlar üzerinden normalize edilerek elde edilen yüzde farklar Şekil 4.9 ve 4.10'da sunulmuştur. Bu yüzde farklar Şekil 4.9 ve 4.10'da verilen en büyük sonlu eleman sayılarına göre yapılmıştır. Eğilme momenti (M_n^A) için yüzde farkın en büyük değeri %0,36 (Şekil 4.10h) iken, burulma momenti (M_t^A) için ise yüzde farkın en büyük değeri %4,52'dir (Şekil 4.9a).

Ele alınan her bir sınır koşulu (ankastre-ankastre, ankastre-sabit ve ankastre-serbest) ve merkez açı değeri ($\theta_B = 45^\circ; 90^\circ; 180^\circ$ ve 270°) için Karışık SEY ve yer değiştirme türü SEY'nin yakınsama performansları doğal koordinat takımındaki analiz sonuçları üzerinden detaylı olarak aşağıdaki gibi sunulmuştur.

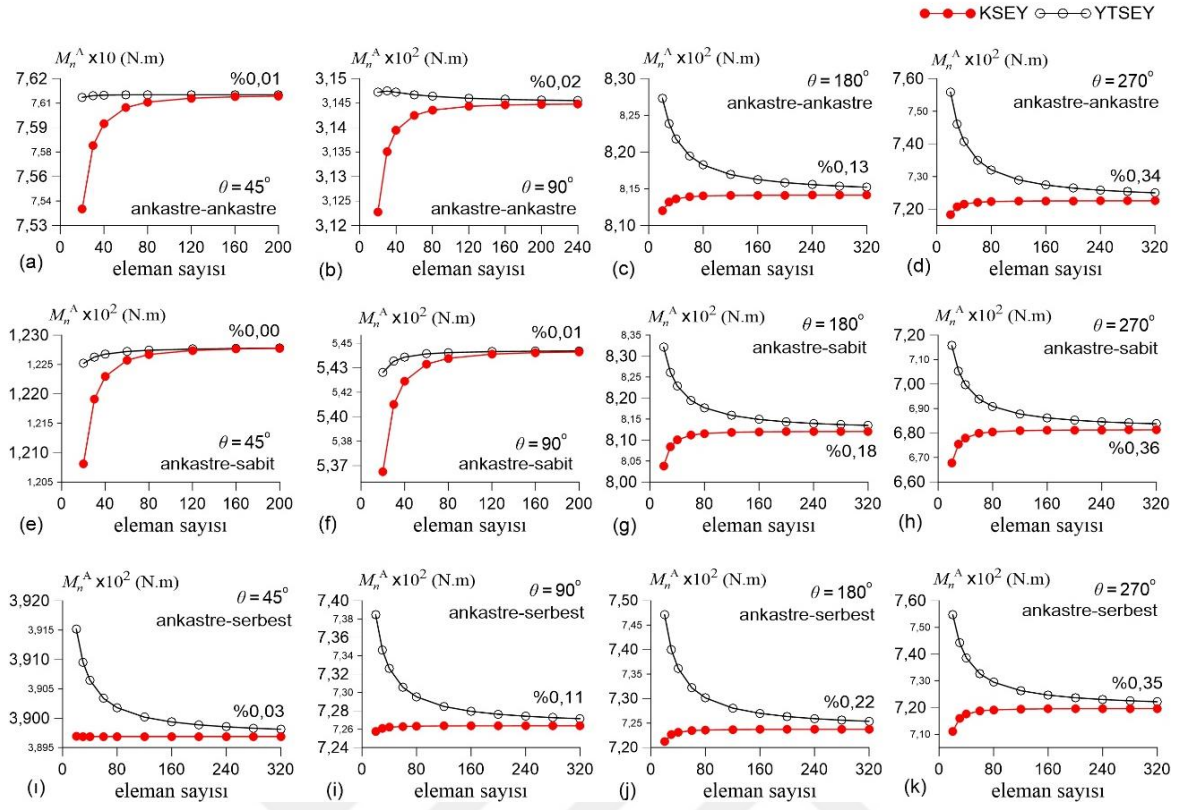
A noktasındaki burulma momenti (M_t^A) (Şekil 4.9 a-k): Ele alınan tüm sınır koşulları ve merkez açı değerleri için karışık SEY sonuçları yer değiştirme türü SEY analiz sonuçlarına göre oldukça hızlıdır.



Şekil 4.9 Dairesel kirişin A mesneti burulma momentine (M_t^A) ait yakınsama analizi.

A noktasındaki eğilme momenti (M_n^A):

- Ankastre-ankastre (Şekil 4.10 a-d) ve ankastre sabit (Şekil 4.10 e-h) sınır koşulu: Ele alınan $\theta = 45^\circ$ ve 90° merkez açı değerleri için yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemi, karışık sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeteri yakınsaklığı sağladığı gözlemlenmiştir. $\theta = 180^\circ$ ve 270° merkez açı değerleri için ise karışık sonlu eleman yöntemi yer değiştirme türü sonlu eleman yöntemine göre daha az sonlu eleman sayısı ile yeteri yakınsaklığı sağlamıştır.
- Ankastre-serbest sınır koşulu (Şekil 4.10 ı-k): Ele alınan tüm merkezi açı θ değerleri için karışık SEY sonuçları yer değiştirme türü SEY analiz sonuçlarına göre oldukça hızlıdır.



Şekil 4.10 Dairesel kirişin A mesneti eğilme momentine (M_n^A) ait yakınsama analizi.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Düşeyde düzgün yayılı yük etkisinde Winkler tipi elastik zemin oturan dairesel düzlem kirişlerin statik analiz davranışı hem yer değiştirme türü hem de karışık sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemektir. Eğrisel tipte-karışık sonlu eleman yöntemi Timoshenko çubuk kuramına bağlı iki düğüm noktasına sahip sonlu eleman üzerinden tanımlanmıştır. Elemanın her bir düğüm noktasında 12 adet serbestlik derecesi bulunmaktadır. Bunlardan üçü yer değiştirmeleri, üçü kesit dönmelerini, üçü kuvvetleri, ikisi eğilme momentini ve biri ise burulma momentini göstermektedir. Yer değiştirme türü-doğrusal sonlu eleman yöntemine ait sonuçlar SAP2000 programı üzerinden elde edilmiştir. Çubuk düzlemine dik düzgün yayılı yük etkisindeki elastik zemine oturan dairesel kirişin statik davranışı (yer değiştirmeler, kesit dönmeleri ve mesnet tepkileri) üzerinden hem karışık tipte-eğrisel eleman hem de yer değiştirme türü-doğrusal elemanın yakınsama performansları detaylı olarak tartışılmıştır. Yakınsama analizi farklı sınır koşulları ve merkez açısı değerleri için detaylı olarak incelenmiş ve bölüm 4'te sunulmuştur.

Karışık-tipte eğrisel sonlu eleman yöntemi, özellikle yer değiştirme türü-doğrusal sonlu eleman yöntemine göre avantajını tasarım aşamasında gerilmelerin hesabında gerekli olan eğrisel koordinatlardaki burulma M_t^A ve eğilme M_n^A momentlerinin daha az sayıda sonlu eleman ile elde etmesiyle göstermektedir. Daha az bilinmeyen sayısı özellikle zamana bağlı davranışın incelendiği problemlerde problem çözümüne ait sürenin kısılmasını da sağlamaktadır [60]. Analiz sonuçlarına göre, eğrisel-geometriye sahip uzay çubukların yapısal analiz davranışında karışık-tipte eğrisel sonlu elemanın kullanılması önerilmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] **Li, Z., Feng, D., Noori, M., Basu, D., & Altabey, W. A.** (2022). Dynamic response analysis of Euler–Bernoulli beam on spatially random transversely isotropic viscoelastic soil. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 236(5), 1037-1052. <https://doi.org/10.1177/14644207211067442>
- [2] **Xia, G.** (2022). Generalized foundation Timoshenko beam and its calculating methods. *Archive of Applied Mechanics*, 92(3), 1015-1036. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-02090-1>
- [3] **Kumar, S.** (2021). Free vibration analysis on axially graded beam resting on variable Pasternak foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1206(1), 012016. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1206/1/012016>
- [4] **Zare, M.** (2020). Free out-of-plane vibration of cracked curved beams on elastic foundation by estimating the stress intensity factor. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(14), 1238-1245. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1506068>
- [5] **Omurtag, M. H.** (2010). *Çubuk sonlu elemanlar* (1.bs.). Birsen Yayınevi.
- [6] **Computers and Structures, I.** (2011). CSI analysis reference manual for SAP2000. ETABS®, SAFE® and CSiBridge™.
- [7] **Hetenyi, M.** (1946). *Beams on Elastic Foundation*. University of Michigan Press.
- [8] **Wang, T. M., & Stephens, J. E.** (1977). Natural frequencies of Timoshenko beams on pasternak foundations. *Journal of Sound Vibration*, 51(2), 149-155. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(77\)80029-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(77)80029-1)

- [9] **Valsangkar, A. J., & Pradhanang, R.** (1988). Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 16(2), 217-225. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290160205>
- [10] **Celep, Z., Malaika, A., & Abu-Hussein, M.** (1989). Forced vibrations of a beam on a tensionless foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 128(2), 235-246. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(89\)90768-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(89)90768-2)
- [11] **Razaqpur, A. G., & Shah, K. R.** (1991). Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations. *International Journal of Solids and Structures*, 27(4), 435-454. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90133-Z](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90133-Z)
- [12] **Yokoyama, T.** (1991). Vibrations of timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 20(4), 355-370. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290200405>
- [13] **Franciosi, C., & Masi, A.** (1993). Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil. *Computers & Structures*, 47(3), 419-426. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90237-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90237-8)
- [14] **Naidu, N. R., & Rao, G. V.** (1995). Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation. *Computers & Structures*, 57(5), 941-943. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00090-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00090-4)
- [15] **De Rosa, M. A.** (1995). Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Computers & Structures*, 57(1), 151-156. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)00594-S](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00594-S)
- [16] **De Rosa, M. A., & Maurizi, M. J.** (1998). The Influence of Concentrated Masses and Pasternak Soil On The Free Vibrations of Euler Beams—Exact Solution. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4), 573-581. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1424>
- [17] **Wang, C. M., Lam, K. Y., & He, X. Q.** (1998). Exact Solutions for Timoshenko Beams on Elastic Foundations Using Green's Functions*. *Mechanics of Structures and Machines*, 26(1), 101-113. <https://doi.org/10.1080/08905459808945422>

- [18] **Venkateswara Rao G. & Neetha R.** (2002). Methodology to Evaluate First Transition Foundation Stiffness for Columns on Winkler Foundation. *Journal of Structural Engineering*, 128(7), 956-959. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2002\)128:7\(956\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:7(956))
- [19] **Chen, W. Q., Lü, C. F., & Bian, Z. G.** (2004). A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*, 28(10), 877-890. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2004.04.001>
- [20] **Lü, C.F., Lim, C.W., & Yao, W.A.** (2009). A New Analytic Symplectic Elasticity Approach for Beams Resting on Pasternak Elastic Foundations. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4(10), 1741-1754.
- [21] **Ma, X., Butterworth, J. W., & Clifton, G. C.** (2009). Static analysis of an infinite beam resting on a tensionless Pasternak foundation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(4), 697-703. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.03.003>
- [22] **Celep, Z., Güler, K., & Demir, F.** (2011). Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load. *Structural Engineering and Mechanics*, 37(1), 61.
- [23] **Nobili, A.** (2012). Variational Approach to Beams Resting on Two-Parameter Tensionless Elastic Foundations. *Journal of Applied Mechanics*, 79(2). <https://doi.org/10.1115/1.4005549>
- [24] **Nobili, A.** (2013). Superposition Principle for the Tensionless Contact of a Beam Resting on a Winkler or a Pasternak Foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(10), 1470-1478. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000555](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000555)
- [25] **Knops, R. J., & Villaggio, P.** (2012). On oblique impact of a rigid rod against a Winkler foundation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 24(4), 559-582. <https://doi.org/10.1007/s00161-011-0227-4>

- [26] **Cao, X., & Zhang, H. X.** (2013). Refined Theory of Transversely Isotropic Elastic Beam Posting inside Winklers Foundation. *Applied Mechanics and Materials*, 405-408, 3218-3221. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.405-408.3218>
- [27] **Li, X., Li, S. P., Shi, X. D., & Ding, M.** (2014). Interpolation-Element for Beam on Winkler Elastic Foundation. *Applied Mechanics and Materials*, 467, 354-360. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.467.354>
- [28] **Toscano Corrêa, R., Simões, F. M. F., & Pinto da Costa, A.** (2017). Moving loads on beams on Winkler foundations with passive frictional damping devices. *Engineering Structures*, 152, 211-225. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.09.023>
- [29] **Zhang, Y., & Liu, X.** (2019). Response of an infinite beam resting on the tensionless Winkler foundation subjected to an axial and a transverse concentrated loads. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 77, 103819. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103819>
- [30] **Erbaş, B., Kaplunov, J., & Elishakoff, I.** (2021). Asymptotic derivation of a refined equation for an elastic beam resting on a Winkler foundation. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 10812865211023884. <https://doi.org/10.1177/10812865211023885>
- [31] **Li, Z., Chen, B., Lin, B., Zhao, X., & Li, Y.** (2022). Analytical solutions of the forced vibration of Timoshenko micro/nano-beam under axial tensions supported on Winkler–Pasternak foundation. *The European Physical Journal Plus*, 137(1), 153. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02360-z>
- [32] **Kıral, E., & Ertepinar, A.** (1974). Studies on elastic rods subject to diverse external agencies–Part II–planar rods on an elastic foundation. *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, 7, 41-53.
- [33] **Wang, T.M., & Brannen, W.F.** (1982). Natural frequencies for out-of-plane vibrations of curved beams on elastic foundations. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2), 241-246.

- [34] **Dasgupta, S., & Sengupta, D.** (1988). Horizontally curved isoparametric beam element with or without elastic foundation including effect of shear deformation. *Computers & Structures*, 29(6), 967-973. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90322-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90322-7)
- [35] **Issa, M. S.** (1988). Natural frequencies of continuous curved beams on Winkler-type foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 127(2), 291-301. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(88\)90304-5](https://doi.org/10.1016/0022-460X(88)90304-5)
- [36] **Issa, M. S., Nasr, M. E., & Naiem, M. A.** (1990). Free vibrations of curved Timoshenko beams on Pasternak foundations. *International Journal of Solids and Structures*, 26(11), 1243-1252. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90059-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90059-5)
- [37] **Celep, Z.** (1990). In-plane vibrations of circular rings on a tensionless foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 143(3), 461-471. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90736-J](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90736-J)
- [38] **Haktair, V., & Kırıl, E.** (1993). Statical Analysis of Elastically and Continuously Supported Helicoidal Structures by the Transfer and Stiffness Matrix Methods. *Computers & Structures*, 49(4), 663-77
- [39] **Zubaroğlu, S.** (1994). *Elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar ve taşıma matrisi* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [40] **Kadioğlu, F.** (1994). *Doğru ve daire eksenli çubuklar* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [41] **Aköz, A. Y., & Kadioğlu, F.** (1996). The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation. *Computers & Structures*, 60(4), 643-651. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00418-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00418-1)
- [42] **Wu, X., & Parker, R. G.** (2006). Vibration of rings on a general elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 295(1), 194-213. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.007>

- [43] **Kim, N.-I., Fu, C. C., & Kim, M.-Y.** (2007). Dynamic stiffness matrix of non-symmetric thin-walled curved beam on Winkler and Pasternak type foundations. *Advances in Engineering Software*, 38(3), 158-171.
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2006.08.016>
- [44] **Çalım, F. F., & Akkurt, F. G.** (2011). Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation. *Mechanics Research Communications*, 38(2), 89-94.
<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.01.003>
- [45] **Çalım, F. F.** (2012). Forced vibration of curved beams on two-parameter elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*, 36(3), 964-973.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.066>
- [46] **Arıcı, M., Granata, M. F., & Margiotta, P.** (2013). Hamiltonian structural analysis of curved beams with or without generalized two-parameter foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 83(12), 1695-1714.
<https://doi.org/10.1007/s00419-013-0772-3>
- [47] **Arıcı, M., & Granata, M. F.** (2016). Unified theory for analysis of curved thin-walled girders with open and closed cross section through HSA method, *Engineering Structures*, 113, 299-314.
- [48] **Lee, J. K., & Jeong, S.** (2016). Flexural and torsional free vibrations of horizontally curved beams on Pasternak foundations. *Applied Mathematical Modelling*, 40(3), 2242-2256.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.024>
- [49] **Dinç, A.** (2016). *Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile statik analizi* (Yüksek lisans tezi). İskenderun Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay.
- [50] **Vatan Can, S.** (2019). *Dynamic stability analysis of a curved beam with suspended spring-mass systems*. Dokuz Eylül University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, İzmir.

- [51] **Vatan Can, S., Cankaya, P., Ozturk, H., & Sabuncu, M.** (2020). Vibration and dynamic stability analysis of curved beam with suspended spring–mass systems. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-15.
- [52] **Foyouzat, M. A., Abdoos, H., Khaloo, A. R., & Mofid, M.** (2022). In-plane vibration analysis of horizontally curved beams resting on visco-elastic foundation subjected to a moving mass. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 172, 109013.
- [53] **Winkler, E.** (1867). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkei*. Dominicus, Prag
- [54] **Kutlu, A.** (2007). *Keyfi Doğrultuda Ortotrop Pasternak Zeminine Oturan Mindlin Plaklarının Serbest Titreşimlerinin Karışık Sonlu Elemanlarla Analizi* (Yüksek lisans tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [55] **Omurtag, M. H., & Aköz, A. Y.** (1992). The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading. *Computers & Structures*, 43(2), 325-331.
- [56] **Ermis, M., Arıbas, U. N., Eratlı, N., & Omurtag, M. H.** (2017). Static and free vibration analysis of composite straight beams on the Pasternak foundation. In *10th International Conference on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements, Barcelona* (Vol. 12, pp. 113-122).
- [57] **Oden, J. T., & Reddy, J. N.** (2012). *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer Science & Business Media.
- [58] **Eratlı, N., Yilmaz, M., Darilmaz, K., & Omurtag, M. H.** (2016). Dynamic analysis of helicoidal bars with non-circular cross-sections via mixed FEM. *Structural engineering and mechanics: An international journal*, 57(2), 221-238.
- [59] **Ermis, M., & Omurtag, M. H.** (2017). Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, 131, 296-304.

- [60] **Aribas, U. N., Ermis, M., Kutlu, A., Eratli, N., & Omurtag, M. H.** (2022). Forced vibration analysis of composite-geometrically exact elliptical cone helices via mixed FEM. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29(10), 1456-1474.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1824048>

